

**Research Paper**

# Optimal Proportional Navigation in Three-Dimensional Space Using Model Predictive Control Approach

Reza Sheikhabaei<sup>1</sup> and Saeed khankalantary<sup>2\*</sup>

1. Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology (SUT), Tehran. Iran.

2. Department of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran. Iran

\* [s.kalanatry@kntu.ac.ir](mailto:s.kalanatry@kntu.ac.ir)

*In this study, on the basis of proportional navigation strategy, design of explicit optimal guidance law for missiles tracking maneuvering targets in three-dimensional space using model predictive control is addressed. The model predictive control employs a model to predict the future process behavior and calculates an optimal control input at each time step through the optimization of an objective function. Generalized model predictive control approach, employed in this study, solves the optimization problem offline to obtain the closed form optimal control law. In this paper, firstly, the equations describing the missile-target relative motion kinematics are formulated. Then, the optimal control law, as an explicit function of the state vector is obtained. The evaluation of the proposed scheme is studied by the comparison of the simulation results with the augmented proportional navigation system. Simulation studies, in three different scenarios, demonstrates appropriate performance for the proposed guidance system specially against maneuvering targets.*

**Keywords:** Model Predictive Control, Proportional Navigation, Three Dimensional, Explicit Optimal Guidance Law.

---

1 PhD

2 Assistant Professor (Corresponding Author).

مقاله علمی - پژوهشی

# هدایت تناسبی بهینه در فضای سه بعدی با رویکرد کنترلی پیش بین مدل مینا

رضا شیخ بهایی<sup>۱</sup> و سعید خان کلانتری<sup>۲\*</sup>

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۲- دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

\*s.khan@ec.iut.ac.ir

در این مقاله، با استفاده از روش کنترلی پیش بین مدل مینا و بر پایه استراتژی هدایت تناسبی به طراحی قانون هدایت بهینه صریح جهت هدایت موشک پدافندی به سمت هدف در حال مانور در فضای سه بعدی پرداخته می شود. این روش کنترلی با پیش بینی رفتار سیستم در آینده، در خلال بهینه سازی یک تابع هزینه مشخص، قانون کنترلی بهینه را محاسبه می کند. رویکرد کنترلی پیش بین تعمیم یافته که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است، مسأله بهینه سازی را به صورت برون خط حل می کند تا فرم بسته قانون کنترلی بهینه را به دست آورد. به این منظور، ابتدا معادلات حرکت مجموعه موشک و هدف در دستگاه سه بعدی بازنویسی می شود. سپس، قانون کنترلی بهینه به صورت تابعی صریح از متغیرهای حالت محاسبه می شود. عملکرد سیستم هدایت پیشنهادی با سیستم هدایت تناسبی APN در سه سناریو متفاوت مقایسه شده و نتایج شبیه سازی نشان دهنده کارایی مطلوب سیستم پیشنهادی به ویژه در مقابله با اهداف با تغییر مسیرهای ناگهانی است.

واژه های کلیدی: کنترل پیش بین مدل مینا، هدایت تناسبی، سه بعدی، قانون هدایت بهینه صریح

## علائم و اختصارات

$v$	بردار سرعت		
$x$	بردار متغیرهای حالت		
$xyz$	دستگاه متصل به موشک در راستای خط دید	$a$	بردار شتاب
$XYZ$	دستگاه ثابت سراسری	$D$	فاصله نسبی موشک و هدف
$xyz_M$	دستگاه متصل به موشک در راستای سرعت موشک	$J$	تابع هدف
$xyz_T$	دستگاه متصل به هدف در راستای سرعت هدف	$M$	موشک
$y$	بردار خروجی های مدل	$r$	مرتب به کنترلی
$\delta$	زاویه بین راستای خط دید و بردار سرعت لحظه ای موشک	$r$	بردار مکان
$\lambda$	درجه نسبی سیستم	$R$	ماتریس دوران
$\omega$	بردار سرعت دورانی	$t$	زمان
		$T$	هدف
		$T_p$	افق پیش بینی
		$u$	بردار ورودی های کنترلی

## مقدمه

استراتژی های متفاوتی در سیستم هدایت موشک که از اجزاء کلیدی سامانه پدافند هوایی است، طراحی شده و مورد استفاده قرار گرفته است. استراتژی هدایت در اغلب موشک های پدافندی زمین به هوا و

۱. دکتری

۲. استادیار (نویسنده مخاطب)

برای استفاده از این روش کنترلی توسعه داده شده‌اند. در پژوهش حاضر با توجه به رفتار غیرخطی مجموعه موشک و هدف، می‌بایست از رویکردهای کنترلی پیش‌بین دارای مدل غیرخطی بهره گرفت. از طرف دیگر، به دلیل دینامیک سریع مسئله رویکردهای زمانبر غیر قابل استفاده است. از این رو، روش کنترلی پیش‌بین مدل مبنای تعمیم‌یافته<sup>۱۰</sup> [۱۷] که با شرایط بیان شده سازگاری دارد، مناسب به نظر می‌رسد. در این روش، قانون کنترلی بهینه به صورت یک تابع صریح از متغیرهای حالت به دست می‌آید و به همین دلیل زمانی برای حل مسئله بهینه‌سازی به صورت برخط<sup>۱۱</sup> صرف نخواهد شد.

سابقه استفاده از روش GMPC در هدایت موشک به سال ۱۹۹۸ برمی‌گردد [۱۸]. جایی که رویکرد هدایت تناسبی با روش پیش‌بین مدل مینا ترکیب شده و سیستم هدایت موشک در فضای دوبعدی و با فرض اندازه ثابت برای سرعت موشک و هدف طراحی شده است. در نتایج گزارش شده در مرجع [۱۸]، سیستم هدایت طراحی شده در مقایسه با سیستم هدایت تناسبی ساده، عملکرد به مراتب بهتری از خود نشان داده است. در سال ۲۰۰۶ نیز همین تیم در پژوهشی [۱۹] مجدداً یک سیستم هدایت مبتنی بر استراتژی هدایت تناسبی با روش پیش‌بین مدل مبنای تعمیم‌یافته در فضای دوبعدی طراحی کرده‌اند. شتاب هدف که در مرجع [۱۸] معلوم فرض شده بود، در این پژوهش با استفاده از یک تخمین‌گر، محاسبه شده و مورد استفاده قرار گرفته است. در سال ۲۰۱۵، مرجع [۲۰] نیز به طراحی سیستم هدایت موشک با روش پیش‌بین مدل مینا در فضای دوبعدی پرداخته است. با توجه به غیرخطی بودن دینامیک مسئله، نوآوری اصلی در این پژوهش، استفاده از شبکه عصبی برای حل مسئله بهینه‌سازی مربوط به کنترلر پیش‌بین مدل مینا است که باعث کاهش زمان محاسبات جهت تولید سیگنال کنترلی در هر گام نمونه‌برداری شده است. همچنین، در سال ۲۰۱۶، دو پژوهش مراجع [۲۱] و [۲۲] منتشر شده است که در آن‌ها همان رویکرد مرجع [۱۹] با استفاده از نتایج پژوهش مرجع [۲۳] بازنویسی و مورد استفاده قرار گرفته است. در این دو پژوهش، تمرکز اصلی بر روی طراحی مشاهده‌گر به منظور تخمین سرعت و شتاب هدف است. با بررسی ادبیات طراحی سیستم هدایت موشک، ملاحظه می‌شود که استفاده از روش پیش‌بین مدل مینا با وجود دستیابی به نتایج قابل قبول، در مقالات معدودی گزارش شده است. به طوری که تا امروز نتایج استفاده از روش GMPC برای این مسئله در حالت سه‌بعدی گزارش نشده و کارایی آن مورد بررسی قرار نگرفته است. در پژوهش حاضر، طراحی و ارزیابی سیستم هدایت

هوا به هوا هدایت تناسبی<sup>۳</sup> است [۱]. در این استراتژی، هدایت موشک به گونه‌ای صورت می‌گیرد که از چرخش راستای یک محور دلخواه از پیش تعریف شده جلوگیری شود [۱]. خط دید<sup>۴</sup> موشک و هدف یک گزینه مناسب برای این محور است. این استراتژی، علاوه بر سادگی، بازده و کارایی قابل قبولی نیز دارد. در سال ۱۹۸۹، پژوهش انجام شده در مرجع [۲] استراتژی هدایت تناسبی در حالت دوبعدی و برای یک راستای دلخواه مورد بررسی قرار داد و فرم بسته قانون کنترلی<sup>۵</sup> برای یک موشک، در حال تعقیب یک هدف در حال مانور، استخراج شد. ایده اصلی قانون هدایت تناسبی که اعمال یک شتاب عمودی به موشک متناسب با سرعت دورانی خط دید است که در مرجع [۳] مورد بررسی قرار گرفته است. ضعف اصلی استراتژی هدایت تناسبی در مواجهه با اهداف با تغییر مسیرهای ناگهانی است. این مسئله در مرجع [۴] بررسی شده است.

استراتژی دیگری که به منظور هدایت موشک‌ها مورد استفاده قرار گرفته است، فرمان به خط دید<sup>۶</sup> نامیده می‌شود. در این استراتژی، هدف پرواز موشک در نزدیک‌ترین فاصله ممکن نسبت به خط واصل بین هدف و رادار زمینی است. مشکل اصلی در این استراتژی، وابستگی بازدهی هدایت موشک به کیفیت سیستم راداری به ویژه در بردهای بلند است. به طوری که با فاصله گرفتن موشک و هدف از رادار زمینی، احتمال موفقیت هدایت کاهش می‌یابد. این استراتژی در پژوهش‌هایی نظیر مراجع [۵-۷]، به ترتیب با استفاده از رویکردهای کنترلی خطی‌سازی پس‌خوراند، کنترل فازی و کنترل پس‌گام پیاده‌سازی شده است.

استراتژی‌های هدایت موشک در پژوهش‌های متفاوت با رویکردهای کنترلی متفاوتی پیاده‌سازی شده است که به برخی از آن‌ها اشاره شد. از دیگر رویکردهای مهم به کار رفته می‌توان به الگوریتم‌های کنترل بهینه [۸، ۹]، روش مود لغزشی [۱۰-۱۲] و روش‌های مبتنی بر تابع لیاپانوف [۱۳-۱۵] اشاره کرد.

استفاده از روش کنترلی پیش‌بین مدل مینا<sup>۷</sup> نیز در ادبیات هدایت موشک به چشم می‌خورد. ایده اصلی این روش کنترلی که قابلیت کنترل سیستم‌های چندمتغیره<sup>۸</sup> با ارضاء قیود روی متغیرهای حالت و نیز ورودی‌های کنترلی را دارد، پیش‌بینی رفتار سیستم تحت کنترل و محاسبه سری ورودی کنترلی بهینه طی بهینه‌سازی یک تابع هدف<sup>۹</sup> مشخص است. این فرآیند با متغیرهای حالت بروزرسانی شده تکرار می‌شود [۱۶]. بسته به شرایط مسئله رویکردهای متفاوتی

3 Proportional Navigation (PN)

4 Line of Sight (LOS)

5 Closed Form Control Law

6 Command to Line of Sight (CLOS)

7 Model Predictive Control (MPC)

8 Multivariable

9 Objective Function

10 Generalized Model Predictive Control (GMPC)

11 Online

سیستم برای خروجی  $y_i, i = 1, \dots, m$  باشد. به عبارت دیگر، کمترین مرتبه مشتق  $y_i$  که در آن یکی از ورودی‌های کنترلی ظاهر می‌شود  $\lambda_i$  خواهد بود. علاوه بر این، به عنوان یک حالت خاص که در مسئله حاضر صدق می‌کند، فرض کنید  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda$  باشد. در این صورت و با فرض مرتبه کنترلی  $r \geq 0$  [۲۳]، بسط سری تیلور برای پیش‌بینی خروجی سیستم در  $\tau$  ثانیه  $(0 < \tau < T_p)$  بعد از زمان جاری  $t$ ، یعنی  $y(t + \tau)$ ، تا مرتبه  $\lambda + r$  که تأثیر ورودی کنترلی  $u(t)$  و مشتقات آن تا مرتبه  $r$  ام به صورت صریح ظاهر شود، به صورت زیر است:

$$y(t + \tau) \approx y(t) + \tau y^{[1]}(t) + \dots + \frac{\tau^{\lambda+r}}{(\lambda+r)!} y^{[\lambda+r]}(t) \quad (5)$$

که در آن مشتقات بردار خروجی نسبت به زمان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y^{[i]} = \mathcal{L}_f^i h(x), \quad i = 1, \dots, \lambda - 1 \quad (6)$$

$$y^{[\lambda]} = \mathcal{L}_f^\lambda h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\lambda-1} h(x) u(t) \quad (7)$$

$$y^{[\lambda+k]} = \mathcal{L}_f^{\lambda+k} h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\lambda-1} h(x) u^{[k]}(t) + p_k(x, u, \dots, u^{[k-1]}), \quad k = 1, \dots, r \quad (8)$$

که در آن داریم:

$$p_1(x, u) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^\lambda h(x) u(t) + \frac{d}{dt} (\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\lambda-1} h(x)) u(t) \quad (9)$$

به طور مشابه،  $p_k(x, u, \dots, u^{[k-1]}), k = 2, \dots, r$  را نیز می‌توان به دست آورد. شایان ذکر است، مشتق لی تابع  $h(x)$  نسبت به تابع  $f(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^0 h(x) &= h(x) \\ \mathcal{L}_f^1 h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \\ \mathcal{L}_f^k h(x) &= \mathcal{L}_f (\mathcal{L}_f^{k-1} h(x)) \end{aligned} \quad (10)$$

حال با استفاده از روابط مذکور و نیز بسط تیلور  $y^*(t + \tau)$  پاسخ مسئله بهینه‌سازی (۴) را می‌توان به دست آورد. بنابراین، قانون کنترلی بهینه به صورت زیر به دست می‌آید [۲۳]:

$$u^*(t) = -[\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\lambda-1} h(x)]^{-1} [\Gamma E + \mathcal{L}_f^\lambda h(x) - y^{*[\lambda]}(t)] \quad (11)$$

که در آن:

$$E = \begin{bmatrix} h(x) - y^*(t) \\ \mathcal{L}_f^1 h(x) - y^{*[1]}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{\lambda-1} h(x) - y^{*[\lambda-1]}(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

و ماتریس بهره کنترلی بهینه  $\Gamma$ ،  $m$  ردیف اول ماتریس  $\Gamma_1^{-1} \Gamma_2^T$  به صورت زیر است:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{(\lambda+1, \lambda+1)} & \dots & \gamma_{(\lambda+1, \lambda+r+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{(\lambda+r+1, \lambda+1)} & \dots & \gamma_{(\lambda+r+1, \lambda+r+1)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

موشک در فضای سه‌بعدی با فرض جرم نقطه‌ای برای موشک و هدف و با بکارگیری روش GMPC و استراتژی هدایت تناسبی دنبال می‌شود. با توجه به اینکه در رویکرد پیشنهادی از طرفی قانون کنترلی بهینه با بهینه‌سازی یک تابع هدف مشخص به روش GMPC استخراج و از طرف دیگر این تابع هدف بر اساس استراتژی هدایت تناسبی یعنی پیشگیری از دوران راستای خط دید تعریف می‌شود، این روش را هدایت تناسبی بهینه می‌نامیم.

برای دستیابی به اهداف پژوهش، ابتدا در بخش ۲، روش کنترلی پیش‌بین مدل مینای تعمیم‌یافته برای استفاده در مسئله مورد بحث تشریح می‌شود. در بخش ۳ معادلات حرکت مجموعه موشک و هدف در فضای سه‌بعدی بازنویسی شده و با استفاده از آن قانون کنترلی پیش‌بین بهینه با استراتژی هدایت تناسبی طراحی می‌شود. در ادامه، ارزیابی قانون هدایت طراحی شده، به کمک شبیه‌سازی در یک سناریوی دلخواه و با مقایسه عملکرد آن با سیستم هدایت PN در بخش ۴ صورت می‌گیرد. بخش ۵ نیز به جمع‌بندی مقاله می‌پردازد.

## کنترل پیش‌بین مدل مینای تعمیم‌یافته

همانطور که پیش‌تر ذکر شد، در این مقاله روش GMPC برای طراحی سیستم هدایت ناوبری موشک مورد استفاده قرار گرفته است. از این رو، در این بخش با در نظر گرفتن فرضیات مسئله مورد بحث، به بیان این روش می‌پردازیم. جزئیات بیشتر این روش در مرجع [۲۳] آمده است. ابتدا فرض می‌کنیم سیستم مورد نظر به صورت غیرخطی و پیوسته زیر مدل شده باشد:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

$$y = h(x) = [h_1(x), \dots, h_m(x)]^T \quad (2)$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$  بردار متغیرهای حالت،  $u \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی‌های کنترلی و  $y \in \mathbb{R}^m$  بردار خروجی‌هاست. همچنین، سه تابع  $g(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  و  $h(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  توابع پیوسته غیرخطی مشتق‌پذیر هستند. هدف از حل این مسئله کنترلی، یافتن قانون کنترلی بهینه  $u^*(t)$  برای  $t \in [0, t_f]$  به گونه‌ای است که خروجی سیستم، مسیر مطلوب  $y^*(t)$  را برای  $t \in [0, t_f]$  دنبال کند. بنابراین، تابع هزینه و مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{T_p} [y(t + \tau) - y^*(t + \tau)]^T [y(t + \tau) - y^*(t + \tau)] d\tau \quad (3)$$

$$u^*(t) = \arg \min_{u(t)} J(x(t), u(t)) \quad (4)$$

که در آن  $T_p$  افق پیش‌بینی است. حال فرض کنید  $\lambda_i$  درجه نسبی

داریم:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{Y_T - Y_M}{X_T - X_M} \quad (۱۷)$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{Z_T - Z_M}{\sqrt{(X_T - X_M)^2 + (Y_T - Y_M)^2}} \quad (۱۸)$$

علاوه بر دستگاه  $xyz$ ، دو دستگاه  $xyz_T$  و  $xyz_M$  به ترتیب به عنوان دو دستگاه محلی متصل به موشک و هدف به گونه‌ای تعریف می‌شوند که محور  $x$  آن‌ها همواره به ترتیب در جهت بردار سرعت موشک ( $\mathbf{v}_M$ ) و هدف ( $\mathbf{v}_T$ ) قرار گیرد. در نتیجه، موقعیت نسبی این دو دستگاه نسبت به دستگاه  $XYZ$  (مشابه دستگاه  $xyz$ ) با زوایای  $\alpha_M$  و  $\beta_M$  برای  $xyz_M$  و زوایای  $\alpha_T$  و  $\beta_T$  برای دستگاه  $xyz_T$  بیان می‌شود. در نتیجه داریم:

$${}_{xyz_M}^{XYZ}R = \begin{bmatrix} \cos \alpha_M \cos \beta_M & -\sin \alpha_M & -\cos \alpha_M \sin \beta_M \\ \sin \alpha_M \cos \beta_M & \cos \alpha_M & -\sin \alpha_M \sin \beta_M \\ \sin \beta_M & 0 & \cos \beta_M \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

$${}_{xyz_T}^{XYZ}R = \begin{bmatrix} \cos \alpha_T \cos \beta_T & -\sin \alpha_T & -\cos \alpha_T \sin \beta_T \\ \sin \alpha_T \cos \beta_T & \cos \alpha_T & -\sin \alpha_T \sin \beta_T \\ \sin \beta_T & 0 & \cos \beta_T \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

که در آن زوایای اوپلری برای موشک با بردار سرعت مطلق  $\mathbf{v}_M = [\dot{X}_M, \dot{Y}_M, \dot{Z}_M]^T$  به صورت زیر به دست می‌آید. زوایای اوپلری هدف نیز به طور مشابه قابل محاسبه است.

$$\alpha_M = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{Y}_M}{\dot{X}_M} \right) \quad (۲۱)$$

$$\beta_M = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{Z}_M}{\sqrt{\dot{X}_M^2 + \dot{Y}_M^2}} \right) \quad (۲۲)$$

با توجه به شکل، سه متغیر  $(D, \alpha, \beta)$  موقعیت نسبی هدف را نسبت به موشک بیان می‌کنند. حال، با فرض اینکه بردار شتاب موشک و هدف در دستگاه  $xyz$  به ترتیب به صورت  $\mathbf{a}_T = [a_{Tx}, a_{Ty}, a_{Tz}]^T$  و  $\mathbf{a}_M = [a_{Mx}, a_{My}, a_{Mz}]^T$  بیان شود، آنگاه حرکت نسبی موشک و هدف بر اساس روابط سینماتیکی حاکم بر مسأله با معادلات دیفرانسیلی زیر مدل‌سازی می‌شود [۲۵]:

$$\ddot{D} = D\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + D\dot{\beta}^2 + a_{Tx} - a_{Mx} \quad (۲۳)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2D\dot{\alpha}}{D} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \tan \beta + \frac{a_{Ty} - a_{My}}{D \cos \beta} \quad (۲۴)$$

$$\ddot{\beta} = -\frac{2D\dot{\beta}}{D} - \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \sin 2\beta + \frac{a_{Tz} - a_{Mz}}{D} \quad (۲۵)$$

در ادامه، با استفاده از مدل سینماتیکی معادلات (۲۳)-(۲۵) و نیز روش تشریح شده در بخش قبل، به طراحی قانون هدایت تناسبی بهینه به روش GMPC پرداخته می‌شود.

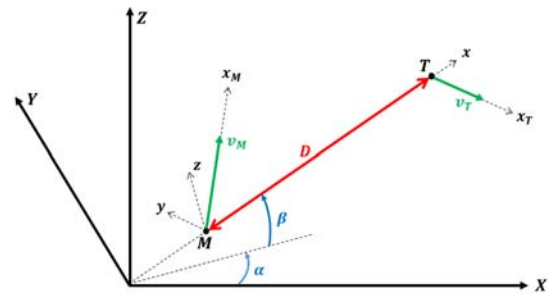
$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} Y_{(1,\lambda+1)} & \cdots & Y_{(1,\lambda+r+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{(\lambda,\lambda+1)} & \cdots & Y_{(\lambda,\lambda+r+1)} \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$Y_{(i,j)} = \frac{T_p^{i+j-1}}{(i-1)!(j-1)!(i+j-1)} I_m \quad (۱۵)$$

که در آن  $I_m$  ماتریس همانی  $m \times m$  است.

## قانون هدایت تناسبی پیش‌بین

همانطور که پیش‌تر ذکر شد، فضای مسئله سه‌بعدی در نظر گرفته شده و موشک و هدف به صورت دو جرم نقطه‌ای مدل می‌شوند. با این فرضیات در شکل ۱ هندسه مسئله نشان داده شده است. در این شکل، دو نقطه  $M$  و  $T$  به ترتیب موشک و هدف را نشان می‌دهد. برای حل این مسئله دستگاه مختصات ثابت سراسری  $XYZ$  و دستگاه مختصات محلی  $xyz$  متصل به موشک تعریف می‌شوند، به گونه‌ای که محور  $x$  دستگاه  $xyz$  همواره در راستای خط دید و به سمت هدف قرار می‌گیرد.



شکل ۱- شماتیک وضعیت قرارگیری موشک و هدف

به منظور تعریف وضعیت دورانی دستگاه  $xyz$  نسبت به دستگاه  $XYZ$  دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  به روش زوایای اوپلری تعریف شده است [۲۴] به گونه‌ای که برای رسیدن به دستگاه  $xyz$  ابتدا دستگاه  $XYZ$  را حول محور  $Z$  به اندازه زاویه  $\alpha$  دوران داده تا دستگاه جدید  $x'y'z'$  به دست آید. سپس، با دوران این دستگاه جدید حول محور  $y'$  به اندازه زاویه  $\beta$  (در جهت عکس قانون دست راست) دستگاه  $xyz$  حاصل می‌شود. بنابراین، وضعیت نسبی دستگاه  $XYZ$  نسبت به دستگاه  $xyz$  با ماتریس دوران  ${}_{xyz}^{XYZ}R$  به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$${}_{xyz}^{XYZ}R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

چنانچه، مکان موشک و هدف در دستگاه ثابت  $XYZ$  با دو بردار  $\mathbf{r}_M = [X_M, Y_M, Z_M]^T$  و  $\mathbf{r}_T = [X_T, Y_T, Z_T]^T$  بیان شود،

$$\begin{bmatrix} a_{Mx}^* \\ a_{My}^* \\ a_{Mz}^* \end{bmatrix} = ({}^{XYZ}R_{xyz})^{-1} \cdot {}^{XYZ}R_{xyzM} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ a_{MyM}^* \\ a_{MzM}^* \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

مطابق مطالب مذکور، قانون هدایت به دست آمده به روش پیش‌بین، تابعی از آخرین مقادیر مکان و سرعت موشک و هدف و نیز شتاب هدف در گام بعد است. شتاب هدف در گام بعد، در این مقاله معلوم فرض شده است ولی به منظور استفاده از کنترلر طراحی شده، نیاز به طراحی یک مشاهده‌گر به منظور تخمین شتاب هدف در آینده وجود دارد.

### نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج شبیه‌سازی رفتار موشک و هدف تحت هدایت کنترلر پیش‌بین طراحی شده ارائه شده و به منظور بررسی کارایی سیستم پیشنهادی، نتایج با شبیه‌سازی مجموعه تحت هدایت قانون هدایت تناسبی PN مقایسه می‌شود. به این منظور، سه سناریو شبیه‌سازی در نظر گرفته می‌شود که در آن‌ها موشک در لحظه  $t = 0$  از مبدأ مختصات و با سرعت ثابت ۵۰۰ متر بر ثانیه با جهت‌گیری اولیه  $\alpha_M(0) = 0^\circ$  و  $\beta_M(0) = 20^\circ$  برای تعقیب هدف شلیک می‌شود. هدف نیز حرکت خود را با سرعت ثابت ۲۵۰ متر بر ثانیه از نقطه اولیه  $r_T(0) = [5000, 6000, 10000]^T$  در دستگاه XYZ و با جهت‌گیری اولیه  $\alpha_T(0) = -30^\circ$  و  $\beta_T(0) = -10^\circ$  آغاز می‌کند.

به عنوان پایه مقایسه جهت بررسی کارایی روش پیشنهادی، قانون هدایت تناسبی پیاده‌سازی می‌شود. با توجه به اینکه شتاب هدف در قانون هدایت پیشنهادی آمده است، در اینجا هدایت به روش  $APN^{12}$  (رابطه (۳۶)) پایه مقایسه قرار داده شده است [۱]. قانون هدایت APN بر مبنای روش  $TPN^{13}$  اصلاح شده مطابق رابطه (۳۷) مورد استفاده قرار گرفته است [۱]. با توجه به اینکه مؤلفه شتاب در راستای سرعت لحظه‌ای موشک کنترل‌پذیر نیست، در عمل مؤلفه فرمان شتاب APN در صفحه عمود بر بردار سرعت لحظه‌ای موشک محاسبه شده و به عنوان شتاب موشک اعمال می‌شود:

$${}^{xyzM}a_M|_{APN} = {}^{xyzM}a_M|_{TPN} + \frac{1}{2} \cdot {}^{xyzM}a_T \quad (۳۶)$$

$${}^{xyzM}a_M|_{TPN} = ({}^{XYZ}R_{xyzM})^{-1} \cdot {}^{XYZ}R_{xyz} \cdot \frac{-N_{PN}}{\cos \delta} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{D} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{D} \dot{\beta} \end{bmatrix}^T \quad (۳۷)$$

در رابطه (۳۷)،  $\delta$ ، زاویه بین راستای خط دید و بردار سرعت لحظه‌ای موشک است. ضریب  $N_{PN}$  نیز برابر با ۳ قرار داده شده است. در طراحی کنترلر پیش‌بین نیز، افق پیش‌بینی  $T_p$ ، یک‌دهم

در مسئله هدایت موشک، غالباً فقط شتاب‌های عمود بر سرعت موشک قابل کنترل است. از این رو، فقط روابط (۲۴) و (۲۵) در طراحی قانون هدایت مورد استفاده قرار می‌گیرند. علاوه بر این، با توجه به استراتژی هدایت تناسبی، هدف کنترلی، ثابت نگه‌داشتن راستای خط دید بین موشک و هدف است. از این رو، کنترلر پیش‌بین مورد نظر می‌بایست  $\dot{\alpha}$  و  $\dot{\beta}$  را به‌عنوان نرخ تغییرات راستای خط دید، برابر با صفر نگه دارد. بنابراین، این دو متغیر به عنوان دو خروجی مدل در نظر گرفته می‌شوند. حال، به منظور بیان مدل سیستم در قالب روابط (۱) و (۲)، بردارهای  $x$  و  $u$  و  $y$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}]^T \quad (۲۶)$$

$$u = [a_y, a_z]^T = [a_{My} - a_{Ty}, a_{Mz} - a_{Tz}]^T \quad (۲۷)$$

$$y = [x_2, x_4]^T = [\dot{\alpha}, \dot{\beta}]^T \quad (۲۸)$$

در نتیجه داریم:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{2D\dot{x}_2}{D} + 2x_2x_4 \tan x_3 \\ x_4 \\ -\frac{2D\dot{x}_4}{D} - \frac{1}{2}x_2^2 \sin 2x_3 \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{D \cos x_3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{D} \end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

$$h(x) = [x_2, x_4]^T \quad (۳۱)$$

با بررسی مدل به دست آمده مشخص می‌شود که درجه نسبی سیستم  $\lambda = 1$  است. همچنین، همانطور که پیش‌تر ذکر شد، خروجی مطلوب سیستم،  $\dot{y}^*(t) = y^*(t) = 0$  است. بنابراین، با استفاده از روابط (۱۱)-(۱۵) و نیز مدل (۲۹)-(۳۱) قانون کنترلی بهینه یعنی  $[a_y^*, a_z^*]^T$  به دست می‌آید. برای به دست آوردن شتاب بهینه موشک نیاز به دانستن شتاب هدف است. چنانچه شتاب هدف در دستگاه  $xyz_T$  با بردار  ${}^{xyzT}a_T$  بیان شده باشد، داریم:

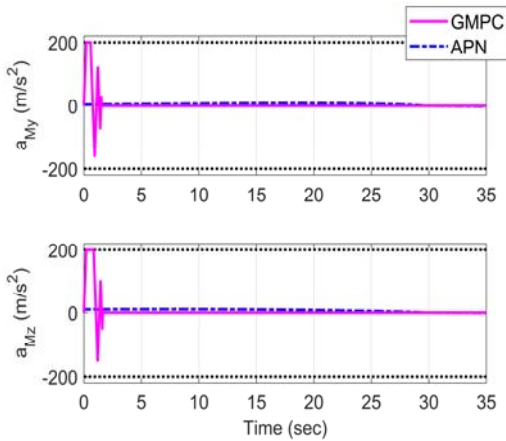
$$a_T = ({}^{XYZ}R_{xyzT})^{-1} \cdot {}^{XYZ}R_{xyzT} \cdot {}^{xyzT}a_T \quad (۳۲)$$

در نتیجه، دو مؤلفه شتاب بهینه موشک در دستگاه  $xyz$  قابل محاسبه است:

$$a_{My}^* = a_{Ty} + a_y^* \quad (۳۳)$$

$$a_{Mz}^* = a_{Tz} + a_z^* \quad (۳۴)$$

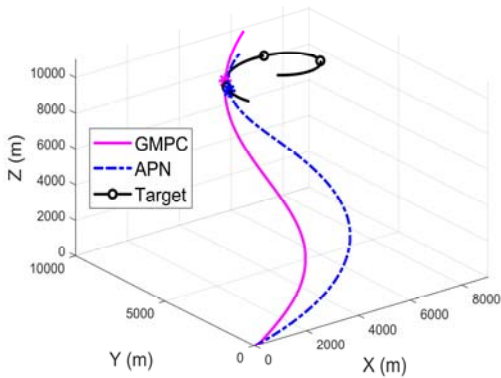
سپس، با استفاده از دستگاه معادله زیر با سه معادله و سه مجهول، می‌توان شتاب بهینه موشک را در دستگاه  $xyz_M$  که به صورت  ${}^{xyzM}a_M^* = [0, a_{MyM}^*, a_{MzM}^*]^T$  است به دست آورد:



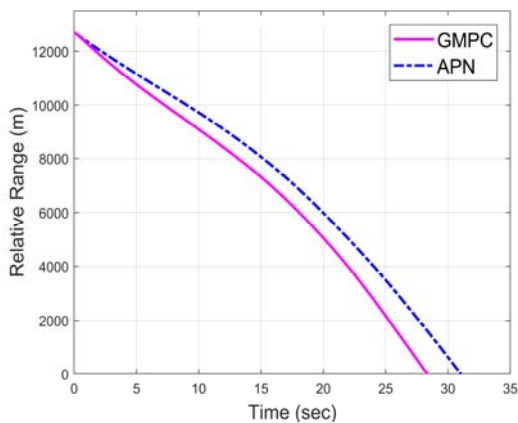
شکل ۵- تغییرات ورودی کنترلی - سناریوی اول

### سناریوی شماره ۲: این سناریو با فرض شتاب عمودی

ثابت برای هدف، یعنی  $a_{T_{yT}} = 40$  و  $a_{T_{zT}} = 0$ ، طراحی شده است و نتایج شبیه‌سازی این سناریو در شکل ۶ تا شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۶- مسیر حرکت موشک و هدف - سناریوی دوم



شکل ۷- فاصله نسبی موشک و هدف - سناریوی دوم

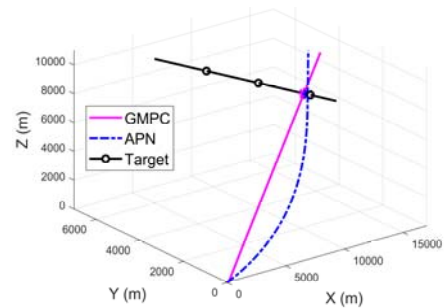
ثابته در نظر گرفته شده و مرتبه کنترلی  $r = 1$  فرض شده است. همچنین، فرمان کنترلی در هر دو روش در محدوده زیر مقید شده است. رابطه (۳۹) اختلاف مؤلفه‌های شتاب عمودی موشک در دو گام متوالی را مقید کرده است. در این رابطه  $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$  گام بروزرسانی ورودی کنترلی موشک است.

$$|a_{MyM}| \leq 200, \quad |a_{MzM}| \leq 200 \quad (38)$$

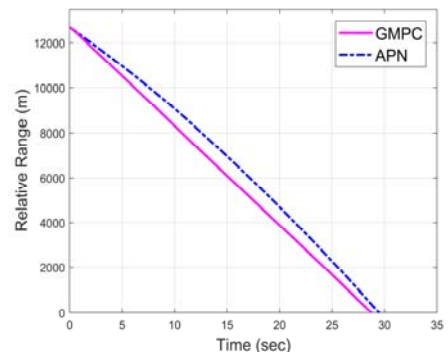
$$\left| \frac{\Delta a_{MyM}}{\Delta t} \right| \leq 10, \quad \left| \frac{\Delta a_{MzM}}{\Delta t} \right| \leq 10 \quad (39)$$

### سناریوی شماره ۱: در این سناریو شتاب هدف صفر فرض

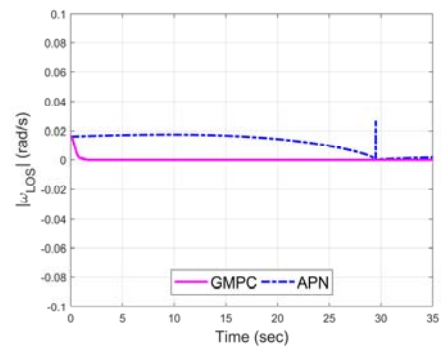
شده و در نتیجه هدف روی یک خط راست حرکت می‌کند. نتایج شبیه‌سازی این سناریو در شکل ۲ تا شکل ۵ نشان داده شده است.



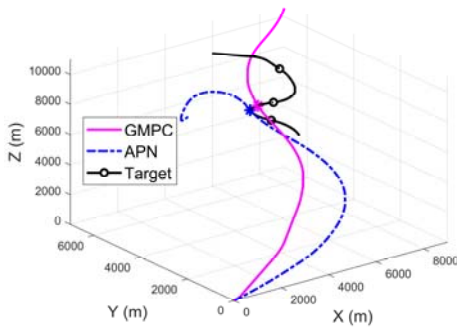
شکل ۲- مسیر حرکت موشک و هدف - سناریوی اول



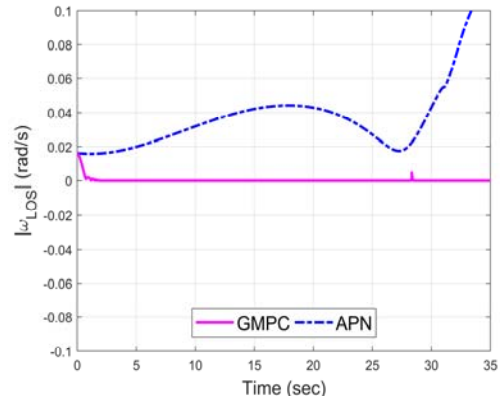
شکل ۳- فاصله نسبی موشک و هدف - سناریوی اول



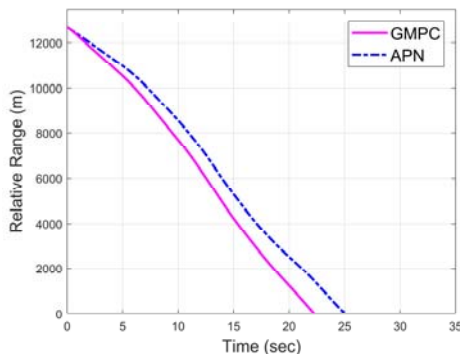
شکل ۴- اندازه سرعت دورانی خط دید - سناریوی اول



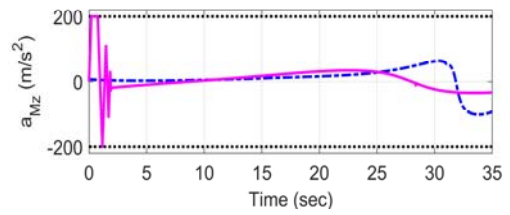
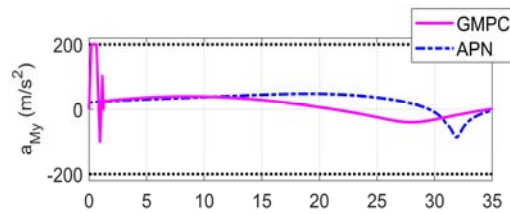
شکل ۱۱ - مسیر حرکت موشک و هدف - سناریوی سوم



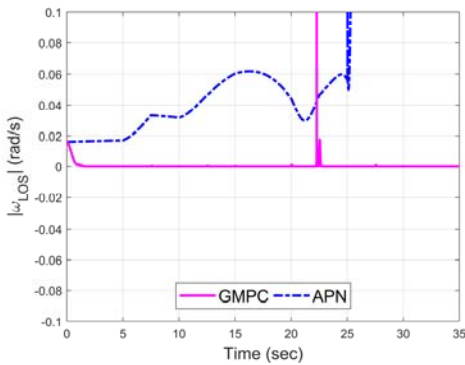
شکل ۸ - اندازه سرعت دورانی خط دید - سناریوی دوم



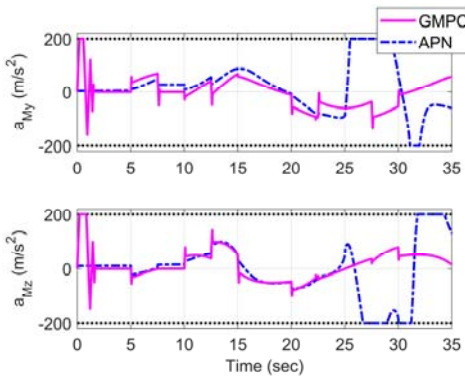
شکل ۱۲ - فاصله نسبی موشک و هدف - سناریوی سوم



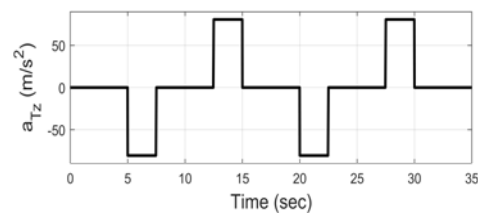
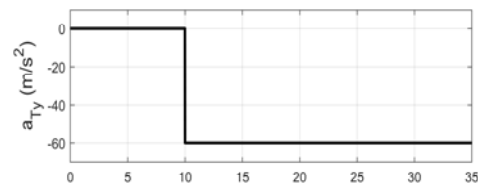
شکل ۹ - تغییرات ورودی کنترلی - سناریوی دوم



شکل ۱۳ - اندازه سرعت دورانی خط دید - سناریوی سوم



شکل ۱۴ - تغییرات ورودی کنترلی - سناریوی سوم



شکل ۱۰ - شتاب عمودی هدف - سناریوی سوم

### سناریوی شماره ۳: در سناریو سوم، هدف با شتاب

عمودی متغیر مطابق شکل مانور می‌دهد. شکل ۱۰ تا شکل ۱۴

نتایج شبیه‌سازی مربوط به این سناریو را نشان می‌دهد.



رایانه‌ای با پردازنده Core i3 و ۴ گیگابایت رم صورت پذیرفت. با توجه به مطالب ذکر شده، استفاده از این روش به منظور هدایت موشک‌های پدافندی از دیدگاه عملیاتی امکان‌پذیر خواهد بود.

## مراجع

- [1] P. Zarchan, *Tactical and strategic missile guidance*: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2012.
- [2] C.-D. Yang, F.-B. Hsiao, and F.-B. Yeh, "Generalized guidance law for homing missiles," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 25, pp. 197-212, 1989.
- [3] S. Ghawghawe and D. Ghose, "Pure proportional navigation against time-varying target manoeuvres," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, pp. 1336-1347, 1996.
- [4] Y. Shiraishi, H. Takano, T. Yamasaki, and I. Yamaguchi, "A Study on the Improvement of Modified Proportional Navigation Guidance," in *AIAA Scitech 2019 Forum*, 2019, p. 2346.
- [5] I.-J. Ha and S. Chong, "Design of a CLOS guidance law via feedback linearization," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, pp. 51-63, 1992.
- [6] C.-M. Lin, C.-F. Hsu, and Y.-J. Mon, "Self-organizing fuzzy learning CLOS guidance law design," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 39, pp. 1144-1151, 2003.
- [7] H. Zaidi, P. Wu, and A. Bellahcene, "Missile Guidance Law Design via Backstepping Technique," *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 3, p. 257675, 2016.
- [8] M. Weiss and T. Shima, "Linear quadratic optimal control-based missile guidance law with obstacle avoidance," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 55, pp. 205-214, 2018.
- [9] X. Chen and J. Wang, "Optimal control based guidance law to control both impact time and impact angle," *Aerospace Science and Technology*, vol. 84, pp. 454-463, 2019.
- [10] Q. Hu, T. Han, and M. Xin, "Sliding-mode impact time guidance law design for various target motions," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 42, pp. 136-148, 2019.
- [11] H.-S. Shin, A. Tsourdos, and K.-B. Li, "A new three-dimensional sliding mode guidance law variation with finite time convergence," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 53, pp. 2221-2232, 2017.
- [12] Z. Hou, Y. Yang, L. Liu, and Y. Wang, "Terminal sliding mode control based impact time and angle constrained guidance," *Aerospace Science and Technology*, vol. 93, p. 105142, 2019.
- [13] Saleem and A. Ratnoo, "Lyapunov-based guidance law for impact time control and simultaneous arrival," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 39, pp. 164-173, 2016.
- [14] T. Binazadeh, M. H. Shafiei, and E. Bazregarzadeh, "New approach in guidance law design based on finite-time partial stability theorem," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 8, 2015.

نتایج در هر سه سناریو نشان‌دهنده برتری روش پیشنهادی نسبت به روش APN است. هرچند این برتری در سناریوی دوم و سوم که هدف مانور بیشتری داده و تغییر مسیرهای ناگهانی دارد مشهودتر است. همانطور که در شکل و شکل مشخص است، روش GMPC به ترتیب حدود ۳ ثانیه زودتر از روش APN موشک را به نزدیکی هدف هدایت کرده است. ضمن اینکه، روش پیشنهادی موشک را به فاصله نزدیک‌تری نسبت به هدف رسانده است. میانگین نتایج سه سناریو نشان می‌دهد که روش پیشنهادی موشک را در مدت ۲۶/۴۶ ثانیه به فاصله ۳۳ سانتی‌متری هدف می‌رساند. در حالی که روش APN در مدت ۲۸/۵۲ ثانیه موشک را به فاصله ۳۵ سانتی‌متری هدف هدایت می‌کند. علاوه بر این، توانمندی روش پیشنهادی در نزدیک صفر نگه‌داشتن اندازه سرعت دورانی خط دید نیز در مقایسه با روش APN در شکل، شکل و شکل قابل مشاهده است. گفتنی است این اندازه، بر اساس سرعت دورانی مطلق خط دید و به کمک رابطه زیر محاسبه شده است:

$$|\omega_{LOS}| = \sqrt{\dot{\alpha}^2 + \beta^2} \quad (40)$$

## جمع بندی

در این مقاله، مراحل دستیابی به یک کنترلر پیش‌بین مدل مبنای تعمیم‌یافته به منظور هدایت یک موشک پدافندی به سمت هدف در حال مانور در فضای سه‌بعدی بر مبنای استراتژی هدایت تناسبی ارائه شد. به این منظور معادلات حرکت مجموعه موشک و هدف بازنویسی شد و با در نظر گرفتن استراتژی هدایت تناسبی، کنترلر پیش‌بین طراحی و قانون صریح کنترلی بهینه استخراج شد. با توجه به قابلیت پیش‌بینی در روش پیشنهادی، شبیه‌سازی صورت گرفته گویای نتایج مطلوب این روش در مقایسه با روش هدایت تناسبی APN بود و توانمندی بالای سیستم کنترلی طراحی شده را جهت هدایت موشک به سمت اهداف با تغییر مسیرهای ناگهانی نشان داد. به طوری که موشک در زمان به مراتب کوتاه‌تر به فاصله نزدیک‌تری نسبت به هدف هدایت شد.

روش کنترلی پیش‌بین مدل مبنای مبتنی بر فرایند بهینه‌سازی است که فرایندی زمان‌بر است. این در حالی است که در رویکرد به کار گرفته شده در این پژوهش، یعنی روش پیش‌بین مدل مبنای تعمیم‌یافته، بخش عمده حل مسئله بهینه‌سازی به صورت پارامتریک و برون خط انجام شده و فرم بسته قانون کنترلی بهینه استخراج شد. در نتیجه زمان محاسبه ورودی شتاب بهینه برای موشک به شدت کاهش یافت و به کم‌تر از ۱ میلی‌ثانیه رسید. در حالی که زمان نمونه‌برداری تعریف شده در مسئله ۱۰ میلی‌ثانیه بود. لازم به ذکر است که شبیه‌سازی‌ها در محیط نرم‌افزار متلب و با

- IEEE transactions on neural networks and learning systems*, vol. 26, pp. 1803- 1809, 2014.
- [21] S. He and D. Lin, "Guidance laws based on model predictive control and target manoeuvre estimator," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 38, pp. 1509-1519, 2016.
- [22] S. He, W. Wang, and J. Wang, "Three-dimensional impact angle guidance laws based on model predictive control and sliding mode disturbance observer," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, 2016.
- [23] W.-H. Chen, D. J. Ballance, and P. J. Gawthrop, "Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach," *Automatica*, vol. 39, pp. 633-641, 2003.
- [24] J. J. Craig, *Introduction to robotics: mechanics and control*: Pearson Educacion, 2005.
- [25] C.-D. Yang and C.-C. Yang, "Analytical solution of three-dimensional realistic true proportional navigation," *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 19, pp. 569-577, 1996.
- [15] M. H. Shafiei and N. Vazirpour, "Robust Three-Dimensional Guidance Law Design against Maneuvering Targets with Approach of Discrete-time Partial Stabilization," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 12, pp. 55-61, 2019.
- [16] E. F. Camacho and C. B. Alba, *Model predictive control*: Springer science & business media, 2013.
- [17] P. Lu, "Optimal predictive control of continuous nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 62, pp. 633-649, 1995.
- [18] S. Talole and R. N. Banavar, "Proportional navigation through predictive control," *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 21, pp. 1004-1006, 1998.
- [19] S. Talole, A. Ghosh, and S. Phadke, "Proportional navigation guidance using predictive and time delay control," *Control Engineering Practice*, vol. 14 ,pp. 1445-1453, 2006.
- [20] Z. Li, Y. Xia, C.-Y. Su, J. Deng, J. Fu, and W. He, "Missile guidance law based on robust model predictive control using neural-network optimization,"