JSST

10.22034/JSST.2021.1233

Vol. 14/ Issue.1/ 2021 (No. 46)
pp. 1-13

Research Paper

The Symmetric Periodic Solution Around Asteroid 216 Kleopatra and Its Stability in the Presence of Solar Radiation Pressure

Mahdi Jafari Nadoushan[1]*and Kosar Aramkhah[2]

1,2. Department of Aerospace Engineering, K.N.Toosi University of Technology, Tehran, Iran

***mjafari@kntu.ac.ir**

In this paper, the dumbbell model is used for the gravitational field of the asteroid 216 Cleopatra. Using this model, the equations governing the spacecraft's motion around the asteroid will be in the form of the spacecraft's equations of activity in the problem of three finite circular objects. Based on this, equilibrium points and Jacobian regions around this asteroid have been calculated and used network search methods and symmetrical periodic orbit launches. This symmetry is considered relative to the xz plane. After extracting the circuits, the stability of occasional courses is evaluated by Fluke theory, which indicates the instability of the circuits. By adding solar radiation pressure to the governing equations, symmetric periodic circuits are re-extracted, and their stability index is calculated. The results show that the solar radiation pressure, although it changes the values of the stability index, does not alter its stability or instability. Therefore, stabilizing the spacecraft on these unstable orbits requires control over the spacecraft.

Keyword:216 Kleopatra asteroid, Symmetric periodic orbit, Dumbbell model, Solar radiation Pressure, Floquet theory

1. Assistant Professor (Corresponding Author)
2. M. Sc Student

Received: 2019.09.09 / Accepted: 2020.05.04 /Publish Online: 2021.03.21/Online ISSN: 2423-4516 / Print ISSN: 2008-4560

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

دوره ۱۴ / شمارهٔ ۱/ بهار ۱۴۰۰ (شماره پیاپی ۴۶) 10.22034/JSST.2021.1233
ص. ص. ۱۳- ۱

مقاله علمی- پژوهشی

حل تناوبی متقارن حول سیارک ۲۱۶ کلوپاترا و بررسی پایداری آن در حضور فشار تشعشع خورشیدی

مهدی جعفری ندوشن [۱*] و کوثر آرام‌خواه [۲]

۱ و ۲- دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

mjafari@kntu.ac.ir

در این مقاله از مدل دمبلی برای میدان گرانشی سیارک ۲۱۶ کلوپاترا استفاده شده است. با استفاده از این مدل، معادلات حاکم بر حرکت فضاپیما حول سیارک به فرم معادلات حرکت فضاپیما در مسئله سه جسم محدود دایروی در خواهند آمد. بر این اساس نقاط تعادلو نواحی ژاکوبی حول این سیارک محاسبه شده و با بهره‌گیری از روش‌های جست و جوی شبکه‌ای و پرتابی مدارهای تناوبی متقارن محاسبه شده‌اند. این تقارن نسبت به صفحه xz درنظر گرفته شده است. پس از استخراج مدارها، پایداری مدارهای تناوبی با تئوری فلوکه مورد ارزیابی قرار گرفته که بیانگر ناپایداری مدارهاست. با اضافه‌کردن فشار تشعشع خورشیدی به معادلات حاکم، مجدداً مدارهای تناوبی متقارن استخراج و شاخص پایداری آن‌ها محاسبه شده است. نتایج حاکی از آن است که فشار تشعشع خورشیدی هر چند مقادیر شاخص پایداری را تغییر می‌دهد ولی تغییری در پایداری یا ناپایداری آن ایجاد نمی‌کند. بنابراین پایدارسازی فضاپیما بر روی این مدارهای ناپایدار مستلزم اعمال کنترل بر روی فضاپیماست.

واژه‌های کلیدی: سیارک۲۱۶ کلوپاترا، مدار تناوبی متقارن، مدل دمبلی، فشار تشعشع خورشیدی، تئوری فلوکه

علائم و اختصارات

سطح مقطع فضاپیما	A_s
شتاب فشار تشعشع خورشیدی	$\vec{a}_{SRP}$
واحد نجومی (فاصله)	AU
ثابت ژاکوبی	C
ضریب فشار تشعشعی	C_R
فاصله فضاپیما ازخورشید	d_{sun}
ثابت جهانی گرانش	G
جرم جسم اصلی اول در مسئله سه جسم محدود دایروی	m_1
جرم جسم اصلی دوم در مسئله سه جسم محدود دایروی	m_2
جرم فضاپیما	m_s
فشار تشعشع مرجع در فاصله یک واحد نجومی از خورشید	P_{ref}
بردار مکان در سیستم مختصات ثابت	$\vec{r}$
مشتق اول بردار مکان	$\dot{\vec{r}}$
مشتق دوم بردار مکان	$\ddot{\vec{r}}$
تابع پتانسیل گرانشی	U
مشتق تابع پتانسیل نسبت به مولفه xبردار مکان	U_x
مشتق تابع پتانسیل نسبت به مولفه yبردار مکان	U_y
مشتق تابع پتانسیل نسبت به مولفه zبردار مکان	U_z
مولفه بردار مکان در راستایx	x
بردار حالت فضاپیما	X
مولفه بردار مکان در راستای y	y
مولفه بردار مکان در راستای z	z
ضریب بازتاب سطح	ε
پارامتر جرمی	μ
پارامتر سایه	υ
فاصله المان جرمی سیارک تا فضاپیما	ρ
ماتریس انتقال حالت	Φ
سرعت زاویه‌ای سیارک	$\vec{\Omega}$

۱ . استادیار (نویسنده مخاطب)
۲ دانشجوی کارشناسی ارشد

دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۱۸ / پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۱۵ / چاپ الکترونیکی: ۱۴۰۰/۰۱/۰۱ / شاپای الکترونیکی: ۴۵۱۶-۲۴۲۳ / شاپای چاپی: ۴۵۱۶-۲۰۰۸

مشتق اول سرعت زاویه‌ای $\dot{\Omega}$

مقدمه

اجرام کوچک منظومه شمسی یکی از کلیدهای مهم در فهم نحوه تشکیل و تکامل منظومه شمسی است. از دهه ۱۹۹۰ میلادی با پیشرفت فناوری و کسب اطلاعات دقیق‌تر از اجرام کوچک منظومه شمسی، درک مناسبی از ماهیت آن‌ها به‌دست آمده است. در میان اجرام کوچک منظومه شمسی، سیارک‌ها حدود ۲۰۰ سال قبل کشف شده‌اند که بخش زیادی از آن‌ها پس از تعیین مدار حرکت‌شان کدگذاری شده‌اند [۱]. کشف سیارک‌ها و تعیین مدار آن‌ها نشان می‌دهد که سیارک‌ها در بیشتر نقاط منظومه شمسی حضور دارند. مطالعات طیف‌سنجی حاکی از آن است که سیارک‌ها از موادی تشکیل شده‌اند که در هنگام تشکیل منظومه شمسی قادر به پیوستن به سیاره‌ها نبودند. لذا سیارک‌ها منبعی از مواد آلی و خامی هستند که بعضا در زمین موجود نیستند.

تاکنون مأموریت‌های متعددی به سیارک‌ها طراحی و اجرا شده است. اولین مأموریت در مدار یک سیارک متعلق به فضاپیمای نییر است که در فوریه ۲۰۰۰ با موفقیت وارد مدار سیارک ۴۳۳ اروس شد. هدف این مأموریت بررسی خواص سطح و ساختار داخلی سیارک بود. در ۲۱ فوریه ۲۰۰۱ با فرود فضاپیما بر روی سطح سیارک مأموریت خاتمه یافت [۲]. فضاپیمای‌هایابوسا در فاصله بین سپتامبر و دسامبر ۲۰۰۵، در فاصله حدود ۷ کیلومتری از سطح سیارک ایتوکاوا در مداری به دور آن چرخید. فرود سیارک‌نورد متعلق به این فضاپیما بر روی سیارک ناموفق بود. اما در ۱۹ و ۲۵ نوامبر ۲۰۰۵ هایابوسا سطح سیارک را به مدت ۳۰ دقیقه لمس کرد و برای اولین بار موفق شد مقداری از مواد سطحی را جمع‌آوری کند [۳]. فضاپیمای رزتا در دوم مارس ۲۰۰۴ به فضا پرتاب شد و با عبور از کنار سیارک ۲۸۶۷ استینز و سیارک ۲۱ لوتتیا از آن‌ها عکس‌برداری کرد و پس از حدود ۱۰ سال سرانجام در ۶ اکتبر ۲۰۱۴ به مقصد رسید که پس از چندی کاوشگر فیله، سیارک‌نورد متعلق به این فضاپیما بر روی دنباله‌دار ۶۷ پی چوریوموف- گراسیمنکو[۳] نشست [۴].

بیش از بیست هزار سیارک نزدیک به زمین با قطر بیش از ۱۰۰ متر وجود دارند که احتمال برخورد برخی از آن‌ها به سطح زمین می‌رود [۵]. لذا شناسایی سیارک‌ها و بررسی راه‌های مقابله با آن‌ها از اهمیت بسزایی برخوردار است. البته در سال‌های اخیر نیز انگیزه‌های بشر برای بهره‌برداری از منابع فضاتقویت شده که منجر به افزایش مأموریت‌های فضایی به سمت سیارک‌ها شده است. این موضوعات اهمیت شناخت محیط دینامیکی سیارک‌ها را بیش از پیش افزایش می‌دهد. مطالعه و بررسی ساختار فضای فاز حرکت فضاپیما حول سیارک راه متداولی برای شناخت این محیط است [۶]. سیارک‌ها به دلیل شکل هندسی نامنظم خود و در نتیجه میدان گرانشی پیچیده، اثر دینامیکی متفاوتی روی حرکت فضاپیما خواهند داشت [۷]. معمولاً برای شناخت این محیط پیچیده نقاط تعادل محاسبه و مدارهای تناوبی حول آن‌ها استخراج می‌شود.

یافتن حل‌های تناوبی سیستم‌های مختلف از دیرباز مورد توجه بوده و روش‌های مختلف تحلیلی و یا عددی برای یافتن آن‌ها توسعه پیدا کرده است. در سیستم‌های سماوی نیز کارهای متعددی برای توسعه روش‌های یافتن مدارهای تناوبی مخصوصا در مسئله سه جسم صورت گرفته است [۸، ۹]. پیدا کردن حل‌های تناوبی در سیستم‌های سیارکی به سال‌های اخیر باز می‌گردد. یو و باویین [۱۰] با مدل‌کردن میدان گرانشی با استفاده از پلی‌هدرون برای سیارک ۲۱۶ کلوپاترا و همچنین توسعه روش جستجوی شبکه‌ای سلسله مراتبی، ۲۹ خانواده مدار تناوبی برای سطوح مختلف انرژی را استخراج کرده‌اند. موضوع قابل توجه در این مقاله این است که ارتقای روش جستجوی شبکه‌ای به روش جستجوی شبکه‌ای سلسله مراتبی باعث شده است صفحه‌ای که شبکه جستجو بر روی آن تولید می‌شود، با تعریف و تغییر مختصات کروی برای وضعیت آن، به طور مداوم تغییر کرده و تعداد نقاط بیشتری برای استخراج مدارهای تناوبی متنوع مورد بررسی قرار گیرند. طبیعتاً با گسترده‌ترکردن بازه‌های جستجوی متغیرها و همچنین ریزترکردن شبکه، ممکن است تعداد خانواده‌های مدار تناوبی افزایش یابد. گیانکوچی [۱۱] در رساله دکتری خود که به تحلیل و طراحی مسیر برای مأموریت فضاپیما هایابوسا-۲ ژاپنی پرداخته است، با استفاده از مدل گرانشی بسط هارمونیک کروی و بهره‌گیری از روش امتداد عددی[۴] مدارهای تناوبی پایدار حول سیارک 1999 JU3 را محاسبه کرده است. ژیانگ و همکاران [۱۲] با بیان تئوری توصیف‌کننده ساختارهای زیرمنیفلدی و رفتار پایدار و ناپایدار ذره تست در نزدیکی نقاط تعادل، وجود خانواده مدارهای تناوبی و حتی شبه‌تناوبی در سیستم سیارکی چرخان را نشان داده‌اند. و بر این مبنا چند نمونه مدار تناوبی و شبه‌تناوبی را استخراج و پایداری آن‌ها را برای سیارک‌های ۲۱۶ کلوپاترا، ۱۶۲۰ ژئوگرافوس، ۴۷۶۹ کاستالیا و ۶۴۸۹ گلوکا بررسی کرده‌اند. ژیانگ [۱۳] با خطی‌سازی معادلات حرکت حول نقاط تعادل سیارک ۲۱۶ کلوپاترا به استخراج و تحلیل پایداری نقاط و مدارهای تناوبی پرداخته است. یو و همکاران [۱۴] به بحث پیرامون امتداد مدارهای تناوبی در میدان پتانسیل سیارک‌ها پرداخته‌اند. همچنین با استفاده از تحلیل شرایط امتداد موضعی مرتبه اول، مجموعه جواب‌های ممکن را ارائه کرده‌اند و خانواده مدارهای

3. 67P/Churyumov–Gerasimenko

۴Numerical Continuation

طبیعی نمونه‌ای را حول سیارک ۲۴۳ آیدا استخراج کرده‌اند. نی و همکاران [۱۵] با استخراج چند خانواده مدارهای تناوبی حول سیارک ۴۳۳ اروس به بررسی دوشاخگی چندگانه در خانواده مدارهای تناوبی پرداخته‌اند. فنگ و هو [۱۶] با مدلسازی میدان گرانشی با استفاده از بسط هارمونیک تا مرتبه دوم، مدارهای صفحه‌ای و عمودی را حول نقاط تعادل هم‌راستا استخراج کرده‌اند. همچنین پس از بررسی پایداری مدارها، با محاسبه منیفلدهای ناوردا، برروی ارتباط آن‌ها با رزونانس‌های مرتبه اول بحث کرده‌اند. لی و همکاران [۱۷] با استفاده از روش امتداد عددی و همچنین تئوری دوشاخگی، مدارهای تناوبی و منیفلدها و اتصالات هتروکلینیک متناظر با آن‌ها را استخراج و نقاط تعادل و پایداری آن‌ها را برای مقادیر مختلف پارامترهایی مثل نسبت ابعادی تحلیل کرده‌اند. زنگ و لیو [۱۸] با توسعه روشی مبتنی بر تئوری کنترل بهینه و استفاده از مدل دوقطبی، مدارهای تناوبی طبیعی را برای سیارک ۹۵۱ گاسپرا محاسبه کرده‌اند. آن‌ها با استفاده از یک روش غیرمستقیم، مسئله کنترل بهینه را به مسئله با شرایط مرزی تبدیل کرده‌اند. ژیانگ و همکارانش [۱۹] با استفاده از مدل پلی‌هدرون برای میدان گرانشی و روش جستجوی شبکه‌ای پنج خانواده از مدارهای تناوبی پایدار حول سیارک‌های ۲۴۳ ایدا، ۴۳۳ اروس، ۶۴۸۹ گلوکا و ۱۰۱۹۵۵بنو را به‌دست آورده‌اند. سالدینی و همکاران [۲۰] میدان گرانشی سیارک ریوگو را با مدل مسکونز شامل تعداد زیادی کره همگن مدلسازی کرده و علاوه بر نقاط تعادل، با استفاده از روش تحلیلی، مدار تناوبی حول رزونانس یک به یک را محاسبه نموده‌اند.

در این مقاله با مدل‌سازی میدان گرانشی سیارک با بهره‌گیری از مدل دمبلی، نقاط تعادل و مدارهای تناوبی متقارن نسبت به صفحه xz حول نقاط تعادل همراستا به کمک جستجوی شبکه‌ای [۲۱] و روش پرتابی [۲۲] استخراج شده‌اند و با استفاده از تئوری فلوکه [۲۳] پایداری مدارهای تناوبی استخراج شده، بررسی شده است. با توجه به شدت کم میدان گرانشی سیارک به دلیل ابعاد کوچک و جرم نسبتاً کم آن، نیروی ناشی از فشار تشعشع خورشیدی می‌تواند اثر چشمگیری بر روی حرکت فضاپیما در این محیط داشته باشد. از این رو علاوه بر نیروی گرانشی، با درنظرگرفتن اثر فشار تشعشع خورشیدی و ثابت درنظر گرفتن دوره تناوب، مجدداً مدارهای تناوبی جدیدی محاسبه و همچنین پایدرای آن‌ها بررسی شده است. نتایج حاکی از آن است که که فشار تشعشع خورشیدی بر روی پایداری مدارهای یافت شده تأثیری نداشته و اگر مدار تناوبی ناپایدار بوده، با احتساب فشار تشعشع خورشیدی همچنان ناپایدار خواهد ماند. برای نگهداری فضاپیما بر روی مدارهای تناوبی ناپایدار لازم است از سیستم‌های کنترل موقعیت بهره برد.

معادلات حرکت

برای بررسی و مطالعه محیط دینامیکی سیارک‌ها لازم است قبل از هر چیزی معادلات حرکت ذره (در اینجا فضاپیما) حول آن‌ها استخراج شود. معادلات حرکت فضاپیما در نزدیکی یک سیارک در دستگاه مختصات ثابت چسبیده به سیارک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} = U_r + \vec{a}_{SRP} \qquad (۱)$$

در سمت چپ این معادله، $\vec{r}$ بردار موقعیت فضاپیما در سیستم مختصات چسبیده و مستقر در مرکز جرم سیارک است. $\dot{\vec{r}}$ و $\ddot{\vec{r}}$ به ترتیب معرف مشتق اول و دوم بردار مکان و $\vec{\Omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای سیارک هستند. در سمت راست U_r معرف مشتق تابع پتانسیل گرانشی و $\vec{a}_{SRP}$ بیانگر شتاب ناشی از فشار تشعشع خورشیدی است.

معمولاً در مسائل مکانیک سماوی به منظور تسریع محاسبات و تحلیل بهتر، معادلات حرکت بی‌بعدسازی می‌شوند. برای بی‌بعدسازی جرم، جرم کلی سیارک به عنوان جرم مرجع درنظر گرفته می‌شود. جرم سیارک همان‌گونه که خواهیم دید در مدل دمبلی به صورت جمع دو جرم مجزا که با یک میله صلب بدون وزن به هم متصل شده‌اند به صورت $M = m_1 + m_2$ تعریف می‌شود. بنابراین ثابت بی‌بعد جرم به صورت $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ تعریف می‌شود. طول نیز با نیم‌محور اصلی سیارک بی‌بعد می‌شود. در نهایت زمان نیز به‌گونه‌ای بی‌بعدسازی می‌شود که دوره تناوب حرکت دورانی سیارک حول محور خود برابر با 2π شود.

مدل‌سازی گرانشی

سیارک‌ها به دلیل داشتن توزیع جرمی متفاوت در نقاط مختلف خود و حتی تنوع ساختاری، دارای اثرات گرانشی متفاوتی در هر نقطه از فضای پیرامون خود هستند. تابع‌پتانسیل گرانشی به طور کلی برای هر جسم دلخواه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U(x, y, z) = \int_{Body} \frac{G}{\rho} dm \qquad (۲)$$

در رابطهٔ فوق U تابع پتانسیل، G ثابت جهانی گرانش، ρ فاصله المان جرمی dm از فضاپیما و x، y و z مؤلفه‌های بردار موقعیت فضاپیماست [۲۴]. روش‌های گوناگونی برای محاسبه تابع پتانسیل گرانشی سیارک‌ها وجود دارد که هر یک کاربرد خاص خود را دارند.

بسط سری هارمونیک کروی

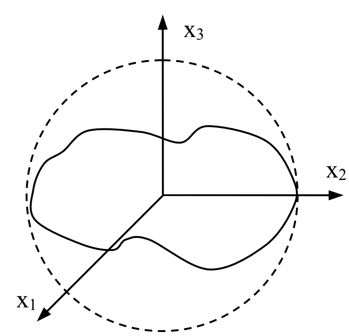
بسط سری هارمونیک کروی مرسوم‌ترین روش برای محاسبه تابع پتانسیل گرانشی است. اگر مطابق شکل (۱) فرض‌کنیم یک کره، معروف به کره بریلون[۵] به دور سیارک فرضی محاط شده است، این

[۵] Brillouin Sphere

روش در خارج از محدوده کره فرضی کارایی لازم را داشته و بسط سری هارمونیک کروی در خارج از کره بریلون همگراست. اما در داخل این کره دچار واگرایی می‌شود. این مدل برای مسائلی که در آن فضاپیما به سطح سیارک نزدیک نمی‌شود، معتبر بوده و قابل استفاده است.

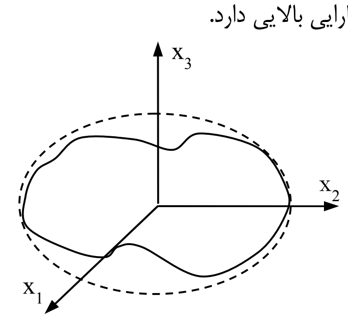
بسط سری هارمونیک بیضوی

ایده اصلی این روش که با نام رویکرد ایووری[۶] هم شناخته می‌شود، توسط نیوتن ارائه شد که بعدها توسط لاپلاس و ایووری تکامل یافت. مطابق شکل (۲) فرض می‌شود سیارک در داخل یک بیضی‌گون قرار دارد که به بیضی‌گون بریلون معروف است [۲۵].



شکل ۱- کره بریلون و بسط هارمونیک کروی

این تئوری فقط در خارج از محدوده بیضی‌گون فرضی کارایی لازم را دارد و در مورد سیارک‌هایی با شکلی شبیه به بیضی‌گون و متقارن نیز کارایی بالایی دارد.

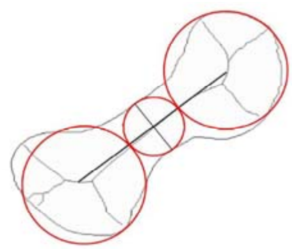


شکل ۲- بیضی بریلون و بسط هارمونیک بیضوی

مدل مسکونز

در این مدل سیارک با کره‌هایی مفروض پوشیده می‌شود. این کره‌ها هرچند همگن هستند ولی می‌توانند از جنس‌های متفاوت باشند. در شکل (۳) نحوه قرارگیری این کره‌ها برای سیارک ۲۱۶ کلوپاترا قابل مشاهده است. این مدل بیشتر برای سیارک‌هایی با شکل نامتقارن کاربرد دارد [۲۶].

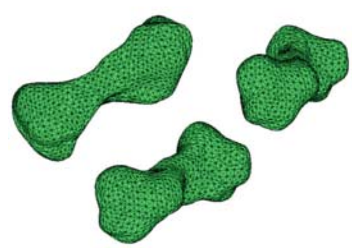
[۶] Ivory's approach



شکل ۳- مدل مسکونز برای سیارک۲۱۶ کلوپاترا

مدل پلی‌هدرون

روش دیگر برای محاسبه تابع پتانسیل گرانشی یک جسم با شکل نامتقارن استفاده از مدل پلی‌هدرون است. در این روش پلی‌هدرون‌ها مطابق شکل (۴)، متشکل سطوح مثلثی هستند که رأس آن‌ها با بردارهایی به مرکز جرم سیارک متصل می‌شوند. ایده اصلی این روش ابتدا در سال ۱۹۹۴ توسط ورنر [۲۷] ارائه شد.



شکل ۴- مدل پلی‌هدرون برای سیارک۲۱۶ کلوپاترا [۲۲]

این روش برای سیارک‌های غیرهمگن که چگالی و جنس سطح آن‌ها در هر قسمت از سطح نسبت به قسمت‌های دیگر متفاوت است، کاربرد دارد. در این حالت هر بخش به طور جداگانه باید بررسی و تحلیل شوند. همچنین برای ماموریت فرود بر سطح سیارک استفاده از این مدل اجتناب‌ناپذیر است. تنها مشکل این روش طولانی بودن روند حل و لزوم انجام محاسبات سنگین با کامپیوتر است.

مدل دمبلی

نامنظمی شکل ظاهری برخی از سیارک‌ها مانند سیارک‌های ۲۱۶ کلوپاترا و ۲۰۶۳ باکوس به‌گونه‌ای است که می‌توان آن‌ها را به‌صورت دمبلی شکل مدل‌سازی کرد. شکل ظاهری سیارک ۲۱۶ کلوپاترا و مدل دمبلی آن در شکل (۵) قابل مشاهده است.

در مدل دمبلی شکل که جزئیات آن در شکل (۶) قابل ملاحظه است، جسم با دو جرم m_1 و m_2 مدل می‌شود که با یک میله صلب بدون جرم به طول d به هم متصل شده‌اند. جرم کلی سیارک برابر با مجموع این دو جرم یعنی $M = m_1 + m_2$ است. با توجه به اتصال این دو جرم توسط میله صلب، می‌توان فرض کرد هنگامی که سیارک حول مرکز جرم خود دوران می‌کند مانند این است که این دو جرم در دو مدار

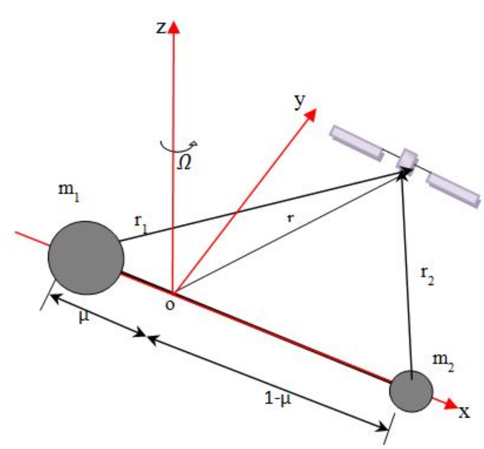
دایروی با مجموع شعاعی معادل با طول میله صلب، حول مرکز جرم خود در حال حرکت هستند. لذا مسئله حرکت فضاپیما حول سیارکی با هندسه‌ای شبیه به دمبل به مسئله حرکت فضاپیما حول دو جرم m_1 و m_2 که در مدار دایروی حول مرکز جرمشان حرکت می‌کنند، تبدیل می‌شود. از این رو، معادلات حرکت بی‌بعد شده برای حرکت فضاپیما در میدان گرانش جسم دمبلی شکل با فرضیات گفته شده، مشابه معادلات حرکت فضاپیما در مسئله سه جسم محدود دایروی خواهد بود. این معادلات عبارتند از [۲۹]:

$$\ddot{\vec{r}} = \left[2\dot{y} + U_x, -2\dot{x} + U_y, U_z\right]^T \qquad (۳)$$

در رابطهٔ فوق $U(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$ معرف تابع پتانسیل تعمیم یافته، r_1 و r_2 اندازه بردار موقعیت فضاپیما نسبت به دو جرم m_1 و m_2، و μ پارامتر گرانشی هستند. مقادیر U_x و U_y و U_z مشتقات جزئی تابع پتانسیل U نسبت به مؤلفه‌های بردار موقعیت فضاپیما هستند.

با نوشتن معادلات در دستگاه مختصات چسبیده به سیارک، معادلات حرکت نسبت به زمان ناوردا بوده و بنابراین دارای یک ثابت حرکت هستند. این ثابت که به ثابت ژاکوبی معروف است [۹] به صورت $C = 2U - v^2$ تعریف می‌شود که در آن v اندازه بردار سرعت فضاپیماست.

شکل ۵– سیارک ۲۱۶ کلوپاترا و مدل دمبلی آن [۲۸]



شکل ۶– مدل دمبلی برای توصیف میدان گرانشی سیارک و پارامترهای آن

فشار تشعشعی خورشیدی

در سیستم سیارکی عمده‌ترین اغتشاشی که پس از اغتشاشات گرانشی به فضاپیما وارد می‌شود، اغتشاش تشعشعات خورشیدی است. تشعشع خورشیدی هنگام برخورد به فضاپیما، به‌دلیل جذب یا انعکاس فوتون‌ها، باعث ایجاد نیرویی می‌شود که برخلاف اغتشاش گرانشی به جرم و مساحت فضاپیما بستگی دارد. میزان شتاب وارد بر فضاپیما ناشی از فشار تشعشع خورشیدی برابر است با [۳۰]:

$$\vec{a}_{SRP} = -\upsilon \mathrm{P}_{\mathrm{ref}} C_R \frac{A_s}{m_s}\frac{\vec{d}_{sun}}{d_{sun}^3} AU^2 \qquad (۴)$$

در این رابطه $\mathrm{P}_{\mathrm{ref}} = 4.56 \times 10^{-6} [N/m^2]$ در فاصله یک واحد نجومی (AU) از خورشید، C_R ضریب فشار تشعشع، A_s مساحت سطح مقطع فضاپیما که رو به خورشید قرار دارد، m_s جرم فضاپیما و d_{sun} فاصله فضاپیما از خورشید است. در رابطه فوق υ پارامتر سایه را نشان می‌دهد به‌طوری که وقتی فضاپیما در سایه سیارک قرار دارد برابر صفر و وقتی در معرض نور خورشید قرار دارد برابر یک است. پارامترهای A_s، m_s و C_R که به فضاپیما وابسته هستند در جدول (۱) آمده است. این مقادیر بر اساس فضاپیمای Marcopolo-R انتخاب شده‌اند [۳۱].

جدول ۱– پارامترهای مدل فشار تشعشع خورشیدی

پارامتر (واحد)	فضاپیما	پنل خورشیدی
جرم(کیلوگرم)	۱۲۷۵	–
مساحت(مترمربع)	۱۶	۱۰
ضریب فشار تشعشع	۱/۸	۱/۲۱

در این مقاله با فرض این‌که شبیه‌سازی برای مدت ۲۴ ساعت انجام می‌شود و در این مدت زمان سیارک در مدار خود جابجایی کمی دارد، می‌توان راستای بردار خورشید به سیارک را در دستگاه اینرسی ثابت در نظر گرفت. باید توجه داشت که معادلات حرکت در دستگاه مختصات ثابت چسبیده به سیارک نوشته شده است، لذا این بردار باید با ماتریس دوران حول محور سوم یعنی محور دوران سیارک، در این دستگاه مختصات بازنویسی شود.

نقاط تعادل و ناحیه ژاکوبی

نقاط تعادل، نقاطی هستند که سرعت و شتاب فضاپیما در دستگاه چرخان در آن نقاط صفر است. اگر فضاپیما بدون سرعت اولیه در این نقاط قرار گیرد در صورت پایدار بودن نقطه تعادلی، در آن نقطه بدون حرکت خواهد ماند. این نقاط تعادل در واقع محل تقاطع منحنی‌های

سرعت صفر هستند. مطابق مسئله سه جسم محدود دایروی برای این سیستم نیز انتگرال ژاکوبی موجود و برابر است با [۲۹]:

$$-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+(x^2+y^2)+(1-\mu)\left(\frac{2}{r_1}\right)+\mu\left(\frac{2}{r_2}\right)=C \qquad (۵)$$

ثابت C در سمت راست این تساوی، ثابت ژاکوبی نامیده می‌شود که از جنس انرژی است. با صفر قرار دادن مقدار سرعت در انتگرال ژاکوبی، ناحیه‌ای در اطراف جسم اولیه می‌توان مشخص کرد، که جسم ثانویه قادر به حرکت در آن نیست.

اما برای یافتن نقاط تعادل در اطراف سیارک باید معادلاتی مانند معادله زیر حل شود.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0 \qquad (۶)$$

نقاط تعادل در واقع ریشه‌های معادله فوق هستند. این نقاط تعادل به دو دسته هم‌راستا و مثلثی تقسیم می‌شوند در دسته اول دو نقطه E_1 و E_2 و در دسته دوم دو نقطه E_3 و E_4 قرار دارند. برای نقاط هم‌راستا $y=z=0$ است و معادله به شکل زیر کاهش می‌یابد:

$$x-\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3}-\frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-(1-\mu)|^3}=0 \qquad (۷)$$

برای حل عبارت فوق سه حالت در نظر گرفته می‌شود که هر سه حالت به یک چند جمله‌ای درجه پنج منجر می‌شوند با این تفاوت که ضرایب چند جمله‌ای در هر حالت متفاوت خواهد بود. این چند جمله‌ای بر حسب $x_{E_i}(i=1,2)$ به صورت زیر قابل بیان است.

$$x_{E_i}^5+ax_{E_i}^4+bx_{E_i}^3+cx_{E_i}^2+dx_{E_i}^1+e=0 \qquad (۸)$$

در حالت اول که معادل نقطه تعادل E_1 است با رعایت شرط $-\mu<1-\mu<x=E_1$ ضرایب عبارتند از:

$$\begin{aligned}
a&=2(2\mu-1)\\
b&=(1-\mu)^2-4\mu(1-\mu)+\mu^2\\
c&=2\mu(1-\mu)(1-2\mu)-1\\
d&=\mu^2(1-\mu)^2+2(\mu^2-(1-\mu)^2)\\
e&=-(1-\mu)^3-\mu^3
\end{aligned} \qquad (۹)$$

در حالت دوم برای نقطه E_2 با شرط $E_2=x<-\mu<1-\mu$ ضرایب عبارتند از:

$$\begin{aligned}
a&=2(2\mu-1)\\
b&=(1-\mu)^2-4\mu(1-\mu)+\mu^2\\
c&=2\mu(1-\mu)(1-2\mu)+1\\
d&=\mu^2(1-\mu)^2+2(\mu^2-(1-\mu)^2)\\
e&=(1-\mu)^3+\mu^3
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

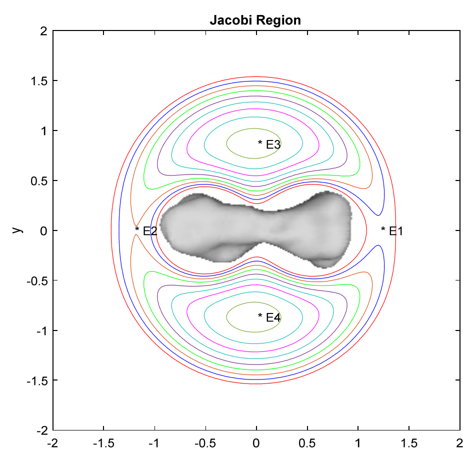
برای تعیین نقاط مثلثی یا E_3 و E_4 راه حل ساده است. چون این دو نقطه باید در رأس دو مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گیرند که قاعده مشترک آن دو روی محور x قرار دارد و طول این قاعده مشترک برابر با واحد است، لذا فاصله E_3 و E_4 تا جسم اولیه برابر واحد است. بنابراین مختصات این نقاط عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_3&=\left[\tfrac{1}{2}-\mu,-\sqrt{3}/2,0\right]\\
\mathrm{E}_4&=\left[\tfrac{1}{2}-\mu,+\sqrt{3}/2,0\right]
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

مختصات بی‌بعد این نقاط برای سیستم دینامیکی مورد نظر یعنی سیارک ۲۱۶ کلوپاترا در جدول (۲) ذکر شده است و همچنین موقعیت این نقاط در شکل (۷) قابل ملاحظه است.

جدول ۲- مختصات بی‌بعد نقاط تعادل و ثابت ژاکوبی

نقاط	x	y	z	C
E_1	۱,۲۲۵۶۱۰۱۳۱	۰	۰	−۱,۷۳۴۲۴۰۰۸۳
E_2	−۱,۱۹۳۶۰۲۰۸۴	۰	۰	−۰,۲۹۸۷۵۷۰۳۰۷
E_3	۰,۰۱۳۷۴۴۵۰۰۰	۰,۸۶۶۰۲۵۴۱	۰	−۱,۳۷۵۰۹۴۴۵۶
E_4	۰,۰۱۳۷۴۴۵۰۰۰	−۰,۸۶۶۰۲۵۴۱	۰	−۱,۳۷۵۰۹۴۴۵۶



شکل ۷– نقاط تعادل، منحنی‌های سرعت صفر و نواحی ژاکوبی برای سیارک ۲۱۶ کلوپاترا

با قرار دادن مختصات نقاط تعادل در معادله ۱۱ می‌توان ثابت ژاکوبی هر یک از آن ها را محاسبه کرد. همچنین به کمک این معادله منحنی‌های سرعت صفر برای مقادیر مختلف ثابت‌های ژاکوبی به دست می‌آید. این منحنی‌ها نشان‌دهنده محدوده‌ای از فضای حول سیارک هستند که فضاپیما قادر به حرکت در آن نیست که به ناحیه ممنوعه یا ژاکوبی نیز معروف هستند. این منحنی‌ها نیز در شکل (۷) قابل مشاهده هستند. با افزایش سطح انرژی فضاپیما، نواحی ژاکوبی کوچکتر شده و فضاپیما می‌تواند در فضای بیشتری حرکت کند. با افزایش سطح انرژی ابتدا نواحی حول نقاط E_1 و E_2 باز می‌شوند و نقاط E_3 و E_4 آخرین نقاطی خواهند بود که دسترس‌پذیر خواهند بود. با توجه به منحنی‌های ژاکوبی می‌توان فهمید نقاط E_1 و E_2، از

نوع نقاط زینی بوده و ناپایدار هستند و نقاط E_3 و E_4، از نوع نقاط مرکز بوده و پایدار هستند.

محاسبه مدارهای تناوبی

مدارهای تناوبی نقش مهمی در تحلیل حرکت فضاپیما حول سیارک دارند. برای پیدا کردن مدارهای تناوبی روش‌های گوناگونی ارائه و توسعه داده شده‌اند. روشی که در این مقاله از آن‌استفاده شده است، ترکیبی از روش پرتابی[۷] و روش جست‌وجوی شبکه‌ای [۲۱] است. گفتنی است از آنجا که هدف یافتن مدارهای متقارن نسبت به صفحه xzاست، از این وجود این تقارن می‌توان استفاده کرد و تنها نصف مدار محاسبه کرد. نیمه دیگر مدار با توجه به وجود تقارن قابل محاسبه است. به این ترتیب یافتن مدارهای تناوی به حل مسئله با شرایط مرزی تبدیل می‌شود. برای ادامه فرض کنید که دوره تناوب مدار تناوبی برابر با $2T$ است.

روش پرتابی یگانه

روش پرتابی یگانه، پایه‌ای‌ترین روش تصحیح دیفرانسیلی است [۲۹]. اصطلاح یگانه به خاطر این است که حل مسئله با شرایط مرزی، یک مسیر یکپارچه را در بر می‌گیرد. مسیری را با شرایط اولیه x_0 در زمان t_0 در نظر بگیرید. از این مسیر تا زمان T انتگرال گرفته و نتایج را به صورت x^t نشان می‌دهیم که همان حالت نهایی با شرایط اولیه $x(x_0, t_0)$ در $t = t_0 + T$ است. این مسیر به عنوان مسیر مبنا برای روش پرتابی در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌کنیم مسیر r_d به عنوان مسیر مطلوب برای حالت نهایی باشد. شرط اولیه و بازه زمان انتگرال برای هر دو مسیر یکسان است. این موضوع در شکل (۸) نشان داده شده است.

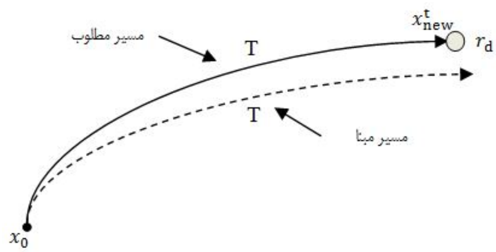
در این مسئله هدف یافتن δx_0هایی است که مسیر تولیدی را به موقعیت مطلوب در زمان مشخص برساند. اگر بردار حالت فضاپیما به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$X = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \quad (۱۲)$$

با توجه به تقارن مدارها نسبت به صفحه xz، شرایط اولیه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$X = (x, 0, z, 0, \dot{y}, 0)^T \quad (۱۳)$$

به کمک روش جست‌وجوی شبکه‌ای نقاطی را که منجر به مدارهای متقارن نسبت به صفحه xz می‌شوند مشخص‌کرده و سپس با استفاده از روش پرتابی شرط اولیه را تدقیق کرده و به این ترتیب مدارهای تناوبی پیدا می‌شوند.



شکل ۸- روش پرتابی یگانه

ماتریس انتقال حالت

از ماتریس انتقال حالت برای تصحیح شرایط اولیه مدار تناوبی حول سیارک استفاده می‌کنیم. این ماتریس به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial x_{(t)}}{\partial x_{(t_0)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^t}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial x^t}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial x^t}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial y^t}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial y^t}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial y^t}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial z^t}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial z^t}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial z^t}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

که در واقع حساسیت متغیرهای حالت نسبت به شرایط اولیه است. معادله دیفرانسیل برای محاسبه ماتریس انتقال حالت عبارت است از:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad (۱۵)$$

که باید با شرایط اولیه $\Phi(t_0, t_0) = I$ حل شود. ماتریس ضرایب $A(t)$ برابر است با:

$$A(t) = \frac{\partial \dot{x}_{(t)}}{\partial x_{(t)}} \quad (۱۶)$$

در این مسئله ماتریس $A(t)$به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} \\ U_{xx} & 2\Omega \end{bmatrix}_{6\times6} \quad (۱۷)$$

که در این رابطه 0 و I به ترتیب ماتریس صفر و همانی هستند و همچنین

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

$$U_{xx} = \begin{bmatrix} \partial u/_{\partial x\partial x} & \partial u/_{\partial x\partial y} & \partial u/_{\partial x\partial z} \\ \partial u/_{\partial y\partial x} & \partial u/_{\partial y\partial y} & \partial u/_{\partial y\partial z} \\ \partial u/_{\partial z\partial x} & \partial u/_{\partial z\partial y} & \partial u/_{\partial z\partial z} \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

برای تصحیح حدس اولیه لازم است میزان خطای شرایط انتهایی به عقب انتشار یابد. این موضوع با استفاده از ماتریس انتقال حالت امکان‌پذیر است، یعنی

$$\delta x_0 = \emptyset^{-1}\delta x_f \quad (۲۰)$$

که در این معادله $\delta x_0 = [\delta x_0, \delta z_0, \delta \dot{y}_0]$ میزان تصحیح لازم در شرایط اولیه و $\delta x_f = [x_0, z_0, \dot{y}_0]$ خطای شرایط انتهایی است.

7. Shooting Method

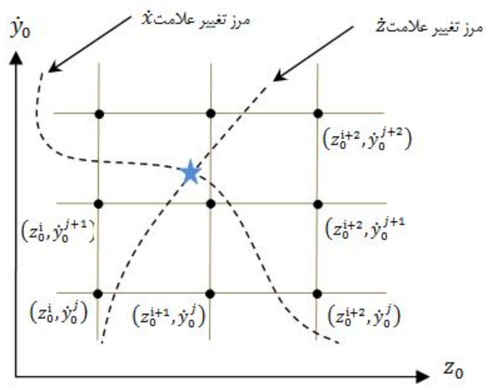
روابط فوق مقدار تقریبی تغییر در هر سه متغیر شرایط اولیه را بر حسب انحراف در نقطه نهایی به دست می‌دهد. لازم به ذکر است که لزوما نیازی به تغییر هر سه متغیر شرایط اولیه جهت یافتن شرایط اولیه مناسب برای مدار تناوبینیست. در این مقاله با توجه به تقارن در نظر گرفته شده برای مدارهای تناوبی، سه متغیر از شش متغیر شرایط اولیه صفر در نظر گرفته می‌شوند. در مورد سه متغیر باقیمانده نیز برای سهولت در حل برای یکی از آن‌ها مقدار ثابتی در نظر گرفته می‌شود که با توجه به صفر شدن رابطه بالا می‌توانیم با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول، دو رابطه مستقل برای دو متغیر از شرایط اولیه بدست آوریم. چون این روابط از معادلات خطی شده حاصل شده‌اند جواب‌ها تقریبی هستند و برای همگرا شدن به شرایط اولیه مناسب جهت تولید یک مدار تناوبی نیاز به تکرار چندباره محاسبات است.

جست و جوی شبکه‌ای

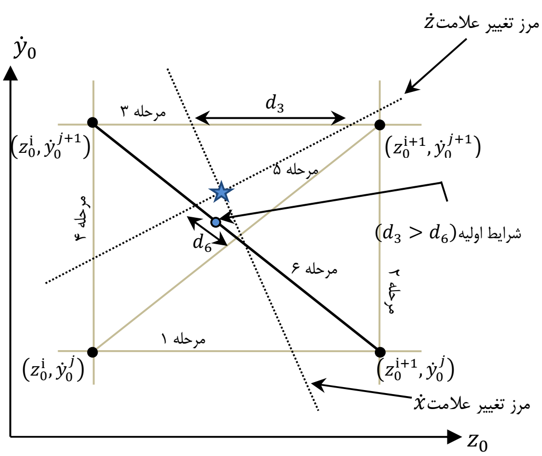
از آن‌جا که روش پرتابی نسبت به حدس اولیه حساس است [۳۲]، در صورت انتخاب شرایط اولیه نامناسب، این روش به شرایط اولیه مناسب جهت تولید مدار تناوبی همگرا نمی‌شود. معمولا برای پرهیز از این واگرایی از روش جستجوی شبکه‌ای [۲۱، ۳۳] برای تولید حدس اولیه مناسب استفاده می‌شود. همان‌طورکه گفته شد مدارهای متقارن نسبت به صفحه xz با محاسبه سه مقدار مناسب x_0، z_0 و $\dot{y}_0$ به‌دست می‌آیند. برای کاهش حجم محاسبات، ابتدا مقدار x_0 ثابت در نظر گرفته می‌شود و مقادیر z_0 و $\dot{y}_0$ که باعث تناوبی شدن مدار می‌شود،با جستجو در شبکه‌ای از این دو متغیر پیدا می‌شوند. در این روش برای متقارن بودن مدار نسبت به صفحه xz، باید محل برخورد انتهای مدارها به صفحه در شرایطی باشد که $\dot{x}$ و $\dot{z}$ آن‌ها صفر بوده و فقط $\dot{y}$مخالف صفر باشد. بنابراین برای هر x_0 مشخص، شبکه‌ای برای مقادیر z_0 و $\dot{y}_0$ مطابق شکل (۹) تشکیل می‌شود.

در این شکل فرض شده که ابعاد شبکه به اندازه‌ای کوچک است که بتوان مرزهای تغییر علامت $\dot{x}$ و $\dot{z}$ در زمان برخورد به صفحه به صورت یک خط در نظر گرفته شود. محل تلاقی دو مرز تغییر علامت $\dot{x}$ و $\dot{z}$برروی شبکه، مقادیر z_0 و $\dot{y}_0$ احتمالی مدارهای تناوبی متقارن نسبت به صفحه xz را مشخص می‌کند.

این روش جستجوی شبکه‌ای در ۶ مرحله این نقاط را پیدا می‌کند [۲۱]. این ۶ مرحله در شکل (۱۰) نشان داده شده است. ابتدا با توجه به مختصات هر گوشه شبکه، از معادلات تا لحظه T انتگرال‌گیری می‌شود تا بردار حالت در لحظه انتهایی به دست آید. سپس در هر مرحله‌ای که در شکل (۱۰) نشان داده شده، قبل از هر چیزی، تغییر علامت $\dot{x}$ و $\dot{z}$ بین دو نقطه انتهایی آن مرحله بررسی می‌شود. اگر هر دو متغیر$\dot{x}$ و $\dot{z}$ تغییر علامت بدهند پس احتمال این وجود دارد که روی ضلع یا قطر مربوط به آن مرحله بتوان نقطه‌ای را که نشان‌دهنده حدس اولیه مورد نظر است، یافت.



شکل ۹- جست‌وجوی شبکه‌ای



شکل ۱۰- تعیین نقطه حدس اولیه

همان‌طور که در شکل فوق نیز مشخص است در مراحل ۳ و ۶ این شرایط برقرار است. با مشخص شدن این موضوع، بهکمک درون‌یابی خطی می‌توان فاصله محل برخورد مرزهای تغییر علامت از هم را روی ضلع مربوط به آن مرحله به دست آورد (d_3, d_6). پس از انجام این عملیات بر روی هر ۶ مرحله کوچک‌ترین فاصله محاسبه شده قابل تعیین است. که مطابق شکل فاصله d_6 است. نقطه میانی محل برخورد مرزهای تغییر علامت با ضلع یا قطر شامل کوچک‌ترین فاصله به عنوان حدس اولیه مورد نظر معرفی می‌شود.

با اجرای عملیات جست‌وجوی شبکه‌ای با توجه به دقت شبکه، تعداد قابل توجهی حدس اولیه مناسب برای تولید مدارهای تناوبی متقارن به دست می‌آید.

نتایج

در این بخش مدارهای تناوبی متقارن نسبت به xzکه به کمک روش جستجوی شبکه‌ای و پرتابی یگانه حول نقاطه تعادلی همراستا به‌دست آمده‌اند، ارائه شده است. اما قبل از ارائه آن‌ها، روش تحلیل

پایداری مدارهای تناوبی و تئوری فلوکه به اختصار بیان می‌شود.

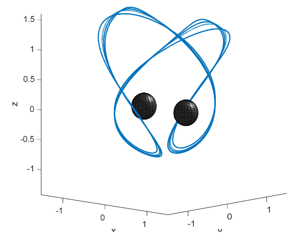
تحلیل پایداری و تئوری فلوکه

برای تحلیل پایداری مدارهای تناوبی، مقادیر ویژه ماتریس $\Phi(t,t_0)$ ارزیابی شده در زمان $t=2T$، مورد بررسی قرار می‌گیرد. ماتریس $\Phi(2T,t_0)$ تحت عنوان ماتریس منودرومی شناخته می‌شود [20]. این ماتریس سیمپلکتیک بوده و اگر λ مقدار ویژه آن باشد، آنگاه‌معکوس، مزدوج مختلط و معکوس مزدوج مختلط آن نیز مقادیر ویژه این ماتریس خواهند بود. از این رو اگر مقدار ویژه ماتریس منودرومی برابر با مقدار واحد باشد، حتما مقدار ویژه تکراری حداقل از مرتبه دو خواهد بود. پایداری یا عدم پایداری یک مدار بر اساس تئوری فلوکه[8] با توجه به مقادیر ماتریس مقادیر ویژه مشخص می‌شود. چنانچه همه مقادیر ویژه ماتریس منودرومی از مقدار واحد کمتر باشند، مدار تناوبی پایدار و اگر حتی یک مقدار ویژه بزرگتر از مقدار واحد باشد، مدار ناپایدار است. ولی اگر $|\lambda_i|=1$ باشد، پایداری یا عدم پایداری مدار از دیدگاه خطی مشخص نیست [۲۳].

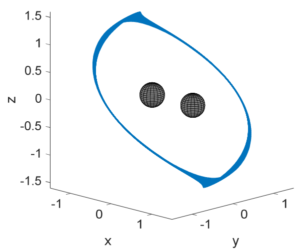
مدارهای تناوبی

در این مقاله ۱۱۰ مدار تناوبی متقارن نسبت به صفحه xz در قالب ۸ خانواده مداری در شکل‌های (۱۱) الی (۱۸) ارائه شده است. معیار دسته‌بندی مدارها مشابهت هندسی یا به اصطلاح مورفولوژی یکسان آن‌ها بوده است. مدارهای تناوبی به دست آمده یا سیارک را احاطه کرده‌اند و یا اینکه حول نقاط تعادل همراستا قرار دارند. گفتنی است این مدارها در دستگاه مختصات ثابت چسبیده به سیارک و بر اساس متغیرهای بی‌بعد شده رسم شده‌اند.

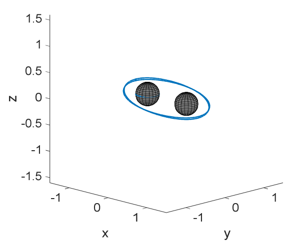
شکل‌های (۱۱) تا (۱۴) خانواده مدارهای متناوبی را نشان می‌دهد که دور تا دور سیارک در حرکت هستند. خانواده مدارهای شکل (۱۱) برای ماموریت‌های شناسایی و تصویربرداری از سطح سیارک مناسب هستند. چرا که در این مدارها پوشش کاملی از کل سطح سیارک را به دست می‌دهند. شکل (۱۳) خانواده مدارهای تناوبی را نشان می‌دهد که دور تا دور سیارک را احاطه کرده و نسبت به صفحه استوای سیارک دارای شیب هستند. اما خانواده مدارهای شکل (۱۴) در صفحه استوای آن قرار دارند. در بین مدارهایی که حول نقاط تعادل قرار دارند، مدارهایی به صورت مدارهای لیاپانوف (شکل (۱۵) و (۱۶)) که دو بعدی بوده و در صفحه استوای سیارک قرار دارند و دسته مدارهایی به صورت هاله‌ای (شکل (۱۷) و (۱۸)) قابل ملاحظه هستند.لازم به ذکر است وجود چنین مدارهایی ناشی از این موضوع است که معادلات حرکت در دستگاه چسبیده به سیارک نوشته و حل شده‌اند. به مدارهای تناوبی حول نقاط تعادل، مدارهای تناوبی موضعی گفته می‌شود تا با مدارهای تناوبی سراسری حول سیارک متمایز باشند.



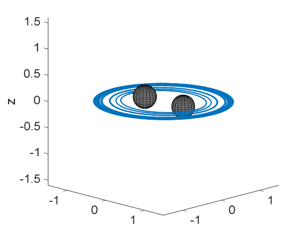
شکل ۱۱– خانواده ۱



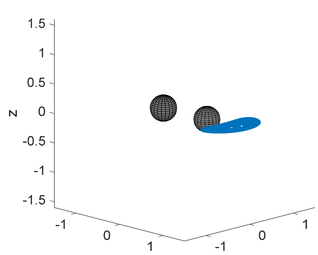
شکل ۱۲– خانواده ۲



شکل ۱۳– خانواده ۳

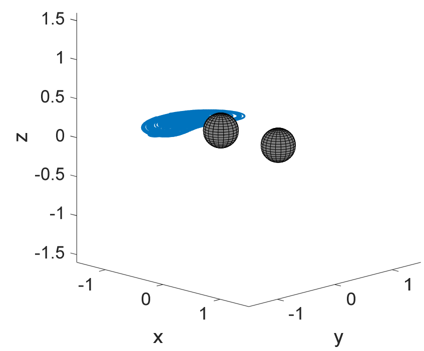


شکل ۱۴– خانواده ۴

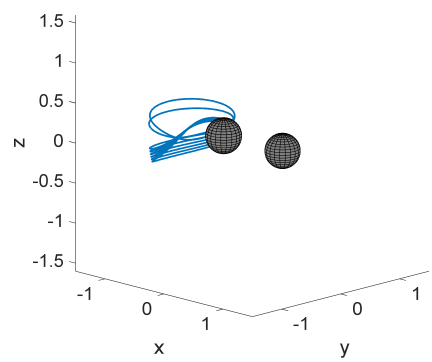


شکل ۱۵– خانواده ۵

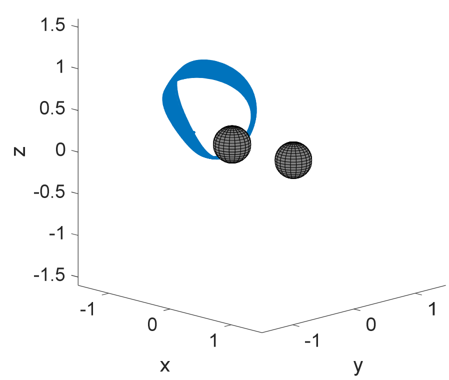
8. Floquet



شکل ۱۶- خانواده ۶

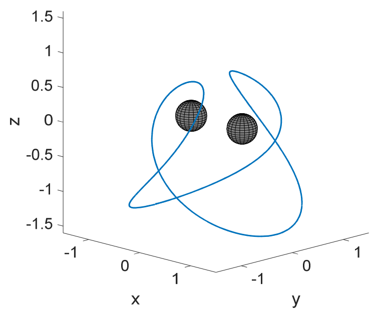


شکل ۱۷- خانواده ۷



شکل ۱۸- خانواده ۸

با توجه به تقارن هندسی سیارک نسبت به صفحه xyبه ازای هر مدار، مدار دیگری وجو دارد که نسبت به این صفحه با آن متقارن است. برای همین مدارها به دو دسته شمالی و جنوبی تقسیم می‌شوند. به عنوان مثال برای مدارهای تناوبی خانواده ۱ (شکل (۱۱) که اصطلاحا مدارهای تناوبی شمالی نامیده می‌شوند، مدارهای تناوبی جنوبی وجود دارند که یک نمونه آن در شکل (۱۹) نشان داده شده است. لازم به ذکر است که مدارهای تناوبی شمالی و جنوبی از لحاظ دینامیکی و حتی دوره تناوب مداری کاملا مشابه بوده و صرفا از لحاظ شکل ظاهری نسبت به صفحه xy متقارن هستند.



شکل ۱۹- مدار تناوبی جنوبی از خانواده ۱

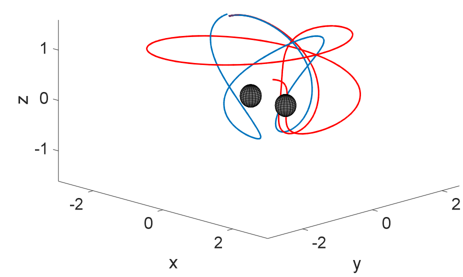
با توجه به تنوع مدارها و امکان بهره‌گیری از هر کدام آن‌ها در یک ماموریت مشخص، باید به این سوال پاسخ داد که آیا حرکت فضاپیما بر روی این مدارها پایدار یا ناپایدار است. به عبارت دیگر اگر به فضاپیمایی که بر روی این مدارها در حال حرکت است، اغتشاشی وارد شود، فضاپیما همچنان بر روی مدار باقی می‌ماند و یا از آن خارج می‌شود. لذا به منظور تحلیل پایداری مدارها، باید مقادیر ویژه ماتریس منوردورمی هر یک را محاسبه نمود. این مقادیر ویژه به همراه دوره تناوب مدار متناظر در جدول (۳) آورده شده است. همان‌گونه که قبلا توضیح داده شد و از این مقادیر قابل ملاحظه است، به ازای هر مقدار ویژه، معکوس آن و همچنین مزدوج مختلط آن مقدار ویژه نیز خود مقادیر ویژه ماتریس منودرومی هستند. اما از همه مهم‌تر آن‌که هر چند مقادیر ویژه با اندازه واحد و حتی کوچکتر از واحد در بین مقادیر ویژه وجود دارد، ولی وجود مقدار ویژه با اندازه بزرگتر از واحد در میان این مقادیر ویژه حاکی از ناپایدار بودن مدارها است. بنابراین خانواده مدارهای تناوبی متقارن یافته شده با در نظر گرفتن میدان گرانشی صرف، ناپایدار هستند و برای پایدارسازی حرکت فضاپیما بر روی آن باید تمهیداتی در نظر گرفت.

اثر فشار تشعشع خورشیدی

حال باید دید که فشار تشعشع خورشیدی چه تاثیری بر روی پایداری و یا ناپایداری مدارهای تناوبی دارد. آیا اضافه شدن این عامل در مدل باعث تغییر در ماهیت دینامیکی مدارها می‌شود که آن‌ها را پایدار سازد یا خیر. به منظور بررسی و مطالعه تاثیر فشار تشعشع خورشیدی بر روی پایدرای مدارهای تناوبی، ترم مربوط به این اثر یعنی معادله (۴) پس از بی‌بعدسازی به معادلات (۳) اضافه شده و مجددا با استفاده از جستجوی شبکه‌ای و روش پرتابی یگانه مدارهای تناوبی جدیدی با همان دوره تناوب مدارهای قبلی محاسبه شده‌اند. مقادیر ویژه این مدارها در جدول (۴) قابل ملاحظه هستند. هر چند مدارهای تناوبی جدید از لحاظ شکل ظاهری تفاوت محسوسی نداشته و صرفا ممکن است مقداری جابجایی در موقعیت آن‌ها را شاهد باشیم، اما با بررسی مقادیر ویژه ماتریس منودرومی متناظر با آن‌ها که در جدول (۴) بیان شده و مقایسه آن‌ها با مقادیر ویژه ماتریس منودرومی متناظر

مدارهای تناوبی اولیه که در جدول (۳) نشان داده شده، استنباط می‌شود که فشار تشعشع خورشیدی، هر چند باعث تغییر در مقادیر ویژه شده است ولی از آن‌جا که همچنان شاهد مقادیر ویژه با اندازه بزرگتر از واحد هستیم، پایداری آن‌ها را تغییر نمی‌دهد. در واقع همچنان مدارهای ناپایدار، ناپایدار باقی می‌مانند و فشار تشعشعی خورشیدی موجب پایدرای نمی‌شود.

لازم به ذکر است که اگر با شرایط اولیه مربوط به مدارهای تناوبی محاسبه شده با اعمال نیروی گرانشی صرف، معادلات حرکت شامل اثر فشار تشعشع خورشیدی حل شوند، بالطبع شاهد مدار تناوبی نبوده و مدار حاصل با گذشت زمان از مدار تناوبی فاصله می‌گیردکه در شکل (۲۰) قابل مشاهده است. همچنین ممکن است مدار حاصل دچار واگرایی نسبت به مدار تناوبی شده و باعث فرار فضاپیما از محیط سیارکشود. در شکل (۲۰) مدار تناوبی مرجع به رنگ آبی و مداری که با در نظر گرفتن فشار تشعشعی خورشیدی انتشار یافته با رنگ قرمز نشان داده شده است. همان‌طور که قابل ملاحظه است، مدار تحت تاثیر فشار تشتشع خورشیدی تناوبی نبوده و به مرور از مدار تناوبی فاصله می‌گیرد.



شکل ۲۰- مدار تناوبی مرجع (آبی) به همراه مدار با احتساب فشار تشعشع خورشیدی (قرمز)

نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن معرفی مدل‌های مختلف گرانشی برای جسمی با شکل نامنظم مثل سیارک، مدل دمبلی برای برای سیارک ۲۱۶ کلوپاترا انتخاب شد که با این انتخاب از معادلات حاکم بر مسئله سه جسم محدود دایروی برای مدل‌سازی دینامیک می‌توان بهره برد. نقاط تعادل و نواحی ژاکوبی و همچنینخانواده مدارهای تناوبی حول سیارک ۲۱۶ کلوپاترا با استفاده از جستجوی شبکه‌ای و روش پرتابی یگانه محاسبه شدند. حرکت در نزدیکی سیارک‌ها با شکل هندسی نامنظم در مقایسه با حرکت در نزدیکی سیارات با شکل تقریبی نزدیک به کره متفاوت است. همان‌گونه که از شکل مدارها مشخص است، مدارهای تناوبی متنوعی حول یک سیارک دمبلی شکل در دستگاه چرخان وجود دارد که علاوه برای تسهیل مطالعه دینامیک حرکت فضاپیما در نزدیکی یک سیارک، برای کاربری‌های متعدد به منظور طراحی ماموریت‌های مطالعاتی این دسته از سیارک‌ها قابل استفاده است. به عنوان نمونه از مدارهای تناوبیسراسری برای مطالعات طیف‌سنجی و شناسایی ترکیبات سیارک می‌توان بهره برد و یا مدارهای تناوبی موضعی گزینه مناسبی برای پایش مستمر ناحیه مشخصی از سیارک و یا ارتباط مخابراتی دائم با آن است.

جهت اطمینان از رفتار فضاپیما بر روی مدارهای تناوبی و به کارگیری راهکارهای مقتضی جهت کنترل رفتار فضاپیما، با استفاده از تئوری فلوکه پایداری مدارهای تناوبی بررسی و با توجه به وجود مقادیر ویژه بزرگتر از مقدار واحد برای ماتریس منودرومی مشخص شد که همه این مدارها ناپایدار هستند. وجود قابل توجه فشار تشعشع خورشیدی باعث انحراف مسیر فضاپیما از مدار تناوبی محاسبه شده با در نظر گرفتن نیروی گرانشی صرف می‌شود، اما می‌توان با لحاظ کردن این عامل در معادلات توصیف کننده حرکت فضاپیما، مدارهای تناوبی جدیدی را محاسبه کرد. با اعمال اثر فشار تشعشع خورشیدی و محاسبه مدارهای تناوبی معلوم شد که این عامل بر روی مدارهای مورد مطالعه تاثیری از دیدگاه پایداری نداراد. ناپایداری مدارهای تناوبی یافت شده موید این موضوع است که طراحی ماموریت حول سیارک و قرار دادن فضاپیما در چنین مدارهایی مستلزم اعمال کنترل بر روی فضاپیما جهت نگه‌داشت و پایدارسازی آن روی مدار تناوبی به منظور انجام موفق ماموریت است. با توجه به وجود عامل فشار تشعشع خورشیدی که مقدار قابل مقایسه‌ای با نیروی گرانشی نیز دارد و همچنین توسعه فناوری بادبان‌های خورشیدی در سال‌های اخیر، استفاده از بادبان‌های خورشیدی جهت کنترل و پایدارسازی فضاپیما بر روی مسیر گزینه مناسبی به نظر می‌رسد. به ویژه اینکه در این صورت عامل اصلی نگهداشت فضاپیما بر روی مسیر حرکت خود نیروی رایگان و پایان‌ناپذیر ناشی از فشار تشعشع خورشیدی است.

جدول ۳- دوره تناوب مدارهای تناوبی و مقادیر ویژه ماتریس منوردرومی متناظر با آن‌ها

شماره خانواده	دوره تناوب	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
خانواده ۱	۱۸,۹۹۳۰۲	۷۱۶۱,۰۳۰	−۰,۲۸۶+i۰,۹۵۸	−۰,۲۸۶−i۰,۹۵۸	۰,۰۰۰۱۴	۰,۹۹۹+i۰,۰۳۴	۰,۹۹۹−i۰,۰۳۴
خانواده ۲	۱۲,۲۸۴۲۱	۶۷,۳۵۳	۰,۰۱۴۸	۰,۴۷۶+i۰,۸۷۹	۰,۴۷۶−i۰,۸۷۹	۰,۹۹۹+i۰,۰۰۱	۰,۹۹۹−i۰,۰۰۱
خانواده ۳	۲,۵۰۱۶	−۳,۰۱۸+i۱,۲۰۰	−۳,۰۱۸−i۱,۲۰۰	−۰,۲۸۶+i۰,۱۱۴	−۰,۲۸۶+i۰,۱۱۴	۰,۹۹۹+i۰,۰۲۸۵	۰,۹۹۹−i۰,۰۲۸۵

شماره خانواده	دوره تناوب	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
خانواده ۴	۳,۶۰۰۵۶	−۰,۶۹۷+i۰,۷۱۷	−۰,۶۹۷−i۰,۷۱۷	۱,۰۲۸	۰,۹۷۳	−۰,۹۹۵+i۰,۱۰۲	−۰,۹۹۵−i۰,۱۰۲
خانواده ۵	۴,۷۵۴۹۷	۱۸۰,۰۲۹	۰,۰۰۶	۰,۹۹۹+i۰,۰۴۲	۰,۹۹۹−i۰,۰۴۲	۰,۹۹۲+i۰,۱۲۳	۰,۹۹۲−i۰,۱۲۳
خانواده ۶	۴,۷۹۱۶۵	۱۸۶,۲۱۸	۰,۰۰۵	۰,۹۹۹+i۰,۰۱۰	۰,۹۹۹−i۰,۰۱۰	۰,۹۶+i۰,۲۵۱	۰,۹۶−i۰,۲۵۱
خانواده ۷	۴,۸۲۵۰۵	۱۴۸,۹۸۸	۰,۰۰۷	۰,۹۹۱+i۰,۱۳۵	۰,۹۹۱−i۰,۱۳۵	۱,۰۵۴	۰,۹۴۹
خانواده ۸	۴,۶۴۵۴۹	۷۴,۳۸۲	۰,۰۱۳	۰,۶۹۸+i۰,۷۱۶	۰,۶۹۸−i۰,۷۱۶	۰,۹۹۹+i۰,۰۰۸	۰,۹۹۹−i۰,۰۰۸

جدول ۴– مقادیر ویژه ماتریس منوردرومی هر یک از خانواده‌های مدار تناوبی با در نظر گرفتن اثر فشار تشعشع خورشیدی

شماره خانواده	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
خانواده ۱	۶۳۹۷,۹۷۸	−۰,۰۳۲۱+i۰,۹۹۹	−۰,۰۳۲۱−i۰,۹۹۹	۰,۰۰۰۱۶	۰,۹۹۹+i۰,۰۳۹	۰,۹۹۹−i۰,۰۳۹
خانواده ۲	۴۳,۳۱۷	۰,۲۹۰+i۰,۹۵۷	۰,۲۹۰−i۰,۹۵۷	۰,۰۲۳	۰,۹۹۶	۱,۰۰۴
خانواده ۳	−۳,۷۵۸+i۰,۳۴۲	−۳,۷۵۸−i۰,۳۴۲	−۰,۲۶۴+i۰,۰۲۴	−۰,۲۶۴−i۰,۰۲۴	۰,۹۹۹+i۰,۰۲۳	۰,۹۹۹−i۰,۰۲۳
خانواده ۴	−۰,۸۷۰+i۰,۴۹۲	−۰,۸۷۰−i۰,۴۹۲	۰,۹۹۰+i۰,۱۴۱	۰,۹۹۰−i۰,۱۴۱	۲,۴۳۹	۰,۴۱۰
خانواده ۵	۱۸۵,۶۰۸	۰,۰۰۵۴	۰,۹۹۹+i۰,۰۱۲	۰,۹۹۹−i۰,۰۱۲	۰,۹۸۹+i۰,۱۵۰	۰,۹۸۹−i۰,۱۵۰
خانواده ۶	۱۳۷,۲۸۵	۰,۰۰۷۳	۱,۰۳۹	۰,۹۶۲	۱,۲۲۱	۰,۸۱۹
خانواده ۷	۱۳۵,۸۰۹	۰,۰۰۷۴	۰,۹۶۵+i۰,۲۶۳	۰,۹۶۵−i۰,۲۶۳	۱,۰۹۰	۰,۹۱۷
خانواده ۸	۳۴,۹۷۰	۰,۱۷۷+i۰,۹۸۴	۰,۱۷۷−i۰,۹۸۴	۰,۰۲۹	۰,۹۹۹+i۰,۰۱۰	۰,۹۹۹−i۰,۰۱۰

مراجع

[1] J. Piironen, C. I.Lagerkvist, J. Torppa, M.Kaasalainen, B. Warner, "Standard asteroid photometric catalogue." *Bulletin of the American Astronomical Society*. Vol. 33. 2001.

[2] J. Veverka, P. Thomas, A. Harch, B. Clark, J. Bell, B. Carcich and J. Joseph, "NEAR's Flyby of 253 Mathilde: Images of a C Asteroid," *Science* , vol. 278, pp. 2109-2114, 1997.

[3] A. Fujiwara, J. Kawaguchi, D. Yeomans, M. Abe, T. Mukai, T. Okada and J. Saito, "The Rubble-Pile Asteroid Itokawa as Observed by Hayabusa," *Science* , vol. 312, pp. 1330-1334, 2006.

[4] R. Schulz, H. Sierks, M. Küppers and A. Accomazzo, "Rosetta fly-by at asteroid (21) Lutetia: An overview," *Planetary and Space Science,* vol. 66, no. 1, pp. 2-8,2012.

[5] B. Ivano, "Asteroids Close-Up: What We Have Learned from Twenty Years of Space Exploration," *in Asteroids SE-1,* pp. 1-33, 2013.

[6] E. H. Sucarrat, "*The Full Problem of Two and Three Bodies: Application to Asteroids and Binaries*," PhD diss., University of Surrey, 2012.

[7] C. Loic and K. Howel, "Bounded Orbit near binary systems comprised of small irregular bodies," in *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, 2014.

[8] K.C. Howell, "Three-dimensional, periodic, 'halo'orbits," *Celestial mechanics*, vol. 32, no. 1, pp. 53-71,1984.

[9] G. Gomez, "*Dynamics and Mission Design Near Libration Points: Fundamentals-The Case of Collinear Libration Points*," Vol. 1. World Scientific, 2001.

[10] Y. Yu and H. Baoyin. "Generating families of 3D periodic orbits about asteroids," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*,vol. 427, no. 1, pp. 872-881, 2012.

[11] Giancotti, Marco. "*Stable Orbits in the Proximity of an Asteroid: Solutions for the Hayabusa 2 Mission*," PhD diss., Universita di Roma La Sapienza, 2014.

[12] Y. Jiang, H. Baoyin, J. Li, and H. Li.. "Orbits and manifolds near the equilibrium points around a rotating asteroid." *Astrophysics and Space Science*,vol. 349, no.1, pp. 83-106, 2014.

[13] Y. Jiang, "Equilibrium points and periodic orbits in the vicinity of asteroids with an application to 216 Kleopatra." *Earth, Moon, and Planets*, vol. 115, no.1-4, pp. 31-44, 2015.

[14] Y, Yu, H. Baoyin, and Y. Jiang. "Constructing the natural families of periodic orbits near irregular bodies." *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 453, no.3, pp. 3269-3277, 2015.

[15] Y. Ni, Y. Jiang, and H. Baoyin, "Multiple bifurcations in the periodic orbit around Eros." *Astrophysics and Space Science*,vol. 361, no.5, pp. 170,2016).

[16] J. Feng and X. Hou, "Dynamics of equilibrium points in a Uniformly Rotating second-order and degree gravitational field." *The Astronomical Journal*, vol. 154, no.1, pp. 21, 2017.

[17] X. Li, A. Gao, and D. Qiao, "Periodic orbits, manifolds and heteroclinic connections in the gravity field of a rotating homogeneous dumbbell-shaped body." *Astrophysics and Space Science*,vol. 362, no.4, p. 85, 2017.

[18] X. Zeng and X. Liu, "Searching for time optimal periodic orbits near irregularly shaped asteroids by using an indirect method." *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*,vol. 53, no.3, pp. 1221-1229, 2017.

[19] Y. Jiang, J. A. Schmidt, H. Li, X. Liu and Y. Yang, "Stable periodic orbits for spacecraft around minor celestial bodies," *Astrodynamics,* vol. 2, no. 1, pp. 69-86, 2018.

[20] S.Soldini, S. Takanao, H. Ikeda, K. Wada, T. Yuichi, N. Hirata, N. Hirata, "A generalised methodology for analytic construction of 1:1 resonances around irregular

bodies: Application to the asteroid Ryugu's ejecta dynamics,"*Planetary and Space Scienc*e, vol. 180, pp. 104740, 2020.

[21] R. P. Russell, "Global search for planar and three-dimensional periodic orbits near Europa," *Adv. Astronaut. Sci.*, vol. 54, no.2, pp. 199-226,2006.

[22] B. T. Barden, "Using Stable Manifolds to Generate Transfers in the Circular Restricted Problem of Three Bodies," MSc Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, 1994.

[23] . J. Argyris, G. Faust, M. Haase and R. Friedrich, "*An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*," Springer, 2015.

[24] D. J.Scheeres, "*Orbital motion in strongly perturbed environments: applications to asteroid, comet and planetary satellite orbiters*," Springer, 2016.

[25] G. Romain and B. Jean-Pierre, "Ellipsoida Harmonic Expansions of the Gravitational Potential: Theory and Application," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* , vol. 79, 2000.

[26] P. T. Wittick and R. P. Russell. "Mascon models for small body gravity fields," *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, vol. 162, 2017.

[27] R. A. Werner, "The gravitational potential of a homogeneous polyhedron," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 59, no. 3, pp. 253-278,1994.

[28] Available, [on lin]: https://apod.nasa.gov/apod/ap000510.html, Available Date: March 2020.

[29] M. Jafari Nadoushan and S. H. Pourtakdoust, "Modeling Halo Orbits and the Associated Manifolds in the RCTBP," *Journal of Space Science and Technology (JSST),* vol. 3, no. 1&2, pp. 75-80, 2010.

[30] O. Montebruck and E. Gill. "S*atellite orbits. Models, methods and applications*" Springer, 2000.

[31] H. Hussmann, J. Oberst, K. Wickhusen, X. Shi, F. Dammea, F. Ludicke, V. Lupovka and S. Bauer, "Stability and evolution of orbits around the binary asteroid 175706 (1996FG3): Implications for the MarcoPolo-R mission," *Planetary and Space Science,* vol. 70, 2012.

[32] M. Jafari Nadoushan and A. Basohbat Novinzadeh. "Satellite constellation build-up via three-body dynamics," P*roceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*,vol. 228, no.1, pp. 155-160, 2014.

[33] R. Barrio, and F. Blesa. "Systematic search of symmetric periodic orbits in 2DOF Hamiltonian systems." *Chaos, Solitons & Fractals*,vol. 41, no.2, pp. 560-582, 2009.