

Research Paper

Optimal Placement of Piezoelectric Sensor/Actuator Patches on Sandwich Panels Considering Debonding Effects

Gh. Heydari¹, M. Kiani^{2*}, S. H. Portakdoost³ and M. Sayanjali⁴

1,2, 3. Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

4. Satellite Systems Research Institute (SRI), Iranian Space Research Center, Tehran, Iran

*kiani@sharif.edu

Halo orbits are important for the observation and study of space due to their specific characteristics, including the orbital position and the periodic motion. In this regard, the present paper has focused on optimal trajectory planning to transfer to halo orbits. To this aim, the homotopy approach has been adopted for optimal trajectory design. This approach has improved the convergence rate and insensitivity of the problem to initial guess. The designed trajectory transfers a spacecraft orbiting the Earth to a Halo orbit around Lagrangian point L1 of the Earth-moon restricted three-body system. The propulsion system has been assumed to be low thrust with constant specific impulse. The homotopy approach has a broad domain of applicability and methods in which the continuation method has been employed here. The optimally designed trajectory minimizes the fuel consumption via transforming the solution of the minimum energy problem utilizing the homotopy approach. This approach simplifies the solution to the complex problem of minimum fuel indeed.

Keywords: Halo orbit, Homotopy approach, Homotopy continuation method, Shooting method, Optimal trajectory design, Orbit transfer

1. M.Sc.

2. Assistant Professor (Corresponding Author)

3. Professor

4. PhD

مقاله علمی - پژوهشی

طراحی مسیر بهینه انتقال از مدار حول زمین به مدار هاله‌ای در سیستم زمین - ماه با رویکرد هموتویی

قاسم حیدری^۱، مریم کیانی^{۲*}، سید حسین پورتاکدوست^۳ و محمد سینجلی^۴

۱، ۲ و ۳- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۴- پژوهشکده سامانه‌های ماهواره، پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران

* kiani@sharif.edu

مدارهای هاله‌ای به واسطه ویژگی‌هایی همچون حرکت‌های تناوبی حول نقطه تعادلی برای رصد و مطالعه فضا اهمیت ویژه‌ای دارند. از این رو، در مقاله حاضر طراحی مسیر انتقال بهینه به مدار هاله‌ای مورد توجه قرار گرفته است. برای حل مسئله کنترل بهینه جهت بهینه‌سازی مسیر از رویکرد هموتویی در کنار روش پرتابی استفاده شده است. این روش باعث بهبود سرعت همگرایی و موجب رسیدن به حدس اولیه بهتری می‌شود. مسیر بهینه طراحی شده، فضاییابی در مدار حول زمین را به یک مدار هاله‌ای حول نقطه لاگرانژی $L1$ سیستم سه جسم زمین- ماه منتقل می‌کند. سیستم پیشران فضاییما از نوع تراست-کم و با ضربه ویژه ثابت در نظر گرفته شده است. رویکرد هموتویی دامنه گسترده‌ای دارد که از آن میان، روش ادامه هموتویی در این پژوهش مدنظر قرار گرفته است. هدف از مسیر طراحی شده، انتقال با کمینه مصرف سوخت است که به کمک رویکرد هموتویی از تغییر شکل حل مسئله کمینه مصرف انرژی به دست آمده است. در واقع رویکرد هموتویی سبب تسهیل حل مسئله دشوار کمینه مصرف سوخت شده است.

واژه‌های کلیدی: مدار هاله‌ای، رویکرد هموتویی، روش ادامه هموتویی، روش پرتابی، طراحی مسیر بهینه، انتقال مداری

علائم و اختصارات

r	اندازه بردار موقعیت		
R	بردار موقعیت		
S	تابع سوئیچ	H	تابع هموتویی
t	زمان	HC	روش ادامه هموتویی
T	اندازه تراست	M	
U	بردار ورودی کنترلی	I_{sp}	مقدار ضربه ویژه
u	متغیر کنترلی	L	تابع خطی
v	بردار سرعت	m	جرم
x	مؤلفه اول بردار موقعیت	N	تابع غیرخطی
y	مؤلفه دوم بردار موقعیت	p	بردار شبه حالت‌ها
z	مؤلفه سوم بردار موقعیت		
α	بردار جهت تراسترها		
\mathcal{H}	تابع همپلتونین		

۱. کارشناس ارشد

۲. استادیار (نویسنده مخاطب)

۳. استاد

۴. دکتری

ارائه می‌دهد [۴]. ترکیب روش ادامه^۸ با رویکرد هموتوبی، روش ادامه^۵ توپی نامیده شده و اولین بار توسط الوگور معرفی شد [۵]. مرجع [۶] در سال ۱۹۹۱ مقاله‌ای منتشر شد که در آن برای حل عددی کنترل و تحلیل دوشاخگی در حل مسئله‌ها از روش ادامه هموتوبی استفاده شده است. روش ادامه^۶ توپی با زبان برنامه نویسی Fortran و Python (در نسخه‌های جدید) توسط دودل توسعه داده شده است [۷].

مسئله سه جسم

در سال ۱۷۷۲ جوزف لویس لاگرانژ مقاله‌ای با عنوان «مسئله سه جسم» منتشر کرد. در مقاله لاگرانژ در مورد نقاط تعادلی در سیستم سه جسم محدود شده دایروی صحبت شده است. تاریخچه تحقیق برای مدارهای متناوب حول این نقطه‌ها به پوانکاره (۱۹۱۲-۱۸۴۵ میلادی) برمی‌گردد. به عنوان یک کاربرد، می‌توان از اولین پرتاب فضاپیما برای رسیدن به مدار هاله‌ای حول نقطه لاگرانژی L_1 از سیستم زمین-خورشید در سال ۱۹۷۸ یاد کرد. فضاپیمای ISEE-3 توانست پس از ۳ ماه به نقطه L_1 برسد [۸]. مرجع [۹] تاریخچه و کاربردهای این مدارها را به تفصیل مورد بررسی قرار داده است.

کنترل بهینه با پیشران تراست-کم

قبل از بررسی تاریخچه کنترل بهینه در این مسائل، نیاز است به استفاده از پیشران‌های تراست-کم توجه شود. امکان استفاده از پیشران تراست-کم در مقاله‌ای توسط استالینگر^۹ در سال ۱۹۵۴ بررسی شده است [۱۰]. چند سال بعد رودریگز از مقاله وی استفاده کرد و یک روش ساده برای تعیین بردار تراست در شبیه‌سازی با پیشران تراست-کم بیان کرد [۱۱].

سال ۱۹۶۰، کلی^{۱۱} توانست بهینه‌سازی برای یک مسیر فضایی را با روش سریع‌ترین کاهش^{۱۱} انجام دهد [۱۲]. پس از ورود موضوع بهینه‌سازی برای کمینه‌کردن اهداف متفاوت، گنلی^{۱۲} در سال ۱۹۶۸ موفق شد که مسئله کمینه انرژی را با دینامیک مسئله سه جسم ترکیب کند [۱۳]. کلور انتقال از یک مدار کم ارتفاع حول زمین به یک مدار حول ماه را با یک روش بهینه‌سازی ترکیبی برای کمینه‌سازی مصرف سوخت انجام داد [۱۴]. مسئله انتقال از یک مدار کم ارتفاع به مدار متناوبی مانند هاله‌ای با استفاده از پیشران تراست-کم که دارای ضربه^{۱۳} ویژه متغیر است به کمک روش‌های غیرمستقیم و ACT^{۱۳} انجام شده است [۱۵]. برای بهینه‌سازی مسیره‌های فضایی،

λ	پارامتر هموتوبی
μ	نسبت جرمی
Φ	ماتریس انتقال حالت
Ω	حرکت متوسط مداری دو جسم

مقدمه

طراحی مسیر بهینه انتقال وسیله در فضا سبب کاهش هزینه‌های مأموریت و در برخی موارد حتی باعث افزایش عمر عملیاتی مأموریت فضایی می‌شود. استفاده از روش‌های نوین در بهینه‌سازی می‌تواند بهبود سرعت حل مسئله و نزدیکی بیشتر به پاسخ بهینه مطلق را در پی داشته باشد. اگر یک فضاپیما با توجه به ظرفیت پرتابی که دارد بتواند بیشترین مقدار سوخت را با خود حمل کند، بدون شک داشتن مانورهای بهینه مصرف سوخت، باعث طول عمر بیشتر مأموریت و کنکاش بیشتر در فضا خواهد شد. برای رسیدن به این مانورهای بهینه می‌توان از کنترل بهینه استفاده کرد. روش‌های حل بسیاری برای مسائل کنترل بهینه وجود دارد. این روش‌ها را می‌توان از دیدگاه‌های متعدد تقسیم‌بندی کرد. از این رو، به‌طور کلی می‌توان آن‌ها را به سه دسته روش‌های حل مستقیم، غیرمستقیم و هیبریدی تقسیم نمود [۱]. که هر کدام با معایب و مزایایی همراه بوده و بسته به نیاز مسئله می‌توان آن‌ها را بکار گرفت. روشی که در این پروژه مدنظر است روش ادامه^۵ هموتوبی^۵ است که در ادامه توضیح داده می‌شود. این روش، یک روش عددی است که مفهوم خود را از رویکرد هموتوبی گرفته که به طور متداول برای حل دستگاه معادله‌های غیرخطی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه، ابتدا رویکرد هموتوبی معرفی شده و گستره کاربری آن مورد اشاره قرار گرفته است. سپس، مسئله دینامیک سه جسم و سایر مفروضات الگوی دینامیکی معرفی شده و پاره‌ای از مهم‌ترین پژوهش‌های انجام شده در هر سه زمینه اصلی مقاله حاضر یعنی رویکرد هموتوبی، مدل‌سازی دینامیک سه جسم و طراحی مسیر بهینه به اختصار مرور شده است.

رویکرد هموتوبی

این رویکرد مسئله سخت را با تغییر شکل دادن یک مسئله آسان، حل می‌کند. روش اغتشاشات هموتوبی^۶ روشی است که توسط هی^۷ [۲] از ترکیب روش اغتشاشات کلاسیک با رویکرد هموتوبی، به‌دست آمده است. این روش از تئوری اغتشاشات که در مرجع [۳] توسعه داده شده، استفاده کرده است. در سال ۱۹۹۲ میلادی، روش تحلیل هموتوبی توسط لیائو ارائه شد که نیاز به این پارامتر اغتشاشی را کم می‌کند و یک روش شبه‌تحلیلی برای حل مسائل

8. Continuation Method (CM)

9. Stuhlinger

10. Kelley

11. Steepest descent

12. Conley

13. Adjoint Control Transformation

5. Homotopy Continuation Method (HCM)

6. Homotopy Perturbation Method (HPM)

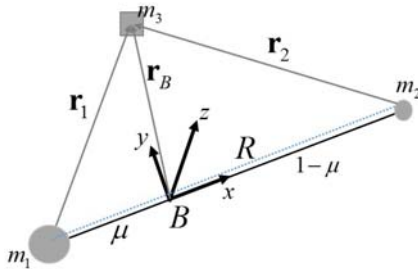
7. He

قرارگیری روی منیقولدهای پایدار می‌توان بدون مصرف سوخت به موقعیت هدف رسید، در این مسئله از منیقولدها برای رسیدن به نقطه نهایی استفاده شده است و به دنبال قرارگیری روی این منیقولدها هستیم.

ساختار مقاله حاضر در ادامه بدین صورت می‌باشد: در بخش نخست، معادلات حرکت در فضای سه جسم بررسی خواهد شد و پس از آن با بررسی رویکرد هموتوبی، ادغام این رویکرد با مسئله کنترل بهینه مورد توجه قرار گرفته است. سپس، الگوریتم حل مسئله با روش ادامه هموتوبی بیان و نتایج شبیه‌سازی ارائه و بررسی خواهد شد. در بخش نهایی نیز نتیجه حاصل از انجام پژوهش حاضر بیان می‌شود.

مسئله سه جسم محدود شده دایروی

منظور از مسئله سه جسم محدود شده دایروی، فضاییابی تحت گرانش همزمان دو جرم بزرگ مانند زمین و ماه است که این دو جرم نسبت به مرکز جرم مشترکشان مداری دایروی دارند. با توجه به اینکه جرم فضاییما نسبت به دو جرم بزرگ دیگر قابل صرف نظر است، سیستم را سه جسم محدود شده می‌نامند که در شکل (۱) ترسیم شده است.



شکل ۱- سیستم سه جسم و دستگاه مختصات مورد استفاده

دستگاه مختصات مورد استفاده برای توصیف حرکت فضاییما در این مسئله، در شکل (۱) ترسیم شده است. مبدأ دستگاه، منطبق بر مرکز جرم دو جسم اصلی است که با حرف B نمایش داده شده است. جهت محور x از جسم اول به سمت جسم دوم است. جهت محور z عمود به صفحه حرکت دوران جسم دوم نسبت به جسم اول است و جهت y یک دستگاه راست‌گرد را تکمیل خواهد کرد. معادلات حرکت در سه راستای دستگاه مختصات توصیف شده عبارتند از [۲۲]:

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x = -\frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \mu R) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - (1 - \mu)R) \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y = -\frac{\mu_1}{r_1^3}y - \frac{\mu_2}{r_2^3}y \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu_1}{r_1^3}z - \frac{\mu_2}{r_2^3}z \quad (3)$$

روش‌های گوناگونی وجود دارد. سینجلی در کار خود برای طراحی مسیر بهینه انتقال به مدار هاله‌ای در سیستم سه جسم محدود شده دایروی و چهار جسم روش‌های متفاوت را بررسی کرده است [۸].

بهینه‌سازی مسیرهای انتقال فضایی با رویکرد هموتوبی

واتسون^{۱۴} در پژوهشی [۱۶] توانست الگوریتم‌های هموتوبی با همگرایی سراسری^{۱۵} را در حل دستگاه معادلات غیرخطی معرفی کند. به طور کلی می‌توان گفت که واتسون و همکاران شروع‌کننده حل مسئله‌های کنترلی با رویکرد هموتوبی است. همچنین، وی در مقاله‌ای دیگر از روش هموتوبی برای کنترل بهینه ملاقات فضایی با یک هدف متحرک استفاده کرد [۱۷]. در حل مسئله‌های انتقال مداری با روش هموتوبی، هبرکرن^{۱۶} توانست [۱۸] با روش ادامه هموتوبی و به کمک نرم‌افزار HOMPACT، انتقال از یک مدار کم ارتفاع با زاویه شیب مداری به مدار زمین آهنگ را بهینه‌سازی کند. گائو [۱۹] برای مسئله کمینه مصرف سوخت از مسئله کمینه مصرف انرژی استفاده کرده است. این بهینه‌سازی برای طراحی مسیر ملاقات با یک سیارک انجام شده است.

چوپین [۲۰] از روش ادامه هموتوبی برای مأموریت‌های انتقال از یک مدار هاله‌ای به یک مدار هاله‌ای دیگر و همچنین برای مدارهای لیپانوف استفاده کرده است. چی [۲۱] توانست برای پیشران‌ها با ضربه ویژه متغیر مسیر بهینه‌ای را از زمین به سمت مریخ با روش هموتوبی انجام دهد. در مرجع [۲۲] برای نشستن بر روی یک سیارک از رویکرد هموتوبی برای بهینه‌سازی مصرف سوخت استفاده شده است. همچنین، در مرجع [۲۳] تلاش شده از همین رویکرد و برای کنترل بهینه به منظور کاهش مصرف سوخت جهت انتقال مدار NRHO به مدار حول ماه استفاده کرد. مزیت روش ادامه توبی نسبت به روش‌های غیرمستقیم و مستقیم، پوشش دو مشکل عمده این روش‌هاست که شامل کندی سرعت همگرایی و حساسیت نسبت به حدس اولیه می‌باشد.

مسئله پیش‌رو، مسئله انتقال بهینه از مداری حول زمین به مدار هاله‌ای در سیستم سه جسم محدود شده دایروی زمین- ماه به کمک رویکرد هموتوبی است. نوآوری پژوهش حاضر، استفاده از رویکرد هموتوبی در حل مسئله کنترل بهینه برای انتقال مداری توصیف شده است. هدف از حل این مسئله کنترل بهینه نیز رسیدن به کمترین مصرف سوخت در این انتقال است. از آنجا که با

14. Watson
15. Global Convergence
16. Haberkorn

که در این معادلات داریم:

$$\mathbf{r}_1 = (x + \mu R)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_2 = (x - (1 - \mu)R)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

با توجه به فاصله بسیار زیاد اجسام از یکدیگر در موقع حل و مقاردهی این معادله‌ها، تمامی اندازه‌ها برحسب فاصله دو جسم اصلی^{۱۷} و مجموع دو جرم اصلی^{۱۸} بی‌بعد می‌شوند. همچنین، زمان به کسر حرکت متوسط مداری^{۱۹} دو جسم اصلی^{۲۰} بی‌بعد خواهد شد. این بی‌بعدسازی زمان به خاطر این است که مقدار سرعت زاویه‌ای کل سیستم حول نقطه $(\Omega)B$ برابر با یک شود. بدین ترتیب، شکل بی‌بعد معادلات دینامیک فوق عبارت است از:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{(1-\mu)}{r_1^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x - 1 + \mu) \quad (7)$$

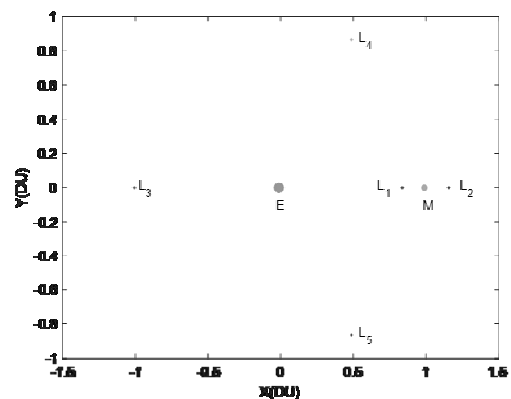
$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{(1-\mu)}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y \quad (8)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3}z - \frac{\mu}{r_2^3}z \quad (9)$$

در این روابط، r_1 اندازه بردار \mathbf{r}_1 و r_2 اندازه بردار \mathbf{r}_2 است. x ، y و z فاصله‌های فضایی از نقطه B است که به ترتیب در سه جهت \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} از دستگاه مختصات معرفی شده در سیستم شکل (۱) است. شایان ذکر است که از اثر اغتشاشات در مدل‌سازی دینامیک انتقالی فضاییما در این مسئله صرف‌نظر شده است.

نقاط لاگرانژی و منیفلدها

در هر سیستم سه جسم، پنج نقطه تعادلی وجود دارد که به ازای برابر قرار دادن سرعت و شتاب در معادلات حرکت با صفر به‌دست می‌آیند. سه نقطه هم‌راستا توسط اوایلر و سپس دو نقطه مثلثی توسط لاگرانژ محاسبه شد، اما همگی به نقاط لاگرانژی معروف شده‌اند. در شکل (۲)، این نقاط برای سیستم سه جسم محدود شده با دو جرم اصلی زمین- ماه مشخص شده‌اند.



شکل ۲- نقاط لاگرانژی در سیستم زمین- ماه

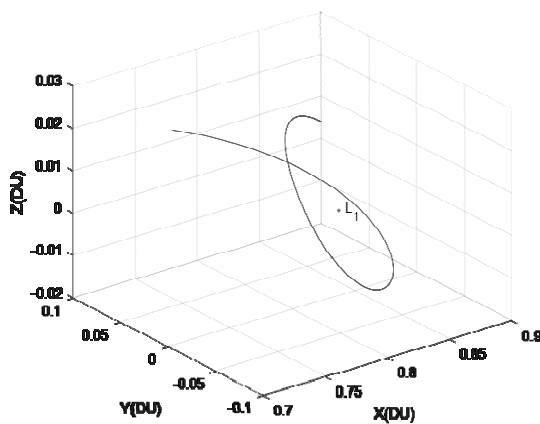
با توجه به مقادیر اولیه بردارهای موقعیت و سرعت، فضاییما می‌تواند در مدارهای تناوبی یا شبه‌تناوبی حول این نقاط قرار گیرد. یکی از مدارهای متناوب پرکاربرد، مدار هاله‌ای است که یک مدار تناوبی سه بعدی با فرکانس یکسان در داخل صفحه حرکت دو جسم اصلی و خارج از صفحه است [۲۴]. مدارهای لیپانوف و لیسازو نیز از جمله سایر مدارهای حول این نقاط هستند. مدار لیپانوف، مدارهای تناوبی دوبعدی هستند که در صفحه حرکت اجسام اولیه شکل می‌گیرند، در حالی که مدارهای لیسازو مدارهای شبه‌تناوبی سه‌بعدی هستند که فرکانس حرکت در داخل صفحه و خارج صفحه برابر ندارند. برای به‌دست آوردن این مدارها نیاز است که از روش‌های تحلیلی حل معادلات تقریبی یا جستجوی شبکه‌ای استفاده کرد تا طی یک فرآیند تصحیح دیفرانسیلی یا پرتابی مقدار اولیه مناسب حاصل شود.

در صورت حل معادلات در راستای بردار ویژه‌های ماتریس مونودرومی^{۲۱} که حاصل از حل معادلات خطی شده سیستم سه جسم محدود دایروی که در آن متغیرهای حالت با ماتریس انتقال حالت جایگزین شده‌اند و در طی یک پرپود مداری است.

مسیر حاصل از شبیه‌سازی با یک حدس اولیه به صورت شکل (۳) خواهد بود. علت بسته نشدن مدار این است که مقدار اولیه دقیق محاسبه نشده است. برای بسته شدن مدار باید از روش پرتابه یا تصحیح دیفرانسیلی استفاده نمود در جدول (۱) مقدار اولیه‌های اصلاح شده به کمک روش تصحیح دیفرانسیلی نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود این مدار متناوب حول نقطه لاگرانژی L_1 سیستم زمین- ماه محاسبه شده است. دقت شود که در این شکل ابعاد بی‌بعد شده است.

این مدار از سه نمای مختلف در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۳- مسیر حاصل از حل با شرط اولیه حدسی

17. Distance Unit (DU)
18. Mass Unit (MU)
19. Mean Motion
20. Time Unit (TU)

21. Monodromy Matrix

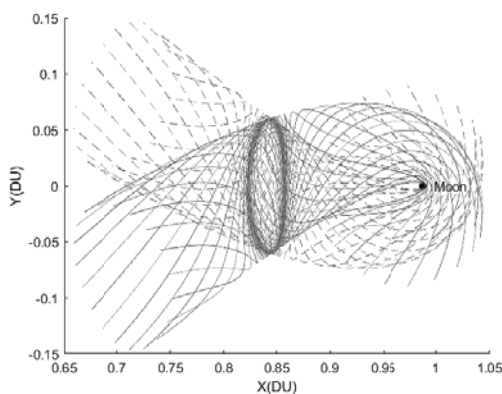
جدول ۱- مشخصات و مقادیرهای اولیه مدار هاله‌ای

پارامتر	مقدار	واحد
x	۰.۸۲۳۳۸۵۱۸۲۰۶۷۴۶۷	DU
y	۰	DU
z	۰.۰۲۲۲۷۷۵۵۶۲۷۳۲	DU
v_x	۰	DU/TU
v_y	۰.۱۳۴۱۸۴۱۷۰۲۶۲۴۳۷	DU/TU
v_z	۰	DU/TU
پریود مدار	۲.۷۶۳۰۱	TU

ماتریس انتقال حالت متناظر با آن نقطه منجر به تولید منیقولدهای پایدار و ناپایدار می‌شود. معیار پایداری و ناپایداری منیقولدها به این صورت است که با حل معادلات در راستای بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه کوچکتر از مقدار واحد، منیقولد پایدار و در راستای بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه بزرگتر از مقدار واحد، منیقولد ناپایدار به دست می‌آید.

$$X_S(U) = X_H \pm dY_S(U) \quad (10)$$

که در رابطه فوق، $X_S(U)$ بیان‌گر حالت‌های پایدار (ناپایدار) سیستم که شامل موقعیت و سرعت فضایی است، می‌باشد. X_H معرف حالت‌های سیستم بر روی مدار هاله‌ای است و $Y_S(U)$ بردار ویژه متناظر با حالت‌های سیستم برای حالت پایدار (ناپایدار) است. d یک ضریب عددی است که به عنوان نمونه برای سیستم زمین- خورشید ۲۰۰ کیلومتر در نظر گرفته می‌شود [۱]. در شکل (۶)، منیقولدهای پایدار و ناپایدار مشخص شده است.

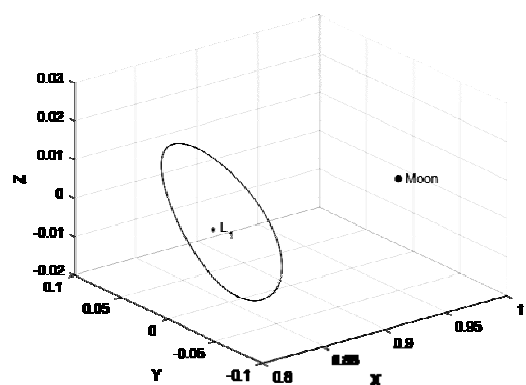


شکل ۶- منیقولدهای پایدار (خط تیره) و ناپایدار (خط چین)

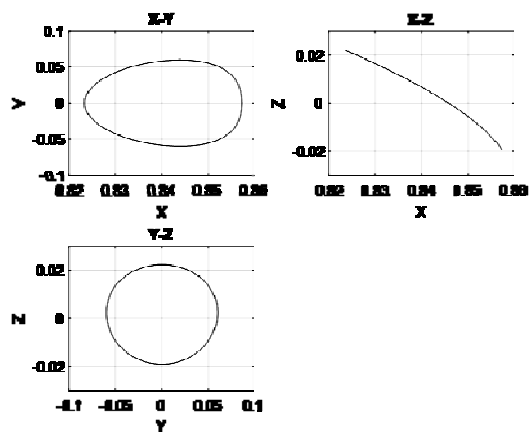
در این پژوهش هدف این است که در مسیر طراحی شده، از این منیقولدها بهره گرفته شود. به این صورت که با یک انتخاب منیقولد می‌توان جهت رسیدن به مدار نهایی با قرار گرفتن روی این مسیر و با مصرف سوخت کمتر به مدار مورد نظر رسید. فقط نیاز خواهد بود که به درستی به نقطه مورد نظر روی منیقولد تزریق شود. به همین منظور انتخاب منیقولد مناسب برای مأموریت‌های متفاوت، حائز اهمیت است.

سیستم پیشرانه

در طراحی مسیر انتقال باید در مورد سیستم پیشرانش تصمیم‌گیری شود. به صورت کلی پیشران‌ها به دو دسته پیشران‌های ضربه‌ای و پیوسته، دسته‌بندی می‌شوند. در سیستم‌های متداول، غالباً پیشران‌های ضربه‌ای مدنظر است چرا که تکنولوژی آن قابل دسترس‌تر است. پیشران‌های پیوسته، نیروی تراست متغیر تولید می‌کنند که شامل



شکل ۴- مدار هاله‌ای با شرط اولیه حاصل از تصحیح حول نقطه L_1



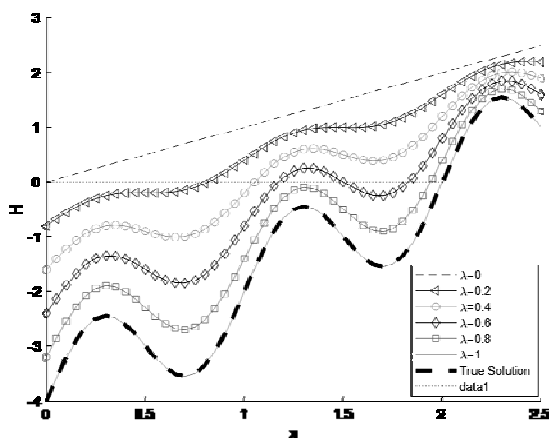
شکل ۵- مدار هاله‌ای از سه جهت مختلف

با توجه به نسبت جرمی دو جسم اصلی، اندازه و راستای اغتشاش وارد شده به مدار هاله‌ای، فضاییما در مسیرهای دیگری قرار می‌گیرد که یا از نقطه تعادلی دور می‌شود و یا به آن نزدیک شود. اگر به سمت مدار هاله‌ای حرکت کند یعنی در روی منیقولد پایدار قرار دارد و اگر از این نقطه دور شود، فضاییما بر روی منیقولد ناپایدار حرکت خواهد کرد. با توجه به معادله (۱۰)، در واقع تحریک هر نقطه از روی مدار هاله‌ای در راستای بردارهای ویژه مربوط به

تغییر پارامتر هموتویی در معادله (۱۱) است به طوری که دچار واگرایی در حل مسئله نشود. از روش پارامتر طبیعی در بخش بعدی برای حل مسئله کنترل بهینه استفاده خواهد شد. این روش، پارامتر هموتویی را به صورت گسسته تغییر می‌دهد به گونه‌ای که این تغییرات منجر به حرکت از مسئله آسان به سمت مسئله سخت شود. روش ادامه تویی برای انواع مختلف معادلات جبری، معادله‌های دیفرانسیلی و معادله‌های مشتق جزئی کاربرد دارد. در ادامه به عنوان نمونه، یک معادله جبری از رویکرد هموتویی حل می‌شود تا مفهوم عملیاتی این رویکرد را شفاف‌تر نشان دهد. هدف، محاسبه ریشه‌های تابع غیرخطی دشوار زیر است:

$$f(x) = 2x - 4 + \sin(2\pi x) \quad (12)$$

بدین منظور از تغییر شکل تابع خطی $f_0(x) = x$ به روش پارامتر طبیعی استفاده می‌شود. همان طور که بیان شد، باید مقدار پارامتر هموتویی تغییر کند و در هر گام جواب به دست آمده به عنوان حدس اولیه گام بعدی قرار گیرد. در شکل (۸) این گام‌ها مشاهده می‌شود. در این شکل، محور افقی ورودی سیستم (x) است و در محور عمودی جواب تابع هموتویی برای هر حالت بیان شده است. دقت شود در حالتی که پارامتر هموتویی برابر با $0/6$ است، احتمال دارد حل دچار واگرایی شود. علت این اتفاق هم وجود چندین ریشه برای حل گام بعدی است که با انتخاب نادرست، احتمال واگرایی در سیستم را شدت می‌بخشد. در این مسئله چون تابع در آن گام می‌توانسته است با هر حدس اولیه حل شود لذا دچار واگرایی نشده است. در مواقعی که مسئله دچار واگرایی شود، باید از روش‌های دیگر مانند PC یا PL استفاده نمود. در مسئله مورد بحث در مقاله حاضر نیز این مشکل در پیاده‌سازی روش هموتویی بروز کرد که با کاهش طول گام پارامتر هموتویی برطرف شد.



شکل ۸- نمودار حل مسئله نمونه و گام‌های مختلف آن در روش ادامه هموتویی

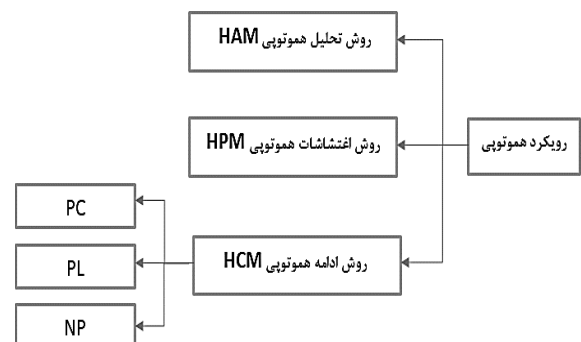
پیشران الکتریکی، هسته‌ای، مغناطیسی و غیره می‌شوند. پیشران پیوسته که از آن با عنوان پیشران تراس-کم یاد می‌شود، دارای دو نوع است که یکی ضربه ویژه متغیر دارد و دیگری ضربه ویژه ثابت دارد. در این پژوهش سیستم پیشران تراس-کم با ضربه ویژه ثابت در نظر گرفته می‌شود. این نوع پیشران از نوع تکنولوژی‌های آینده محسوب می‌شود که نمونه آزمایشگاهی آن موتور مگنتوپلاسماست.

رویکرد هموتویی

هموتویی از شاخه توپولوژی در ریاضیات گرفته شده است. به طور کلی روش کار هموتویی، حل یک مسئله دشوار با کمک یک مسئله آسان است که مسئله آسان در فضای هموتوپ مسئله دشوار قرار دارد. در توپولوژی، دو تابع پیوسته از یک فضای توپولوژی به دیگری را هموتویی گویند (کلمه هموتویی ریشه در یک واژه یونانی به معنای مکان مشابه دارد). اگر یکی از آن توابع را بتوان به طور پیوسته به دیگری تغییر شکل داد، چنین تغییر شکلی را هموتویی بین دو تابع گویند. به بیان ریاضی، این مفهوم به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۴]:

$$H(x, q) = [1 - \lambda] L(x) + \lambda N(x) = 0 \quad (11)$$

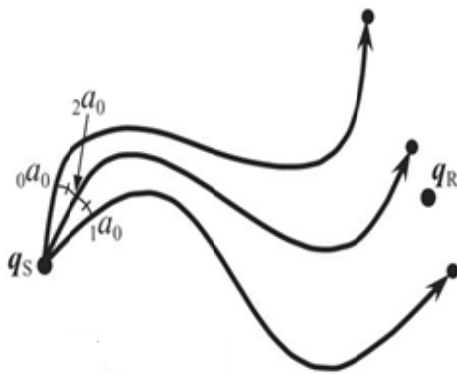
در این رابطه λ پارامتر هموتویی خوانده می‌شود که بین صفر و یک تغییر می‌کند. در لحظه‌ای که صفر است مسئله آسان L حاصل می‌شود و وقتی به سمت یک حرکت می‌کند تابع هموتویی به سمت مسئله دشوار سوق داده می‌شود. این رویکرد را به سه بخش می‌توان تقسیم کرد که در شکل (۷) نشان داده شده اند.



شکل ۷- دسته‌بندی روش‌های هموتویی

روش ادامه تویی که از ترکیب تئوری ادامه و رویکرد هموتویی حاصل شده است، به چند روش اجرا می‌شود که شامل روش پیش‌بینی- تصحیح^{۲۲} (PC)، روش تقریب تکه‌ای خطی^{۲۳} (PL) و روش پارامتر طبیعی^{۲۴} (NP) می‌شود. سیاست کلی هر سه روش،

22. Predict-correct
23. Piecewise Linear
24. Natural Parameter



شکل ۹- تصویر مفهومی روش پرتابه

از روش پرتابه برای به دست آوردن مقدار اولیه در حل مسئله در هر گام استفاده شده است و وجود رویکرد هموتوبی تسهیل در یافتن مقدار اولیه حل مسئله دشوار می‌باشد. در مسئله مدنظر مقاله حاضر، در کنار معادله‌های ذکر شده باید دینامیک ماتریس انتقال حالت که به صورت زیر است، نیز حل شود. اگر بردار حالت و شبه‌حالت، هر کدام n بعدی باشد آنگاه در هر لحظه از شبیه‌سازی $(2n + 2n)^2$ معادله باید حل شود.

در روش پرتابه برای تصحیح مقدار اولیه حدس زده شده باید از ماتریس انتقال حالت استفاده شود. معادله دینامیکی این ماتریس در ادامه نشان داده شده است.

$$\dot{\phi}(t_i, t) = A \phi(t_i, t) \quad (18)$$

این ماتریس بیانی از نسبت حالت هر زمانی به حالت اولیه

سیستم است، یعنی

$$\phi(t_i, t) = \frac{\partial y(t)}{\partial y(t_i)} \quad (19)$$

که در آن y دربرگیرنده هر دو متغیر حالت و شبه‌حالت است. همچنین،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (20)$$

برای انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیلی از روش عددی رانج-کوتا مرتبه ۷ استفاده شده است که دقت حل بالایی دارد.

صحه‌گذاری روش NP

برای اطمینان از حل صحیح روش موردنظر یعنی روش پارامتر طبیعی، نیاز است که یک مسئله نمونه در حوزه کنترل بهینه حل شود. برای این منظور، مثال حل شده در فصل پنجم از مرجع [۲۵] انتخاب شده است که هدف آن کمینه‌کردن مصرف سوخت می‌باشد. معادله دینامیک سیستم در این مثال به صورت زیر بیان شده است:

$$\dot{x} = -x + U \quad (21)$$

مسئله کنترل بهینه

همان‌طور که پیش از این در مقدمه ذکر شد، مسئله موردنظر طراحی یک مسیر بهینه از مدار حول زمین به یک مدار هاله‌ای می‌باشد. مسیر بهینه با توجه به ورودی‌های بهینه کنترلی شکل می‌گیرد. از روابط کنترل بهینه، برای کمینه یا بیشینه‌سازی یک تابع هزینه استفاده می‌شود [۲۵]. تابع هزینه J که در رابطه (۱۳) نشان داده شده برای بازه زمانی t_0 تا t_f است.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(x, U, t) dt \quad (13)$$

فرض شود که معادله‌های دینامیکی به صورت رابطه (۱۴) بیان شود. در این معادله‌ها پارامتر x بیان‌کننده بردار حالت سیستم و U بردار ورودی کنترلی است.

$$\dot{x} = a(x, U, t) \quad (14)$$

تابع همیلتونین عبارت است از:

$$\mathcal{H} = g(x, U, t) + p * a(x, U, t) \quad (15)$$

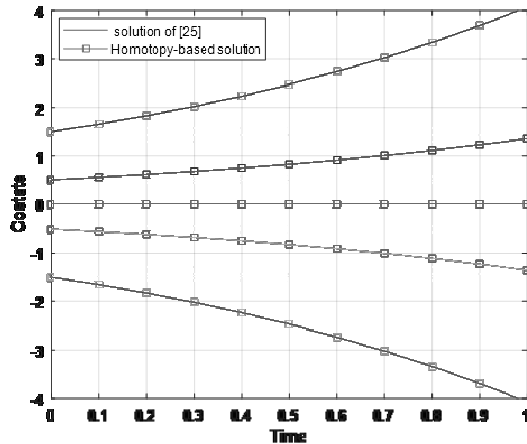
که در این معادله، p نشان‌دهنده شبه‌حالت‌های سیستم است و در معادله دینامیک حالت ضرب می‌شود. با مشتق‌گیری از تابع همیلتونین نسبت به پارامتر کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن، قانون کنترلی بهینه به دست می‌آید. همچنین، با مشتق‌گیری از تابع همیلتونین نسبت به x معادله‌های دینامیکی شبه‌حالت‌های سیستم محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U} = 0 \quad (16)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (17)$$

مسیر بهینه از حل همزمان سه معادله (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) به دست می‌آید. حل این دستگاه معادله نیاز به مقدار اولیه و نهایی برای حالت‌های سیستم و شبه‌حالت دارد. در واقع، مسئله باید با روش‌های مربوط به حل مسئله‌های دو مقدار مرزی حل شود. روش مورد استفاده در این پژوهش، روش پرتابی است که با حدس مقدار اولیه برای معادله‌های \dot{x} و \dot{p} مسیر مورد نظر به دست خواهد آمد. علت استفاده از روش پرتابه دقت بالا و سرعت حل این روش است [۲۴]. مفهوم روش پرتابه این است که ابتدا با حدس یک مقدار اولیه برای حل، مسئله تبدیل به یک مسئله مقدار اولیه می‌شود که می‌توان معادله‌ها را با روش‌های عددی مانند رانج-کوتا حل کرد. در ادامه، نقطه نهایی این حل با نقطه نهایی که باید به آن برسد، مقایسه می‌شود. در صورتی که به جواب نهایی موردنظر نرسیده باشد باید با تصحیح مقدار اولیه، دوباره همین روند تکرار شود تا با یک تفرانس مناسب، جواب همگرا شده باشد [۲۵].

برای دیگر مقدار شبه حالت‌ها این فرآیند تکرار می‌شود که در نهایت به شکل (۱۰) منتج شده است. در این نمودار دو منحنی نامی (از مرجع [۲۷]) و به‌دست آمده از روش هموتویی بر هم منطبق شده اند، لذا می‌توان نتیجه گرفت که روش مورد نظر درست عمل کرده است.



شکل ۱۱- قیاس مسیره‌های بهینه برای شبه‌حالت‌های اولیه مختلف (حل با روش هموتویی و حل براساس مرجع [۲۷])

تحلیل و شبیه‌سازی

در این بخش به کمک روش ادامه هموتویی، مسئله انتقال به مدار هاله‌ای زمین- ماه بررسی و مسیر بهینه طراحی شده است. روابط کنترل بهینه ذکر شده در بخش‌های قبل به همراه دینامیک مسئله سه جسم با پیشران تراست- کم با روش ادامه تویی ترکیب شده است. در ادامه نتایج شبیه‌سازی ارائه خواهد شد.

دینامیک انتقال به مدار هاله‌ای

روابط حرکت یک فضاپیما در سیستم سه جسم محدود شده دایروی در حضور نیروی پیشران و دینامیک آن در ادامه بیان می‌شود. پیشران مورد نظر از نوع تراست- کم است و نیروی پیشران (تراست) آن بین صفر و مقدار بیشینه (T_{max}) تغییر می‌کند و ضربه ویژه ثابت دارد. نیروی تراست توسط ضریب u ($u \in [0,1]$) کنترل می‌شود. این مقدار وقتی در تراست بیشینه ضرب شود مقدار تراست در بازه بین صفر تا T_{max} به‌دست خواهد آمد.

بردار یکه تراست با α مشخص شده است. معادله‌های دینامیکی بیان شده دارای هفت متغیر حالت است که شامل بردار موقعیت (r)، بردار سرعت (v) و جرم سوخت (m) می‌شود، یعنی

$$X = \begin{bmatrix} r \\ v \\ m \end{bmatrix}$$

تابع هزینه نیز به صورت زیر مشخص شده است و چون علامت پارامتر کنترلی اهمیت دارد، در قدر مطلق قرار داده شده است.

$$J = \int_0^{t_f} |U| dt \quad (22)$$

با توجه به رابطه (۲۱) و (۲۲) و پس از نوشتن تابع همیتونین، رابطه دینامیکی شبه حالت و قانون کنترلی برای این سیستم به‌دست می‌آید.

$$\dot{p} = p$$

$$U = \begin{cases} +1 & p < -1 \\ 0 & -1 \leq p \leq +1 \\ -1 & p > +1 \end{cases}$$

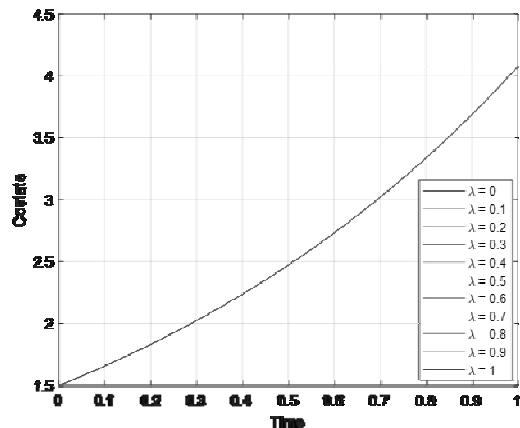
با توجه به این قانون کنترلی می‌توان برای هر مقدار اولیه شبه حالت مسیر بهینه به‌دست آورد، که در اینجا چون صرفاً صحنه‌گذاری روش مدنظر است، مسیر بهینه برای شبه حالت‌های متفاوت رسم شده است. نتایج این مسئله که در مرجع [۲۷] نیز آورده شده با خروجی حاصل از روش پیشنهادی این مقاله قیاس می‌گردد. بدین منظور، برای کار با روش NP، تابع هزینه به صورت رابطه (۲۳) نوشته می‌شود که در آن از پارامتر هموتویی λ استفاده شده است.

$$J = \int_0^{t_f} \left(\frac{1}{2} (1 - \lambda) U^2 + \lambda |U| \right) dt \quad (23)$$

با استفاده از این تابع هزینه و پس از نوشتن تابع همیتونین برای آن، قانون کنترلی به شکل رابطه (۲۴) در می‌آید.

$$u = \begin{cases} +1 & p \leq -1 \\ -\left(\frac{p+\lambda}{1-\lambda}\right) & -1 < p < -\lambda \\ 0 & -\lambda < p < \lambda \\ -\left(\frac{p+\lambda}{1-\lambda}\right) & \lambda < p < 1 \\ -1 & p \geq 1 \end{cases} \quad (24)$$

دقت شود که در این رابطه، ارتباط بین λ و p در فاصله منفی یک تا یک برای شبه حالت حائز اهمیت است. در شکل (۹) مشاهده می‌شود که برای هر گام هموتویی مسئله حل شده است.



شکل ۱۱- نمودار مسیر بهینه برای شبه‌حالت اولیه ۵.۱ با روش NP

شده است که به عنوان شرایط نهایی حالت‌های سیستم در نظر گرفته شده است.

جدول ۳- مقدار حالت‌های اولیه سیستم

پارامتر	مقدار	واحد
x	-۷۴۹۱.۴۸	km
y	-۶۱۶۳.۳۴	km
z	۰	km
v_x	۸.۹۱۸۸	km/sec
v_y	-۴.۰۸۱۷	km/sec
v_z	۰	km/sec
m	۱۵۰۰	kg

جدول ۴- مقدار نهایی بردار موقعیت و سرعت مسیر

پارامتر	مقدار	واحد
x	۰.۸۲۲۶۱۴۳۰۳۸۷۵	DU
y	-۰.۰۰۹۹۶۳۱۷۴۲۷	DU
z	-۰.۰۰۲۰۹۳۲۱۷۱۳۳	DU
v_x	۰.۱۰۵۷۳۴۶۴۷۱۵۳	DU/TU
v_y	-۰.۰۰۸۳۶۱۸۲۸۹۴	DU/TU
v_z	-۱.۲۷۵۵۷۳۹۴۰۴	DU/TU

در جدول (۵) مشخصات فیزیکی مسئله سه جسم محدود شده نشان داده شده است. در این جدول علاوه بر مقدارهای مورد نیاز برای بی‌بعد کردن، مقدار پارامتر بی‌بعد شده جرم هم مشاهده می‌شود. از این پارامتر برای مشخص کردن فواصل بی‌بعد شده جرم‌ها نسبت به مرکز جرم استفاده می‌شود.

جدول ۵- مشخصات سیستم زمین- ماه

ثابت‌های فیزیکی	مقدار	واحد
DU	۳۸۴۴۰۵	km
TU	۳۷۵۶۷۶.۹۶۷	sec
μ	۰.۰۱۲۱۵۰۶۶۸۳	

با توجه به اینکه حل مسئله کمینه مصرف سوخت دشوار است، برای حل آن از رویکرد هموتروپی باید تابع هزینه برای بازه زمانی بین صفر تا زمان نهایی، به گونه‌ای تعریف شود که شامل مسئله آسان کمینه مصرف انرژی هم بشود. مسئله کمینه مصرف سوخت به دلیل برخورد با حالت کنترل بنگ- بنگ دشوار است. مسئله کمینه انرژی این گونه نیست و حل آن نسبت به مسئله کمینه مصرف سوخت آسان‌تر است.

$$J = \frac{T_{max}}{c} \int_0^{t_f} (u - \lambda u(1 - u)) dt \quad (29)$$

بنابراین، معادلات دینامیک سیستم عبارت است از [۲۸]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ g(\mathbf{r}) + h(\mathbf{v}) + uT_{max}\mathbf{a}/m \\ -uT_{max}/c \end{bmatrix} \quad (25)$$

در رابطه (۲۵) سرعت خروجی گاز از نازل موتور با c نشان داده می‌شود که با ضربه ویژه و شتاب گرانشی در سطح دریا رابطه مستقیم دارد [۲۸]:

$$c = I_{sp}g_0 \quad (26)$$

مشخصات پيشران مورد استفاده در این پژوهش در جدول (۲) آورده شده است.

جدول ۲- مشخصات پيشران

پارامتر	واحد	مقدار
I_{sp}	ثانیه	۳۰۰۰
T_{max}	نیوتن	۱۰

تابع $g(\cdot)$ مربوط به ترم‌های موقعیت و تابع $h(\cdot)$ مربوط به ترم‌های سرعت است که به تفصیل در زیر آورده شده است.

$$g(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3} \\ y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\ -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$h(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2v_y \\ -2v_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

ترم‌های r_1 و r_2 به ترتیب فاصله فضاپیما نسبت به دو جرم M_1 و M_2 است.

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}$$

در ادامه روابط کنترل بهینه برای مسئله بررسی خواهد شد.

قبل از به‌دست آوردن معادله‌های شبه حالت و رابطه ورودی کنترلی، شرایط مرزی مسئله بررسی می‌شود. شرایط اولیه مسئله برای همه حالت‌ها وجود دارد ولی برای شرایط نهایی، مقدار سوخت باقی مانده مشخص نمی‌باشد. در نتیجه شرایط مرزی سیستم عبارت است از:

$$r(t_0) = r_0 \quad v(t_0) = v_0 \quad m(t_0) = m_0$$

$$r(t_f) = r_f \quad v(t_f) = v_f \quad m(t_f) = free$$

بردار موقعیت و سرعت در مدار اولیه حول زمین و جرم سوخت در جدول (۳) مشخص شده است. این ارتفاع مداری یک مدار MEO^{25} دایروی است.

در جدول (۴) مقدار انتهای بردار موقعیت و سرعت مسیر مشخص

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{T_{max}}{c}(S - \lambda + \lambda u) = 0 \quad (38)$$

در این رابطه تنها عبارت $S - \lambda$ است که علامت آن تغییر می‌کند و مابقی ترمها مثبت هستند. تابع S که در تابع همیلتونین نشان داده شده، تابع سوئیچ مأموریت است که به صورت زیر می‌باشد:

$$S = -\frac{|p_v|c}{m} - p_m + 1 \quad (39)$$

این تابع براساس تابع سوئیچ در مرجع [۲۶] به دست آمده است. برای استخراج تابع کنترل بهینه باید تابع همیلتونین در همه حالت‌ها کمینه باشد و با توجه به عبارت $S - \lambda$ زمان‌های تغییر مقدار تراست مشخص می‌شود.

این قانون کنترلی برای λ در بازه بین صفر تا یک و خود یک که

$$u = \begin{cases} 0 & 0S > \lambda \\ \frac{(\lambda-S)}{2\lambda} & -\lambda \leq S \leq \lambda \\ 1 & 1S < \lambda \end{cases} \quad (40)$$

مسئله مینیمم انرژی است، صدق می‌کند. در مورد مسئله کمینه مصرف سوخت که $\lambda = 0$ است، قانون کنترلی تغییر می‌کند که در زیر نشان داده شده است:

$$u = \begin{cases} 0 & S \geq 0 \\ 1 & S < 0 \end{cases} \quad (41)$$

ماتریس (۱۸) با مقدار اولیه‌ای که در رابطه (۴۲) در برای دو حالت از قانون کنترلی، برای مواقعی که $u = 0$ و $u = 1$ است و در مواقعی که u بین صفر و یک است، متفاوت می‌باشد.

$$\phi(t_0, t_0) = I_{14 \times 14} \quad (42)$$

موقعی که پارامتر کنترلی بین صفر و یک است، این پارامتر براساس تابع S محاسبه می‌شود که دارای متغیرهای حالت و شبه حالت است. تصحیح مقدار اولیه با روش نیوتن که یک روش ساده و دقیق است، انجام می‌شود [۲۴]:

$$p_{k+1}(t_0) = p_k(t_0) - \left(\frac{\partial p}{\partial x}(1:n-1, 1:n) \right)^{-1} F \quad (43)$$

در این رابطه F شامل اختلاف حالت نهایی اسمی (حالتی که باید به آن رسید) و حالت نهایی سیستم در هر تکرار از شبیه‌سازی است. دقت شود که حالت نهایی جرم مشخص نمی‌باشد و به جای آن باید مقدار نهایی شبه‌حالت جرم استفاده شود. لذا متناسب با این انتخاب، ماتریس انتقال حالت برای تصحیح مقدار اولیه، تعیین شده است. با توجه به اینکه مسئله دارای چند شرط در قانون کنترلی است به همین سبب دچار ناپیوستگی در حل می‌شود. این ناپیوستگی باعث می‌شود که در روش پرتابی تصحیح مقدار اولیه به درستی انجام نشود. راسل [۲۶] بیان می‌دارد که در لحظه

وقتی این پارامتر برابر با یک باشد مسئله کمینه مصرف انرژی مطرح می‌شود. تابع همیلتونین با توجه به معادله‌های دینامیک و تابع هزینه عبارت است از:

$$H = u - \lambda u(1-u) + p_r^T v + p_v^T \left(g(r) + h(v) + \frac{uT_{max}\alpha}{m} \right) - p_m \left(\frac{uT_{max}}{c} \right) \quad (30)$$

با توجه به این تابع می‌توان معادله‌های شبه حالت را استخراج کرد. طبق روابط بیان شده در کنترل بهینه معادله‌های دینامیکی شبه حالت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (31)$$

که معادله‌ها به صورت رابطه (۳۲) است:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_r \\ \dot{p}_v \\ \dot{p}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G^T p_v \\ -p_r - H^T p_v \\ uT_{max}/m^2 p_v^T \alpha \end{bmatrix} \quad (32)$$

ماتریس G مشتق جزئی ماتریس $g(\cdot)$ نسبت به r و ماتریس $h(\cdot)$ هم مشتق ماتریس h نسبت به v است.

$$G = \frac{\partial g(r)}{\partial r} \quad (33)$$

$$H = \frac{\partial h(v)}{\partial v} \quad (34)$$

چون شرایط آزاد برای حالت نهایی جرم سوخت وجود دارد، پس شرط نهایی شبه حالت جرم سوخت صفر است [۲۵].

$$p_m(t_f) = 0 \quad (35)$$

با توجه به اینکه مقدار T_{max} ثابت است پس جزء پارامترهای کنترلی نیست. از طرفی u و α متغیرهای کنترلی هستند که باید بهینه شوند. این دو متغیر با U نمایش داده شده‌اند. طبق روابط کنترل بهینه، برای به دست آوردن قانون کنترلی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

برای به دست آوردن مقدار کنترل بهینه از اصل ماکزیمم پونتریاگن استفاده می‌شود [۲۴]. با توجه به این اصل و تابع همیلتونین باید مقدار α به گونه‌ای باشد که تابع همیلتونین کمترین مقدار را دارا باشد. با توجه به اینکه ضریب این پارامتر در تابع همیلتونین مثبت است، پس این مقدار باید منفی باشد که اصل ماکزیمم پونتریاگن را کمینه کند.

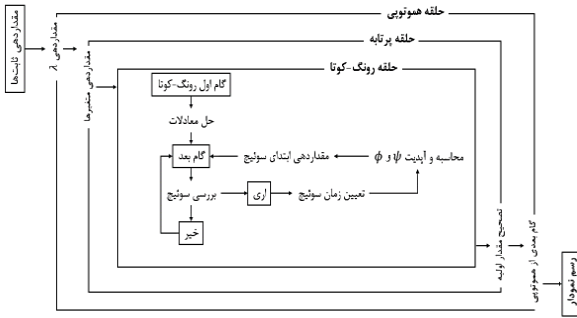
$$\alpha = -\frac{p_v}{\|p_v\|} \quad (36)$$

قبل از به دست آوردن مقدار کنترل بهینه u رابطه α در تابع همیلتونین جایگذاری می‌شود. این تابع برای به دست آوردن مقدار کنترل بهینه مرتب‌سازی شده است که در ادامه مشاهده می‌شود.

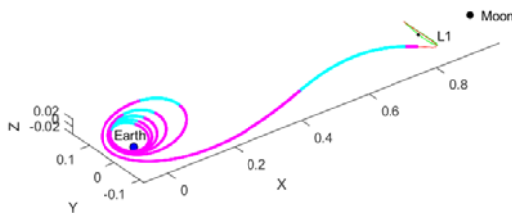
$$H = p_r^T v + p_v^T (g(r) + h(v)) - \frac{uT_{max}}{c}(S - \lambda + \lambda u) \quad (37)$$

اگر این تابع نسبت به u مشتق گرفته شود فقط عبارت آخر باقی خواهد ماند:

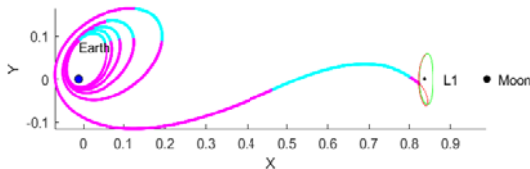
دیگری مشخص شده است. در این تصویر مدار هاله‌ای حول نقطه لاگرانژی L_1 با رنگ سبز دیده می‌شود. در شکل‌های (۱۴) و (۱۵) دو نمای دیگر برای این مسیر نشان داده شده است. رنگ قرمز نیز مبین منیفولد پایدار است. در این بهینه‌سازی سیاست کنترل تراست اهمیت دارد که در شکل (۱۶) تغییرات پارامتر کنترلی برای پارامترهای مختلف هموتوپی نشان داده شده است.



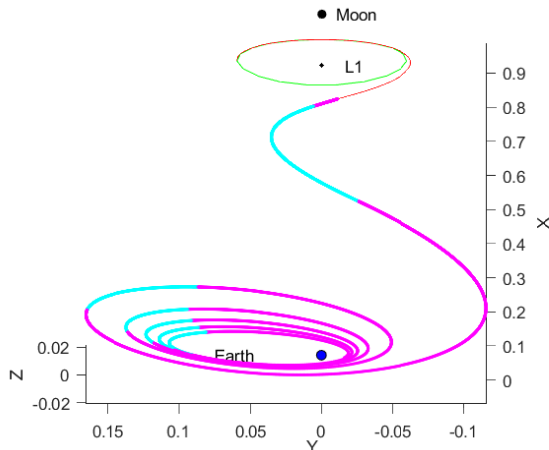
شکل ۱۲- چارت مورد استفاده در پژوهش برای اجرای روش هموتوپی



شکل ۱۳- مسیر طراحی شده برای مسئله کمینه مصرف سوخت



شکل ۱۴- مسیر طراحی شده در صفحه X و Y



شکل ۱۵- مسیر طراحی شده در سه بعد از نمایی متفاوت

نایبوستگی باید ماتریس انتقال حالت براساس شیب دو طرف نقطه اصلاح شود. این تکنیک پس از تعیین زمان دقیق سوئیچ‌زنی، رفتار ماتریس انتقال حالت را در آن نقطه تصحیح می‌کند. با استفاده از این تکنیک ماتریس انتقال حالت به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \phi(t_f, t_0) = & \\ \phi(t_f, t_N^+) \psi(t_N) \phi(t_N^-, t_{N-1}^+) \dots \phi(t_2^-, t_1^+) & \quad (44) \\ \psi(t_1) \phi(t_1^-, t_0) & \end{aligned}$$

تابع ψ در نقطه نایبوستگی محاسبه می‌شود و می‌تواند براساس اختلاف شیب دو طرف نقطه که حاصل از اختلاف مقدار پارامتر کنترلی است، محاسبه شود.

$$\psi(t) = \frac{\partial y(t^+)}{\partial y(t^-)} = I_{14 \times 14} + (\dot{y}_{t^+} - \dot{y}_{t^-}) \left(\frac{\partial S}{\partial y} \frac{1}{S} \right)_{t^-} \quad (45)$$

برای محاسبه این تابع نیاز است که زمان دقیق سوئیچ تعیین شود. زمان سوئیچ با توجه به حالت‌های رابطه (۴۰) مشخص می‌شود. در نتیجه براساس عبارت شرطی در رابطه قانون کنترلی این زمان تعیین می‌شود. به این منظور دو عبارت شرطی وجود دارد که به صورت زیر هستند:

$$SW = \begin{cases} S - \lambda \\ S + \lambda \end{cases} = 0 \quad (46)$$

برای تعیین زمان سوئیچ‌زنی نیاز است گام انتگرالی که در آن سوئیچ رخ داده تعیین شود و براساس رابطه زیر بازه زمانی انتگرال‌گیری تغییر کند تا زمان نهایی این بازه دقیقاً زمان سوئیچ باشد.

$$t_s^{k+1} = t_s^k - \frac{SW}{S} \quad (47)$$

این تکرار تا جایی انجام می‌شود که زمان دقیق با تolerانس 10^{-15} به دست آید. در مواقعی است که بازه زمانی به قدری کوچک می‌شود که دیگر در آن سوئیچ رخ نمی‌دهد باید بازه زمانی قبلی از تکرار این الگوریتم با روش میان‌یابی تعیین شود. در شکل (۱۲) الگوریتم مورد استفاده در این پژوهش نشان داده شده است.

نتایج شبیه‌سازی

در ادامه مسیر طراحی شده کمینه مصرف سوخت با روش هموتوپی آورده شده است. در شکل (۱۳) مسیر انتقال به مدار هاله‌ای با استفاده از منیفولد پایدار (نزدیک به مدار هاله‌ای) مشاهده می‌شود. استفاده از این منیفولد باعث شده که مسئله به سمت مصرف سوخت بهینه نزدیک شود، چرا که با قرار گرفتن در روی این مسیر بدون مصرف سوخت به مدار مورد نظر خواهد رسید. قسمتی از منحنی که با رنگ صورتی، زمانی است که موتور روشن بوده و نیروی تراست به فضاپیما وارد شده است. زمانی که موتور خاموش هستند یا اصطلاحاً فضاپیما در حال سردین^{۲۶} می‌باشد با رنگ

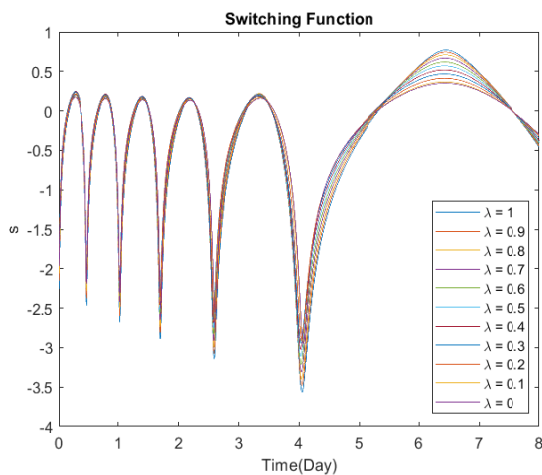
آنالیز حساسیت

حساسیت این مسئله نسبت به مقدار اولیه‌ها بسیار زیاد است. به طوری که اگر مقدار یک پارامتر، حالت یا شبه حالتی تغییر کند، احتمال واگرایی زیاد می‌شود و باید دوباره مقدار اولیه مناسب بررسی شود. به عنوان نمونه حساسیت نسبت به ضربه ویژه‌های متفاوت بررسی شده است. در شکل‌های (۱۹) و (۲۰) تغییرات تابع سوئیچ و پارامتر کنترلی مشاهده می‌شود. همان‌گونه که دیده می‌شود، تغییرات تابع سوئیچ و پارامتر کنترلی نسبت به ضربه ویژه‌های متفاوت تغییر بسیار اندکی داشته و قابل چشم پوشی است. پس با تغییر ضربه ویژه قانون کنترلی تغییر نمی‌کند. در این نمودارها برای هر سه حالت همپوشانی رخ داده است.

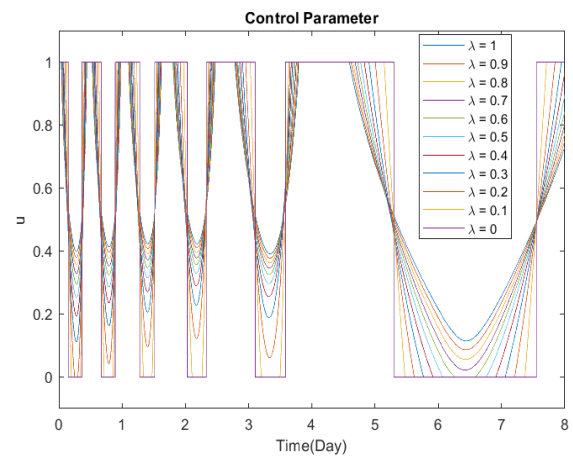
ولی برای مقدار سوخت نهایی یعنی مقدار سوخت مصرفی که در طول مأموریت داشته است، نتایج قابل توجه است. در شکل (۲۱) می‌توان نتیجه گرفت، هرچه ضربه ویژه مقدار بیشتری باشد مصرف سوخت کمتر است.

شکل (۱۶) در ۱۱ منحنی برای پارامترهای هموتوبی ۱ تا ۰ با گام ۰/۱ تفکیک شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در هنگامی که مسئله مطلقاً کمینه مصرف انرژی است هیچ‌گاه تراست صفر نمی‌شود، ولی در گام یازدهم که مسئله کمینه مصرف سوخت است قانون کنترلی بنگ-بنگ رخ داده است.

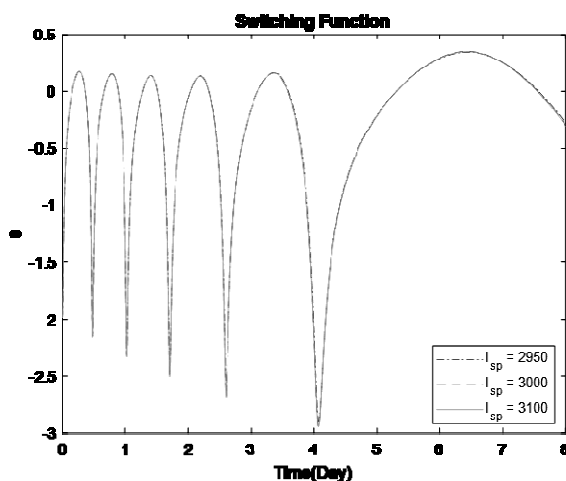
در شکل (۱۷)، تغییرات مصرف سوخت برای پارامترهای مختلف هموتوبی به سمت کاهش مصرف سوخت رفته است. هرچه مسئله به سمت کمینه مصرف سوخت نزدیک شده است، نمودار به سمت بالا حرکت کرده و در نهایت ۵/۱۲۶ کیلوگرم سوخت مصرف شده است که معادل ۴۳/۸ درصد کل سوخت می‌باشد. نمودار تغییر تابع سوئیچ زنی برای پارامترهای هموتوبی مختلف هم قابل توجه است که در ادامه این نمودار نشان داده شده است. پس از همگرایی در مسئله کمینه مصرف انرژی با مرتبه بسیار کم (حدود 10^{-10})، این مقدار اولیه وارد حلقه هموتوبی شد و توانست مسئله را به هدف مورد نظر برساند.



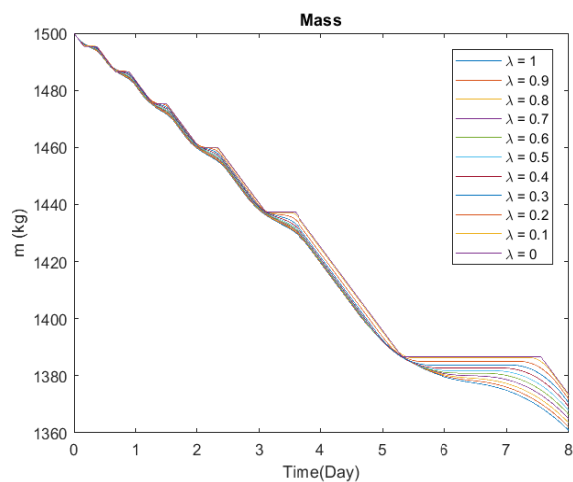
شکل ۱۸- تغییرات تابع سوئیچ برای پارامترهای هموتوبی متفاوت



شکل ۱۶- نمودار تغییرات پارامتر کنترلی برای پارامترهای هموتوبی متفاوت



شکل ۱۹- تغییرات تابع سوئیچ برای پارامترهای هموتوبی متفاوت

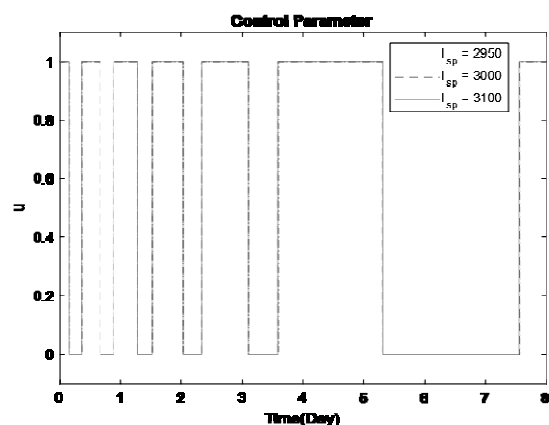


شکل ۱۷- نمودار مصرف سوخت برای پارامترهای هموتوبی متفاوت

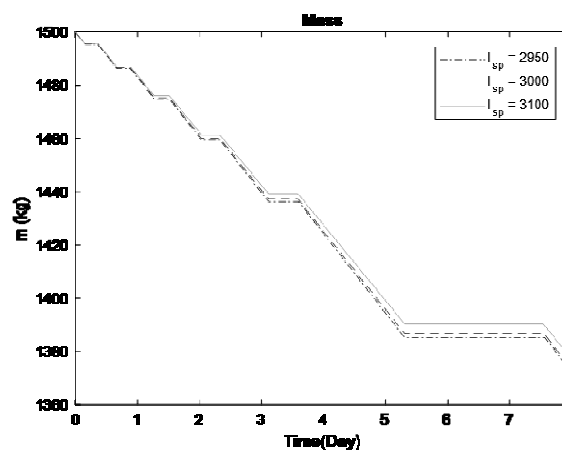
انجام شده است، اما برای اولین بار است که در اینجا از این روش برای انتقال به مدار هاله‌ای از یک مدار کم ارتفاع استفاده شده است. نکته مهم در این انتقال، استفاده از منیفولد پایدار می‌باشد که در طراحی مسیر بهینه موثر بوده است. علت مؤثر بودن این منیفولدها این است که در روی این مسیرها موتور فضاپیما خاموش است و تزریق مناسب به این منیفولد باعث کاهش مصرف سوخت خواهد شد. در طی فرآیند بهینه‌سازی، فرمولاسیون کنترل بهینه با وجود پارامتر هموتوپوی برای دو مسئله کمینه مصرف سوخت و کمینه مصرف انرژی تحلیل شده است. برای اجرای روش HCM از الگوریتمی بهره برده شده است که برای اولین بار در این مسئله طراحی شده ولی قابل استفاده برای دیگر مسئله‌ها هم می‌باشد. یکی از چالش‌های بسیار مهم در این روش، محاسبه زمان دقیق سوئیچ (یا زمان گسستگی در مسئله) است که محاسبه این زمان برای اصلاح مقدار ماتریس انتقال حالت نیاز می‌باشد. در طی فرآیند، مسئله دچار واگرایی شد که از کاهش طول گام هموتوپوی برای همگرا کردن مسئله کمک گرفته شده است. با توجه به آنچه که گفته شد، می‌توان نتیجه گرفت که روش هموتوپوی یک روش کارآمد در حل مسائل پیچیده کنترل بهینه است. با این حال، یکی از چالش‌های آن انتخاب مسئله آسان می‌باشد. به طوری که این انتخاب را هنر استفاده از روش هموتوپوی بیان می‌دارد. همچنین، روش هموتوپوی یک عمل هوشمندانه برای افزایش سرعت حل و تسهیل در حدس مقدار اولیه است.

مراجع

- [1] Sayanjali, S.P.M., "Optimal Trajectory Design to Halo Orbits via Pseudo-invariant Manifolds Using a Nonlinear Four Body Formulation," *Acta Astronautica*, Vol. 110, No. 1, pp. 115-128, 2015.
- [2] He, J., " Homotopy Perturbation Technique," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 178, No. 3-4, pp. 257-262, 1999.
- [3] Nayfeh, A.H., *Perturbation Methods*, New York: John Wiley & Sons, 2008.
- [4] Liao, S., *Introduction to the Homotopy Analysis Method*, Boca Raton: Chapman & HALL/CRC, 2003.
- [5] Allgower, K.G.E.L., *Introduction to Numerical Continuation Methods*, New York: SIAM, 2003.
- [6] Doedel, E., Keller, H.B. and Kernevez, J.P., "Numerical Analysis and Control of Bifurcation Problems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 1, No. 3, pp. 493-520, 1991.
- [7] Doedel, E.J., Champneys, A.R., Fairgrieve, T.E. and et al., *AUTO 97: Continuation And Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*, Canada: Concordia University, 1998.
- [8] Richardson, D., "Halo Orbit Formulation for the ISEE-3 Mission," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 3, No. 6, pp. 543-548, 1980.



شکل ۲۰- تغییرات پارامتر کنترلی برای پارامترهای هموتوپوی متفاوت



شکل ۲۱- تغییرات مقدار مصرف سوخت برای پارامترهای هموتوپوی متفاوت

نتیجه‌گیری

در این پژوهش مسیر انتقال بهینه از مدار حول زمین به مدار هاله‌ای در سیستم زمین- ماه طراحی شده است. این طراحی براساس قوانین کنترل بهینه برای بهینه‌سازی مصرف سوخت انجام شده است. مشکل اصلی در حل این مسئله، تعیین دقیق مقدار اولیه است چراکه مسئله کنترل بهینه به شدت نسبت به مقدار اولیه حساس می‌باشد. از طرفی چون تمامی مقادیر بی‌بعد شده‌اند، دقت اعداد در مقدار اولیه بیشتر شده و حساسیت مسئله در حدس اولیه بیشتر می‌شود. برای برطرف کردن این مشکل در این پژوهش، روش ادامه تویی پیشنهاد شده است. در واقع، نوآوری پژوهش حاضر، استفاده از روش ادامه تویی در حل مسئله کنترل بهینه مصرف سوخت برای دینامیک موردنظر می‌باشد. رویکرد هموتوپوی، مسئله آسان کمینه مصرف انرژی را تغییر شکل داده و به سمت مسئله اصلی سوق داده است تا بتواند مسئله دشوار کمینه مصرف سوخت را راحت‌تر حل کند. این روش پیش از این برای مسئله‌ها و دینامیک‌های متفاوتی

- Trajectory Optimization," *Acta Astronautica*, Vol. 71, No. 1, pp. 38-50, 2012.
- [20] Chupin, M., Haberkorn, T., and Trélat, E., "Low-thrust Lyapunov to Lyapunov and Halo to Halo Missions with L2-minimization," *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 51, No. 3, pp. 965-996, 2017.
- [21] Chi, Z., Yang, H., Chen, S., and Li, J., "Homotopy Method for Optimization of Variable-specific-impulse Low-thrust Trajectories," *Astrophysics and Space Science*, Vol. 362, No. 11, p. 216, 2017.
- [22] Kayama, Y., Bando, M., and Hokamoto, Sh., "Minimum Fuel Trajectory Design Using Sparse Optimal Control in Three-Body Problem", *AIAA Scitech, Published Online*, 5 Jan. 2020.
- [23] Vallado, D.A., *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, United States: Microcosm Press, 2013.
- [24] Yang, H. and Li, Sh., "Fast Homotopy Method for Binary Astroid Landing Trajectory Optimization", *EUCASS*, 2019
- [25] Kirk, D., *Optimal Control Theory: an Introduction*, Richardson: Springer, 1970.
- [26] Navabi, M. and Meshkinfam, E., "Space Low-thrust Trajectory Optimization Utilizing Numerical Techniques, a Comparative Study," *In Recent Advances in Space Technologies (RAST)*, Istanbul, Turkey, 2013.
- [27] Beale, G., "Minimum Fuel Optimal Control Example for A Scalar System," 19 August 2013. [Online]. Available: https://ece.gmu.edu/~gbeale/ece_620/xmpl-620-min-fuel-01.pdf.
- [28] Russell, R., "Primer Vector Theory Applied to Global Low-thrust Trade Studies," *Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 2, pp. 460-472, 2007.
- [9] Xu, M., Liang, Y., Ren, K., "Survey on Advances in Orbital Dynamics and Control for Libration Point Orbits," *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 82, No. 1, pp. 24-35, 2016.
- [10] Stuhlinger, E., "The Flight Path of an Electrically Propelled Space Ship," *Journal of Jet Propulsion*, Vol. 27, No. 4, pp. 410-414, 1957.
- [11] Rodriguez, E., "Method for Determining Steering Programs for Low Thrust Interplanetary Vehicles," *ARS*, Vol. 29, No. 10, pp. 783-788, 1959.
- [12] Kelley, H., "Gradient Theory of Optimal Flight Paths," *ARS*, Vol. 30, No. 10, pp. 947-954, 1960.
- [13] Conley, C., "Low Energy Transit Orbits in the Restricted Three-body Problems," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 16, No. 4, pp. 732-746, 1968.
- [14] Kluever, C.A. and Pierson, B.L., "Optimal Low-thrust Three-dimensional Earth-moon Trajectories," *Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 4, pp. 830-837, 1995.
- [15] Senent, J., Ocampo, C., and Capella, A., "Low-Thrust Variable-specific-impulse Transfers and Guidance to Unstable Periodic Orbits," *Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 2, pp. 280-290, 2005.
- [16] Watson, L., "Globally Convergent Homotopy Algorithms for Nonlinear Systems of Equations," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 1, No. 2, pp. 143-191, 1990.
- [17] Chen, L.W.Y., "Optimal Trajectory Planning for a Space Robot Docking with a Moving Target via Homotopy Algorithms," *Robotic Systems*, Vol. 12, No. 8, pp. 531-540, 1995.
- [18] Haberkorn, T., Martinon, P., and Gergaud, J., "Low Thrust Minimum-fuel Orbital Transfer: a Homotopic Approach," *Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 6, pp. 1046-1060, 2004.
- [19] Jiang, F., Li, J., and Guo, T. "Homotopic Approach and Pseudospectral Method Applied Jointly to Low Thrust