JSST

10.30699/JSST.2021.1199

Vol. 13/ Issue.4/ 2020 (No.45)
pp. 25-35

Research Paper

Optimal Adaptive Control of Satellite Attitude in the presence of Uncertainty in Moment of Inertia Using Markov Parameters

M. Navabi[1]*and N. Safaei[2]

1,2. Faculty of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

***m_navabi@sbu.ac.ir**

Several novel control techniques have been created due to the diversity of research conducted about the problem of satellite attitude control. There are always uncertainties in the problem of satellite attitude control in space missions. Therefore, Adaptive control is a method that is taken into consideration. High computational volume is one of the problems of adaptive control techniques. In this paper, a control technique that is based on optimization concepts is introduced for the problem of satellite angular velocity and attitude control. Also, it's developed based on the three-dimensional special orthogonal group, and a singularity problem does not face it. For comparison, the linear quadratic regulator (LQR) control technique is simulated. Finally, the results of the simulations show that the performance of the presented adaptive control technique is optimal, and this method is robust to inertia changes.

Keywords: Satellite attitude control, Adaptive control, Recursive least squares

1. Associate Professor (Corresponding Author)
2. M.Sc.

Received: 2019.05.18/ Accepted: 2019.10.23 / Publish Online: 2020.12.21/ Online ISSN: 2423-4516 / Print ISSN: 2008-4560

JSST
دوره ۱۳ / شمارهٔ ۴/ زمستان ۱۳۹۹ (شماره پیاپی ۴۵)
ص. ص . ۳۵- ۲۵
10.30699/JSST.2021.1199

مقاله علمی– پژوهشی

کنترل تطبیقی بهینه وضعیت ماهواره در حضور عدم قطعیت در اینرسی با استفاده از پارامترهای مارکوف

محمد نوابی[۱*] و نازنین صفایی حشکوائی[۲]

۱ و ۲- دانشکدهٔ مهندسی فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

*** m_navabi@sbu.ac.ir**

همواره در طی مأموریت‌های فضایی عدم قطعیت در مسئله کنترل وضعیت ماهواره‌ها وجود دارد. از این رو کنترل تطبیقی روشی است که مورد توجه قرار می‌گیرد. از جمله مشکلات کنترل تطبیقی حجم محاسباتی بالا و نبود روش تئوری عمومی برای طراحی مکانیزم تطبیق می‌باشد. در این مقاله یک روش کنترلی بر اساس مفاهیم تطبیقی و بهینه با استفاده از پارامترهای مارکوف جهت کنترل سرعت زاویه‌ای و وضعیت ماهواره معرفی می‌شود. این روش دارای قابلیت دنباله‌روی فرمان است، و براساس گروه متعامد خاص از مرتبه سه گسترش می‌یابد و مشکل سینگولاریتی ندارد. همچنین جهت مقایسه این روش با دیگر روش‌های کنترلی، روش کنترلی بهینه تنظیم‌کننده مربعی خطی (LQR) نیز شبیه‌سازی می‌گردد. در نهایت نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها بیانگر این است که عملکرد روش کنترلی تطبیقی ارائه شده بهینه است، و همچنین این روش نسبت به عدم قطعیت در اینرسی مقاوم می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: کنترل وضعیت ماهواره، کنترل تطبیقی، پارامترهای مارکوف، روش حداقل مربعات بازگشتی

علائم و اختصارات

بردار سرعت زاویه‌ای	$\vec{\boldsymbol{\omega}}$
بردار مومنتوم زاویه‌ای	$\vec{\mathbf{h}}_{B/I}$
گشتاور کنترلی	$\vec{\mathbf{T}}$
سیگنال ورودی کنترل	$\mathbf{u}(i)$
سیگنال کنترلی مرجع	$\mathbf{r}(t)$
بردار رگرسور	$\boldsymbol{\phi}(i)$
ماتریس کوواریانس	$\mathbf{P}(i)$
ماتریس ممان اینرسی	$\mathbf{I}$
سیگنال اغتشاش	$\mathbf{w}(i)$
نویز اندازه‌گیری‌شده	$\mathbf{v}(i)$
متغیر عملکرد	$\mathbf{z}(i)$
تابع تبدیل	$\mathbf{G}_{zu}$
پارامتر مارکوف	$\mathbf{H}_j$
پارامترهای کنترلر	$\boldsymbol{\theta}(i)$
بهره کنترلر	$\mathbf{S}_q(i)$
بهره کنترلر	$\mathbf{T}_q(i)$
بردار خطای سرعت زاویه‌ای	$\boldsymbol{\delta}\omega$
سرعت نهایی مطلوب	$\boldsymbol{\omega}_f$
بردار خطای سرعت در نقطه تعادل	$(\delta\boldsymbol{\omega})_e$
مرتبه کنترلر	$n_{controller}$
ماتریس دوران وضعیت هر لحظه	$\mathbf{R}$
گام زمانی	h
ماتریس دوران خطای وضعیت	$\delta\mathbf{R}$
ماتریس دوران وضعیت نهایی مطلوب	$\mathbf{R}_f$
Proportional Derivative	PD
Linear Quadratic Regulator	LQR
Three-dimensional Special Orthogonal Group	SO(3)
Recursive Least Squares	RLS
Multi-input Multi-output	MIMO

۱. دانشیار (نویسنده مخاطب)
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

مقدمه

بهره‌برداری از تجهیزات و تکنولوژی روز دنیا در تمامی زمینه‌های مختلف علمی مانند مهندسی هوافضا[۳-۱] و رباتیک [۷-۴] نیازمند

دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۲/۲۸ ، پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۰۱ / چاپ الکترونیکی: ۱۳۹۹/۱۰/۰۱ / شاپای الکترونیکی: ۴۵۱۶-۲۴۲۳ / شاپای چاپی: ۴۵۱۶-۲۰۰۸

وجود سیستم‌های کنترل می‌باشد. از این رو در این زمینه مطالعات زیادی صورت پذیرفته و نوآوری‌های قابل ملاحظه‌ای حاصل شده‌اند. تنوع تحقیقات در زمینه هوافضا منجر به ایجاد روش‌های نوین کنترلی در مأموریت‌های فضایی شده‌است. کنترل وضعیت ماهواره از مهم‌ترین مسائل مربوط به مأموریت‌های فضایی و همچنین از زیرسیستم‌های دارای اهمیت بالایی در ماهواره است [۸]. همچنین روش‌های کنترل خطی و غیرخطی متفاوتی در این زمینه وجود دارند [۹، ۱۰]. برخی از این روش‌ها نسبت به اغتشاشات یا عدم قطعیت در ویژگی‌های جرمی مقاوم نیستند. با توجه به عدم قطعیت‌ها و اغتشاشاتی که به ماهواره وارد می‌شود، روش کنترل تطبیقی کاربرد مؤثری دارد. در این روش کنترلر طراحی‌شده می‌تواند در مقابل تغییرات آرام در سیستم و همچنین خطاهای مدل‌سازی پاسخ مناسب دهد [۱۱، ۱۲]. کنترل تطبیقی برای کنترل وضعیت ماهواره جهت مقاومت در برابر خطا در ویژگی‌های جرمی مدل‌ها [۱۳]، تقویت عملکرد قوانین کنترلی PD [۱۴]، حذف اغتشاشات [۱۵، ۱۶] و موارد دیگر استفاده شده‌است. کنترل تطبیقی از پرکاربردترین روش‌ها در زمینه کنترل ماهواره‌هاست [۱۷-۱۹]. به‌عنوان مثال از روش کنترل تطبیقی در مسئله کنترل وضعیت ماهواره در حضور عدم قطعیت در اینرسی [۲۰] و موارد دیگر استفاده می‌گردد.

در این مقاله، ابتدا معادلات حرکت ماهواره استخراج [۲۱]، و سپس یک روش کنترل تطبیقی بهینه جهت کنترل سرعت زاویه‌ای و وضعیت ماهواره ارائه می‌گردد. مسئله کنترل وضعیت ماهواره یک مسئله غیرخطی است. همچنین با توجه به اینکه معادلات حرکت ماهواره غیرخطی هستند و این مسئله کنترل سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره و وضعیت آن را دچار پیچیدگی می‌کند، در این مقاله روش ارائه شده جهت کنترل سرعت‌های زاویه‌ای و وضعیت ماهواره، معادلات حرکت ماهواره را خطی می‌سازد. همچنین جهت مقایسه، روش کنترلی بهینه تنظیم‌کننده مربعی خطی[3] بررسی و شبیه‌سازی می‌گردد.

روش کنترل تطبیقی ارائه شده در این مقاله دارای قابلیت پایدارسازی و دنباله‌روی فرمان با دقت بالاست. تعداد زیادی از روش‌های کنترلی از کواترنیون یا روش‌های دیگر برای بیان وضعیت استفاده می‌کنند. در روش ارائه‌شده عملکرد سیستم براساس ماتریس‌های دوران بوده و همچنین این روش کنترلی بر اساس گروه متعامد خاص از مرتبه سه[4] گسترش یافته است. از این رو مشکل سینگولاریتی ندارد. پاسخ زمانی سیستم در حالت استفاده از روش کنترل تطبیقی بیان شده جهت کنترل سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره و وضعیت آن، بسیار قابل قبول و کوتاه است و این روش نسبت به عدم قطعیت در اینرسی مقاوم است. روش بیان شده، یک روش کنترل تطبیقی مستقیم است و از داده‌های عملکرد گذشته با روش حداقل مربعات بازگشتی[5] برای به روزرسانی کنترلر استفاده می‌کند.

مدل‌سازی ریاضی سیستم‌ها برای اهداف مختلف مانند بررسی سیستم‌ها، طراحی کنترلرها و موارد دیگر لازم است. ارتباط بین ساختارهای مدل متفاوت سیستم‌ها می‌تواند در غالب پارامترهای مارکوف بیان گردد. پارامترهای مارکوف مقادیر پاسخ ضربه واحد سیستم زمان-گسسته می‌باشند. برای استفاده از پارامترهای مارکوف در این روش کنترلی، ابتدا معادلات دینامیک و سینماتیک که معادلات غیرخطی و زمان- پیوسته هستند تبدیل به معادلات خطی و زمان- گسسته می‌شوند. هدف این مقاله رساندن ماهواره از وضعیت و سرعت اولیه مشخص به سرعت صفر و وضعیت نهایی مطلوب است. مسئله کنترل سرعت و وضعیت ماهواره با استفاده از روش بیان شده در محیط نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی شده و نتایج حاصل از آن در قالب نمودار و جدول ارائه می‌شود.

مدل‌سازی ریاضی

در این بخش معادلات سینماتیک و دینامیک حرکت ماهواره بیان می‌گردد.

معادلات دینامیک و سینماتیک

در این بخش برای بررسی معادلات سینماتیک و دینامیک حرکت، یک دستگاه مختصات بدنی که مرکز آن مرکز جرم ماهواره است و یک دستگاه مختصات اینرسی جهت تعیین وضعیت ماهواره در نظر گرفته می‌شود [۲۱]. همچنین ماهواره مورد بررسی در این مقاله یک جسم صلب درنظرگرفته می‌شود و فقط حرکت چرخشی آن لحاظ می‌گردد و از حرکت انتقالی مرکز جرم آن صرف‌نظر می‌شود. معادلات حرکت ماهواره براساس معادلات اویلر[6] و پواسون[7] است که به ترتیب در معادلات (۱) و (۴) مشخص شده است. بر اساس معادله (۱) مجموع گشتاورهای خارجی اعمال شده به یک جسم با آهنگ تغییرات مومنتوم زاویه‌ای آن جسم برابر است [۲۱]. در این معادلات $\vec{\boldsymbol{\omega}} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ مبین بردار سرعت زاویه‌ای ماهواره، $\vec{\mathbf{h}}_{B/I}$ بردار مومنتوم زاویه‌ای ماهواره در دستگاه مختصات بدنی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی، $\vec{\mathbf{T}}_c$ و $\vec{\mathbf{T}}_d$ به‌ترتیب بردارهای گشتاور خارجی کنترلی و اغتشاشی و همچنین $\mathbf{I}$ ماتریس ممان اینرسی می‌باشند. در معادلات پیش رو زیروندهای B و I به ترتیب بیانگر دستگاه مختصات بدنی و دستگاه مختصات اینرسی هستند و زیروند B/I مبین دستگاه مختصات بدنی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی است.

3. Linear Quadratic Regulator
4. Three-dimensional Special Orthogonal Group
5. Recursive Least Squares
6. Euler's equation
7. Poisson's equation

$$\vec{\mathbf{T}}_c + \vec{\mathbf{T}}_d = \dot{\vec{\mathbf{h}}}_{B/I} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{\times}_{B/I}\vec{\mathbf{h}}_{B/I} \quad (۱)$$

با جایگذاری معادلات $\dot{\vec{\mathbf{h}}}_{B/I} = \vec{\mathbf{I}}_{B/I}\overset{B\bullet}{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}$ و $\vec{\mathbf{h}}_{B/I} = \vec{\mathbf{I}}_{B/I}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}$ در معادله (۱)، معادله (۲) حاصل می‌گردد. $\overset{B\bullet}{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}|_B$ بیانگر مشتق سرعت زاویه‌ای ماهواره در دستگاه مختصات بدنی است.

$$\vec{\mathbf{T}}_c + \vec{\mathbf{T}}_d = \vec{\mathbf{I}}_{B/I}\overset{B\bullet}{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{\times}{}_{B/I}\left(\vec{\mathbf{I}}_{B/I}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right) \quad (۲)$$

از این پس $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}|_B$، $\overset{B\bullet}{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}|_B$ و $\vec{\mathbf{I}}_{B/I}|_B$ به ترتیب با نماد $\boldsymbol{\omega}$، $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ و $\mathbf{I}$ مشخص می‌شوند. آنگاه معادله (۲) به شکل معادله (۳) نوشته می‌شود.

$$\vec{\mathbf{T}}_c + \vec{\mathbf{T}}_d = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^{\times}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (۳)$$

فرض می‌شود که ماهواره در راستای سه محور کنترل می‌شود. معادله سینماتیک در معادله (۴) بیان شده است. $\mathbf{R}$ در معادله (۴) ماتریس دوران وضعیت هر لحظه و به عبارتی $\mathbf{R} = \vec{\mathbf{R}}_{B/I}|_B$ می‌باشد. تعریف علامت ضرب $(\times)$ در معادلات بیان شده، در معادله (۴) مشخص شده است.

$$\dot{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\omega^{\times} = \mathrm{R}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

اکنون معادلات سینماتیک و دینامیک به شکل دیگری که بیانی از خطای وضعیت و سرعت‌های زاویه‌ای هستند نوشته می‌شوند. در معادلات پیش‌رو $\boldsymbol{R_f}$ ماتریس دوران وضعیت نهایی مطلوب و $\boldsymbol{\omega_f}$ سرعت زاویه‌ای نهایی مطلوب است.

مطابق روابط $\delta\mathrm{R} = \mathrm{R}_f^T\mathrm{R}$ [۲۲] و $\delta\omega = \omega - (\delta\mathrm{R})^T\omega_f$، به ترتیب بردار خطای وضعیت و بردار خطای سرعت زاویه‌ای تعریف می‌گردد. با استفاده از روابط بیان شده و بازنویسی معادلات (۳) و (۴)، معادلات (۵) و (۶) بدست می‌آیند [۲۲].

$$\vec{\mathrm{T}}_c + \vec{\mathrm{T}}_d = \mathrm{I}(\dot{\delta\omega}) + \mathrm{I}(\delta R)^T\dot{\omega}_f - \mathrm{I}\big(\delta\omega \times (\delta\mathrm{R})^T\omega_f\big) - \Big(\mathrm{I}\big(\delta\omega + (\delta\mathrm{R})^T\omega_f\big)\Big) \times \big(\delta\omega + (\delta\mathrm{R})^T\omega_f\big) \quad (۵)$$

$$(\dot{\delta\mathrm{R}}) = \delta\mathrm{R}(\delta\omega)^{\times} \quad (۶)$$

کنترل تطبیقی بهینه بر اساس پارامترهای مارکوف

کنترلر حاضر در این مقاله یک کنترلر تطبیقی پسخور خروجی است که از داده‌های عملکرد گذشته سیستم برای به روزرسانی پارامترهای خود استفاده می‌نماید. الگوریتم این روش از پارامترهای مارکوف که پاسخ ضربه واحد سیستم زمان- گسسته می‌باشند استفاده می‌نماید و کنترلر بر حسب این پارامترها بیان می‌گردد. پارامترهای مارکوف توسط تعریف تابع تبدیل $\mathbf{G}_{zu}$ که ورودی $\mathbf{u}$ را به پارامتر $\mathbf{z}$ یا همان متغیر عملکرد سیستم مرتبط می‌سازد محاسبه می‌گردد.

در ابتدا یک سیستم زمان-گسسته چند ورودی-چند خروجی[۸] که در رابطه (۷) آمده است درنظرگرفته می‌شود [۲۳-۲۵].

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(i) &= \mathrm{Ax}(i-1) + \mathrm{Bu}(i-1) + \mathrm{Fw}(i-1) \\ \mathrm{y}(i) &= \mathrm{Cx}(i) + \mathrm{v}(i) \\ \mathrm{z}(i) &= \mathrm{Ex}(i) - \mathrm{r}(i) \end{aligned} \quad (۷)$$

در معادلات فوق $\mathbf{x}(i) \in R^{l_x}$ بردار حالت، $\mathbf{y}(i) \in R^{l_y}$ بردار خروجی سیستم، $\mathbf{u}(i) \in R^{l_u}$ سیگنال ورودی کنترل، $\mathbf{w}(i) \in R^{l_w}$ سیگنال اغتشاشی، $\mathbf{v}(i) \in R^{l_v}$ نویز اندازه‌گیری‌شده، $\mathbf{z}(i) \in R^{l_z}$ عملکرد سیستم[۹]، $\mathbf{r}(i) \in R^{l_r}$ فرمان کنترلی است و $i \geq 1$. همچنین $\mathbf{H}_j$ پارامترهای مارکوف هستند که برای $j \geq 1$ توسط معادله $\mathbf{H}_j = \mathbf{E}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}$ تعریف می‌شوند [۲۴]. $n \geq 1$ یک عدد صحیح است. سری متشکل از جملات متغیر عملکرد به‌صورت بیانی از پارامترهای مارکوف نوشته می‌شود. به این ترتیب که می‌توان $\mathbf{x}(i)$ در معادله (۷) را برای $i \geq n$ به صورت یک سری مطابق رابطه (۸) بیان نمود. سپس عملکرد $\mathbf{z}(i)$ توسط معادلات (۹) و (۱۰) بدست می‌آید و $n_H = n$ است [۲۴].

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(i-n) + \textstyle\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}^{j-1}[\mathbf{Bu}(i-j) + \mathbf{Fw}i\text{–}j \quad (۸)$$

$$\mathbf{z}(i) = \mathbf{E}\mathbf{A}^n\mathbf{x}(i-n) + \textstyle\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\mathbf{A}^{j-1}\,\mathbf{Bu}(i-j) + \sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{Fw}(i-j) - \mathbf{r}(i) \quad (۹)$$

$$\mathbf{z}(i) = \mathbf{E}\mathbf{A}^n\mathbf{x}(i-n_H) + \textstyle\sum_{j=1}^{n}\mathbf{H}_j\,\mathbf{u}(i-j) + \sum_{j=1}^{n}\mathbf{H}_j^w\mathbf{w}(i-j) - \mathbf{r}(i) \quad (۱۰)$$

همچنین $j = 1,\dots,n$ و $\mathbf{H}_j^w$ پارامترهای مارکوف به دست آمده از تعریف تابع تبدیل $\mathbf{G}_{wu}$ هستند. متغیر $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = [1 \quad \cdots \quad n]$ تعریف می‌گردد و سپس معادله (۱۰) بر اساس تعمیم پارامترهای مارکوف و سیگنال‌های ورودی کنترل در زمان‌های گذشته بازنویسی می‌شود تا معادلات (۱۱) و (۱۲) حاصل گردد [۲۴].

$$\mathbf{z}(i) = \mathbf{E}_1\mathbf{A}^n\mathbf{x}(i-n) + [\mathbf{H}_1 \quad \dots \quad \mathbf{H}_n]\begin{bmatrix}\mathbf{u}(i-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(i-n)\end{bmatrix} + \mathbf{E}_1\textstyle\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{Fw}(i-j) - \mathbf{E}_0\mathbf{r}(i) \quad (۱۱)$$

$$\mathbf{z}(i) = \mathbf{E}_1\mathbf{A}^n\mathbf{x}(i-n) + \mathbf{H}\big(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\big)\mathbf{u}\big(i,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\big) + \mathbf{E}_1\textstyle\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{Fw}(i-j) - \mathbf{E}_0\mathbf{r}(i) \quad (۱۲)$$

8. Multi-input Multi-output
9. Performance metric

طراحی کنترلر

کنترلر طراحی شده بر اساس روش کنترل تطبیقی بیان شده در این مقاله یک کنترلر زمان-گسسته است و به شکل معادله (۱۳) تعریف می‌گردد [۲۳، ۲۴].

$$\mathrm{u}(i) = \sum_{j=1}^{n_{controller}} \mathrm{S}_q(i)\mathrm{u}(i-j) + \\ j{=}1ncontroller\mathrm{T}qiyi{-}j \tag{۱۳}$$

در معادله (۱۳)، $q = 1,\ldots,n_{controller}$ است و همچنین $\mathbf{S}_q \in R^{l_u\times l_u}$ و $\mathbf{T}_q \in R^{l_u\times l_y}$ ماتریس‌های بهره نامشخص هستند.بردار رگرسور که متشکل از متغیرهای خروجی ($\mathbf{y}(i)$) و سیگنال‌های کنترلی ($\mathbf{u}(i)$) در زمان‌های گذشته است توسط رابطه (۱۴) بیان می‌گردد.

$$\boldsymbol{\phi}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(i-1) \\ \mathbf{u}(i-n_{controller}) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(i-1) \\ \cdots \\ \mathbf{y}(i-n_{controller}) \end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

به عبارتی کنترلر توسط معادله $\mathbf{u}(i) = \boldsymbol{\theta}(i)\boldsymbol{\phi}(i)$ محاسبه می‌گردد که در آن $\boldsymbol{\theta}(i)$ پارامترهای کنترلر است که شامل اجزای همه ماتریس‌های بهره $\mathbf{S}_q(i)$ و $\mathbf{T}_q(i)$ می‌باشد [۲۳، ۲۴].

اکنون با تعریف یک تابع هزینه بر اساس سیگنال کنترلی و متغیر عملکرد، یک سیگنال کنترلی بهینه به‌دست می‌آید و از آن در معادله به‌روزرسانی پارامترهای کنترلر استفاده می‌گردد [۲۳، ۲۴].

اگر تأخیر زمانی در محاسبات پارامترها مانند $\mathbf{z}$ لحاظ شود، آنگاه آن موارد تأخیر زمانی در کم‌کردن مقادیر اندیس i در ماتریس‌های $\mathbf{u}(i,\widetilde{\boldsymbol{\beta}})$ و بقیه عبارات موجود در سمت راست تساوی (۱۲) نیز لحاظ می‌گردد. با تعریف متغیر $\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = [\mu_1 \quad \cdots \quad \mu_d]$ و با توجه به توضیحات فوق رابطه (۱۵) تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{z}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(i-\mu_1) \\ \vdots \\ \mathbf{z}(i-\mu_d) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}(i,\tilde{\mu}) + \\ \mathbf{Hu}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) \tag{۱۵}$$

اگر سیگنال‌های کنترلی تکرار شده از جهت مرحله زمانی‌شان را از ماتریس متشکل از $\mathbf{u}$های گذشته ($\mathbf{u}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}})$) حذف کنیم، آنگاه ماتریس $\mathbf{u}(i,\tilde{\alpha})$ ساخته می‌شود. همچنین $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_a]$ و $\alpha_1 < \cdots < \alpha_a$ است. اکنون یک سیگنال کنترلی بهینه $\widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ تعریف خواهد شد. بنا به معادله (۱۵) و بر اساس سیگنال کنترلی $\mathbf{u}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ و سیگنال کنترلی بهینه $\widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$، معادلات $\mathbf{z}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) = \boldsymbol{\eta}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{Hu}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ و $\hat{\mathbf{z}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) = \boldsymbol{\eta}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{H}\widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ نوشته می‌شوند که در این معادلات پارامترهای مارکوف متناظر با سیگنال‌های کنترلی موجود در همین معادلات تعریف می‌شوند. براساس معادلات بیان‌شده جهت تعریف $\mathbf{z}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}})$ و $\hat{\mathbf{z}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}})$، معادله (۱۶) تعریف می‌گردد.

$$\hat{\mathbf{z}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{z}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) - \mathbf{Hu}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{H}\widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) \tag{۱۶}$$

بر اساس توضیحات فوق تابع هزینه در معادله (۱۷) تعریف می‌گردد.

$$\hat{J}(i) = \widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})^T\mathbf{R}_U\widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) + \hat{\mathbf{z}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}})^T\boldsymbol{R}_Z\hat{\mathbf{z}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) \tag{۱۷}$$

در معادله (۱۷) $\mathbf{R}_Z \in R^{dl_z\times dl_z}$ ماتریس وزنی عملکردمعین مثبت است. همچنین $\mathbf{R}_U \in R^{al_u\times al_u}$ ماتریس وزنی کنترل نیمه معین مثبت است. از طریق بهینه‌سازی معادله (۱۷) سیگنال کنترلی بهینه $\widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ بدست می‌آید که در معادله (۱۸) بیان شده است [۲۴].

$$\widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_i(i-\alpha_1) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_i(i-\alpha_a) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{R}_Z(i)\mathbf{H} + \\ \mathbf{R}Ui{-}12\mathbf{H}T\mathbf{R}Zi\mathbf{z}i,\boldsymbol{\mu}{-}\mathbf{Hu}i,\boldsymbol{\alpha} \tag{۱۸}$$

از $\widehat{\mathbf{u}}(i,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ برای به روزرسانی پارامترهای کنترلر $\boldsymbol{\theta}(i)$ استفاده می‌گردد. اکنون برای به‌روزرسانی پارامترهای کنترلر از روش حداقل مربعات بازگشتی[10] استفاده می‌شود. به عبارتی بااستفاده از روش حداقل مربعات بازگشتی، ضرایب کنترلر به‌دست می‌آید. بنابراین ابتدا تابع هزینه مطابق معادله (۱۹) برای $k = 1,\ldots,a$ تعریف می‌گردد.

$$J_R\left(\boldsymbol{\theta}_{\alpha_k}(i),i\right) = \sum_{\rho=1}^{k}\left\|\widehat{\mathbf{u}}_i\left(i-\alpha_\rho\right) - \\ \boldsymbol{\theta}\alpha ki\boldsymbol{\phi}i{-}\alpha\rho 2\right. \\ + \sum_{\rho=1}^{a}\sum_{j=1}^{m}\left\|\widehat{\mathbf{u}}_{i-j}\left(i-\alpha_\rho-j\right) - \boldsymbol{\theta}_{\alpha_k}(i)\boldsymbol{\phi}(i- \\ \alpha\rho{-}j2\right. \tag{۱۹}$$

معادله (۱۹) توسط پارامترهای کنترلر که از طریق معادله (۲۰) بدست می‌آید کمینه می‌گردد [۲۴].

$$\boldsymbol{\theta}_{\alpha_k}(i) = \\ \boldsymbol{\theta}_{\alpha_k-1}(i) + \left(\frac{\widehat{\mathbf{u}}_i(i-\alpha_k) - \boldsymbol{\theta}_{\alpha_k-1}(i)\boldsymbol{\phi}(i-\alpha_k)}{1+\boldsymbol{\phi}^T(i-\alpha_k)\mathbf{P}_{\alpha_k-1}(i)\boldsymbol{\phi}(i-\alpha_k)}\right) \\ \boldsymbol{\phi}^T(i-\alpha_k)\mathbf{P}_{\alpha_k-1}(i) \tag{۲۰}$$

ماتریس کوواریانس $\mathbf{P}(i)$ مطابق معادله (۲۱) می‌باشد [۲۴].

$$\mathbf{P}_{\alpha_k}(i) = \\ \mathbf{P}_{\alpha_k-1}(i) - \frac{\mathbf{P}_{\alpha_k-1}(i)\boldsymbol{\phi}(i-\alpha_k)\boldsymbol{\phi}^T(i-\alpha_k)\mathbf{P}_{\alpha_k-1}(i)}{\boldsymbol{\phi}^T(i-\alpha_k)\mathbf{P}_{\alpha_k-1}(i)\boldsymbol{\phi}(i-\alpha_k)+1} \tag{۲۱}$$

سپس کنترلر مطابق معادله (۲۲) بدست می‌آید.

$$\mathrm{u}(i) = \theta(i)\phi(i) \tag{۲۲}$$

10. Recursive Least Squares

کنترل سرعت زاویه‌ای و وضعیت ماهواره

از آنجا که روش موجود در این مقاله به بردار عملکرد[۱۱] نیاز دارد، ماتریس دوران در معادله (۴) نمی‌تواند به طور مستقیم استفاده شود. بنابراین رابطه‌ای جهت بیان دینامیک خطای وضعیت با استفاده از یک تابع برداری از ماتریس خطای وضعیت تعیین می‌گردد.

$\mathbf{A}_{att} = diag(a_1, a_2, a_3)$ یک ماتریس معین مثبت قطری است. بنابراین در روابط (۲۳) و (۲۴) به ترتیب متغیر عملکرد سیستم در مسئله کنترل سرعت زاویه‌ای و کنترل وضعیت ماهواره مشخص شده است.

$$\mathbf{z}_{velocity} = \boldsymbol{\omega} - (\delta\mathbf{R})^T \boldsymbol{\omega}_f \tag{۲۳}$$

برای مسئله کنترل سرعت زاویه‌ای، خطای وضعیت در نظر گرفته نمی‌شود و مقدار آن برابر ماتریس همانی $\mathbf{I}_3$ است. به عبارتی $\delta\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ است.

$\mathbf{z}_{att}$ بردار خطای وضعیت است و خطای وضعیت بر خطای سرعت تأثیر می‌گذارد. متغیر عملکرد در مسئله کنترل وضعیت ماهواره بر اساس معادله (۲۴) محاسبه می‌شود. برای $j = 1,2,3$، e_j ستون jام ماتریس همانی $\mathbf{I}_3$ است [۲۲].

(۲۴)

$\mathbf{z}$

$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{velocity} \\ \mathbf{z}_{att} \end{bmatrix}$ در مسئله کنترل وضعیت ماهواره، پارامتر متغیر عملکرد ترکیبی نامیده می‌شود.

در این بخش معادلات حرکت ماهواره ابتدا در مسئله کنترل سرعت زاویه‌ای ماهواره و سپس در مسئله کنترل وضعیت ماهواره بررسی می‌شوند. از آنجا که مسائل کنترل وضعیت و سرعت زاویه‌ای ماهواره توسط معادلات زمان- پیوسته غیرخطی تعیین می‌شوند، جهت تعیین پارامترهای مارکوف و استفاده از آن‌ها در روش کنترلی ارائه شده در این مقاله، در بخش کنترل سرعت زاویه‌ای ماهواره معادله (۵) خطی و زمان-گسسته می‌گردد. همچنین در بخش کنترل وضعیت ماهواره معادلات (۵) و (۶) خطی و زمان-گسسته می‌شوند. لازم به ذکر است که در بخش کنترل سرعت زاویه‌ای ماهواره، معادله (۵) توسط ژاکوبین حول نقطه تعادل $(\delta\boldsymbol{\omega})_e$خطی می‌شود و همچنین در بخش کنترل وضعیت ماهواره، معادلات (۵) و (۶) توسط ژاکوبین حول نقاط تعادل $(\delta\mathbf{R})_e$ و $(\delta\boldsymbol{\omega})_e$ خطی می‌شوند [۲۶]. در مسئله کنترل سرعت زاویه‌ای ماهوارهماتریس دینامیک زمان- پیوسته توسط معادله (۲۵) محاسبه می‌گردد.

$\mathbf{A}$ (۲۵)

---
11. Vector performance

ماتریس ورودی زمان- پیوسته مطابق معادله (۲۶) بدست می‌آید و در این معادله $\mathbf{I}$ ماتریس ممان اینرسی است. همچنین فرض می‌شود که $\vec{\mathbf{T}}_c = \mathbf{B}_{sat}\mathbf{u}$ و$\vec{\mathbf{T}}_d = \mathbf{0}$ است.

$\mathbf{B}$ (۲۶)

همچنین ماتریس دینامیک زمان-گسسته ($\mathbf{A}$) و ماتریس ورودی زمان-گسسته ($\mathbf{B}$) به ترتیب توسط معادلات (۲۷) و (۲۸) محاسبه می‌گردند. h گام زمانی کنترلر است [۲۶].

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_1 h} \tag{۲۷}$$

$$\mathbf{B} = \int_0^h e^{\mathbf{A}_1 \tau} \mathbf{B}_1 d\tau \tag{۲۸}$$

جهت تعیین پارامترهای مارکوف، سیستم زمان-گسسته خطی در معادله (۲۹) بیان شده است.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(T) + \mathbf{B}\mathbf{u}(T)\ , \\ \mathbf{z}(T+1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(T) - \mathbf{D}\mathbf{r}(T) \end{aligned} \tag{۲۹}$$

سپس پارامترهای مارکوف توسط $\mathbf{H}_j = \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}$ برای $j \geq 1$ محاسبه می‌شوند. جهت خطی‌سازی معادلات حرکت ماهواره در مسئله کنترل وضعیت،وضعیت ماهواره توسط برداری متشکل از سطرهایی از ماتریس دوران به صورت پارامتری نوشته می‌شود. ماتریس خطای وضعیت $\delta\mathbf{R}$ در معادله (۳۰) بیان شده است.

$$\delta\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (\delta\mathbf{r})_1 \\ (\delta\mathbf{r})_2 \\ (\delta\mathbf{r})_3 \end{bmatrix}_{3\times3} \tag{۳۰}$$

برای $j = 1,2,3$، $(\delta\mathbf{r})_j \in R^{1\times3}$ یک سطر از ماتریس دوران خطای وضعیت ($\delta\mathbf{R}$) است. پارامتر وضعیت جدید توسط معادله (۳۱) تعریف می‌گردد.

$$\delta\mathbf{r} = [(\delta\mathbf{r})_1 \quad (\delta\mathbf{r})_2 \quad (\delta\mathbf{r})_3]^T \tag{۳۱}$$

$\mathbf{z}$ یا همان پارامتر متغیر عملکرد به شکل بیانی از $\delta\mathbf{r}$ بازنویسی می‌شوند. $\mathbf{z}_{velocity}$ بیان شده در توضیحات قبلی به صورت معادله (۳۲) بازنویسی می‌شود. در این معادله $\mathbf{I}_3$ ماتریس همانی است.

$$\begin{aligned} \mathrm{z}_{velocity} &= \omega - [\omega_{fx}\mathrm{I}_3 \quad \omega_{fy}\mathrm{I}_3 \quad \omega_{fz}\mathrm{I}_3]\delta\mathrm{r} = \\ &\omega - \mathrm{W}(\omega_f)(\delta\mathrm{r}) \end{aligned} \tag{۳۲}$$

معادلات (۵) و (۶) با استفاده از $\delta\mathbf{r}$ بازنویسی می‌گردد. بدین منظور، معادله (۵) بر اساس $\mathbf{z}_{velocity}$بیان شده در معادله (۳۲)، به شکل بیانی از $\delta\mathbf{r}$ و $\mathbf{W}(\omega_f)$ بازنویسی می‌گردد و معادله (۶) به‌صورت معادله (۳۳) نوشته می‌شود.

$$(\dot{\delta\mathbf{r}}) = \begin{bmatrix} -(\delta\boldsymbol{\omega})^\times & & \\ & -(\delta\boldsymbol{\omega})^\times & \\ & & -(\delta\boldsymbol{\omega})^\times \end{bmatrix}_{9\times9} (\delta\mathbf{r}) \tag{۳۳}$$

معادلات حرکت حول نقاط تعادل $(\delta\boldsymbol{\omega})_e$ و $(\delta\mathbf{r})_e$ توسط

ژاکوبین خطی و سپس تبدیل به معادلات زمان- گسسته می‌شوند. همچنین برای خطی‌سازی، معادله سینماتیک وضعیت برای هر سطر $(\delta\mathbf{r})_j$ از ماتریس $\delta\mathbf{R}$ تقسیم‌بندی می‌گردد تا معادله (۳۴) حاصل گردد.

$$($$ (۳۴)

ماتریس دینامیک $\mathbf{A}_1$ برای سیستم زمان - پیوسته خطی در معادله (۳۵) مشخص است. در این معادله بر اساس توضیحات بیان‌شده قبلی، $\mathbf{A}_{velocity}$ و $\mathbf{A}_{att}$ توسط ژاکوبین و به ترتیب براساس معادلات دینامیک و سینماتیک بدست آمده در بخش کنترل وضعیت ماهواره، محاسبه می‌شوند.

$$\mathbf{A}_1\big((\delta\boldsymbol{\omega})_e,\ (\delta\mathbf{r})_e,\ \boldsymbol{\omega}_f\big) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{velocity} \\ \mathbf{A}_{att} \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

ماتریس ورودی $\mathbf{B}_1$ برای سیستم زمان- پیوسته خطی به‌صورت معادله (۳۶) است و $\mathbf{I}$ ماتریس ممان اینرسی می‌باشد.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{-1}\mathbf{B}_{sat} \\ \mathbf{0}_{9\times 3} \end{bmatrix} \tag{۳۶}$$

سپس ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب توسط معادلات (۲۷) و (۲۸)، محاسبه می‌شوند و با توجه به محاسبات انجام شده، پارامترهای مارکوف برای کنترل وضعیت ماهواره تعیین می‌شوند.

کنترل بهینه تنظیم‌کننده مربعی خطی

کنترل بهینه به‌عنوان یکی از روش‌های مدرن کنترلی جایگاه ویژه‌ای در بحث سیستم‌های کنترل دارد. یکی از روش‌های کنترل بهینه، روش کنترل بهینه تنظیم‌کننده مربعی خطی است که به اختصار LQR خوانده می‌شود. در این روش کنترلی معادله سیستم مورد بررسی برابر $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ است که بیانگر معادله یک سیستم خطی زمان- پیوسته می‌باشد. همچنین در این روش کنترلی، مسئله طراحی کنترل‌کننده، مسئله طراحی یک پسخورد حالت کنترلی مانند k است که تابع هدف خاصی مانند J را به حداقل مقدار برساند. قانون کنترلی در این روش برابر $\mathbf{u} = -\mathbf{kx}$ است و تابع هزینه مطابق معادله (۳۷) بیان می‌گردد و در این معادله، $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ ماتریس‌های وزنی می‌باشند [۲۷، ۲۸].

$$J \tag{۳۷}$$

شبیه‌سازی و نتایج عددی

برای بررسی عملکرد کنترلر طراحی شده، یک مثال شبیه‌سازی شده است. در این مثال یک ماهواره صلب با ویژگی‌های موجود در جدول (۱) درنظر گرفته می‌شود. همچنین در این جدول پارامترهای کنترلر تطبیقی ارائه شده، آورده شده است. در این شبیه‌سازی مقادیر اغتشاشات صفر در نظر گرفته می‌شود.

در شبیه‌سازی $\mathbf{B}_{sat} = \mathbf{I}_3$ است. برای مانور موجود در این شبیه‌سازی، مقاومت در برابر تغییرات در اینرسی ارزیابی می‌گردد.

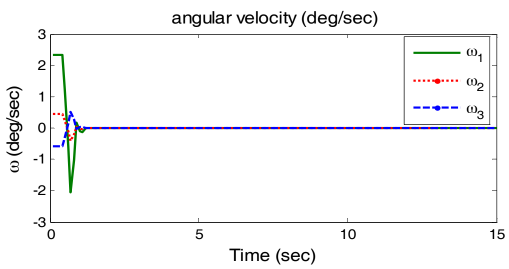
در بخش کنترل سرعت زاویه‌ای ماهواره، بر اساس توضیحات بیان‌شده در بخش‌های قبل، ماتریس دینامیک زمان- پیوسته برابر $\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$ است و ماتریس خروجی $\boldsymbol{E}_1 = \mathbf{I}$ می‌باشد. همچنین ماتریس‌های خروجی $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ و $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ می‌باشند. پارامتر مارکوف $\mathbf{H}_1$ براساس $(\delta\boldsymbol{\omega})_e = \mathbf{0}$ و توضیحات بیان شده در بخش‌های قبل توسط معادله $\mathbf{H}_1 = \boldsymbol{CB} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{B}_{sat}h$ محاسبه می‌گردد که در این معادله $\mathbf{I}$ ماتریس ممان اینرسی است. دو ماتریس ممان اینرسی متفاوت $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$ و $\mathbf{I}_2 = 3\mathbf{I}$ در نظر گرفته می‌شوند که مقدار ماتریس ممان اینرسی $\mathbf{I}$ در جدول (۱) مشخص شده است.

مقادیر هشت پارامتراول جدول (۱) با آزمون سعی و خطا بررسی و سپس انتخاب شدند. افزایش مقدار اولیه پارامترهای کنترلر $(\boldsymbol{\theta}_0)$ باعث افزایش تلاش کنترلی و زمان نشست می‌گردد. با افزایش گام زمانی کنترلر (h)، زمان نشست افزایش و تلاش کنترلی کاهش می‌یابد و افزایش مقدار اولیه ماتریس کوواریانس $(\boldsymbol{P}_0)$ باعث کاهش تلاش کنترلی و زمان نشست می‌گردد.

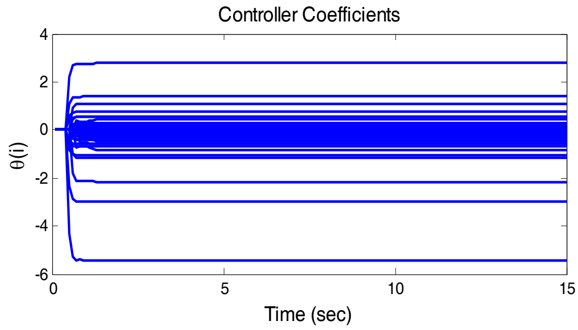
شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) عملکرد حلقه- بسته را برای مانور درنظر گرفته شده در این مقاله نشان می‌دهند. به ازای ماتریس اینرسی برابر با I_1، در شکل (۱) سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور، در شکل (۲) پارامترهای کنترلر $(\boldsymbol{\theta}(i))$ و در شکل (۳) نمودار نرم سیگنال ورودی کنترل نشان داده شده‌است.

جدول ۱- پارامترهای روش کنترلی

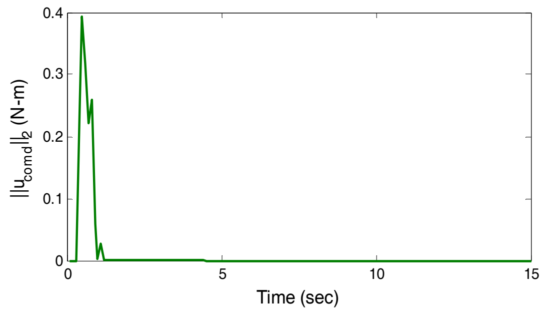
پارامتر	مقدار
$\boldsymbol{\theta}_0$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{P}_0$	$500\mathbf{I}$
$n_{controller}$	3
$\mathbf{R}_Z$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{R}_U$	$\mathbf{0}$
α_a	2
h	$0.1\,(s)$
a	1
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} (kg\text{-}m^2)$
	$[2.32 \quad 0.45 \quad -0.59]^T (deg/sec)$
$\boldsymbol{\omega}_f$	$[0 \quad 0 \quad 0]^T (deg/sec)$



شکل ۱- نمودار سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور، $I = I_1$

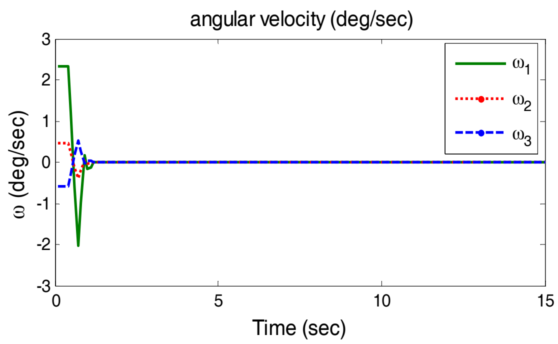


شکل ۲- نمودار پارامترهای کنترلر، $I = I_1$

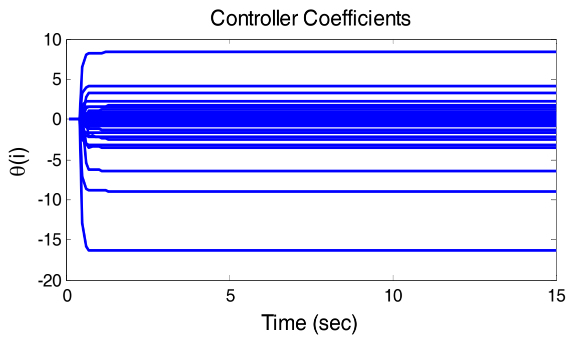


شکل ۳- نمودار نرم سیگنال ورودی کنترل، $I = I_1$

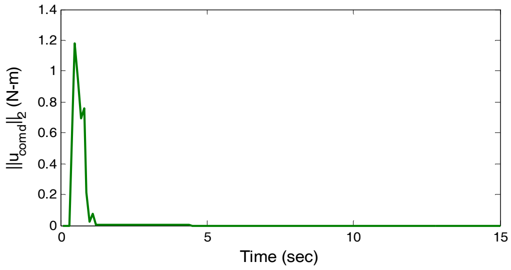
اکنون بر اساس ماتریس اینرسی $\mathbf{I} = \mathbf{I}_2$، شکل‌های (۴)، (۵) و (۶)، به ترتیب نمودارهای سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور، پارامترهای کنترلر ($\boldsymbol{\theta}(i)$) و نرم سیگنال ورودی کنترل می‌باشند.



شکل ۴- نمودار سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور، $I = I_2$



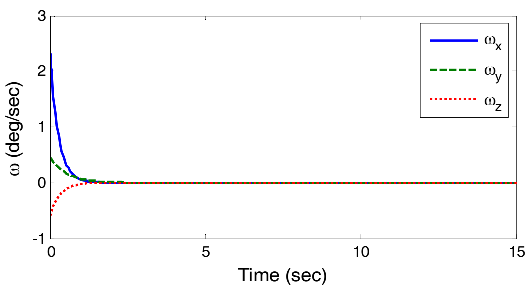
شکل ۵- نمودار پارامترهای کنترلر، $I = I_2$



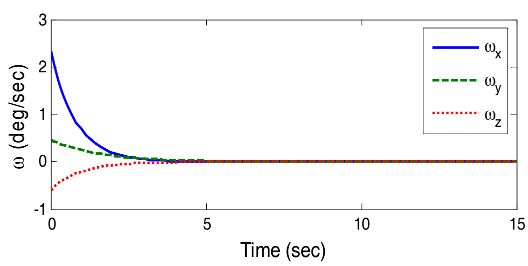
شکل ۶- نمودار نرم سیگنال ورودی کنترل، $I = I_2$

همانطور که از نمودارها مشخص است سرعت‌های زاویه‌ای پس از مدت زمانی از مقادیر اولیه خود به مقدار صفر همگرا شده‌اند و پارامترهای کنترلر نیز به مقادیر ثابتی رسیده‌اند. پاسخ زمانی سیستم بسیار قابل قبول و کوتاه می‌باشد. همچنین در نمودارهای سرعت زاویه‌ای ماهواره در ابتدای شبیه‌سازی مقداری فراجهش و فروجهش دیده می‌شود. اما سرعت پاسخ سیستم در زمان استفاده از روش کنترل تطبیقی بهینه ارائه شده در این مقاله بالاست و به سرعت فراجهش‌ها و فروجهش‌ها از بین رفتند و نمودارها به مقادیر صفر همگرا شدند.

حال با استفاده از داده‌های حالت قبل و همچنین با درنظرگرفتن $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$، $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.7417 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2915 & 0 \\ 0 & 0 & 6.4807 \end{bmatrix}$، شبیه‌سازی را برای کنترلر LQR انجام می‌دهیم، و مانند قبل دو مقدار متفاوت ماتریس اینرسی $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$ و $\mathbf{I}_2 = 3\mathbf{I}$ درنظرگرفته می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های (۷) و (۸) آمده‌است.



شکل ۷- نمودار سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور با استفاده از روش LQR، $I = I_1$



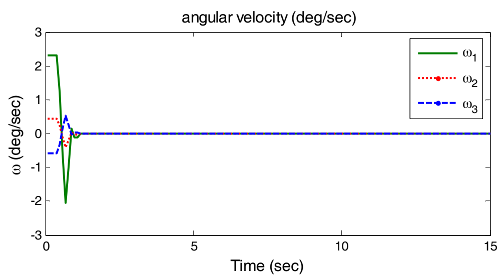
شکل ۸- نمودار سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور با استفاده از روش LQR، $I = I_2$

جدول ۲- مقایسه زمان نشست سیستم با استفاده از روش کنترلی تطبیقی بهینه ارائه شده و روش کنترلی LQR

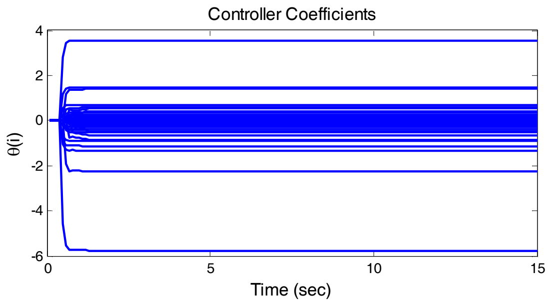
روش‌های کنترلی	زمان نشست(s)			تلاش کنترلی (N-m)
	ω_1	ω_2	ω_3	
LQR، روش کنترلی $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1$	4.5	5.3	4	1.5203
LQR، روش کنترلی $\mathbf{I} = \boldsymbol{I}_2$	7.8	9.7	7.2	1.5205
روش کنترل تطبیقی ارائه شده، $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1$	1.4	1.2	1.2	1.5242
روش کنترل تطبیقی ارائه شده، $\mathbf{I} = \mathbf{I}_2$	1.6	1.3	1.3	4.6293

همان‌طورکه از نمودارها و جدول (۲) مشخص است هنگامی که تلاش کنترلی در دو روش کنترلی بررسی شده برابر است، زمان نشست سیستم در حالتی که کنترلر مورد استفاده، کنترلر تطبیقی بیان‌شده در این مقاله باشد از زمان نشست سیستم در حالتی که کنترلر استفاده شده کنترلر LQR باشد، کمتر است. همچنین روش کنترلر تطبیقی ارائه‌شده در این مقاله نسبت به تغییرات اینرسی مقاوم است. زمانی‌که ماتریس اینرسی در شبیه‌سازی تغییر می‌کند، زمان نشست سیستم در حالت استفاده از کنترلر LQR افزایش می‌یابد. درصورتی‌که با تغییر ماتریس اینرسی زمان نشست سیستم در حالتی که کنترلر مورد استفاده، کنترلر تطبیقی ارائه شده باشد، تغییر چندانی نمی‌کند. همچنین با تغییر اینرسی تلاش کنترلی در حالتی که کنترلر مورد استفاده در سیستم، کنترلر تطبیقی بیان شده است، بیشتر از حالتی است که کنترلر استفاده شده کنترلر LQR است، اما همچنان زمان نشست سیستم در حالت استفاده از روش کنترلر تطبیقی بیان شده کمتر از زمان نشست سیستم در حالتی است که از روش کنترلی LQR استفاده شده است.

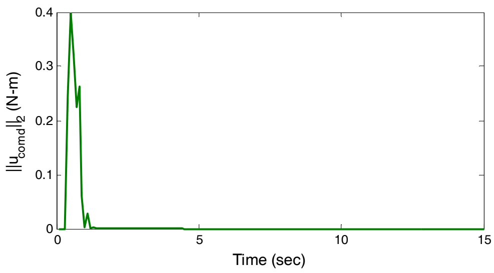
همچنین در این بخش جهت بررسی عدم قطعیت در اینرسی هنگامی‌که از روش کنترل تطبیقی ارائه شده در این مقاله استفاده می‌گردد، درایه‌های غیرقطری ماتریس ممان اینرسی غیرصفر قرار داده می‌شوند. ماتریس ممان اینرسی استفاده شده جهت شبیه‌سازی در این بخش برابر $\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.3 \\ -0.1 & 2.8 & 0.8 \\ -0.3 & 0.8 & 2 \end{bmatrix}$ می‌باشد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) که به ترتیب نمودارهای سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور، پارامترهای کنترلر $(\boldsymbol{\theta}(i))$ و نمودار نرم سیگنال ورودی کنترل هستند، نشان داده شده است.



شکل ۹- نمودار سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور، $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3$



شکل ۱۰- نمودار پارامترهای کنترلر، $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3$



شکل ۱۱- نمودار نرم سیگنال ورودی کنترل، $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3$

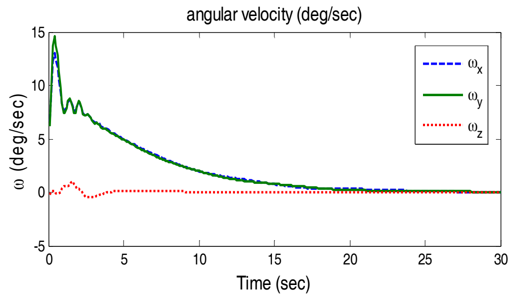
مقدار تلاش کنترلی محاسبه شده در این شبیه‌سازی برابر ۱/۵۴۵۹ (N-m) می‌باشد. با توجه به شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) و همچنین شکل‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) می‌توان به این نتیجه رسید که با تغییر ماتریس ممان اینرسی از $\mathbf{I}_1$ به $\mathbf{I}_3$، میزان زمان نشست سیستم تغییر چندانی نکرده است و همچنین مقدار تلاش کنترلی اندکی افزوده شده است.

برای شبیه‌سازی بخش کنترل وضعیت ماهواره، $\mathbf{B}_{sat} = \mathbf{I}_3$ و $\mathbf{A}_{att} = \mathbf{I}_3$ است. پارامتر مارکوف براساس $(\delta\mathbf{R})_e = \mathbf{I}_3$ و $(\delta\boldsymbol{\omega})_e = \mathbf{0}$ محاسبه می‌شود.

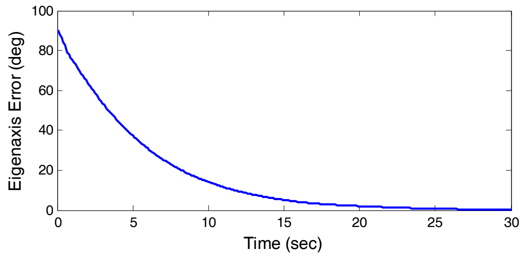
ماتریس $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0}_{3\times9} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{N} \end{bmatrix}$ است که در محاسبه آن $\mathbf{M} = \mathbf{I}_3$ و $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ می‌باشند.

$\mathbf{D} = \mathbf{0}$ و $\mathbf{P}_0 = 100\mathbf{I}$ است. اینرسی و پارامترهای کنترلر از جدول (۱) استخراج شوند و $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1$ است. هدف کنترلر قراردادن ماهواره در حالت سکون یا $\boldsymbol{\omega}_f = \mathbf{0}$ می‌باشد. ماتریس دوران وضعیت اولیه برابر $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}_3$ و ماتریس وضعیت نهایی مطلوب برابر $\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.7071 \\ 0.5 & 0.5 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 \end{bmatrix}$ است.

شکل‌های (۱۲) و (۱۳) به‌ترتیب نمودارهای سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور و خطای وضعیت محور ویژه هستند. همچنین خطای وضعیت محور ویژه توسط معادله $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}(tr(\delta\mathbf{R}) - 1)\right)$ محاسبه می‌شود [۲۲].



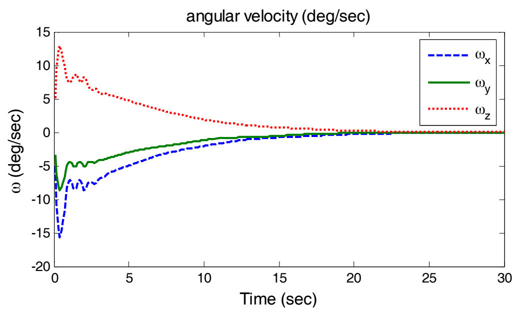
شکل ۱۲– نمودار سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور



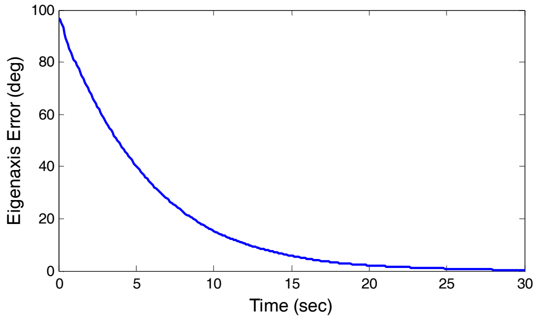
شکل ۱۳– خطای وضعیت محور ویژه

همان‌طورکه از شکل‌های (۱۲) و (۱۳) مشخص است سرعت زاویه‌ای ماهواره در نهایت به مقدار صفر همگرا شده است و نمودار خطای وضعیت محور ویژه پس از مدت زمانی به مقدار صفر رسیده است و وضعیت هر لحظه ماهواره بر وضعیت نهایی مطلوب آن منطبق شده است.

همچنین جهت بررسی عملکرد سیستم با استفاده از روش کنترل تطبیقی ارائه شده در این مقاله، زمانی که بازه مانورها بزرگ باشد، مسئله کنترل وضعیت ماهواره با مقادیر اولیه و نهایی زوایای ماهواره که برابر $\varphi_0 = 0\,(deg)$، $\theta_0 = 0\,(deg)$، $\psi_0 = 0\,(deg)$، $\varphi_f = 50\,(deg)$، $\theta_f = 60\,(deg)$ و $\psi_f = -40\,(deg)$ هستند بررسی می‌گردد. $\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} 0.3830 & -0.3214 & -0.8660 \\ 0.9214 & 0.0660 & 0.3830 \\ -0.0660 & -0.9446 & 0.3214 \end{bmatrix}$ هستند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل‌های (۱۴) و (۱۵) مشخص شده است.



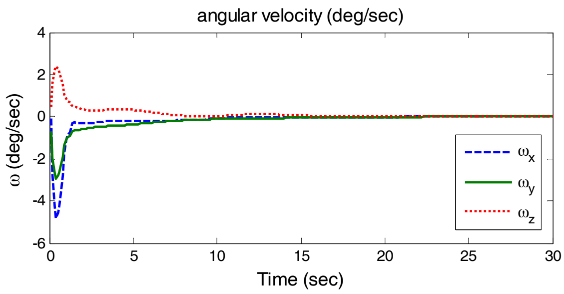
شکل ۱۴– نمودار سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور در حالت بزرگ‌بودن بازه مانور



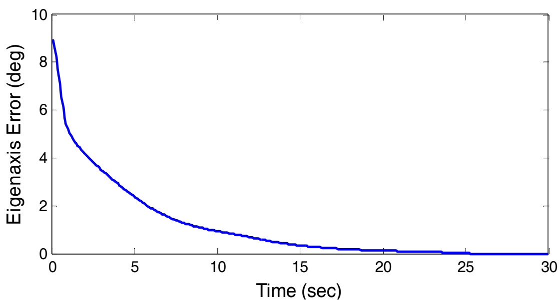
شکل ۱۵– خطای وضعیت محور ویژه در حالت بزرگ بودن بازه مانور

بر اساس شکل‌های (۱۴) و (۱۵) این نتیجه حاصل می‌گردد که وضعیت ماهواره با استفاده از روش کنترل تطبیقی ارائه شده در این مقاله زمانی که بازه مانور بزرگ است، کنترل شده است و سرعت زاویه‌ای ماهواره و خطای وضعیت محور ویژه صفر گردیده است.

همچنین مسئله کنترل وضعیت ماهواره با استفاده از روش کنترل تطبیقی ارائه شده در این مقاله برای مانورهای غیرصفر بررسی شده است. مقادیر اولیه و نهایی زوایای ماهواره برابر $\varphi_0 = 0\,(deg)$، $\theta_0 = 0\,(deg)$، $\psi_0 = 0\,(deg)$، $\varphi_f = 5\,(deg)$، $\theta_f = 6\,(deg)$ و $\psi_f = -4\,(deg)$ هستند. $\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} 0.9921 & -0.0694 & -0.1045 \\ 0.0786 & 0.9931 & 0.0867 \\ 0.0978 & -0.0942 & 0.9907 \end{bmatrix}$ هستند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل‌های (۱۶) و (۱۷) مشخص شده است.



شکل ۱۶– نمودار سرعت زاویه‌ای ماهواره حول هر سه محور در حالت مانور غیر صفر



شکل ۱۷– خطای وضعیت محور ویژه در حالت مانور غیر صفر

همان‌طورکه در شکل‌های (۱۶) و (۱۷) مشخص است در حالت مانور غیرصفر سرعت زاویه‌ای ماهواره در نهایت به مقدار صفر همگرا شده است و نمودار خطای وضعیت محور ویژه پس از مدت زمانی به مقدار صفر رسیده است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله کنترل سرعت‌های زاویه‌ای و وضعیت یک ماهواره صلب توسط یک روش جدید کنترل تطبیقی بهینه بررسی شد و نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی ارائه شدند. این روش کنترل تطبیقی از یک روش نوین بهینه در قانون تطبیق خود و از مفهوم کنترل بهینه استفاده نمود که این ویژگی تأثیر به سزایی در بهبود عملکرد سیستم داشت. برای بیان بردارهای وضعیت از ماتریس‌های دوران استفاده شد و روش کنترل تطبیقی ارائه شده براساس گروه متعامد خاص از مرتبه سه گسترش یافت و از این رو مشکل سینگولاریتی نداشت. برای مقایسه روش کنترلی تطبیقی بیان شده با سایر روش‌های کنترلی، روش کنترل بهینه تنظیم‌کننده مربعی خطی نیز بررسی و شبیه‌سازی شد. پاسخ زمانی سیستم، زمان نشست آن و تلاش کنترلیبا استفاده از دو روش کنترلی مورد بحث به دست آمده و مقایسه شدند. پس از تجزیه و تحلیل پاسخ‌ها این نتیجه حاصل شد که در حالتی که تلاش کنترلی در دو روش کنترلی بررسی شده برابر باشد، اگر کنترلر استفاده شده، کنترلر تطبیقی بهینه باشد، زمان نشست سیستم نسبت به حالتی که کنترلر استفاده شده، کنترلر بهینه تنظیم‌کننده مربعی خطی باشد کم‌تر بوده و همچنین ملاحظه شد که روش کنترل تطبیقی بهینه بیان شده نسبت به عدم قطعیت در اینرسی مقام است. در بررسی پاسخ سیستم نسبت به تغییرات اینرسی می‌توان به این نتیجه رسید، زمانی که کنترلر موجود در سیستم، کنترلر بهینه تنظیم‌کننده مربعی خطی باشد، زمان نشست سیستم افزایش می‌یابد، اما در حالتی که کنترلر استفاده شده کنترلر تطبیقی بهینه باشد زمان نشست سیستم تغییر چندانی نمی‌کند. همچنین تلاش کنترلی با تغییر اینرسی در حالتی که کنترلر مورد استفاده، کنترلر تطبیقی بیان شده باشد بیشتر از تلاش کنترلی در حالتی است که کنترلر مورد استفاده کنترلر LQR باشد. در صورت استفاده از کنترلر تطبیقی بهینه در سیستم، نمودار پارامترهای کنترلر به مقادیر ثابتی رسیدند و پارامترهای کنترلر به خوبی تخمین زده شدند. همچنین نمودار خطای وضعیت محور ویژه پس از مدت زمانی به مقدار صفر رسید و این بدان معنی است که در نهایت، وضعیت هر لحظه ماهواره بر وضعیت نهایی مطلوب آن منطبق شده است. سرعت پاسخ سیستم با استفاده از روش کنترلی تطبیقی بهینه ارائه شده در این مقاله قابل قبول و مناسب بود.

مراجع

[1] Ahmed, J., Coppola, V. T. and Bernstein, D. S., “Adaptive asymptotic tracking of spacecraft attitude motion with inertia matrix identification,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 5, 1998, pp. 684–691.

[2] Schaub, H., Akella, M. R. and Junkins, J. L., “Adaptive control of nonlinear attitude motions realizing linear closed loop dynamics,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 1, 2001, pp. 95–100.

[3] Seo, D. and Akella, M. R., “High-performance spacecraft adaptive attitude-trackingcontrol through attracting-manifold design,” *Journal of guidance, control, and dynamics*,Vol. 31, No. 4, 2008, pp. 884–891.

[4] Zonuzy, A. H.,Arefizadeh, S.,Talebpour, A.,Shakkottai, S. and Darbha, S., “Collaborative platooning of automated vehicles using variable time-gaps,” *Proceedings of 2018 Annual American Control Conference*, *IEEE*, 2018, pp. 6715–6722.

[5] Wilkening, P., Alambeigi, F., Murphy, R. J., Taylor, R. H. and Armand, M., “Development and experimental evaluation of concurrent control of a robotic arm and continuum manipulator for osteolytic lesion treatment,” *IEEE robotics and automation letters*, Vol. 2, No. 3, 2017, pp. 1625-1631.

[6] Nateghi, S. and Shtessel, Y., “Robust stabilization of linear differential inclusion using adaptive sliding mode control,” *Proceedings of 2018 Annual American Control Conference*, *IEEE*, 2018, pp. 5327–5331.

[7] Zamani, A. and Bhounsule, P. A., “Control synergies for rapid stabilization and enlarged region of attraction for a model of hopping,”*Journal of Biomimetics*, 2018, Vol. 3, No. 3.

[8] Show, L. L.,Juang, J. C., Jan, Y. W. and Lin, C. T., “Quaternin Feedback Attitude Control Design: A Nonlinear H_∞ Approach,” *Asian J. Control*, Vol. 5, No. 3, 2003, pp. 406-411.

[9] Sheen, J. J. and Bishop, R. H., “Spacecraft Nonlinear Control,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 42, No. 3, 1994, pp. 361-377.

[10] Skullestad, A. and Gilbert, M. J., “H_∞ control of gravity gradient stabilized satellite,” *Control Engineering Practice*, Vol. 8, No. 9, 2000, pp. 975-983.

[11] Slotine, J. J. E. and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

[12] Astrom, K. J. and Wittenmark, B., *Adaptive Control*, 2^{nd} Ed., Addison-Wesley, Reading MA, 1995.

[13] Yoon, H. and Tsiotras, P., “Spacecraft adaptive attitude and power tracking with variable speed control moment gyroscopes,” *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 6, 2002, pp. 1081-1090.

[14] Slotine, J. J. E. and Di Benedetto, M., “Hamiltonian adaptive control of spacecraft,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 7, 1990, pp. 848-852.

[15] Zeng, Y., Araujo, A. D. and Singh, S. N., “Output feedback variable structure adaptive control of a flexible spacecraft,” *ActaAstronautica*, Vol. 44, No. 1, 1999, pp. 11–22.

[16] Chen, Z. and Huang, J., "Attitude tracking and disturbance rejection of rigid spacecraft by adaptive control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 3, 2009, pp. 600-605.

[17] Yoon, H. and Agrawal, B., "Adaptive control of uncertain hamiltonianmulti-inputmulti-output systems: with application to spacecraft control,"*IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 17, No. 4, 2009, pp. 900–906.

[18] Cai, W., Liao, X. and Song, D. Y., "Indirect robust adaptive fault-tolerant controlfor attitude tracking of spacecraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, 2008, pp. 1456–1463.

[19] Zhou, N.,Kawano, Y. and Cao, M.,"Adaptive failure-tolerant control for spacecraft attitude tracking,"*International Federation of Automatic Control(IFAC)*, Vol. 52, Issue. 3, 2019, pp. 67-72.

[20] MacKunis, W., Dupree, K., Fitz-Coy, N. and Dixon, W. E., "Adaptive satellite attitudecontrol in the presence of inertia and CMG gimbal friction uncertainties," *TheJournal of the Astronautical Sciences*, Vol. 56, No. 1, 2008, pp. 121–134.

[21] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control, a Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, 1997.

[22] Sanyal, A., Fosbury, A., Chaturvedi, N.and Bernstein, D. S., "Inertia-free spacecraft attitude tracking with disturbance rejection and almost global stabilization," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 4, 2009, pp. 1167-1178.

[23] Rahman, Y., Aljanaideh, K. F. and Bernstein, D. S., "Retrospective cost adaptive control using composite FIR/IIR controllers," *IEEE 2018 Annual American Control Conference*, 2018, pp. 893-898.

[24] D`Amato, A. M., Sumer, E. D. and Bernstein, D. S., "Frequency-domain stability analysis of retrospective-cost adaptive control for systems with unknown nonminimum-phase zeros," *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011, pp. 1098-1103.

[25] Sumer, E. D., D`Amato, A. M., Morozov, A. V., Hoagg, J. B. and Bernstein, D. S., "Robustness of retrospective cost adaptive control to markov-parameter uncertainty," *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011, pp. 6085-6090.

[26] Chen, C. T., *Linear System Theory and Design*, 3rd Ed., Oxford University Press, 1999.

[27] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[28] Kirk, D. E., *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice Hall, Inc., New York, 1971.