JSST
Journal of Space Science & Technology

Vol. 1, No. 1, Fall 2008

Design of Attitude Control System of an Axisymmetric Satellite with Gravity Gradient Stabilization and Slow Spinning about Yaw Axis

H. Bolandi[1,*] and B. Ghorbani Vaghei[2]

1. Electrical Eng. Dept., Iran Univ. of Science and Tech. (IUST)

[*] Electrical Eng. Dept., Iran Univ. of Science and Tech., Narmak, Tehran, Iran
h_bolandi@iust.ac.ir

In this paper, attitude control system of an axisymmetric satellite will be designed in such a way that required stability is provided with slow spinning about yaw axis. In this regard, dynamic of motion and coupling between satellite's axes is modeled. As a result, a closed form formula is yielded included moment of inertia ratio, angular velocity about yaw axis and pointing accuracy of control system. Then, magnetic control is designed for providing capture range of gravity gradient stabilization and requirements of pointing accuracy. Finally, fine performance of designed control system will be illustrated with simulation based on specification of a near axisymmetric satellite.

Keywords: Gravity gradient stabilization, Magnetic control, Attitude control

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۱/ شمارهٔ ۱ / پاییز ۱۳۸۷
ص. ص. ۱۱- ۱۹

طراحی سیستم کنترل وضعیت یک ماهوارهٔ متقارن با پایدارسازی گرادیان جاذبه‌ای و چرخش محدود حول محور یاو

ح. بلندی[۱،*] و ب. قربانی واقعی[۱]

۱. دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکدهٔ مهندسی برق

* تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکدهٔ مهندسی برق

h_bolandi@iust.ac.ir

در این مقاله طراحی سیستم کنترل وضعیت یک ماهوارهٔ متقارن با پایدارسازی گرادیان جاذبه‌ای چنان طراحی می‌شود که ضمن تأمین دقت پایداری مورد نیاز، بتوان ماهواره را با چرخشی محدود حول محور یاو چرخاند. دینامیک رفتار ماهواره و اثرات کوپلی بین محورهای مختلف ماهواره چنان مدل‌سازی می‌شوند که نسبت ممان اینرسی ماهواره، سرعت زاویه‌ای حول محور یاو و دقت جهت‌گیری سیستم گرادیان جاذبه‌ای را در قالب یک فرمول بسته بتوان بیان کرد. سپس سیستم کنترل مغناطیسی چنان طراحی می‌شود که شرایط تسخیر گرادیان جاذبه‌ای و حصول دقت جهت‌گیری فراهم شود. در نهایت با شبیه‌سازی روی یک ماهوارهٔ تقریباً متقارن، صحت عملکرد طراحی صورت‌پذیرفته به‌خوبی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گرادیان جاذبه‌ای، کنترل مغناطیسی، کنترل وضعیت

مقدمه

همان‌طور که می‌دانیم، نیروی جاذبهٔ زمین با معکوس مربع فاصلهٔ مرکز زمین تا جسم ارتباط دارد. بنابراین، آن بخش‌هایی از ماهواره که به زمین نزدیک‌ترند، نیروی بیشتری بر آنها وارد می‌شود و آن بخش‌هایی که دورتر از زمین هستند، نیروی کمتری وارد می‌شود. این پدیده به صورت گشتاور گرادیان جاذبه‌ای مدل‌سازی شده و از آن برای جهت‌گیری دائم ماهواره‌های ارتفاع پایین به سمت زمین بوفور استفاده شده است [۱، ۲]. در این روش یک میلهٔ طویل با جرمی متصل به انتهای آن به بدنهٔ ماهواره متصل می‌کنند که با باز کردن آن ضمن افزایش ممان اینرسی در صفحهٔ عمود بر بوم، سبب می‌شود که راستای بوم حول راستای محور زمین ـ ماهواره (ندیر) نوسان کند.

در حالتی که بوم باز نشده است، گشتاور گرادیان جاذبه‌ای نمی‌تواند وضعیت ماهواره را تسخیر کند اما روی حالت لنگش[۱]/ انحراف ژیروسکوپی[۲] اثر دارد. گشتاور گرادیان جاذبه‌ای سبب یک حرکت چرخشی آرام و اضافی علاوه بر چرخش مداری و چرخش‌های ناشی از پرتاب و عوامل دیگر خواهد شد. این مقاله فرمول‌های اساسی را در زمینهٔ طراحی گرادیان جاذبه‌ای با لحاظ کردن اثر چرخشی فوق‌الذکر بیان می‌کند. اثر گشتاورهای گرادیان جاذبه‌ای در مرجع [۱] به‌خوبی و فقط برای یک بدنه با چرخش خالص و بدون لنگش ($\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z \neq 0$) ارائه شده است. در اینجا یک روش کامل ارائه خواهد شد که شامل حالت کامل لنگش است ($\omega_x \neq 0, \omega_y \neq 0, \omega_z \neq 0$) و در مرجع [۱] انجام نشده است.

در حالت دوم گشتاور گرادیان جاذبه‌ای با گسترش بوم و افزایش ممان اینرسی، وضعیت ماهواره را تسخیر می‌کند. به عبارت دیگر، نسبت حداکثر ممان اینرسی به حداقل ممان اینرسی (I_T/I_z) را آن قدر بزرگ فراهم می‌کند (با گسترش بوم) که انرژی جنبشی به اندازهٔ کافی کوچک شود. در زمینهٔ طراحی نسبت ممان اینرسی I_T/I_z که پارامتر اساسی طراحی سیستم گرادیان جاذبه‌ای است، فعالیت‌های زیادی صورت گرفته است. در مرجع [۲] نسبت ممان

---
1. Nutation
2. Precession

اینرسی با شرط پایداری $I_{yy} > I_{xx} > I_{zz}$ به صورت سعی و خطا چنان طراحی شده است که در مقابل اغتشاشات در رنج دقت قرار گیرد. در مرجع [۳]، سیستم گرادیان جاذبه‌ای به همراه پایدارسازی آیرودینامیکی طراحی شده است. در مرجع [۴] سیستم گرادیان جاذبه‌ای در تلفیق با کنترل مغناطیسی کامل طراحی شده است اما چرخش حول محور یاو مجاز نیست.

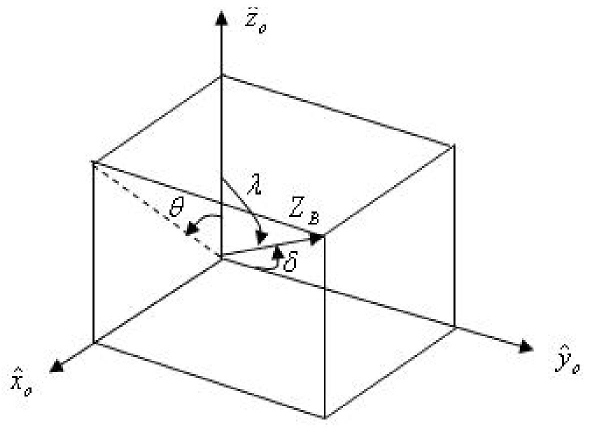
در مرجع [۵] سیستم تعیین و کنترل وضعیت یک ماهواره با جهت‌گیری مغناطیسی پس از کاهش نوسانات صورت پذیرفته که در آن از الگوریتم کنترلی براساس اتلاف انرژی استفاده شده است. در مرجع [۶] دو فعالیت کاهش نوسانات و جهت‌گیری مغناطیسی به طور مستقل و به دنبال هم در قالب دو مود عملیاتی انجام شده است و مدت زمان انجام این دو مود در حدود ۳ مدار عملیاتی است. فعالیت دیگری براساس کاهش نرخ نوسانات پس از پرتاب در مرجع [۷] ارائه شده است ولی جهت‌گیری مغناطیسی انجام نشده است. در مرجع [۸] سیستم تعیین و کنترل وضعیت یک ماهواره با قانون کنترل خاموش/روشن طراحی شده است که مدت زمان انجام این دو فعالیت در حدود ۷ مدار عملیاتی است. در مرجع [۹] کنترل مغناطیسی یک ماهواره با پایدارسازی گرادیان جاذبه‌ای براساس انرژی و قانون کنترل *K_Bdot* چنان طراحی شده است که هم پایداری ماهواره اثبات شده و هم ضرایب کنترلی مناسب تعیین گردیده است.

در این مقاله ابتدا راستای بوم (محور Z_B) به صورت تک‌محوره و سه‌محوره تعریف شده و سپس گشتاور گرادیان جاذبه‌ای براساس هریک از زوایای وضعیت استخراج می‌گردد. در ادامه با فرض وجود لنگش، ابتدا گشتاور میانگین استخراج شده و سپس فرمول بسته‌ای برای ارتباط بین دقت، سرعت زاویه‌ای راستای یاو و نسبت ممان اینرسی استخراج می‌گردد. در نهایت نیز با اعمال کنترل مغناطیسی براساس [۹]، عملکرد صحیح طراحی نشان داده می‌شود.

تعریف وضعیت تک‌محوره و سه‌محورهٔ ماهواره

سیستم مختصات مرجع مشابه مرجع [۱]، همان سیستم مختصات مداری است که بر مرکز جرم ماهواره در هر نقطه از مدار ماهواره منطبق است و محور X_o آن در جهت مماس بر مسیر ماهواره و محور Y_o آن در جهت بردار عمود بر صفحهٔ مداری و محور Z_o آن در جهت مرکز زمین و به سمت خارج آن است. چهار زاویه تعریف می‌شود تا توصیف محور اصلی Z_B ماهواره را بیان کند. این چهار زاویه به نام‌های پیچ[1]، رول[2]، انحراف[3] و تیلت[4] خوانده می‌شوند.

در شکل ۱ بردارهای واحد $\hat{x}_o$، $\hat{y}_o$ و $\hat{z}_o$ متناظر با محورهای رول، پیچ و یاو نشان داده شده‌اند. هیچ‌کدام از محورهای فوق ثابت نیستند. با تعاریف فوق وضعیت نامی ماهواره زمانی است که زاویهٔ پیچ (θ) صفر، زاویهٔ تیلت 90°، زاویهٔ انحراف صفر و زاویهٔ رول صفر باشد. البته وضعیت ماهواره با دو زاویه از چهار زاویهٔ فوق قابل بیان است، اما همهٔ چهار زاویه در طراحی و تحلیل مهم خواهند بود و هریک دیدگاهی به طراح ارائه می‌دهند. به‌عنوان مثال زاویهٔ λ در حالت کلی توانایی جهت‌گیری به سمت زمین را نشان می‌دهد بدون اینکه با زوایای غیرصفر رول و پیچ درگیر شویم. در متون و مقالات، روش استانداردی از این شکل توصیف وضعیت نیامده است و همچنین دیده نشده است که چگونه آن را محقق کرده‌اند.



شکل ۱. تعریف وضعیت تک‌محوره

در تعریف وضعیت سه‌محوره، وضعیت محورهای سیستم مختصات بدنه X_B، Y_B و Z_B نسبت به محورهای یک سیستم مختصات مرجع X_o، Y_o و Z_o تعیین می‌شود. با تعریف سیستم مختصات بدنه X_B، Y_B و Z_B بر پیکرهٔ ماهواره، دوران سیستم مختصات مداری حول محورهای X_o، Y_o و Z_o به اندازهٔ زوایای θ, ϕ و ψ صورت می‌پذیرد تا بر سیستم مختصات بدنه منطبق شود. با فرض توالی دوران ابتدا حول محور X_B و سپس حول محور Y_B و نهایتاً حول محور Z_B به ترتیب با زوایای θ, ϕ و ψ، ماتریس دوران به صورت زیر به دست می‌آید [۱]:

1. Pitch
2. Roll
3. Inclination
4. Tilt

$$T_{o2B}=\begin{bmatrix} c\psi.c\theta & c\psi.s\theta s\phi+s\psi.c\phi & -c\psi.s\theta c\phi+s\psi.s\phi \\ -s\psi.c\theta & -s\psi.s\theta s\phi+c\psi.c\phi & s\psi.s\theta c\phi+c\psi.s\phi \\ s\theta & -s\phi.c\theta & c\theta.c\phi \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

که $sin=s$ و $cos=c$ است. ماتریس فوق وضعیت محورهای بدنه را نسبت به محورهای سیستم مختصات مرجع مداری ارائه می‌دهد. دینامیک و سینماتیک ماهواره تحت طراحی، در مرجع [۹] ارائه شده است.

گشتاور گرادیان جاذبه‌ای

براساس مطالب ارائه‌شده در مقدمه، گشتاور گرادیان جاذبه‌ای به چگونگی وضعیت ماهواره بستگی دارد. لذا در قسمت بعد، گشتاور گرادیان جاذبه‌ای برحسب زوایای ϕ ، θ، δ و λ استخراج می‌گردد.

برای به دست آوردن فرمول‌های طراحی، ذکر این نکته ضروری است که ارضای نیازمندی‌های کنترلی لازم است. در این مقاله، دقت کنترل وضعیت ماهوارهٔ تحت طراحی باید کمتر از 2° باشد. براساس تعریف وضعیت تک‌محوره در بخش‌های قبل، دو زاویهٔ δ و λ معرف وضعیت محور Z_B هستند. اما یافتن بردار گرادیان جاذبه‌ای برحسب این دو زاویه به صورت تلفیقی، از پیچیدگی معادلات گرادیان جاذبه‌ای نسبت به آنچه برحسب زوایای رول و پیچ در مراجع [۱، ۳-۴] هستند، کم نمی‌کند. برای به دست آوردن فرمول‌های طراحی ساده، اطراف نقطهٔ تعادل، گشتاور ناشی از زاویهٔ تیلت δ و گشتاور ناشی از زاویهٔ انحراف λ را به طور مستقل به دست آورده و در معادلات رفتار مستقل از یکدیگر قرار داده و سپس جهت ارضای مشخصهٔ کنترلی دقت ماهواره، محدودهٔ نسبت ممان اینرسی I_T/I_z و سرعت زاویه‌ای راستای محور یاو را به دست خواهیم آورد.

معادلهٔ گشتاور گرادیان جاذبه‌ای $\vec{T}_{gg}$ به صورت ماتریسی چنین است [۱]:

$$T_{gg}=-3\omega_\circ^2\begin{bmatrix}(I_{yy}-I_{zz}).C_{23}.C_{33}\\(I_{zz}-I_{xx}).C_{13}.C_{33}\\(I_{xx}-I_{yy}).C_{13}.C_{23}\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

که $\hat{z}_o^B=\begin{bmatrix}C_{13}\\C_{23}\\C_{33}\end{bmatrix}$ بردار واحد راستای ندیر در سیستم مختصات بدنه، $\omega_\circ$ سرعت مداری ماهواره و I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} به ترتیب ممان‌های اینرسی ماهواره حول محورهای X_B، Y_B و Z_B است. با استفاده از رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\hat{z}_o^B=\begin{bmatrix}C_{13}\\C_{23}\\C_{33}\end{bmatrix}=T_{o2B}.\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\theta\\-s\phi.c\theta\\c\phi.c\theta\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۳) در رابطهٔ (۲) و فرض تقارن ($I_T=I_{xx}=I_{yy}$) خواهیم داشت:

$$T_{gg}=3\omega_\circ^2\begin{bmatrix}(I_T-I_{zz}).s\phi.c\phi.c^2\theta\\(I_T-I_{zz}).\,c\phi.s\theta.c\theta\\0\end{bmatrix} \qquad (۴)$$

محاسبهٔ گشتاور گرادیان جاذبه‌ای برحسب زاویهٔ λ

ابتدا فرض می‌کنیم که با کنترل مغناطیسی، زاویهٔ تیلت $\delta=90^\circ$ شده است. در این صورت محور Z_B در صفحهٔ X_o-Z_O قرار دارد. تنها عامل اختلاف بین محور X_B و صفحهٔ X_o-Z_O زاویهٔ چرخش حول محور Z_B است که همان زاویهٔ ψ (یاو) است. لذا به کمک شکل ۱، $\hat{z}_o^B$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{z}_o^B=\begin{bmatrix}C_{13}\\C_{23}\\C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-sin(\lambda).sin(\psi)\\sin(\lambda).cos(\psi)\\cos(\lambda)\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

با جایگذاری (۵) در (۲) و با فرض تقارن داریم:

$$T_{gg}=3\omega_\circ^2\begin{bmatrix}(I_T-I_{zz}).sin(\lambda).cos(\psi).cos(\lambda)\\(I_T-I_{zz}).sin(\lambda).sin(\psi).cos(\lambda)\\0\end{bmatrix} \qquad (۶)$$

بنابراین گشتاور گرادیان جاذبه‌ای در صفحهٔ Y_B-X_B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left\|T_{gg}\right\|=3\omega_\circ^2.(I_T-I_{zz}).sin(\lambda).cos(\lambda) \qquad (۷)$$

رابطهٔ فوق یک رابطهٔ اسکالر برحسب λ با شرط $\delta=90^\circ$ است.

محاسبه گشتاور گرادیان جاذبه‌ای برحسب زاویهٔ δ

در این حالت فرض می‌کنیم که به‌واسطهٔ کنترل مغناطیسی و گرادیان جاذبه‌ای زاویهٔ پیچ $\theta=0^\circ$ است. در این صورت محور Z_B در صفحهٔ Y_o-Z_O قرار دارد. تنها عامل اختلاف بین محور

Y_B و صفحهٔ $Y_o - Z_O$ زاویهٔ چرخش حول محور Z_B است که همان زاویهٔ ψ (یاو) است. لذا به کمک شکل ۱، $\hat{z}_o^B$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{z}_o^B = \begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{23} \\ C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin(\delta).sin(\psi) \\ cos(\delta) \\ sin(\delta).cos(\psi) \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

با جایگذاری (۸) در (۲) و با فرض تقارن، گشتاور گرادیان جاذبه‌ای در صفحهٔ $Y_B - X_B$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left\| T_{gg} \right\| = 3\,\omega_\circ^2.(I_T - I_{zz}).sin(\delta).cos(\delta) \qquad (۹)$$

رابطهٔ فوق یک رابطهٔ اسکالر برحسب δ با شرط $\theta = 0^\circ$ است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، اندازهٔ گشتاور گرادیان جاذبه‌ای در هر دو رابطهٔ (۶) و (۹) مستقل از زاویهٔ ψ است و حالت‌های خاصی از رابطهٔ برداری زیر است:

$$\vec{T}_{gg} = 3\,\omega_\circ^2\,(I_T - I_z)\,(\hat{z}_B \bullet \hat{z}_o)\,(\hat{z}_B \times \hat{z}_o) \qquad (۱۰)$$

که $\hat{z}_B$ بردار یکه در راستای محور Z_B بدنه و $\hat{z}_o$ بدار یکه در راستای محور Z_O سیستم مختصات مداری است. رابطهٔ فوق بیان برداری دیگری از گشتاور گرادیان جاذبه‌ای در رابطهٔ (۲) است [۴].

حرکت انحراف ژیروسکوپی ماهواره ناشی از گشتاور گرادیان جاذبه‌ای

فعالیت اصلی در این زمینه در مرجع [۱] اشاره شده و در حالت یک بدنه با چرخش خالص است. به عبارت دیگر، در مرجع [۱] فرض شده که بردار اندازهٔ حرکت زاویه‌ای با بردار سرعت زاویه‌ای همراستا بوده در حالی که در این مقاله حالت کامل‌تری تحلیل شده است و فرض می‌گردد که بین این دو بردار، زاویهٔ انحراف γ وجود دارد. در حالت کلی، بردار اندازهٔ حرکت زاویه‌ای به‌واسطهٔ گشتاور گرادیان جاذبه‌ای ثابت نیست اما تغییرات آن بسیار کند است به طوری که در بعضی از تحلیل‌های آینده از آن صرف‌نظر می‌کنیم. در مرجع [۱] نشان داده شده است که بردار اندازهٔ حرکت زاویه‌ای $\vec{h}$ یک زاویهٔ ثابت نسبت به بردار عمود بر صفحهٔ مداری داراست و همزمان بیانگر حرکت مخروطی آرام در فضای ثابت اینرسی است. براساس اصطلاحات تعریفی در این بخش و فرض ساده‌ساز حرکت خالص حول محور Z_B (زاویهٔ لنگش وجود ندارد)، چنانچه زاویهٔ محور پیچ به‌واسطهٔ گشتاور گرادیان جاذبه‌ای کم و یا زیاد شود، زاویهٔ تیلت ثابت باقی خواهد ماند. به عبارت دیگر، از گشتاوردهندهٔ مغناطیسی برای تنظیم زاویهٔ تیلت استفاده و سپس منتظر این می‌مانیم که براساس حرکت طبیعی زاویهٔ پیچ، به یک حوزهٔ وضعیت مناسب برای صدور فرمان گسترش بوم برسیم. در این راستا مسئلهٔ مورد اشاره در فوق به دو زیرمسئله تقسیم می‌شود:

۵. پیدا کردن یک گشتاور متوسط که سبب حرکت طبیعی اشاره‌شده در بالا می‌شود.
۶. اثر گشتاور میانگین فوق روی نرخ حرکت انحراف ژیروسکوپی.

در ادامه هریک از موارد فوق استخراج می‌شوند و براساس آنها سیستم گرادیان جاذبه‌ای طراحی می‌شود.

استخراج گشتاور میانگین گرادیان جاذبه‌ای

همان‌طور که در بخش قبل گفته شد، گشتاور لحظه‌ای گرادیان جاذبه‌ای به صورت رابطهٔ (۱۰) است. اگر فرض کنیم که در یک پریود حرکت انحراف ژیروسکوپی، اثر گشتاور گرادیان جاذبه‌ای کوچک و قابل صرف‌نظر باشد، در این صورت بردار اندازهٔ حرکت زاویه‌ای به طور محسوسی تغییر نمی‌کند. در این صورت بردار $\hat{z}_B$ به طور میانگین در راستای بردار اندازهٔ حرکت زاویه‌ای خواهد بود. اگر این بردار میانگین را $\hat{z}_0$ بنامیم، در این صورت بردار $\hat{z}_B$ با سرعت ثابت ω_B حول $\hat{z}_0$ می‌چرخد. در این صورت جهت بردار $\hat{z}_B$ در هر فاصلهٔ زمانی کوچک در داخل یک سیستم مختصات دکارتی لحظه‌ای به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{z}_B = sin(\eta).cos(\omega_B.t)\hat{i} + sin(\eta).sin(\omega_B.t)\hat{j} \\ + cos(\eta)\hat{z}_0\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکهٔ توصیف یک سیستم مختصات دکارتی لحظه‌ای است که در شکل ۲ نشان داده شده، و η زاویهٔ لنگش است. بردار $\hat{i}$ عمود بر بردار $\hat{z}_o$ بوده و در این صورت بردار $\hat{j}$ هم‌صفحه با بردارهای $\hat{z}_0$ و $\hat{z}_o$ است. با قرار دادن رابطهٔ (۱۱) در رابطهٔ (۱۰) و با توجه به $\int_0^T sin(\omega_B.t)dt = \int_0^T cos(\omega_B.t)dt = 0$، میانگین گشتاور گرادیان جاذبه‌ای در بازهٔ یک پریود لنگش چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{T}_{gg} \right\rangle = 3\,\omega_\circ^2\,(I_T - I_z)\,\Big\{\frac{1}{2}sin^2(\eta).(\hat{i} \bullet \hat{z}_o).(\hat{i} \times \hat{z}_o) \\ + \frac{1}{2}sin^2(\eta).(\hat{j} \bullet \hat{z}_o).(\hat{j} \times \hat{z}_o) + cos^2(\eta).(\hat{z}_0 \bullet \hat{z}_o).(\hat{z}_0 \times \hat{z}_o)\Big\}\end{aligned}$$
(۱۲)

با توجه به تعریف سیستم مختصات و به کمک روابط برداری می‌توان نشان داد که:

$$\hat{i} \perp \hat{z}_o \Rightarrow \hat{i} \bullet \hat{z}_o = 0 \qquad (۱۳)$$

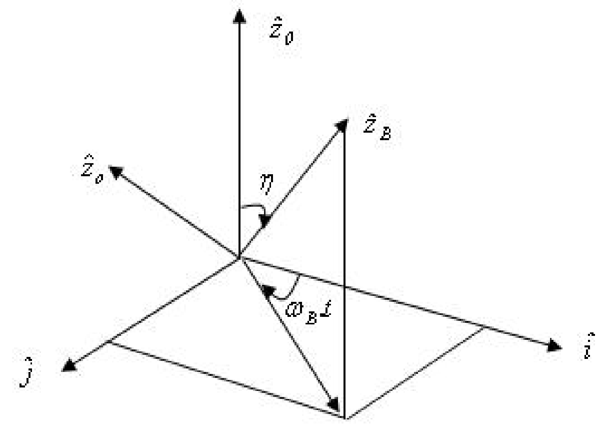
$$\left(\hat{j} \bullet \hat{z}_o\right).\left(\hat{j} \times \hat{z}_o\right) = -\left(\hat{z}_0 \bullet \hat{z}_o\right).\left(\hat{z}_0 \times \hat{z}_o\right) \qquad (۱۴)$$

با قرار دادن روابط (۱۳) و (۱۴) در رابطهٔ (۱۲) داریم:

$$\left\langle \vec{T}_{gg} \right\rangle = 3\,\omega_\circ^2\,(I_T - I_z).\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2(\eta)\right).\left(\hat{z}_0 \bullet \hat{z}_o\right).\left(\hat{z}_0 \times \hat{z}_o\right) \qquad (۱۵)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در زاویهٔ $\eta = \sin^{-1}(\frac{2}{3}) = 54.7^\circ$، اندازهٔ گشتاور میانگین صفر می‌شود. برای حالتی که زاویهٔ لنگش برابر صفر ($\eta = 0$) است، معادلهٔ (۱۵) به صورت زیر می‌شود:

$$\left\langle \vec{T}_{gg} \right\rangle = 3\,\omega_\circ^2\,(I_T - I_z).\left(\hat{z}_B \bullet \hat{z}_o\right).\left(\hat{z}_B \times \hat{z}_o\right) \;,\quad \hat{z}_B = \hat{z}_0 \qquad (۱۶)$$



شکل ۲. سیستم مختصات فرضی برای گرفتن میانگین گشتاور گرادیان جاذبه‌ای

یادآوری می‌شود که در استخراج روابط فوق، فرض شده بود که در یک پریود تغییرات حرکت لنگشی، اثر گشتاور گرادیان جاذبه‌ای روی اندازهٔ حرکت زاویه‌ای کوچک و قابل صرف‌نظر باشد.

پس از تعیین میانگین بردار گرادیان جاذبه‌ای روی یک نوسان حرکت لنگشی، اکنون باید گشتاور میانگین روی یک پریود حرکت مداری را به دست آورد. با توجه به محاسبهٔ گشتاور میانگین روی یک پریود حرکت انحراف ژیروسکوپی، زاویهٔ لنگش (η) ثابت است. همان‌طور که می‌دانیم، بردار $\hat{z}_o$ با سرعت ثابت مداری حول محور $\hat{y}_o$ می‌چرخد. در حالتی که در ابتدا بردار لنگش صفر است، چنانچه مشابه روش بخش قبل، بردارهای یکهٔ $\hat{i}'$ و $\hat{j}'$ در صفحهٔ مداری فرض شوند، داریم:

$$\hat{z}_o = \cos(\omega_\circ .t)\,\hat{i}' + \sin(\omega_\circ .t)\,\hat{j}' \qquad (۱۷)$$

با قرار دادن رابطهٔ (۱۷) در رابطهٔ (۱۶) و گرفتن میانگین در طول یک پریود مداری، مشابه حالت قبل خواهیم داشت:

$$\left\langle \vec{T}_{gg} \right\rangle = \frac{3}{2}\omega_\circ^2\,(I_T - I_z).\left\{\left(\hat{z}_B \bullet \hat{i}'\right).\left(\hat{z}_B \times \hat{i}'\right) + \left(\hat{z}_B \bullet \hat{j}'\right).\left(\hat{z}_B \times \hat{j}'\right)\right\} \qquad (۱۸)$$

اگر فرض کنیم که $\hat{z}_B \bullet \hat{j}' = 0$ (زاویهٔ پیچ صفر) باشد، در این صورت $\hat{i}' \equiv \hat{x}_o$ است. به کمک روابط برداری می‌توان اثبات کرد که:

$$\left(\hat{z}_B \bullet \hat{i}'\right).\left(\hat{z}_B \times \hat{i}'\right) = -\left(\hat{z}_B \bullet \hat{y}_o\right).\left(\hat{z}_B \times \hat{y}_o\right) \qquad (۱۹)$$

با قرار دادن شرایط فوق در رابطهٔ (۱۸) داریم:

$$\left\langle \vec{T}_{gg} \right\rangle = -\frac{3}{2}\omega_\circ^2\,(I_T - I_z).\left(\hat{z}_B \bullet \hat{y}_o\right).\left(\hat{z}_B \times \hat{y}_o\right) \qquad (۲۰)$$

رابطهٔ (۲۰) نشان می‌دهد که گشتاور میانگین همواره بر $\hat{z}_B$ عمود است. به عبارت دیگر، عاملی وجود ندارد تا دامنهٔ بردار اندازهٔ حرکت زاویه‌ای را تغییر دهد، بلکه سبب یک حرکت انحراف ژیروسکوپی خواهد شد. در واقع جهت بردار اندازه حرکت زاویه‌ای با نرخ انحراف ژیروسکوپی تغییر می‌کند.

در حالتی که لنگش η موجود باشد، رابطهٔ (۲۰) به صورت زیر در حالت برداری و اسکالر اصلاح می‌شود:

$$\left\langle \vec{T}_{gg} \right\rangle = -\frac{3}{2}\omega_\circ^2\,(I_T - I_z).\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2(\eta)\right)\left(\hat{z}_0 \bullet \hat{y}_o\right).\left(\hat{z}_0 \times \hat{y}_o\right) \qquad (۲۱-\text{الف})$$

$$\left\langle T_{gg} \right\rangle = -\frac{3}{2}\omega_\circ^2\,(I_T - I_z).\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2(\eta)\right).\sin(\delta).\cos(\delta) \qquad (۲۱-\text{ب})$$

که $\hat{z}_0$ جهت میانگین بردار $\hat{z}_B$ در یک پریود حرکت لنگشی است.

معادلهٔ انحراف ژیروسکوپی

پس از استخراج گشتاور میانگین و درک این واقعیت که سبب حرکت انحراف ژیروسکوپی بردار اندازه حرکت زاویه‌ای می‌شود، پیدا کردن معادلات حالت مانای این حرکت مهم است. در این قسمت

ابتدا فرض می‌شود که ماهواره لنگشی ندارد. به عبارت دیگر، فقط در راستای محور $\hat{z}_B$ سرعت زاویه‌ای داریم.

همان‌طور که می‌دانیم، فرمول کلی دینامیک تغییر بردار اندازه حرکت زاویه‌ای ($\vec{h}$) به ازای گشتاور اعمالی گرادیان جاذبه‌ای ($\vec{T}_{gg}$) به صورت زیر است:

$$\vec{T}_{gg}=\frac{d\vec{h}}{dt} \qquad (۲۲)$$

از آنجا که در حالت مانا، بردار اندازه حرکت زاویه‌ای تغییر نمی‌کند، بنابراین هر تغییری می‌تواند به دلیل مانور چرخشی[1] این بردار در فضا باشد. در این حالت چنانچه سرعت زاویه‌ای انحراف ژیروسکوپی را با $\vec{\omega}_N$ نشان دهیم (به دلیل حالت مانا جهت بردار $\vec{\omega}_N$ تغییر نمی‌کند)، خواهیم داشت:

$$\frac{d\vec{h}}{dt}=\vec{\omega}_N\times\vec{h} \qquad (۲۳)$$

حال با توجه به این نکته از قسمت قبل که گشتاور گرادیان جاذبه‌ای همواره در حالت بدون لنگش عمود بر $\hat{z}_B$ و $\hat{y}_o$ است، به این نتیجه می‌رسیم که گشتاور گرادیان جاذبه‌ای بر $\vec{\omega}_N$ می‌تواند عمود باقی بماند به شرط آنکه $\vec{\omega}_N$ همراستا با بردار $\hat{y}_o$ باشد. از طرفی دیگر با مشتق‌گیری از معادلهٔ پایه‌ای زیر:

$$\vec{h}=I_T\vec{\omega}_T+I_z\vec{\omega}_z \qquad (۲۴)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d\vec{h}}{dt}=I_T\frac{d\vec{\omega}_T}{dt}+I_z\frac{d\omega_z}{dt}\hat{z}_B+I_z\left(\vec{\omega}\times\vec{\omega}_z\right) \qquad (۲۵)$$

که $\vec{\omega}$، $\vec{\omega}_z$ و $\vec{\omega}_T$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای بدنهٔ ماهواره نسبت به سیستم مختصات اینرسی جهانی، سرعت زاویه‌ای در راستای محور Z_B و سرعت زاویه‌ای در صفحهٔ عمود بر Z_B و I_T اندازهٔ ممان اینرسی حول X_B و Y_B است. از آنجا که گشتاور گرادیان جاذبه‌ای همواره عمود بر $\hat{z}_B$ است، لذا تغییری در اندازهٔ $\vec{\omega}_z$ به وجود نمی‌آید و بنابراین $\frac{d\omega_z}{dt}=0$ است. در این صورت رابطهٔ (۲۵) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{d\vec{h}}{dt}=I_T\frac{d\vec{\omega}_T}{dt}+I_z\left[\left(\vec{\omega}_z+\vec{\omega}_T\right)\times\vec{\omega}_z\right]=I_T\frac{d\vec{\omega}_T}{dt}+I_z\left(\vec{\omega}_T\times\vec{\omega}_z\right) \qquad (۲۶)$$

1. Slewing

از طرف دیگر، اگر معادلهٔ (۲۴) را در معادلهٔ (۲۳) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{T}_{gg}=\frac{d\vec{h}}{dt}=\vec{\omega}_N\times\vec{h}=I_T\left(\vec{\omega}_N\times\vec{\omega}_T\right)+I_z\left(\vec{\omega}_N\times\vec{\omega}_z\right) \qquad (۲۷)$$

با مقایسهٔ روابط (۲۷) و (۲۶) داریم:

$$\vec{\omega}_T\times\vec{\omega}_z=\vec{\omega}_N\times\vec{\omega}_z \qquad (۲۸)$$

که با ساده‌سازی رابطهٔ فوق با فرض اینکه $\vec{\omega}_N$ در راستای $\hat{y}_o$ است، به دست می‌آید:

$$\omega_T\,.\omega_z\,sin(90^\circ)=\omega_N\,.\omega_z\,sin(\delta)\Rightarrow\omega_T=\omega_N\,\,sin(\delta) \qquad (۲۹)$$

با قرار دادن رابطهٔ اسکالر (۲۹) در رابطهٔ (۲۷) به صورت اسکالر داریم:

$$T_{gg}=-I_T.\omega_N^2.sin(\delta).cos(\delta)+I_z\,\omega_N\,.\omega_z.sin(\delta) \qquad (۳۰)$$

در حالتی که $\theta=0$ است، با جایگذاری فرمول اسکالر گرادیان جاذبه‌ای از رابطهٔ (۲۰) در رابطهٔ (۳۰) داریم:

$$\begin{aligned}&-\frac{3}{2}\omega_\circ^2\,\,(I_T-I_z).sin(\delta).cos(\delta)\\&=-I_T.\omega_N^2.sin(\delta).cos(\delta)+I_z\,\omega_N\,.\omega_z.sin(\delta)\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

حال چنانچه نرخ انحراف ژیروسکوپی با سرعت مداری $\omega_\circ$ برابر باشد، و زاویهٔ لنگش صفر قرار داده شود (یادآوری می‌شود که رسیدن به فرضیات فوق فقط به کمک گرادیان جاذبه‌ای و کنترل مغناطیسی امکان‌پذیر است)، رابطهٔ (۳۱) چنین به دست می‌آید:

$$\frac{dh}{dt}=T_{gg}=-I_T\,\,\omega_\circ^2\,\,cos(\delta)\,sin(\delta)+I_z\,\,\omega_\circ\,\omega_z\,sin(\delta) \qquad (۳۲)$$

با قرار دادن رابطهٔ (۱۶) به صورت اسکالر در رابطهٔ (۳۲) و بعد از ساده‌سازی داریم:

$$cos(\delta)=\frac{\dfrac{\omega_z}{\omega_\circ}}{(4\dfrac{I_T}{I_z}-3)} \qquad (۳۳)$$

این رابطه یک فرمول قابل توجه در این تحقیق است. در حالتی که $\theta=0$ باشد، به دلیل آنکه $\delta=90^\circ-\phi$، کسینوس زاویهٔ تیلت همان سینوس زاویهٔ رول (ϕ) خواهد بود و معادلهٔ فوق چنین می‌شود:

$$sin(\phi)=\frac{\frac{\omega_z}{\omega_\circ}}{(4\frac{I_T}{I_z}-3)} \tag{۳۴}$$

چنانچه حداکثر سرعت زاویه‌ای محور Z_B برابر $\omega_z=\omega_\circ\approx 0.06\frac{deg}{sec}=0.01\frac{cycle}{min}$ باشد، از روی رابطهٔ (۳۴) برای دقت کنترل زاویه‌ای کمتر از 2°، نسبت ممان اینرسی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\phi\le 2^\circ \Rightarrow \frac{1}{(4\frac{I_T}{I_z}-3)}\le 2^\circ \Rightarrow \frac{I_T}{I_z}\ge 7.9 \tag{۳۵}$$

بنابراین طول و جرم انتهایی بوم گرادیان جاذبه‌ای چنان باید باشد که پس از باز شدن، نسبت ممان اینرسی حاصل رابطهٔ (۳۵) را ارضا کند. همچنین ماهواره مجاز است که حول محور Z_B با سرعت $\omega_\circ\approx 0.06\frac{\deg}{\sec}=0.01\frac{cycle}{\min}$ بچرخد. حال باید شرایطی را تعیین کرد که پس از گسترش بوم وضعیت ماهواره در تسخیر گرادیان جاذبه‌ای قرار گیرد.

تسخیر وضعیت توسط گرادیان جاذبه‌ای

با گسترش بوم، اندازهٔ ممان اینرسی در صفحهٔ X_B , Y_B افزایش می‌یابد و بنابر اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای و اصل بقای انرژی، سرعت زاویه‌ای و نوسان موازنه‌ای[1] کاهش می‌یابد. نوسان موازنه‌ای می‌تواند با طراحی نسبت ممان اینرسی، تحت کنترل گرادیان جاذبه‌ای باشد. آنالیز واقعی نیاز به معادلات دیفرانسیل کوپل‌شدهٔ درجهٔ دوم دارد و در مرجع [۵] ارائه شده است. همان‌طور که از مرجع [۵] می‌توان استنباط کرد، اگر سرعت‌های زاویه‌ای راستاهای پیچ و رول بعد از گسترش بوم کمتر از $\omega_\circ\approx 0.06\frac{deg}{sec}=0.01\frac{cycle}{min}$ باشد، در این صورت حداکثر تغییرات زاویهٔ پیچ در حدود 35° است. از آنجا که مرز ناپایداری $\theta=90^\circ$ است، لذا برای گسترش بوم گرادیان جاذبه‌ای، زاویهٔ λ باید در رنج زیر باشد:

$$0<\lambda<55^\circ \tag{۳۶}$$

این نکته نیز لازم است ذکر شود که حداکثر سرعت حول محور پیچ باید برابر $\omega_\circ$ مداری باشد. لذا قبل از گسترش بوم باید سرعت آن به‌واسطهٔ کنترل مغناطیسی آن قدر کاهش یافته باشد تا پس از گسترش بوم، سرعت راستای پیچ حداکثر $\omega_\circ$ باشد. از آنجا که بعد از گسترش بوم، اندازهٔ ممان اینرسی محور Y_B از I_{yy1} به I_{yy2} تغییر می کند، لذا:

$$\omega_{y2}=\frac{I_{yy1}}{I_{yy2}}\omega_{y1} \tag{۳۷}$$

به دلیل آنکه شرط $\frac{I_T}{I_z}\ge 7.9$ باید ارضا شود، لذا نامساوی $\frac{I_{yy2}}{I_{yy1}}\ge 7.9$ باید برقرار گردد و بنابراین حداکثر سرعت قبل از گسترش بوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega_{y1}=7.9\times 0.06=0.48\frac{deg}{sec} \tag{۳۸}$$

بنابراین با در نظر گرفتن حاشیهٔ اطمینان مناسب در زمان گسترش بوم، حداکثر سرعت زاویه‌ای قبل از گسترش بوم به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\omega_{y1}=0.3\ \frac{deg}{sec} \tag{۳۹}$$

این سرعت باید در انتهای مود کاهش نوسانات ناخواسته و جهت‌گیری مغناطیسی و قبل از گسترش بوم به کمک کنترل مغناطیسی فراهم شود. از آنجا که ماهواره تقارن دارد، لذا حداکثر سرعت راستای X_B می‌تواند مشابه رابطهٔ (۳۹) باشد.

کنترل مغناطیسی

همان‌طور که گفتیم، گشتاور گرادیان جاذبه‌ای به منظور تسخیر وضعیت ماهواره، نیاز به تأمین شرایط مطلوب به شرح ذیل قبل از گسترش بوم دارد:

$$0\le\lambda\le 55^\circ \text{ و } \omega_{x1}=\omega_{y1}=0.3\ \frac{deg}{sec} \tag{۴۰}$$

کنترل مغناطیسی که در اینجا از آن می‌توان استفاده کرد، همان قانون کنترل $KBdot$ است که در مرجع [۹]، ضرایب کنترلی آن براساس اثبات پایداری به کمک معادلات انرژی ماهواره به دست آمده است و نشان داده است که شرایط معادلهٔ (۴۰) در کمتر از دو مدار ماهواره قابل وصول است.

1. Libration

شبیه‌سازی

ماهواره تحت طراحی روی یک مدار دایروی در ارتفاع $700\,km$ و سنکرون با خورشید[1] قرار دارد. مشخصات ماهواره چنان است که تقارن در آن کمی رعایت نشده است و ممان‌های اینرسی قبل از گسترش بوم به صورت

$$I_{xx1} = 22\,kg.m^2 ,I_{yy1} = 26\,kg.m^2 ,I_{zz1} = 14\,kg.m^2$$

و بعد از گسترش بوم به صورت

$$I_{xx2} = 202\,kg.m^2 ,I_{yy2} = 210\,kg.m^2 ,I_{zz2} = 17\,kg.m^2$$

است، به طوری که شرط (۳۵) را ارضا نموده است. مقادیر اولیهٔ سرعت‌های زاویه‌ای به صورت

$$\omega_x(0)=7 \quad {deg}/{sec} \ , \omega_y(0)=-7 \quad {deg}/{sec} \ , \omega_z(0)=7 \quad {deg}/{sec}$$

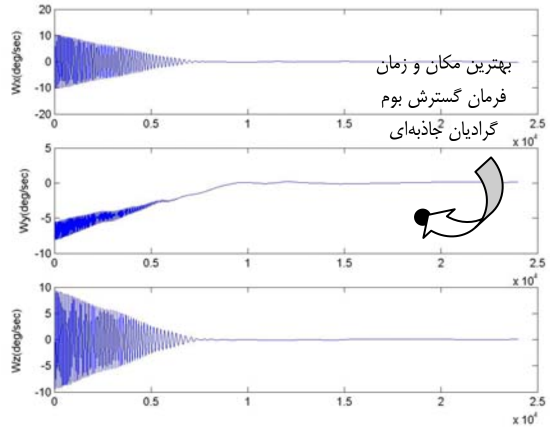
فرض می‌گردد.

با اعمال قوانین ذکرشده در مرجع [۹]، نتایج شبیه‌سازی مطابق شکل‌های (۳-۴) می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سرعت‌های زاویه‌ای کاهش یافته است و براساس شکل (۴) زمانی باید فرمان گسترش بوم صادر شود که رنج زاویهٔ λ در محدودهٔ ذکرشده در رابطهٔ (۴۰) باشد. با اعمال قوانین کنترلی اعمالی در مرجع [۷]، به محدودهٔ دقت 2° می‌رسیم.

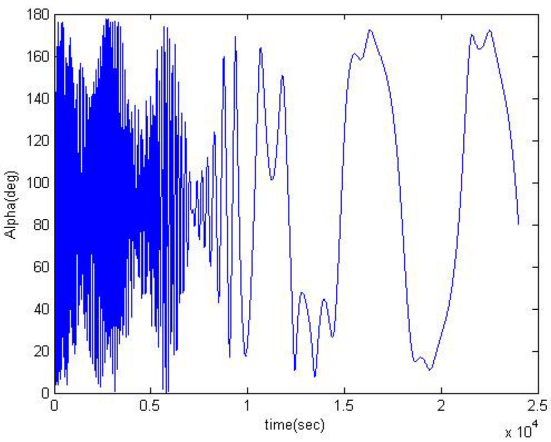
نتیجه‌گیری

در این مقاله طراحی سیستم گرادیان جاذبه‌ای براساس مدل‌سازی تک محوره راستای بوم گرادیان جاذبه‌ای (Z_B) برحسب پارامترهایی چون دقت جهت‌گیری، سرعت زاویه‌ای محور یاو و نسبت ممان اینرسی با فرض تقارن ماهواره ارائه شد. در این مدل‌سازی همچنین فرض شد که ماهواره می‌تواند لنگش داشته باشد و میانگین گشتاور گرادیان جاذبه‌ای در یک پریود لنگش و یک پریود مداری استخراج شد. پس از تعیین نسبت ممان اینرسی حداکثر به ممان اینرسی حداقل، شرایط تسخیر گرادیان جاذبه‌ای تعیین شده و به کمک کنترل مغناطیسی نشان داده شد که به شرایط تسخیر گرادیان جاذبه‌ای و رنج دقت جهت‌گیری می‌توان دست یافت.

1. Sun-Synchronous



شکل ۳. سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره



شکل ۴. زاویهٔ انحراف λ (زاویه بین راستای بوم و محور یاو ماهواره)

مراجع

1. Wertz R., James, *Spacecraft Dynamic and control*, luwer Academic Publishers, 1978.

۲. بلندی ح.، ع. فرهادی، و م. عطایی، «ارائهٔ دو الگوریتم جدید برای طراحی سیستم کنترل وضعیت و پایدارسازی یک ماهواره با استفاده از گرادیان جاذبه‌ای»، هفتمین کنفرانس مهندسی برق ایران، مرکز تحقیقات مخابرات ایران، اردیبهشت ۱۳۷۸.

3. Bolandi H., A. Badpa, and V.B. Ghorbani, "Design of Gravity Gradient and Aerodynamic Passive Stabilization System for a LEO Satellite", *Journal of Automatic Control and Computer Science, ISI*, No. 4, 2003.

4. Winsniewski, R., "Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient", *Automatica*, Vol. 35, pp. 1201-1214, 1999.

۵. بلندی ح.، ع. بادپا، و م. نصیری سروی، «الگوریتم کنترلی مود آرامش ماهواره براساس تغییرات میدان مغناطیسی زمین»، دوازدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران، ج ۱، ص ۲۷۲-۲۷۹، اردیبهشت ۱۳۸۳.

6. Bak T., and R. Winsniewski, “Autonomous Attitude Determination and Control System For The Orsted Satellite”, *Aerospace Application Conference, 1996. Proceeding*, 1996 IEEE, Vol. 2, pp. 173-186, 1996.

۷. بلندی ح.، و ع. بادپا، «طراحی الگوریتم‌های کنترلی مودهای عملکردی ماهواره سه‌محوره دارای پایدارسازی گرادیان جاذبه‌ای و عملگرهای مغناطیسی»، یازدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران، دانشگاه شیراز، ج ۳، ص ۲۶-۳۵، اردیبهشت ۱۳۸۲.

8. Hodgart M.S., "Gravity Gradient and magnetorquing Attitude Control for Low-Cost Low-Earth Orbit Satellites-The Uosat Experience", PhD Dissertation, University of Surrey, June 1989.

۹. بلندی ح.، ب. قربانی واقعی، و ف. بیات، «روش طراحی کنترل مغناطیسی یک ماهواره با پایداری گرادیان جاذبه‌ای براساس انرژی»، چهارهمین کنفرانس سالانه (بین‌المللی) مهندسی مکانیک، ایران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اردیبهشت ۱۳۸۵.