JSST

10.30699/JSST.2021.1260 Vol. 13/ Issue. 4/ 2020 (No. 45)
pp. 1-13

Research Paper

Proportional Navigation with Linear Acceleration and Line-of-Sight Acceleration Feedback

S.H. Jalali-Naini[1]* and A. Arabian Arani[2]

1,2. Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

***shjalalinaini@modares.ac.ir**

This paper suggests modified proportional navigation (PN) with a weighted combination of linear acceleration and line-of-sight (LOS) acceleration feedback. For this purpose, a comprehensive miss distance analysis is carried out for PN with linear acceleration feedback and PN with LOS acceleration feedback using a fifth-order binomial guidance and control system. The miss distance (MD) due to initial heading error, target acceleration, and seeker noise are separately analyzed. A modified PN with acceleration feedback using variable gains is suggested based on MD analysis for infrared seekers as a special case. The PN strategies are compared using an equivalent effective navigation ratio, defined using the LOS rate profile solution. In addition, the first-order optimal guidance law is converted into PN with PD block with variable gains.

Keyword: Proportional navigation, LOS Acceleration feedback, Miss distance analysis, Effective navigation ratio, Optimal guidance

1. Associate Professor (Corresponding Author)
2. PhD Student

Received: 2020.02.09 / Accepted: 2020.10.14 /Publish Online: 2020.11.14/Online ISSN: 2423-4516 / Print ISSN: 2008-4560

JSST
دوره ۱۳ / شمارهٔ ۴/ زمستان ۱۳۹۹ (شماره پیاپی ۴۵)
ص. ص. ۱۳- ۱
10.30699/JSST.2021.1260

مقاله علمی– پژوهشی

هدایت تناسبی با بازخورد شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای خطدید

سید حمید جلالی نائینی[1*] و علی عربیان آرانی[2]

۱و ۲- دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

***shjalalinaini@modares.ac.ir**

در این مقاله، قانون هدایت تناسبی با بازخورد ترکیب وزنی شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای خطدید پیشنهاد شده است. برای این منظور، تحلیل فاصله خطای جامعی برای هدایت تناسبی با بازخورد شتاب خطی و هدایت تناسبی با بازخورد شتاب زاویه‌ای خطدید ناشی از خطای سمت اولیه، مانور هدف و نویز جستجوگر صورت پذیرفته است. سیستم هدایت و کنترل با تابع تبدیل دوجمله‌ای مرتبهٔ پنجم مدل شده است. در حالت خاص و برمبنای تحلیل فاصلهٔ خطا، هدایت تناسبی با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره برای جستجوگرهای مادون قرمز پیشنهاد شده است. مقایسهٔ استراتژی‌های هدایت تناسبی با استفاده از ضریب ناوبری مؤثر معادل که بر اساس حل پروفیل نرخ چرخش خطدید تعریف شده، صورت پذیرفته است. به علاوه، قانون هدایت بهینهٔ مرتبه اول به فرم هدایت تناسبی با بلوک تناسبی– مشتقی با بهره‌های متغیر تبدیل شده است.

واژه‌های کلیدی: ناوبری تناسبی، بازخورد شتاب زاویه‌ای خطدید، تحلیل فاصله خطا، ضریب ناوبری مؤثر، هدایت بهینه

علائم و اختصارات

بردار شتاب	$\boldsymbol{a}$
بردار یکه در راستای خطدید	$\boldsymbol{e}_r$
بردار یکه در راستای عمود بر خطدید	$\boldsymbol{e}_\sigma$
مرتبه سیستم کنترل	n
شتاب موشک	n_{L}
شتاب هدف	n_{T}
ضریب ناوبری مؤثر	N_{eff}
ضرایب ثابت	$N_{\mathrm{P}}, N_{\mathrm{D}}$
بردار موقعیت نسبی	$\boldsymbol{r}$
فاصله نسبی	r
فاصله مرجع	R_A
متغیر حوزهٔ لاپلاس	s
زمان	t
زمان باقیمانده تا اصابت به هدف	t_{go}
زمان اصابت به هدف	t_f
ثابت زمانی معادل سیستم	T
ثابت زمانی اجزای سیستم کنترل	T_j
نویز اندازه‌گیری زاویهٔ خطدید	u_N
ورودی مدل نویز تابش	u_{GL}
ورودی نویزِ مستقل از فاصله	u_{FN}
ورودی مدل نویز وابسته به فاصله (نیمه‌فعال)	u_{RN}
ورودی مدل نویز وابسته به فاصله (فعال)	u_{RNA}
بردار سرعت، بردار سرعت نسبی	$\mathbf{v}$
سرعت نزدیک شدن رهگیر به هدف	v_c
متغیرهای حالت سیستم هدایت و کنترل	x_j
زاویهٔ خطدید	λ, σ
نرخ چرخش خطدید	$\dot{\sigma}$
چگالی طیفی توان برای ورودی مدل نویز	Φ
ضریب وزنی	ω

پایین‌نویس:

نمایانگر مقدار فرمان	c
مؤلفه در راستای خطدید	LOS
رهگیر	M

۱. دانشیار گروه هوافضا (نویسنده مخاطب)
۲. دانشجوی دکتری

دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۲۰ ، پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۷/۲۳ / چاپ الکترونیکی: ۱۳۹۹/۱۰/۰۱ / شاپای الکترونیکی: ۲۴۲۳-۴۵۱۶ / شاپای چاپی: ۴۵۱۶-۲۰۰۸

مؤلفه در راستای عمود بر خطدید	PLOS
مؤلفه در راستای خطدید	r
هدف	T
مؤلفه در راستای عمود بر خطدید	σ

بالانویس:

مشتق اول نسبت به زمان	$\dot{(\,)}$
مشتق دوم نسبت به زمان	$\ddot{(\,)}$

مقدمه

هدایت ناوبری تناسبی و استراتژی‌های بهبود یافته آن برای بیش از نیم قرن است که در هدایت انواع وسایل متحرک به ویژه در مسئلهٔ رهگیری اهداف متحرک بکار می‌رود. در این روش، دستور شتاب متناسب با نرخ چرخش خطدید محاسبه می‌شود [۳-۱]. اگرچه قانون هدایت ناوبری تناسبی یا به اختصار «هدایت تناسبی» حل بهینه برای مسئلهٔ خطی‌شده است [۴]، اما از ابتدای ابداع آن در دسته قوانین هدایت کلاسیک منظور شده‌است. بخشی از استراتژی‌های بهبود یافته هدایت تناسبی در چهارچوب روش‌های کلاسیک دسته‌بندی می‌شود.

قوانین هدایت مدرن که با ظهور روش‌های کنترل مدرن توسعه یافته‌اند، معایب و مزایای خاص خود را دارند. از جمله این روش‌ها می‌توان از کنترل بهینه، کنترل مود لغزشی، کنترل پیش‌بین، کنترل مقاوم نام برد. به‌طور نمونه در قوانین هدایت مبتنی بر کنترل بهینه، فرض بر این است که مسیر آتی هدف برای رهگیر از پیش معلوم است؛ اما در قوانین هدایت مبتنی بر تئوری بازی‌ها این پیش‌فرض اعمال نمی‌شود [۶-۴]. تعداد پارامترهای لازم در قوانین هدایت مدرن به‌طور معمول بیشتر از هدایت تناسبی است و با توجه به عدم قطعیت، نویز اندازه‌گیری و اغتشاش، به‌طور تقریبی تخمین زده می‌شود. لذا عملکرد قوانین هدایت مدرن وابسته به این عوامل بوده و در خطای نهایی تعیین‌کننده است [۷]. به علاوه، بررسی عملکرد و پایداری قوانین هدایت مدرن اغلب در مقایسه با قوانین هدایت کلاسیک پیچیده است.

با توجه به ظهور اهداف چابک و سریع و بدون سرنشین با قابلیت مانور بالا و ابعاد کوچک‌تر، مسئلهٔ اساسی در این زمینه، رهگیری این نوع اهداف با دقت بالا و در محیطی با حضور نویز و عدم قطعیت است [۶]. با توجه به قدمت هدایت تناسبی و مطالعات انجام شده و منتشر شده از سال ۱۹۴۸ تاکنون و شناسایی جنبه‌های مختلف تئوری، عملی و پیاده‌سازی آن، در صنعت علاقه وافری برای اصلاح هدایت تناسبی به روش کلاسیک وجود دارد. البته شایان ذکر است که مرز دقیقی بین قوانین منتجِ هدایت کلاسیک و مدرن وجود ندارد. به عبارت دیگر، ممکن است دو روش کلاسیک و مدرن منجر به یک استراتژی بهبود یافته هدایت تناسبی شود.

در دسته‌ای از قوانین هدایت نئوکلاسیک، دستور شتاب هدایت تناسبی از یک تابع تبدیل پیش فاز–پس فاز یا به‌طور کلی یک تابع تبدیل عبور داده می‌شود [۹-۸]. برای این دسته از قوانین هدایت با استفاده از روش‌های کنترل کلاسیک و تحلیل فاصله خطا، تابع تبدیل مذکور طراحی می‌شود. البته ذکر عبور نرخ چرخش خطدید یا دستور شتاب از بلوک PD/PID در منابع به زمان قبل‌تری بر می‌گردد [۲]. استفاده از فیدبک شتاب زاویه‌ای خطدید در مرجع [۱۰] آمده است. اگرچه در مقاله مذکور قانون هدایت به‌صورت سه‌بعدی توسعه یافته اما تحلیل فاصله خطای ضعیفی در حضور نویز دارد.

یک دسته از استراتژی‌های بهبودیافته در هدایت تناسبی، طراحی/تنظیم ضریب ناوبری مؤثر به‌صورت متغیر است. انتخاب ضریب ناوبری مؤثر تنها به صورت تابعی از زمان یا تابعی از زمان باقیمانده تا اصابت، در هدایت تناسبی به عنوان هدایت پایانی نتایج مطلوبی نداشته است. یک نمونه از این تحلیل در مرجع [۱۱] ارائه شده‌است. در اکثر مطالعات در این خصوص، ضریب ناوبری مؤثر تابعی از خطای روش هدایت (خطای زاویهٔ سمت یا نرخ چرخش خطدید) اتخاذ شده‌است. بطور نمونه مرجع [۱۲] به صورت تجربی، ضریب ناوبری مؤثر را تابعی از خطای زاویه پیشنهاد داده‌است؛ اما در دسته‌ای دیگر، ضریب ناوبری شامل توان‌های غیر واحد برای نرخ چرخش خطدید می‌باشد [۱۵-۱۳].

در مقاله حاضر، فرم دیگری از استراتژی‌های هدایت تناسبی با جایگزینی کمیت شتاب خطی در روابط هدایت با عبارتی شامل شتاب زاویه‌ای (و برعکس) ارائه شده‌است. به علاوه، قانون هدایت تناسبی به فرم PD «با بهرهٔ اصلاح شده و متغیر» برای رهگیرهای با سیستم مادون قرمز پیشنهاد شده‌است. در ادامه و در حالت خاص، قانون هدایت بهینه مرتبه اول به فرم هدایت تناسبی با بلوک PD با بهره‌های متغیر تبدیل شده‌است، که دید قابل توجهی در درک و اصلاح قوانین هدایت دونقطه‌ای ایجاد می‌کند. این ساختار، زمینه ترکیب این قوانین هدایت و سوئیچ هموار به یکدیگر را فراهم می‌آورد.

معادلات غیرخطی سیستم در مختصات قطبی

در شکل ۱ هندسه درگیری رهگیر M و هدف T به صورت جرم نقطه‌ای در مختصات قطبی $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\sigma})$ نشان داده شده‌است، که در آن معادلات بردار سرعت و شتاب هدف نسبت به رهگیر به صورت زیر نوشته می‌شود [۳]:

$$\mathbf{v} = d\boldsymbol{r}/dt = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\sigma}\boldsymbol{e}_\sigma \qquad (۱)$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\sigma}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\sigma} + 2\dot{r}\dot{\sigma})\boldsymbol{e}_\sigma \qquad (۲)$$

که در روابط فوق، $\boldsymbol{r}$، $\mathbf{v}$ و $\boldsymbol{a}$ به ترتیب بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب هدف نسبت به رهگیر است. همچنین، بردارهای یکه در

راستای «خطدید رهگیر به هدف» و عمود بر آن به ترتیب با $\boldsymbol{e_r}$ و $\boldsymbol{e_\sigma}$ نشان داده شده‌است. در حالت کلی روابط زیر برقرار است:

$$\ddot{r} - r\dot{\sigma}^2 = (a_{\mathrm{T}} - a_{\mathrm{M}})_{\mathrm{LOS}} \quad (۳)$$

$$r\ddot{\sigma} + 2\dot{r}\dot{\sigma} = (a_{\mathrm{T}} - a_{\mathrm{M}})_{\mathrm{PLOS}} \quad (۴)$$

که در آن، پایین نویس **LOS** و **PLOS** به ترتیب نمایانگر مؤلفه در راستای خطدید و عمود بر خطدید است. به عبارت دیگر، $\boldsymbol{a}_{\mathbf{M_{PLOS}}}$ و $\boldsymbol{a}_{\mathbf{T_{PLOS}}}$ به ترتیب مؤلفه‌های شتاب رهگیر و هدف در راستای عمود بر خطدید هستند.

اگر فرض کنید که معادلات دیفرانسیل حاکم در جهت عمود بر خطدید به صورت زیر باشد:

$$r\ddot{\sigma} + 2\dot{r}\dot{\sigma} = N_{\mathrm{P}}\dot{r}\dot{\sigma} - N_{\mathrm{D}}r\ddot{\sigma} \quad (۵)$$

رابطهٔ نرخ چرخش خطدید $(\dot{\sigma})$ و فاصله نسبی (r) در حالت بی‌بعد به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\sigma}/\dot{\sigma}_0 = (r/r_0)^{N_{\mathrm{eff}}-2} \quad (۶)$$

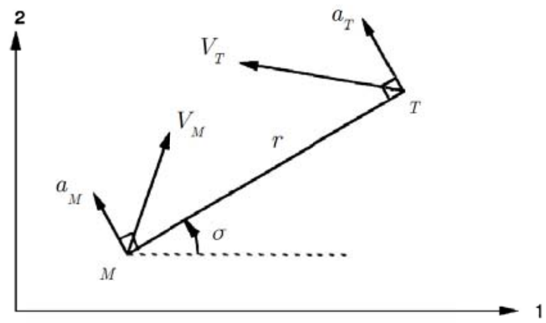
$$N_{\mathrm{eff}} = 2 + (N_{\mathrm{P}} - 2)/(1 + N_{\mathrm{D}}) \quad (۷)$$

که در آن، N_{P} و N_{D} ضرایب ثابت هستند. همان‌طورکه از رابطه (۶) ملاحظه می‌شود، N_{eff} همان اثر ضریب ناوبری مؤثر در هدایت تناسبی حقیقی را خواهد داشت. در مقالهٔ حاضر، ملاک مقایسه استراتژی‌های هدایت تناسبی به ازای مقادیر یکسان N_{eff} خواهد بود. این موضوع برای بحث پایداری اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در پیوست الف نشان داده شده‌است که N_{eff} بهره DC برای تابع تبدیل $a_{\mathrm{M_{PLOS}}}/v_c\dot{\sigma}$ می‌باشد.

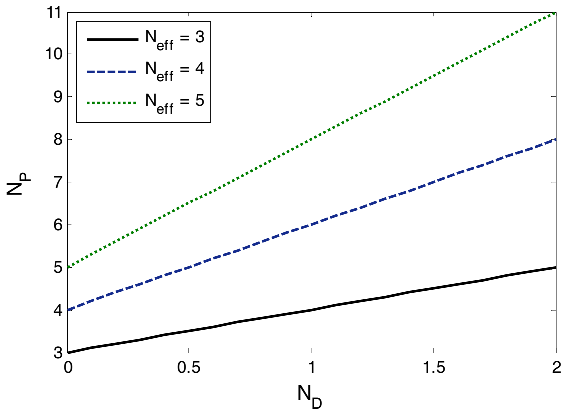
در شکل ۲ نمودار N_{P} برحسب N_{D} به ازای مقادیر ثابتِ ضریب ناوبری مؤثر نشان داده شده‌است. رابطه آن نیز با بازنویسی رابطه (۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N_{\mathrm{P}} = 2 + (1 + N_{\mathrm{D}})(N_{\mathrm{eff}} - 2) \quad (۸)$$

با استفاده از نتایج حاصل، دستور شتاب به صورت رابطه (۹) در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۱- هندسه درگیری رهگیر و هدف در مختصات قطبی



شکل ۲- نمودار N_{P} برحسب N_{D} به ازای مقادیر ثابتِ ضریب ناوبری مؤثر $N_{\mathrm{eff}} = 3, 4, 5$

$$a_c = N_{\mathrm{P}}v_c\dot{\sigma} + N_{\mathrm{D}}r\ddot{\sigma} + N_a a_{\mathrm{T_{PLOS}}} \quad (۹)$$

قانون هدایت فوق، هدایت تناسبی با بازخورد شتاب زاویه‌ای است که در آن N_a ضریب شتاب هدف، متناظر با هدایت تناسبی افزوده است. دو ترم اول قانون هدایت (۹) بدون احتساب v_c (با فاکتورگیری از آن)، در واقع عبور نرخ چرخش خطدید از بلوک PD با بهره مشتق‌گیر متغیر است.

درصورتی که رابطه (۸) در رابطه (۹) جایگذاری شود، قانون هدایت مذکور به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_c = \left(2 + \frac{1+N_{\mathrm{D}}}{N_{\mathrm{eff}}-2}\right) v_c\dot{\sigma} + N_{\mathrm{D}}r\ddot{\sigma} + N_a a_{\mathrm{T_{PLOS}}} \quad (۱۰)$$

با جایگذاری برای $r\ddot{\sigma}$ از رابطه (۴) در رابطه قانون هدایت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_c = {} & (N_{\mathrm{P}} + 2N_{\mathrm{D}})v_c\dot{\sigma} - N_{\mathrm{D}}a_{\mathrm{M_{PLOS}}} \\ & + (N_{\mathrm{D}} + N_a)a_{\mathrm{T_{PLOS}}} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

و یا با حذف N_{P}:

$$\begin{aligned} a_c = {} & (1 + N_{\mathrm{D}})\left(\frac{2N_{\mathrm{eff}}-3}{N_{\mathrm{eff}}-2}\right) v_c\dot{\sigma} - N_{\mathrm{D}}a_{\mathrm{M_{PLOS}}} \\ & + (N_{\mathrm{D}} + N_a)a_{\mathrm{T_{PLOS}}} \end{aligned} \quad (۱۲)$$

درصورتی که سیستم توانایی تخمین شتاب هدف را نداشته باشد، دو قانون هدایت به صورت زیر منتج می‌شود:

$$a_c = N_{\mathrm{P}}v_c\dot{\sigma} + N_{\mathrm{D}}r\ddot{\sigma} \quad (۱۳)$$

$$a_c = (N_{\mathrm{P}} + 2N_{\mathrm{D}})v_c\dot{\sigma} - N_{\mathrm{D}}a_{\mathrm{M_{PLOS}}} \quad (۱۴)$$

شایان ذکر است که در حالت سیستم کنترل ایده‌ال (ثابت زمانی صفر) دو رابطه فوق در حالت هدف بدون مانور از لحاظ ریاضی برابر بوده اما در صورت وجود مانور هدف، متفاوت می‌شوند. البته در پیاده‌سازی به علت حضور نویز در حالت هدف بدون مانور نیز دو قانون فوق بیان‌شده نتایج یکسانی نخواهند داشت. البته باید توجه داشت که دو رابطه مذکور در حالت سیستم کنترل ایده‌ال، از لحاظ فیزیکی امکان‌پذیر نیست (حداقل مرتبهٔ سیستم باید مرتبه

یک باشد). در حالت هدف با مانور، قانون هدایت (۱۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_c = N_\mathrm{P} v_c \dot{\sigma} + N_\mathrm{D} r \ddot{\sigma} \\ = (N_\mathrm{P}+2N_\mathrm{D}) v_c \dot{\sigma} - N_\mathrm{D} a_{\mathrm{M_{PLOS}}} \;\; + N_\mathrm{D} a_{\mathrm{T_{PLOS}}} \tag{۱۵}$$

قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳) در مقایسه با قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی مطابق رابطه (۱۴)، به‌طور ذاتی کسری از شتاب هدف را (با ضریب N_D) جبران می‌کند. با این وصف، انتظار می‌رود که در مجموع، قانون هدایت (۱۳) در حالت هدف با مانور، خطای نهایی کمتری داشته باشد.

در قانون هدایت رابطه (۱۳) می‌توان بجای r از تقریب $v_c t_{go}$ استفاده کرد [۱]. به علاوه در انتهای مسیر پرواز که مقدار r به صفر نزدیک می‌شود، رابطه (۱۳) به قانون هدایت تناسبی تبدیل شده و اثر مشتق‌گیر در PD از بین می‌رود. اگر در یک بازهٔ زمانی بسیار کوتاه در انتهای مسیر پرواز، حداقل مقداری برای ضریب مشتق‌گیر لحاظ شود، انتظار می‌رود در اصلاح مسیر، نتایج بهبود یابد؛ به عبارت دیگر،

$$a_c = \begin{cases} N_\mathrm{P} v_c \dot{\sigma} + N_\mathrm{D} r \ddot{\sigma} & \text{for} \quad t_{go} > \beta T \\ N_\mathrm{P} v_c (\dot{\sigma} + \alpha T \ddot{\sigma}) & \text{for} \quad t_{go} \le \beta T \end{cases} \tag{۱۶}$$

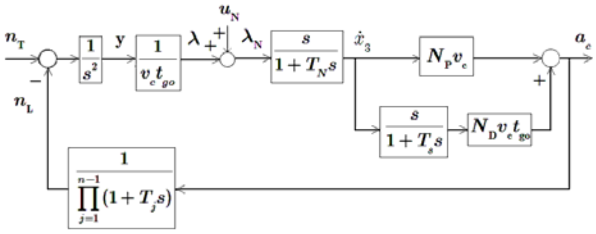
که در آن، T تقریبی از ثابت زمانی معادل سیستم است و α و β ضرایب ثابتی هستند.

شایان ذکر است ضریب ناوبری N_P را بطور مشابه می‌توان از رابطه (۸) در روابط (۱۳) ، (۱۴) و (۱۶) جایگزین کرد.

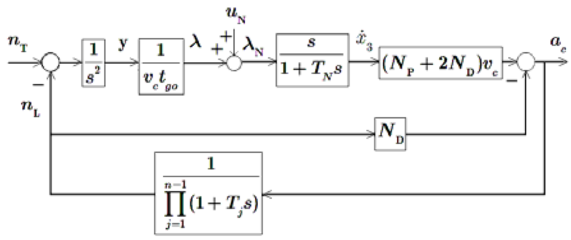
استخراج معادلات سیستم الحاقی

نمودار بلوکی مسئلهٔ خطی‌شده هدایت بر اساس روابط (۱۳)، (۱۴) و (۱۶) در شکل‌های ۳ تا ۵ ترسیم شده‌است که در آن s متغیر حوزهٔ لاپلاس است. زاویهٔ خطدید (λ) کوچک فرض شده‌است و نسبت به خطدید اولیه (محور ۱ در شکل ۱) سنجیده می‌شود (λ همان σ در بخش قبل است). شتاب موشک ($n_\mathrm{L} = a_{\mathrm{M_{PLOS}}}$) و شتاب هدف ($n_\mathrm{T}$) تنها در راستای عمود بر خطدید اولیه (راستای محور ۲ در شکل ۱) در نظر گرفته شده‌است. در نمودارهای بلوکی مذکور، v_c سرعت نزدیک شدن رهگیر به هدف (که ثابت فرض شده)، y تصویر فاصله هدف از رهگیر در راستای محور ۲، T_N و T_s ثابت زمانی فیلترهای مرتبه اول و $t_{go} = t_f - t$ زمان باقیمانده تا اصابت (یا کمترین فاصله) است. زمان نهایی t_f نیز از قبل مقداردهی می‌شود. همچنین، u_N نویز اندازه‌گیری زاویهٔ خطدید است که در مرجع [۱] به‌صورت رابطه (۱۷) مدل شده‌است:

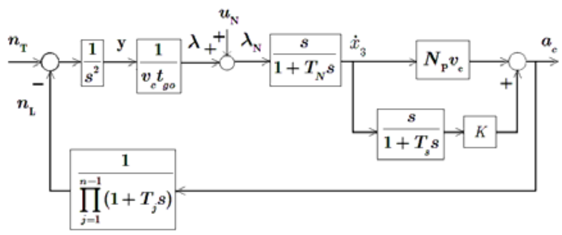
$$u_N = \frac{u_\mathrm{GL}}{v_c t_{go}} + u_\mathrm{FN} + \frac{v_c t_{go}}{R_A} u_\mathrm{RN} \\ + \left(\frac{v_c t_{go}}{R_A}\right)^2 u_\mathrm{RNA} \tag{۱۷}$$



شکل ۳- نمودار بلوکی مسئله خطی برای قانون هدایت رابطه (۱۳)



شکل ۴- نمودار بلوکی مسئله خطی برای قانون هدایت رابطه (۱۴)



شکل ۵- نمودار بلوکی مسئله خطی برای قانون هدایت رابطه (۱۶)

که در آن، u_GL ورودی مدل نویز تابش (بر حسب متر)، u_FN ورودی نویزِ مستقل از فاصله (بر حسب رادیان)، u_RN ورودی مدل نویز وابسته به فاصله برای سیستم نیمه‌فعال (بر حسب رادیان) و u_RNA ورودی مدل نویز وابسته به فاصله برای سیستم فعال (بر حسب رادیان) است. این ورودی‌ها به‌صورت نویز سفید فرض شده و چگالی طیفی توان آنها با Φ و همان اندیس ورودی متناظر نمایش داده می‌شود. شایان ذکر است که واحد Φ_GL متر مربع بر هرتز و واحد چگالی نویز بقیه برابر مجذور رادیان بر هرتز است. چگالی طیفی نویزهای وابسته به فاصله به ازای یک فاصلهٔ مرجع R_A داده می‌شود. تابع تبدیل سیستم کنترل با توابع تبدیل دوجمله‌ای به صورت رابطه (۱۸) مدل شده‌است ($\mathrm{n} \ge 2$):

$$\frac{n_\mathrm{L}}{a_c}(s) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\mathrm{n}-1}(1+T_j s)} \tag{۱۸}$$

در رابطه فوق، T_j نمایانگر ثابت‌های زمانی اجزای سیستم کنترل و ($\mathrm{n}-1$) مرتبه تابع تبدیل سیستم کنترل است. مقدار K در بلوک دیاگرام شکل ۵ با توجه به رابطه (۱۹) و تقریب $r = v_c t_{go}$ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$K = \begin{cases} N_\mathrm{D} v_c t_{go} & \text{for} \quad t_{go} > \beta T \\ N_\mathrm{P} v_c \alpha T & \text{for} \quad t_{go} \le \beta T \end{cases} \tag{۱۹}$$

معادلات رسته یک برای مسئلهٔ خطی‌شده در پیوست ب ارائه شده‌است. از این معادلات برای محاسبه فاصله خطا در روش مستقیم (به منظور صحه‌گذاری) استفاده شده‌است.

با اعمال قواعد روش الحاقی مطابق مرجع [۱]، نمودارهای بلوکی شکل‌های ۳ تا ۵ به ترتیب به نمودارهای بلوکی شکل‌های ۶ تا ۸ تبدیل می‌شود، که معادلات رسته یک آن تنها در حضور نویز (و لذا با حذف بلوک خطچین در نمودارهای بلوکی مذکور) به صورت زیر می‌شود.

$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{۲۰}$$

$$\dot{x}_3 = y/v_c t \tag{۲۱}$$

$$\dot{x}_4 = y \tag{۲۲}$$

$$\dot{x}_5 = -\begin{cases} \dfrac{x_2 + x_5}{T_1} & \text{for TPN, Eqs.}(13,16) \\ \dfrac{x_2 + x_{n+3}N_{\mathrm{D}} + x_5}{T_1} & \text{for Eq.}(14) \end{cases} \tag{۲۳}$$

$$\begin{cases} \text{for } j = 6:1:\mathrm{n}+3 \\ \quad \dot{x}_j = (x_{j-1} - x_j)/T_j \\ \text{end} \end{cases} \tag{۲۴}$$

$$\dot{x}_{n+4} = \begin{cases} -\dfrac{x_{n+4}}{T_s} + \dfrac{x_{n+3}N_{\mathrm{D}}v_c t}{T_s} & \text{for Eq.}(13) \\ \text{N/A or } 0 & \text{for TPN, Eq.}(14) \\ -\dfrac{x_{n+4}}{T_s} + \dfrac{v_c x_{n+3}}{T_s}k & \text{for Eq.}(16) \end{cases} \tag{۲۵}$$

که در سطر سوم آن، مقدار k برابر است با:

$$k = \begin{cases} N_{\mathrm{D}}t & \text{for } t > \beta T \\ N_{\mathrm{P}}\alpha T & \text{for } t \le \beta T \end{cases} \tag{۲۶}$$

$$\dot{x}_{\mathrm{FN}} = y^2 \tag{۲۷}$$

$$\dot{x}_{RN} = (y v_c t/R_A)^2 \tag{۲۸}$$

$$\dot{x}_{RNA} = y^2 (v_c t/R_A)^4 \tag{۲۹}$$

$$\dot{x}_{\mathrm{GL}} = (y/v_c t)^2 \tag{۳۰}$$

که در آن،

$$y = \frac{N_{\mathrm{P}}v_c x_{n+3} - x_4}{T_N} + \begin{cases} 0 & \text{for TPN} \\ \dot{x}_{n+4} & \text{for Eqs.}(13,16) \\ 2N_D v_c x_{n+3} & \text{for Eq.}(14) \end{cases} \tag{۳۱}$$

و x_{FN}، x_{RN} و x_{RNA} (بر حسب $\mathrm{m^2/s}$) و x_{GL} (بر حسب 1/s) متغیرهای حالت بعد از بلوک‌های انتگرال‌گیر در مدل الحاقی مربوط به نویزهای متناظر در شکل ۶ است. البته در حل عددی، مقادیر اولیهٔ متغیرهای حالت، بجز $x_3(0) = 1$، برابر صفر لحاظ می‌شود [۱]. با توجه به شکل ۶، انحراف استاندارد فاصلهٔ خطای نهایی ناشی از نویز جستجوگر (σ) به صورت زیر نوشته می‌شود [۱]:

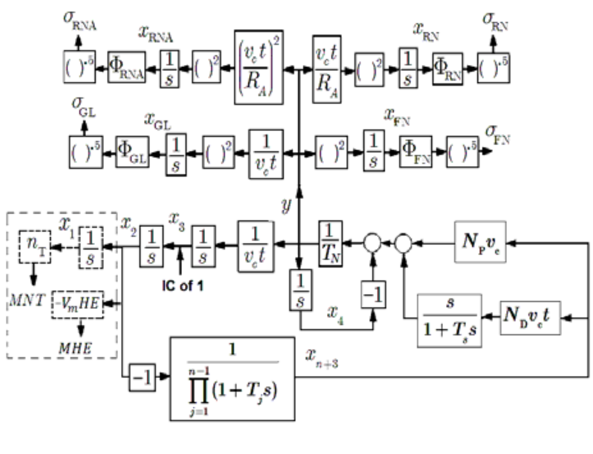
$$\sigma_j = \sqrt{\Phi_j x_j(\infty)}, \qquad \mathrm{j = GL, FN, RA, RNA} \tag{۳۲}$$

معادلات روش الحاقی در حالت معیّن (بدون حضور نویز) به منظور محاسبهٔ فاصله خطا ناشی از خطای سمت اولیه (MHE) و فاصله خطا ناشی از مانور ثابت هدف (MNT) با فعال نمودن بلوک خطچین و حذف بخش فوقانی نمودار بلوکی شکل ۶ حاصل می‌شود. برای این حالت باید رابطه $\dot{x}_1 = x_2$ به ابتدای معادلات بخش قبل افزوده و معادلات (۲۷) تا (۳۰) حذف شود. در این حالت نیز مقادیر اولیهٔ متغیرهای حالت، بجز $x_3(0) = 1$، برابر صفر است.

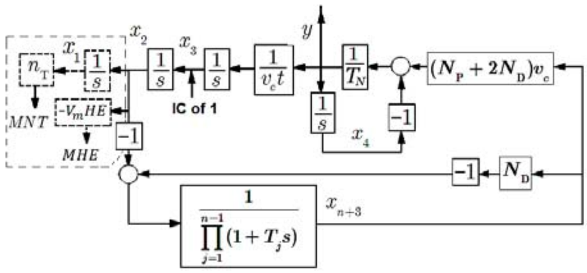
در ادامه، فاصله خطای قوانین هدایت دونقطه‌ای مورد بحث به ازای $\mathrm{n} = 5$، $v_c = 800\ \mathrm{m/s}$، $\Phi_{\mathrm{FN}} = 2\times10^{-8}\ \mathrm{Rad^2/Hz}$، $\Phi_{\mathrm{GL}} = 0.93\ \mathrm{m^2/Hz}$ و همچنین مقادیر $T_N = T_j = T/\mathrm{n}$ بررسی شده است $(T = 0.4\ \mathrm{s})$. در ابتدا نمودار فاصله خطا ناشی از انحراف سمت اولیه (۲۰ درجه)، مانور هدف (۱۰g) و نویزهای مستقل از فاصله و تابش تحت «قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳)» به ترتیب در شکل‌های ۹ تا ۱۲ ترسیم شده‌است.

در این نمودارها مقادیر N_{P} و N_{D} مطابق رابطه (۷) بگونه‌ای انتخاب شده‌است که ضریب ناوبری N_{eff} ثابت و برابر مقدار ۳ باشد $(T_s = 0.05\ \mathrm{s})$.

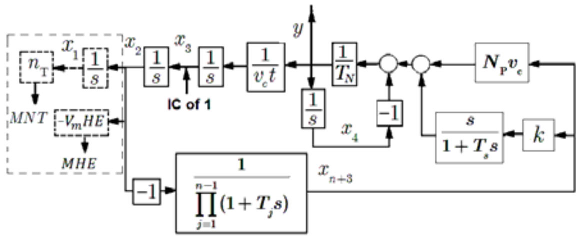
همان‌طورکه از نمودارهای شکل ۹ ملاحظه می‌شود، در حالت خطای سمت اولیه در بازه $0 \le N_{\mathrm{D}} \le 0.9$، افزایش N_{D} سبب کاهش فاصله خطا در قله اول و افزایش در سایر قله‌ها شده‌است؛ اما مطابق شکل ۱۰ در حالت هدف با مانور، در مجموع، افزایش N_{D} سبب کاهش فاصله خطا می‌شود. در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب نمودارهای ریشهٔ مجموع مربعات فاصله خطا ناشی از نویز مستقل از فاصله و نویز تابش، برحسب N_{D} به ازای $N_{\mathrm{eff}} = 3, 4, 5$ ترسیم شده که نمایانگر افزایش مجموع مربعات فاصله خطا با افزایش مقادیر N_{eff} و N_{D} است. در این دو شکل، نتایج مونت کارلو به‌منظور صحه‌گذاری شبیه‌سازی در حضور نویز جستجوگر اضافه شده است.



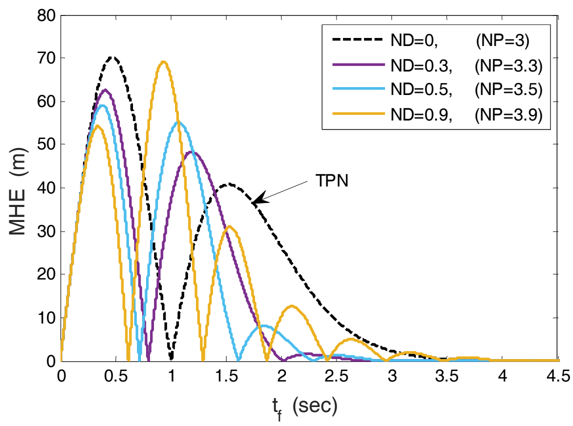
شکل ۶- مدل الحاقی نمودار بلوکی شکل ۳



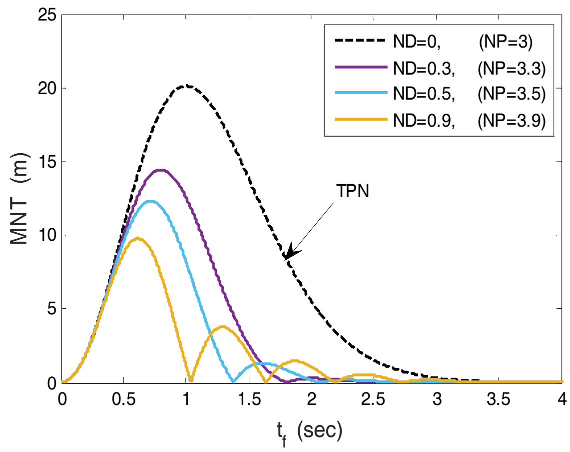
شکل ۷- مدل الحاقی نمودار بلوکی شکل ۴



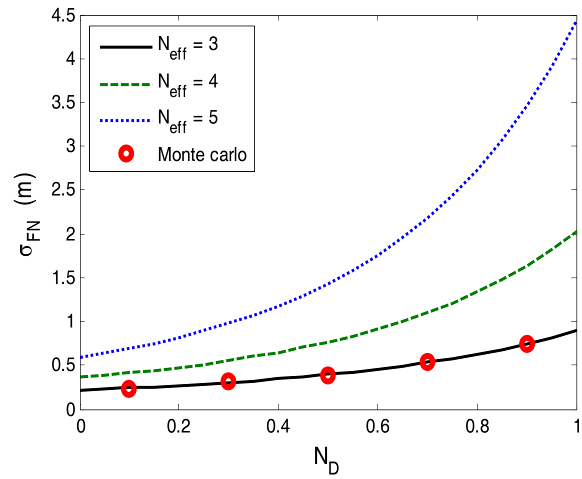
شکل ۸– مدل الحاقی نمودار بلوکی شکل ۵



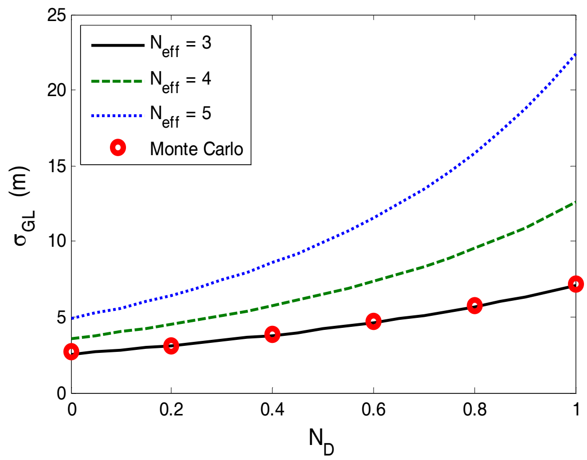
شکل ۹– فاصله خطای «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳)» ناشی از انحراف سمت اولیه $(N_{\mathrm{eff}} = 3)$



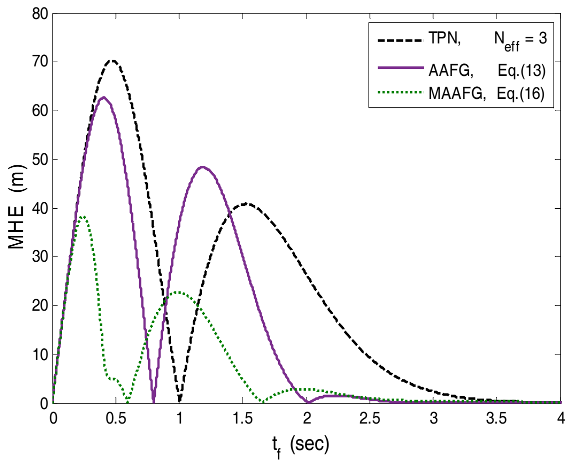
شکل ۱۰- فاصله خطای «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳)» ناشی از مانور ثابت هدف $(N_{\mathrm{eff}} = 3)$



شکل ۱۱– خطای ناشی از نویز مستقل از فاصله تحت قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳)»



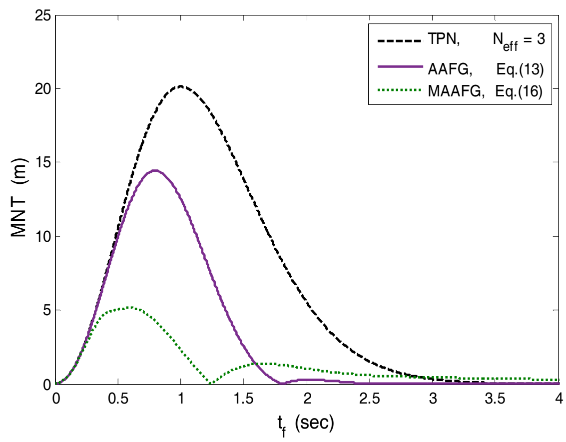
شکل ۱۲– خطای ناشی از نویز تابش تحت قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳)»



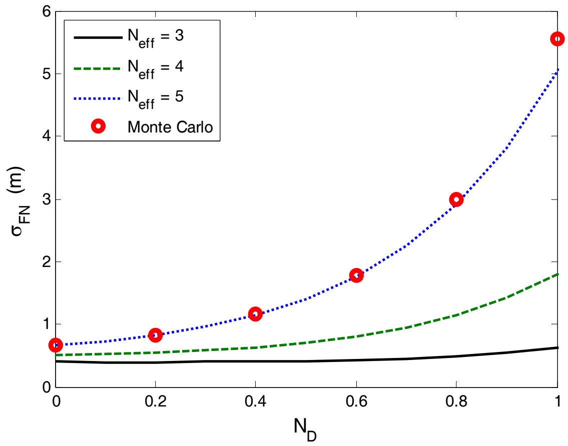
شکل ۱۳– مقایسه فاصله خطای قوانین هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای و اصلاح بهره آن مطابق روابط (۱۳) و (۱۶) ناشی از انحراف سمت اولیه $(\alpha = \beta = 1,\ N_{\mathrm{eff}} = 3,\ N_{\mathrm{D}} = 0.3)$

در ادامه، تحلیل مشابهی تحت «قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره (با نماد MAAFG)» مطابق رابطه (۱۶) صورت پذیرفته و با قانون اصلاح نشده آن (با نماد AAFG در نمودارها) مقایسه شده‌است. قانون اصلاح شده به مقدار قابل توجهی فاصله خطا ناشی از انحراف سمت اولیه را کاهش داده اما به ازای $t_f > 1.5\ \mathrm{s}$ کمی خطای شبه ماندگار مشاهده می‌شود (شکل‌های ۱۳ و ۱۴). همچنین با افزایش مقادیر N_{eff} و N_{D}، ریشه مجموع مربعات فاصله خطا ناشی از نویز مستقل از فاصله و نویز تابش نیز افزایش می‌یابد (شکل‌های ۱۵ و ۱۶).

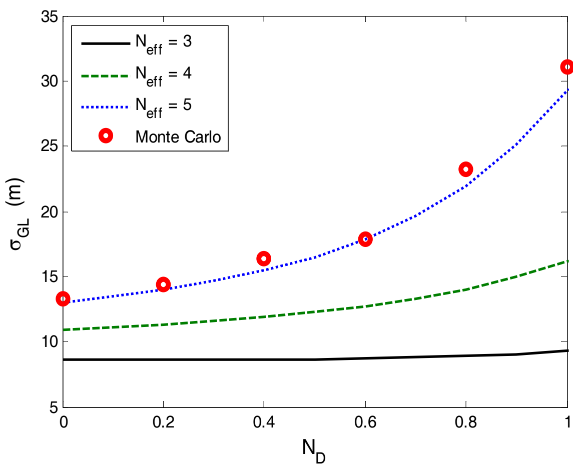
در مرحله بعد، تحلیل فاصله خطا ناشی از انحراف سمت اولیه (به میزان ۲۰ درجه)، مانور هدف (به مقدار ۱۰g) و همچنین ناشی از نویز تحت «قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی (با نماد AFG)» مطابق رابطه (۱۴) صورت می‌پذیرد. همانطور که از نمودارهای شکل ۱۷ ملاحظه می‌شود، انتخاب مناسب N_{D}، سبب بهبود قابل توجه فاصله خطا ناشی از خطای سمت اولیه شده است، همچنین در حالت هدف با مانور ثابت، با افزایش N_{D} از مقدار صفر، فاصله خطا به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد (شکل ۱۸). شایان ذکر است که قانون هدایت مذکور به ازای $N_{\mathrm{D}} = 0$ به هدایت TPN تبدیل می‌شود. مطابق شکل‌های ۱۹ و ۲۰ با افزایش مقادیر N_{eff} و N_{D}، ریشه مجموع مربعات فاصله خطا ناشی از نویز مستقل از فاصله و نویز تابش نیز افزایش می‌یابد. همانطور که از این شکل‌ها ملاحظه می‌شود افزایش مقدار N_{D} باعث افزایش قابل توجه شیب نمودارها شده‌است. شایان ذکر است به منظور صحه‌گذاری شبیه‌سازی‌ها به روش الحاق در حضور نویز جستجوگر، در شکل‌های ۱۵، ۱۶، ۱۹ و ۲۰ نتایج مونت کارلو به ازای ۱۰۰۰ اجرا به نمودارها افزوده شده است.



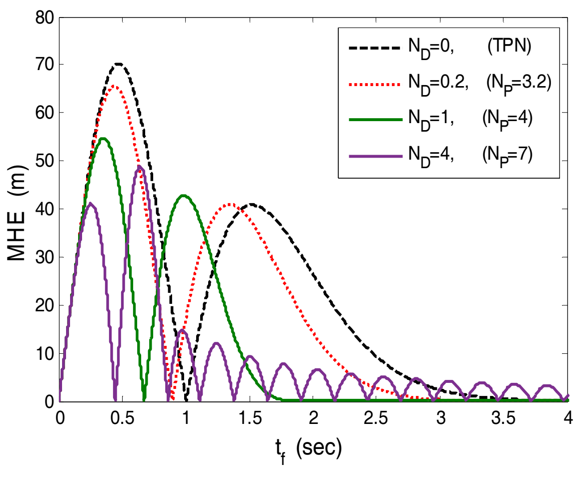
شکل ۱۴– مقایسه فاصله خطای قوانین هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای و اصلاح بهره آن مطابق روابط (۱۳) و (۱۶) ناشی از مانور ثابت هدف $(\alpha = \beta = 1,\ N_{\mathrm{eff}} = 3,\ N_{\mathrm{D}} = 0.3)$



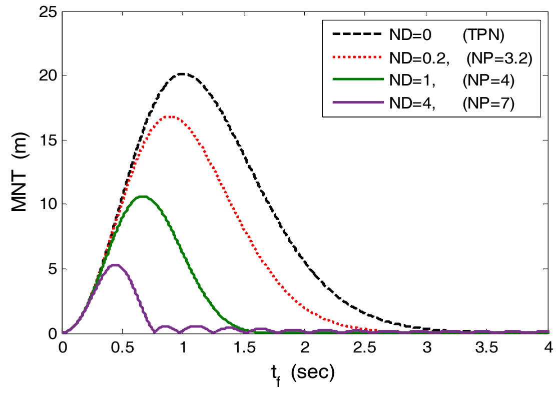
شکل ۱۵- خطای ناشی از نویز مستقل از فاصله تحت قانون«هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره مطابق رابطه (۱۶)»



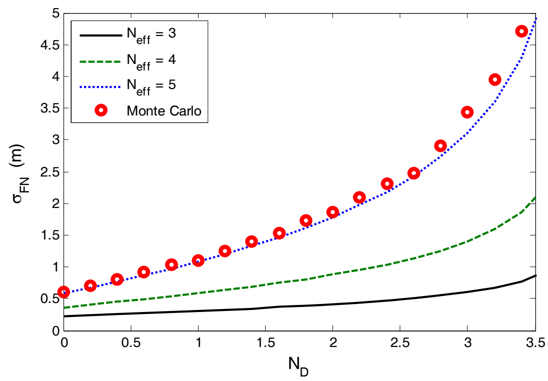
شکل ۱۶- خطای ناشی از نویز تابش تحت قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره مطابق رابطه (۱۶)»



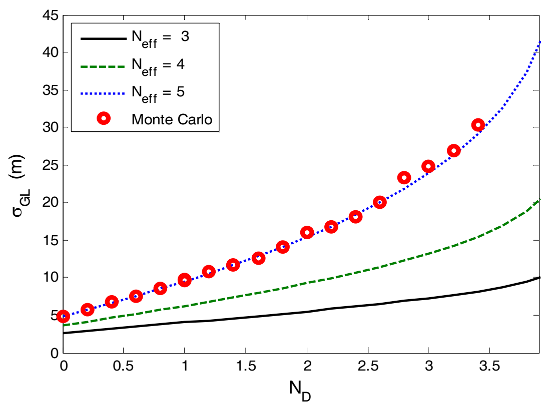
شکل ۱۷– فاصله خطای «هدایت با بازخورد شتاب خطی مطابق رابطه (۱۴)» ناشی از انحراف سمت اولیه $(N_{\mathrm{eff}} = 3)$



شکل ۱۸- فاصله خطای «هدایت با بازخورد شتاب خطی مطابق رابطه (۱۴)» ناشی از مانور ثابت هدف($N_{\mathrm{eff}}=3$)



شکل ۱۹– فاصله خطای «هدایت با بازخورد شتاب خطی مطابق رابطه (۱۴)» ناشی از نویزمستقل از فاصله



شکل ۲۰– فاصله خطای«هدایت با بازخورد شتاب خطی مطابق رابطه (۱۴)» ناشی از نویز تابش

نتایج و بحث

در بخش قبل، فاصله خطای قوانین «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای، با اصلاح بهره و شتاب خطی» بطور اجمال بررسی شد. در ادامه به مقایسه و ارزیابی کامل‌تر عملکرد قوانین هدایت مذکور به ازای ضریب ناوبری $N_{\mathrm{eff}}=3$ پرداخته می‌شود.

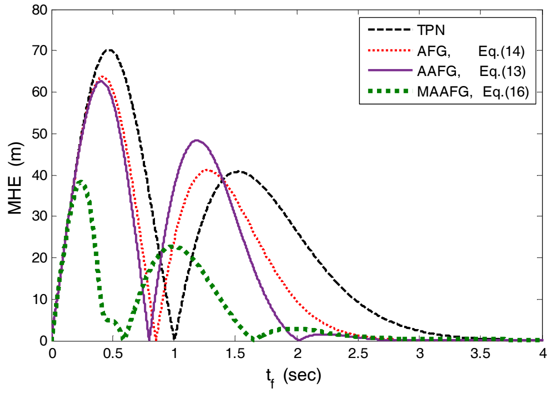
فاصله خطای ناشی از خطای سمت اولیه برای دو قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای و شتاب خطی، در مجموع تقریباً مشابه می‌باشد. این موضوع با توجه به تشابه معادلات ریاضی آنها در حالت سیستم کنترل ایده‌ال، قابل پیش‌بینی بود. البته با استفاده از قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره»، فاصله خطا کاهش قابل توجهی یافته - است (شکل ۲۱). با توجه به معادلات مسئله، انتظار می‌رود فاصله خطای ناشی از مانور هدف برای قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای» کمتر از قانون «هدایت با بازخورد شتاب خطی» باشد؛ چرا که قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای نسبت به قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی، کسری از شتاب هدف را در قانون هدایت اعمال می‌کند. نتایج شکل ۲۲ این موضوع را به ازای $N_{\mathrm{D}} <\approx 0.9$ برای $N_{\mathrm{eff}}=3$ تایید می‌کند. در این حالت نیز قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره» در «بخش اولِ نمودار شامل قلهٔ اول» بهبود قابل توجهی را نتیجه می‌دهد؛ اما مطابق نتایج نمودارهای شکل‌های (۲۳) و (۲۴)، فاصله خطا ناشی از نویز تحت قانون «هدایت با بازخورد شتاب خطی موشک»، کمتر از دو قانون دیگر (با مشتق‌گیری از سیگنال نویزی با استفاده از فیلتر مرتبه اول) است و این موضوع قابل انتظار بود؛ چرا که بازخورد شتاب خطی، ذاتاً شامل نویز عبوریِ فیلتر شده توسط دینامیک سیستم است. برمبنای نتایج مذکور می‌توان گفت، قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره» برای رهگیری با جستجوگرهای مادون قرمز از لحاظ فاصله خطا عملکرد بهتری دارد. در ادامه، تأثیر N_{D} بر مقدار حداکثر نمودارهای فاصله خطا (عمدتاً قله اول) برحسب زمان نهایی پرواز در شکل‌های ۲۵ و ۲۶ بررسی شده‌است. مطابق شکل‌های مذکور، نمودارهای فاصله خطای حاصل از قوانین هدایت (۱۳) و (۱۶) از صفر تا مقدار معینی از N_{D} نزولی است و به ازای مقادیر بزرگترِ N_{D}، نمودارهای فاصله خطا با شیب زیادی افزایش یافته و واگرا می‌شود. نمودار حداکثر فاصله خطا برحسب N_{D} به ازای مقدار معینی از N_{D} کمینه می‌شود. این مقدار معین با $N_{\mathrm{D}}=N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ نمایش داده می‌شود. بطور خلاصه، به ازای $N_{\mathrm{D}}<N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ فاصله خطای قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره» مطابق رابطه (۱۶) در مواجهه با خطای سمت و مانور هدف، کاهش قابل ملاحظه‌ای دارد. اما به ازای $N_{\mathrm{D}}>N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ قانون «هدایت با بازخورد شتاب خطی» مطابق رابطه (۱۴) فاصله خطای کمتری خواهد داشت. شایان ذکر است افزایش N_{D} سبب کاهش ثابت زمانی معادل سیستم می‌شود. این موضوع سبب می‌شود تا نتوان این پارامتر را از حد معینی به ویژه در حضور اثر رادوم افزایش داد. لذا در مجموع با توجه به مطالعه پارامتری حاصل، رابطه زیر پیشنهاد می‌شود. به ازای $N_{\mathrm{D}}<N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ دستور شتاب برابر است با:

$$a_c=\begin{cases} N_{\mathrm{P}}v_c\dot{\sigma}+N_{\mathrm{D}}r\ddot{\sigma} & \text{for} \quad t_{go}>\beta T \\ N_{\mathrm{P}}v_c(\dot{\sigma}+\alpha T\ddot{\sigma}) & \text{for} \quad t_{go}\le\beta T \end{cases} \qquad (\text{۳۳ الف})$$

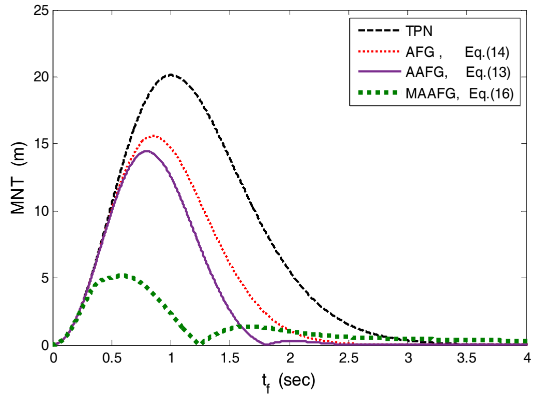
و به ازای $N_{\mathrm{D}} > N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ برابر است با:

$$a_c = (N_{\mathrm{P}}+2N_{\mathrm{D}})v_c\dot{\sigma} - N_{\mathrm{D}}a_{\mathrm{M_{PLOS}}} \qquad (۳۳\text{ب})$$

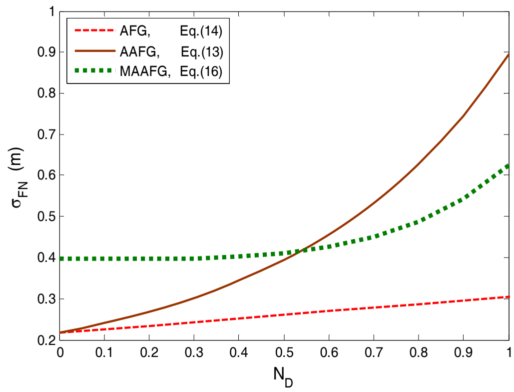
انتخاب $N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ برای رابطهٔ اخیر با توجه به نمودارهای قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره» تعیین می‌شود. به علاوه، رابطه مذکور در توسعهٔ قانون هدایت با مقدار N_{D} متغیر، قابل استفاده خواهد بود.



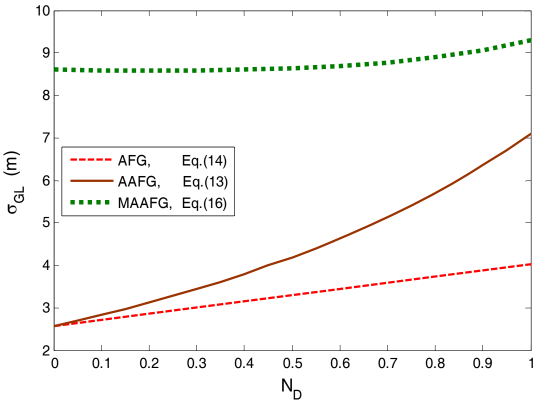
شکل ۲۱– فاصله خطای قوانین هدایت ناشی از انحراف سمت اولیه
$(N_{\mathrm{eff}} = 3,\ N_{\mathrm{D}} = 0.3,\ \mathrm{HE} = 20^{\circ})$



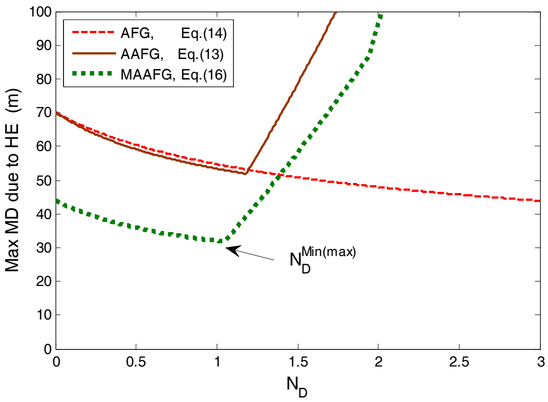
شکل ۲۲– فاصله خطای قوانین هدایت ناشی از مانور هدف
$(N_{\mathrm{eff}} = 3,\ N_{\mathrm{D}} = 0.3,\ a_{\mathrm{T}} = 10g)$



شکل ۲۳-مقایسه خطای قوانین هدایت ناشی از نویز مستقل از فاصله
$(N_{\mathrm{eff}} = 3, v_c = 800\ \mathrm{m/s}, \Phi_{\mathrm{FN}} = 2\times10^{-8}\ \mathrm{Rad^2/Hz}\ )$



شکل ۲۴- مقایسه فاصله خطای قوانین هدایت ناشی از نویز تابش
$(N_{\mathrm{eff}} = 3,\ v_c = 800\ \mathrm{m/s},\ \Phi_{\mathrm{GL}} = 0.93\ \mathrm{m^2/Hz}\ )$



شکل ۲۵– تأثیر N_{D} بر حداکثر فاصله خطا (نسبت به زمان نهایی) ناشی از انحراف سمت اولیه $(N_{\mathrm{eff}} = 3,\ \mathrm{HE} = 20^{\circ})$

در ادامه، اثر ضریب ناوبری مؤثر در مقدار $N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ در نمودارهای شکل‌های ۲۷ و ۲۸ ملاحظه می‌شود. در هر دو شکل، با افزایش N_{eff}، مقدار $N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ کاهش یافته است اما در مجموع مقادیر $N_{\mathrm{D}}^{\mathrm{Min(max)}}$ به ازای قانون «هدایت با بازخورد شتاب خطی» بزرگتر است. به عبارت دیگر، مقادیر بزرگتری از N_{D} را می‌توان با قانون «هدایت با بازخورد شتاب خطی» استفاده کرد (به ویژه در مقابله با هدف با مانور ثابت مطابق شکل ۲۸).

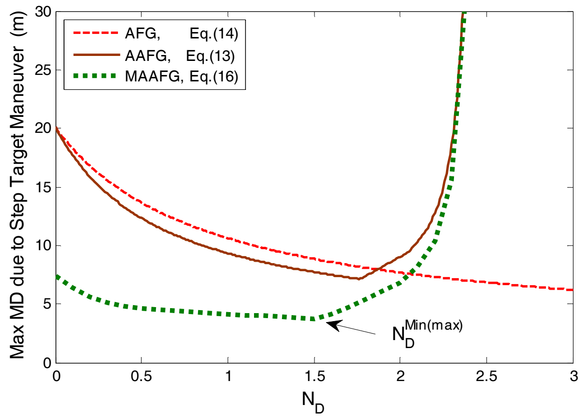
مطابق نتایج حاصل از مطالعه حاضر، ساختار قانون هدایت با ترکیب وزنی شتاب خطی و زاویه‌ای به صورت رابطه (۳۴) پیشنهاد می‌شود.

$$a_c = [N_{\mathrm{P}} + 2(1-\omega)N_{\mathrm{D}}]v_c\dot{\sigma} + \omega N_{\mathrm{D}} r\ddot{\sigma} - (1-\omega)N_{\mathrm{D}}a_{\mathrm{M_{PLOS}}} \qquad (۳۴)$$

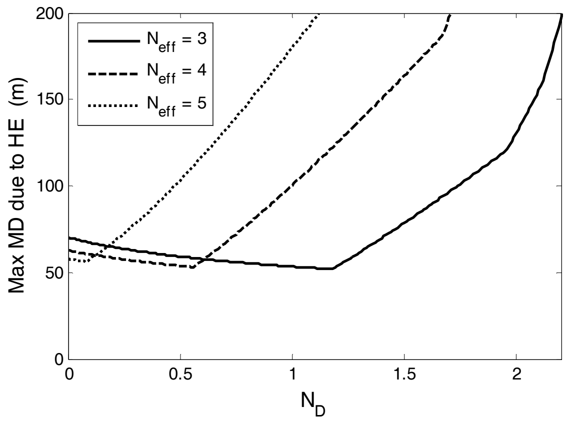
که در آن ω ضریب وزنی است. رابطهٔ اخیر به ازای $\omega = 0$ به قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی مطابق رابطه (۱۴) و به ازای $\omega = 1$ به قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳) تبدیل می‌شود. مقدار ضریب وزنی با تحلیل فاصلهٔ خطا با توجه به دینامیک سیستم و میزان نویز تعیین می‌شود.

شایان ذکر است که راهکار مذکور برای اصلاح ساختار قوانین هدایت شامل شتاب خطی و/یا شتاب زاویه‌ای قابل اعمال است. اگر برای پارامتر z دو تخمین z_1 و z_2 موجود باشد، می‌توان نوشت:

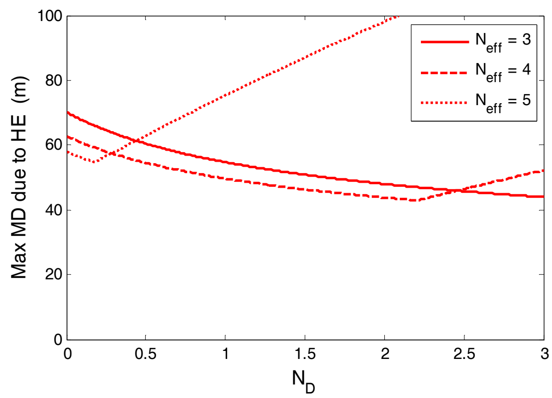
$$\hat{z} = (1-\omega)z_1 + \omega z_2 \qquad (۳۵)$$



شکل ۲۶- تأثیر N_D بر حداکثر فاصله خطا (نسبت به زمان نهایی) ناشی از مانور ثابت هدف $(N_{eff}=3,\ a_T=10g)$

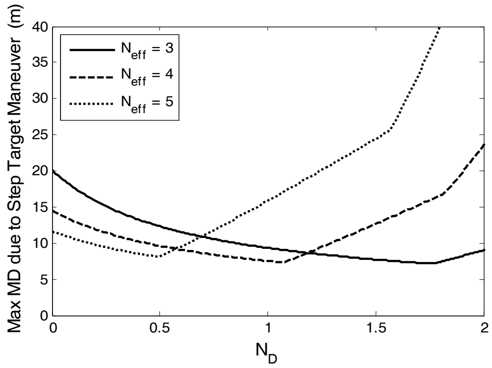


الف) قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳)

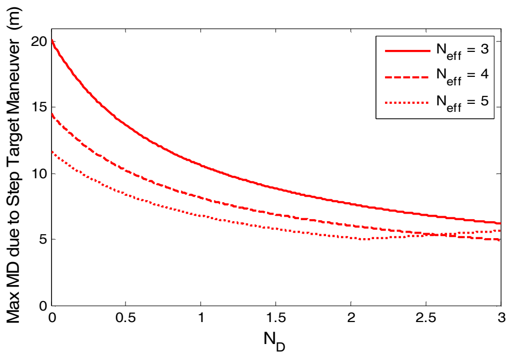


ب) قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی مطابق رابطه (۱۴)

شکل ۲۷- بررسی جابجایی $N_D^{\mathrm{Min(max)}}$ با تغییر ضریب ناوبری مؤثر ناشی از انحراف سمت اولیه ۲۰ درجه



الف) قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۱۳)



ب) قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی مطابق رابطه (۱۴)

شکل ۲۸- بررسی جابجایی $N_D^{\mathrm{Min(max)}}$ با تغییر ضریب ناوبری مؤثر ناشی از مانور ثابت هدف $(a_T=10g)$

بنابراین با اندازه‌گیری شتاب خطی توسط شتاب‌سنج و تخمین آن در حالت هدف بدون مانور مطابق رابطه $a_{M_{PLOS}} = -r\ddot{\sigma} - 2\dot{r}\dot{\sigma}$، تخمین ترکیبی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$a_{M_{PLOS}} \rightarrow (1-\omega)a_{M_{PLOS}} + \omega\,(-r\ddot{\sigma} - 2\dot{r}\dot{\sigma}) \qquad (۳۶)$$

در نتیجه در قوانین هدایتی که تنها شامل شتاب خطی است، با جایگزینی شتاب خطی با عبارتی از ترکیب وزنی شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۳۶)، رابطهٔ قانون هدایت پیشنهادی حاصل می‌شود. این جایگزینی بطور نمونه درپیوست ج برای قانون هدایت بهینهٔ مرتبهٔ اول انجام شده‌است. نکته قابل توجه در این پیوست، استخراج هدایت بهینهٔ مرتبه اول به صورت PD با ضرایب متغیر با زمان (به ازای ضریب وزنی واحد) است. به طور مشابه، با محاسبه شتاب زاویه‌ای از طریق فیلتراسیون و تخمین آن در حالت هدف بدون مانور مطابق رابطه $r\ddot{\sigma} = -a_{M_{PLOS}} - 2\dot{r}\dot{\sigma}$، تخمین ترکیبی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$r\ddot{\sigma} \rightarrow \omega r\ddot{\sigma} + (1-\omega)(-a_{M_{PLOS}} - 2\dot{r}\dot{\sigma}) \qquad (۳۷)$$

در نتیجه در قوانین هدایتی که تنها شامل شتاب زاویه‌ای است، با جایگزینی شتاب زاویه‌ای با عبارتی از ترکیب وزنی شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای مطابق رابطه (۳۷)، ساختار پیشنهادی حاصل می‌شود.

شایان ذکر است، راهکار پیشنهادی برای قوانین هدایت متعددی (نظیر قوانین هدایت مبتنی بر کنترل مود لغزشی و قوانین هدایت نئوکلاسیک) قابل اعمال است [۱۹-۱۶]؛ به علاوه، در ساختار اصلاح شده می‌توان اصلاح بهره را نیز اعمال کرده و مقدار بهره را با توجه به تحلیل فاصله خطا بدست آورد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، با تحلیل فاصلهٔ خطا برای استراتژی هدایت تناسبی با بازخورد شتاب خطی و زاویه‌ای، قانون هدایت مبتنی بر ترکیب وزنی شتاب خطی و زاویه‌ای پیشنهاد شده‌است. به منظور مقایسه منصفانه، تحلیل حاضر با ضریب ناوبری معادل صورت پذیرفته است.

با توجه به معادلات مسئله و نتایج شبیه‌سازی، در مجموع، فاصله خطای ناشی از مانور هدف برای قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای کمتر از قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی است؛ چرا که قانون هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای نسبت به قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی، کسری از شتاب هدف را در قانون هدایت اعمال می‌کند. بطور مشابه انتظار می‌رود بازخورد شتاب زاویه‌ای همین اثر را نسبت به سایر اغتشاشات وارده داشته باشد، که نیاز به بررسی در مدل شبیه‌سازی شش درجه آزادی دارد.

در ادامه، قانون«هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره» برای کاهش فاصله خطا ناشی از خطای سمت اولیه و مانور هدف، توسعه داده شده‌است. فاصله خطا ناشی از نویز در قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای خطدید» نسبت به هدایت تناسبی (با و بدون بازخورد شتاب) بیشتر می‌شود. فاصله خطا ناشی از نویز در قانون هدایت با بازخورد شتاب خطی موشک، کمتر از دو قانون دیگر بوده و این موضوع به دلیل مشتق‌گیری از سیگنال نویزی قابل انتظار می‌باشد. البته افزایش ضریب ترم بازخورد شتاب خطی/ زاویه‌ای باعث کاهش ثابت زمانی معادل سیستم می‌شود. این موضوع سبب می‌شود تا نتوان این پارامتر را از حد معینی به ویژه در حضور اثر رادوم افزایش داد. در تحلیل حاضر، قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای با اصلاح بهره» برای رهگیر با جستجوگر مادون قرمز ارجح است. شایان ذکر است که نتایج حاصل برای قانون «هدایت با بازخورد شتاب زاویه‌ای» با استفاده از مشتق‌گیر مرتبه اول بوده است؛ در صورتی که با استفاده از فیلترهای دیجیتال می‌توان نتایج بهتری برای فاصله خطا ناشی از نویز بدست آورد.

در حالت خاص، جایگزینی شتاب خطی با عبارتی شامل شتاب زاویه‌ای (و برعکس) در روابط هدایت اعمال شده‌است. در این راستا، نتیجه جالب توجه این که قانون هدایت بهینه مرتبه اول به فرم تناسبی-مشتقی با بهره‌های متغیر با زمان استخراج شده‌است.

پیوست الف: تابع تبدیل حلقه بسته و ضریب ناوبری معادل

با جایگذاری تابع تبدیل سیستم کنترل $\mathrm{F}(s) = a_{\mathrm{M}}(s)/a_c(s)$ در رابطه (۱۱)، می‌توان نوشت:

$$a_c = \frac{(N_{\mathrm{P}}+2N_{\mathrm{D}})v_c\dot{\sigma}}{1+N_{\mathrm{D}}\mathrm{F}(s)} + \frac{N_a+N_{\mathrm{D}}}{1+N_{\mathrm{D}}\mathrm{F}(s)} a_{\mathrm{T_{PLOS}}} \quad (۳۸)$$

تابع تبدیل از نرخ چرخش خطدید به دستور شتاب در حالت هدف بدون مانور به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{a_c}{\dot{\sigma}} = \frac{(N_{\mathrm{P}}+2N_{\mathrm{D}})v_c}{1+N_{\mathrm{D}}\mathrm{F}(s)} \quad (۳۹)$$

اگر تابع تبدیل سیستم کنترل مرتبه اول فرض شود، $\mathrm{F}(s) = 1/(1+Ts)$ ، رابطه (۳۹) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\frac{a_{\mathrm{M_{PLOS}}}}{\dot{\sigma}}(s) = \frac{N_{\mathrm{eff}}v_c}{1+T_{\mathrm{eq}}\mathrm{s}} \quad (۴۰)$$

که در آن،

$$N_{\mathrm{eff}} = \frac{N_{\mathrm{P}}+2N_{\mathrm{D}}}{1+N_{\mathrm{D}}} \quad (۴۱)$$

$$T_{\mathrm{eq}} = \frac{T}{(N_{\mathrm{P}}-2)/(N_{\mathrm{eff}}-2)} \quad (۴۲)$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که باید $N_{\mathrm{P}},\ N_{\mathrm{eff}} > 2$ باشد.

درصورتی که تابع تبدیل سیستم کنترل، مرتبه دوم استاندارد باشد، تابع تبدیل بلوک هدایت و کنترل مطابق رابطه (۴۴) می‌شود.

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n\mathrm{s}+\omega_n^2} \quad (۴۳)$$

$$\frac{a_{\mathrm{M_{PLOS}}}}{\dot{\sigma}}(s) = \frac{\left(\dfrac{N_{\mathrm{P}}+2N_{\mathrm{D}}}{1+N_{\mathrm{D}}}\right)v_c}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_n(1+N_{\mathrm{D}})}\mathrm{s}+\dfrac{1}{\omega_n^2(1+N_{\mathrm{D}})}s^2} \quad (۴۴)$$

به همین ترتیب برای سیستم کنترل دوجمله‌ای مرتبه n، تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل مطابق رابطه (۴۶) حاصل می‌شود.

$$\mathrm{F}(s) = \omega_n^2/\left(1+\frac{T}{\mathrm{n}}s\right)^{\mathrm{n}} \quad (۴۵)$$

$$\frac{a_{\mathrm{M_{PLOS}}}}{\dot{\sigma}}(s) = \frac{(N_{\mathrm{P}}+2N_{\mathrm{D}})v_c}{(1+\frac{T}{\mathrm{n}}s)^{\mathrm{n}}+N_{\mathrm{D}}} \quad (۴۶)$$

بنابراین،

$$\frac{a_{\mathrm{M_{PLOS}}}}{\dot{\sigma}}(s) = \frac{N_{\mathrm{eff}}v_c}{1+\dfrac{T}{1+N_{\mathrm{D}}}s+\mathrm{HOT}} \quad (۴۷)$$

و بطور مشابه

$$N_{\mathrm{eff}} = \frac{N_{\mathrm{P}}+2N_{\mathrm{D}}}{1+N_{\mathrm{D}}} \tag{۴۸}$$

در تابع تبدیل (۴۷) با افزایش مقدار N_{D} ضریب s که ثابت زمانی معادل است، کاهش می‌یابد (مشابه رابطه (۴۲) $N_{\mathrm{P}},\ N_{\mathrm{eff}} > 2$). کاهش «ثابت زمانی معادل سیستم» در حضور اثر رادوم مخاطره آمیز خواهد بود، لذا مقدار N_{D} را تا حد معینی می‌توان افزایش داد. این مقدار از تحلیل پایداری سیستم تعیین می‌شود.

پیوست ب: استخراج معادلات رسته یک

در ادامه، معادلات رستهٔ یک برای نمودارهای بلوکی مسئله خطی برای قوانین هدایت روابط (۱۳، ۱۴ و ۱۶) استخراج شده‌است:

$$\dot{x}_1 = v \qquad (x_1 = y) \tag{۴۹}$$

$$\dot{x}_2 = n_{\mathrm{T}} - n_{\mathrm{L}} \tag{۵۰}$$

$$\dot{x}_3 = (\lambda_N - x_3)/T_N \tag{۵۱}$$

$$\dot{x}_4 = (a_c - x_4)/T_1 \tag{۵۲}$$

$$\begin{cases} \text{for } j = 5:1:\mathrm{n}+2 \\ \quad \dot{x}_j = (x_{j-1} - x_j)/T_j \\ \text{end} \end{cases} \tag{۵۳}$$

$$\dot{x}_{\mathrm{n}+3} = (\dot{x}_3 - x_{\mathrm{n}+3})/T_s \quad (\text{for Eqs.} 13, 16) \tag{۵۴}$$

که در آن،

$$\lambda_N = u_N + x_1/v_c t_{go} \tag{۵۵}$$

$$a_c = N_{\mathrm{P}} v_c \dot{x}_3 + \begin{cases} 0 & \text{for TPN} \\ N_D v_c t_{go} \dot{x}_{\mathrm{n}+3} & \text{for Eq.}(13) \\ 2N_D v_c \dot{x}_3 - N_D x_{\mathrm{n}+2} & \text{for Eq.}(14) \end{cases} \tag{۵۶}$$

در معادلات فوق، متغیر حالت $\dot{x}_3$ نرخ چرخش خطدید پس از عبور از فیلتر مرتبه اول با ثابت زمانی T_N است و $n_{\mathrm{L}} = x_{\mathrm{n}+2}$.

درصورتی‌که قانون هدایت رابطه (۱۶) مورد استفاده باشد، دستور شتاب بجای رابطه (۵۶) از رابطه (۵۷) استفاده می‌شود.

$$a_c = N_{\mathrm{P}} v_c \dot{x}_3 + v_c \dot{x}_{\mathrm{n}+3} \begin{cases} N_D t_{go} & \text{for } t_{go} > \beta T \\ N_{\mathrm{P}} \alpha T & \text{for } t_{go} \le \beta T \end{cases} \tag{۵۷}$$

شایان ذکر است که معادلات فوق در روش مستقیم برای صحه‌گذاری روش الحاقی در حالت بدون نویز استفاده شده است. به علاوه، این معادلات در حالت با نویز برای شبیه‌سازی مونت کارلو بکار رفته است.

پیوست ج: قانون هدایت بهینه مرتبه اول به فرم PD

قانون هدایت بهینه خطی برای سیستم کنترلی مرتبه اول به صورت زیر نوشته می‌شود [۱، ۲۰]:

$$a_c = N^* v_c \dot{\sigma} - N_{\mathrm{D}}^* a_{\mathrm{M}} \tag{۵۸}$$

که در آن،

$$N^* = \frac{6x^2(e^{-x}+x-1)}{2x^3+3+6x-6x^2-12xe^{-x}-3e^{-2x}} \tag{۵۹}$$

$$N_D^* = N^* K_{\mathrm{L}},\ \ K_{\mathrm{L}} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2},\ \ x = t_{go}/T \tag{۶۰}$$

حال با اعمال ترکیب وزنی در رابطه (۵۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_c = (N^* - 2N_D^* \omega) v_c \dot{\sigma} + \omega N_D^* r \ddot{\sigma} \\ - (1-\omega) N_D^* a_{\mathrm{M_{PLOS}}} \end{aligned} \tag{۶۱}$$

به‌طور نمونه با جایگذاری $\omega = 1$ در رابطه (۶۱) و جایگزینی $r = v_c t_{go}$ می‌توان نوشت:

$$a_c = (N^* - 2N_D^*) v_c \dot{\sigma} + N_D^*\, v_c t_{go} \ddot{\sigma} \tag{۶۲}$$

با جایگزینی $\boldsymbol{N_D^* = N^* K_L}$ در رابطه (۶۲) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$a_c = N^* v_c \left[(1-2K_{\mathrm{L}})\dot{\sigma} + K_{\mathrm{L}} t_{go} \ddot{\sigma}\right] \tag{۶۳}$$

رابطه فوق به فرم PD بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$a_c = N_{\mathrm{P}}^* v_c (\dot{\sigma} + \alpha^* T \ddot{\sigma}) \tag{۶۴}$$

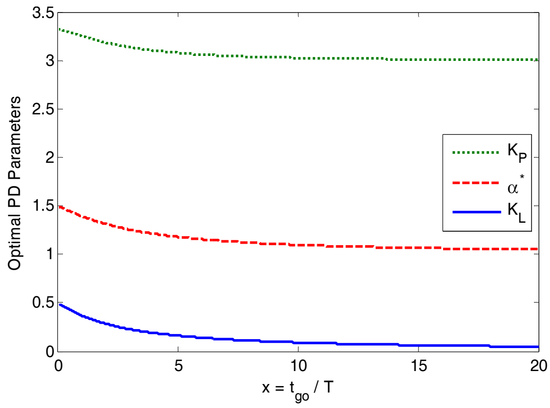
که در آن،

$$N_{\mathrm{P}}^* = K_{\mathrm{P}} = N^*(1-2K_{\mathrm{L}}) \tag{۶۵}$$

$$\alpha^* = \frac{K_{\mathrm{L}} x}{(1-2K_{\mathrm{L}})},\ \ \ x = t_{go}/T \tag{۶۶}$$

نتیجه جالب توجه، استخراج هدایت بهینه با ساختار «PD با ضرایب متغیر» برحسب $x = t_{go}/T$ می‌باشد. در شکل ۲۹ این ضرایب متغیرِ بهینه برحسب $x = t_{go}/T$ به ازای $x > 0.01$ (به علت مشکلات محاسبات عددی) ترسیم شده‌است. نکتهٔ دیگر، توجه تغییرات اندک بهره K_{P} برحسب زمان است.

ایدهٔ جالبی که در اینجا مطرح می‌شود این است که بعضی از قوانین هدایت دونقطه‌ای را می‌توان بصورت PD با ورودی $\dot{\sigma}$ و ضرایب بهرهٔ متغیر نوشت. با مقایسه ضرایب بهرهٔ این قوانین هدایت به فرم PD، نکات زیادی آموخته می‌شود و به علاوه می‌توان پروفیل ترکیبی برای بهره‌ها پیشنهاد داد و یا این که بر حسب وضعیت سیستم، به‌صورت هموازی از یک قانون به قانون دیگری سوئیچ نمود.



شکل ۲۹- بهره‌های بهینه K_P و α^* در ساختار PD (به ازای $t_{go}/T > 0.01$)

مراجع

[1] Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, Sixth ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 239, AIAA, 2012.

[2] Blakelock, J., *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, Second ed., A Wiley-Interscience Publication, Vol. 239, 1991.

[3] Shneydor, N. A., *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics, and Control*, Horwood Series in Engineering Science, 1998.

[4] Ho, Y. C., Bryson, A. E., and Baron, S., "Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies," *IEEE Transations on Automatic Control,* AC-10, Oct. 1965, pp. 385-389.

[5] Anderson, G. M., "Comparison of Optimal Control and Differential Game Intercept Missile Guidance Laws," *Journal of Guidance and Control,* Vol. 4, No. 2, 1981, pp. 109-115.

[6] Ben-Asher, J. Z., Yaesh, I., *Advances in Missile Guidance Theory*, Progress in Astronautics and Aeronautics, 180, American Institute of Astronautics Aeronautics, Inc., Washington, DC, 1998.

[7] Nesline, F. W., Zarchan, P., "A New Look at Classical vs Modern Homing Missile Guidance, " *Journal of Guidance and Control,* Vol. 4, No. 1, 1981, pp. 78-85.

[8] Gurfil, P., Jodorkovsky, M., Guelman, M., "Neoclassical Guidance for Homing Missiles," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 24, No. 3, 2001.

[9] Balakrishnan, S. N., Tsourdos, A. and White, B. A., *Advances in Missile Guidance, Control, and Estimation*, Taylor & Francis Group, 2013.

[10] Ma, K., Zhang, X., "A Novel Guidance Law with Line-of-Sight Acceleration Feedback for Missiles against Maneuvering Targets," *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, 2014.

[11] Maklouf, O., Saleh Basha, and Eljubrani, A., "Performance Evaluation of Proportional Navigation Homing Guidance Law," *5th Intenational Conference on Control Engineering & Information Technology*, Vol. 33, 2017, pp. 14-18.

[12] Innocenti, M., "Nonlinear Guidance Techniques for Agile Missiles," *Control Engineering Practice*, 2001, pp. 1131-1144.

[13] Yanushevsky, R., *Modern Missile Guidance*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2008.

[14] Jalali-Naini, S. H., *A New Guidance Law for Homing Missiles*, MS Thesis, Faculty of Engineering, University of Tehran*,* Aug. 1996 (in Persian).

[15] Jalali-Naini, S. H., "Miss Distance Analysis of Proportional Navigation Using Normalized Equations with Radome Effect, Saturation, and Body Rate Feedback," *Journal of Aeronautical Engineering*, Vol. 14, No 1, 2012, pp. 1-11 (in Persian).

[16] Nakagawa, S., Yamasaki, T., and Takano, H., and Yamaguchi, I., "Guidance Law Based on Line-of-Sight Rate Information Considering Uncertain Modeled Dynamics," *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal,* Vol. 3, No. 6, 2018, pp. 195-203.

[17] Mohammadzaman, I., Momeni, H. R., "PI Guidance Law Design with Finite Time Convergence," *Aerospace Mechanics Journal,* Vol. 7, No. 1, 2011 (in Persian).

[18] Behnamgol, V., Vali, A., Mohammadi, A., "A New Backstepping Sliding Mode Guidance Law Considering Control Loop Dynamics," *Journal of Space Science and Technology,* Vol. 8, No. 4, 2016.

[19] Jalali-Naini, S. H., "Normalized Miss Distance Analysis of Single-Lag Optimal Guidance Law with Radome Effect, Saturation and Fifth-Order Control System," *Scientia Iranica*, Transaction B, Vol. 21, No 5, Oct. 2014, pp. 1683-1692.

[20] Cottrell, R. G., "Optimal Intercept Guidance for Short-Range Tactical Missiles," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 9, No. 7, 1971, pp. 1414-1415.