JSST
Journal of Space Science & Technology

Vol. 1, No. 1, Fall 2008

Satellite Attitude Control by Magnetic Torquers with Variable Magnetic Intensity for Optimization of Power Consumption

M. M. Moghaddam[1,*] and A. Salimi[1]

1. Mechanical Eng. Dept., Tarbiat Modares Univ.

[*] Mechanical Eng. Dept., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran
mogaddam@modares.ac.ir

This Paper presents a dynamic model of a micro-satellite in Mesbah class. At this model aerodynamic torque and solar radiation pressure torques are considered as disturbance torques. Gravity gradient torque is assumed as stabilizing torque and acts as a passive controller. Magnetic torquers act as an active controller. There are three methods of optimization of power consumption; first using LQR controller, secondly using the mapping function (which is suggested to ensure that the generated magnetic moment by the coils is perpendicular to the local magnetic field vector), and finally powering on control system over the earth stations only for the purpose of power saving.

Keywords: Satellite attitude control, Magnetic torquers, Power optimization

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۱/ شمارهٔ ۱ / پاییز ۱۳۸۷
ص. ص. ۳۷- ۴۵

کنترل وضعی یک ماهوارهٔ کوچک با استفاده از گشتاوردهنده‌های مغناطیسی با لحاظ بهینه‌سازی مصرف توان الکتریکی

م. محمدی مقدم[۱،*] و ا. سلیمی[۱]

۱. دانشگاه تربیت مدرس، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، بخش مکانیک

* تهران، پل گیشا، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، بخش مکانیک

mogaddam@modares.ac.ir

در این مطالعه با مدل‌سازی دینامیکی یک ماهواره کوچک در رده ماهواره مصباح، معادلات حالت وضعی ماهواره را به دست آورده‌ایم. در این مدل گشتاورهای آیرودینامیکی و تشعشعات خورشیدی به‌عنوان گشتاور اغتشاشی و گشتاور گرادیان جاذبه به‌عنوان گشتاور پایدارساز (کنترل غیرفعال) و گشتاور مغناطیسی به‌عنوان گشتاور کنترلی فعال در نظر گرفته شده است. سپس به منظور بهینه‌سازی مصرف توان الکتریکی از روش‌های تصویرسازی دوقطبی مغناطیسی در راستای عمود بر میدان مغناطیسی محلی، اعمال کنترلر LQR و همچنین روشن شدن کنترلر فعال فقط در زمان‌های نزدیک به زمان عبور ماهواره از فراز ایستگاه‌های زمینی استفاده شده است.

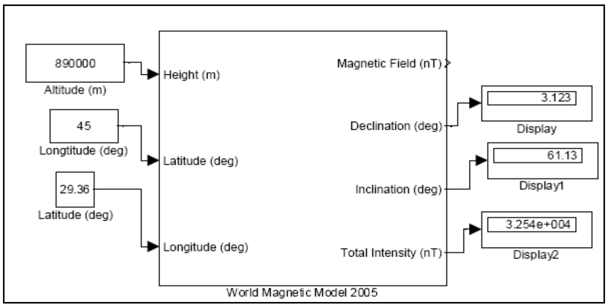
واژه‌های کلیدی: کنترل وضعی ماهواره، گشتاوردهنده‌های مغناطیسی، بهینه‌سازی توان الکتریکی

مقدمه

برای تحلیل دینامیکی ماهواره نیازمند تعریف چارچوب‌های مرجع مناسب هستیم. برای بیان بردارها در دستگاه مختصات مناسب، از ماتریس‌های انتقال استفاده شده است که در مرجع [۲] مفصلاً تشریح شده است. با تحلیل دینامیک وضعی ماهواره روابط مربوطه به دست می‌آیند که به روابط اولر موسوم‌اند. با انتقال همه پارامترها به دستگاه بدنه و همچنین تعریف متغیرها برحسب زوایای سه‌گانه اویلر و مشتقات آنها به معادلهٔ حالتی با شش متغیر حالت خواهیم رسید که کنترلر را در آن اعمال خواهیم کرد. ماهواره مورد مطالعه، یک ماهواره روبه‌زمین است که توسط بوم گرادیان جاذبه پایدار می‌شود. کنترلر گشتاوردهنده مغناطیسی به‌عنوان یک کنترلر فعال برای افزایش دقت نشانه‌روی نقش کمکی خواهد داشت. در استفاده از گشتاوردهنده مغناطیسی به‌عنوان عملگرهای کنترلی، اندازه و جهت میدان مغناطیسی محلی حائز اهمیت است که در این مقاله با استفاده از نرم‌افزار MATLAB 7.1 قسمت Simulink با اعمال ورودی‌های طول و عرض جغرافیایی ارتفاع و زمان، اندازه و جهت میدان را در دستگاه مختصات NED شمال- شرق- پایین به دست آورده و پس از انتقال بردار میدان به دستگاه مناسب، در معادلات حالت اعمال شده است (شکل ۱). نهایتاً با وارد کردن داده‌های ماهواره و تعیین تابع وزنه Q ، روش LQR بر سیستم اعمال شده و به تحلیل نتایج آن پرداخته شده است.

دستگاه‌های مختصات مورد نیاز در تحلیل دینامیک وضعی ماهواره

برای درک معادلات حرکت، لازم است دستگاه‌های مرجعی را که تحلیل معادلات حرکت در آن انجام می‌شود بشناسیم. این چارچوب‌های مرجع عبارتند از:



شکل ۱. اعمال ورودی‌ها {طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع و زمان (برای تاریخ ۱ سپتامبر ۲۰۰۶)} در قسمت سیمولینک MATLAB7.1

- دستگاه اینرسی مداری زمین مرکزی
- دستگاه زمین مرکزی زمین ثابت
- دستگاه اینرسی زمین مرکزی
- دستگاه مختصات شمال- شرق- پایین (NED)
- دستگاه بدنه
- دستگاه مداری.

در مرجع [۱] توضیحات مفصل‌تری را در این زمینه می‌توان یافت.

گشتاورهای وارد بر ماهواره

در مدل‌سازی دینامیکی ماهواره گشتاورهای اعمالی به دو دستهٔ گشتاورهای اغتشاشی و گشتاورهای کنترلی تقسیم می‌شوند. در این مقاله گشتاور آیرودینامیکی و فشار تشعشعات خورشیدی به‌عنوان گشتاورهای اغتشاشی و گشتاور گرادیان جاذبه و گشتاور مغناطیسی نقش گشتاورهای کنترلی را ایفا خواهند کرد. تذکر این نکته ضروری است که آن بخش از گشتاور مغناطیسی که ناشی از دوقطبی‌های مغناطیسی ناخواسته است و از کویل‌ها ناشی نمی‌شود نیز اغتشاشی محسوب می‌گردد. در مرجع [۳] روابط مربوطه ارائه شده است. برای گشتاورهای اغتشاشی مقدار ماکزیمم ممکن اختیار شده است. جدول ۱ نسبت این گشتاورها با گشتاور پایدارساز گرادیان جاذبه و غالب بودن گشتاور پایدارساز را نشان داده است.

تحلیل دینامیکی و استحصال معادلات حرکت

همچنان که بر مبنای قوانین نیوتن نیروی وارد بر جسم با تغییرات زمانی اندازه حرکت متناسب است، در مورد گشتاور وارده بر جسم صلب و آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت نیز صادق است؛ به بیان ریاضی داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = \dot{\vec{h}} \qquad (۱)$$

که در آن $\dot{\vec{h}}$ مشتق زمانی بردار اندازه حرکت زاویه‌ای است.

برای به دست آوردن نیرو و گشتاور لازم است که بردارهای مکانی و مشتقات آنها یعنی سرعت و شتاب نسبت به دستگاه اینرسی سنجیده شوند، ولی می‌توانند در هر دستگاهی بیان شوند. مقدار h از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$h = I\omega = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

که در آن I ماتریسی متقارن خواهد بود.

اگر دستگاهی که برای محاسبه h در نظر گرفته‌ایم، دستگاه بدنه باشد و محورهای دستگاه بدنه بر جهات اصلی ممان اینرسی جسم منطبق باشند، در این صورت ماتریس $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ و در نتیجه ماتریس I قطری خواهد بود و به همین دلیل محاسبات بسیار ساده‌تر خواهد شد.

با توجه به رابطهٔ دینامیکی مربوط به استحصال مشتق بردار در یک دستگاه چرخان نسبت به یک دستگاه مرجع ثابت، داریم:

$$\left.\frac{d}{dt} A\right|_I = \left.\frac{dA}{dt}\right|_B + \omega_{BI} \times A \qquad (۳)$$

لذا همان‌طور که گفته شد مشتق بردار اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به دستگاه اینرسی سنجیده خواهد شد ولی مقدار آن را برای سهولت در دستگاه بدنه به دست آورده‌ایم. بر مبنای روابط (۱) و (۳) خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = \left.\dot{\vec{h}}\right|_I = \dot{\vec{h}} + \omega_b^{bi} \times \vec{h} \qquad (۴)$$

این توضیح ضروری است که در اینجا $\dot{\vec{h}}\,\&\,\vec{h}$ نسبت به دستگاه بدنه سنجیده و بیان می‌شوند و ω_b^{bi} سرعت زاویه‌ای است که دستگاه بدنه نسبت به دستگاه اینرسی دارد و در دستگاه بدنه بیان می‌شود.

در اینجا برای همگونی بیشتر، معادلات روابط برداری را به روابط ماتریسی تبدیل می‌کنیم. به این منظور، ضرب برداری را به صورت ذیل تبدیل می‌نماییم:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{bi}} \times \vec{\mathbf{h}} \equiv \boldsymbol{\omega}^{\times}\mathbf{h} \qquad (۵)$$

که در آن $\boldsymbol{\omega}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$ خواهد بود.

با توجه به معادلات (۲)، (۴) و (۵) داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = I\dot{\omega} + \omega^{\times} I\omega \qquad (۶)$$

برآیند همه گشتاورها یعنی $\sum_{i=1}^{n} T_i$ را برابر T قرار می‌دهیم. با توجه به اینکه معادلات در دستگاه بدنه نوشته شده‌اند، ماتریس I قطری است و با جایگذاری (۲) در (۶) خواهیم داشت:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

با ساده کردن (۷) و مرتب کردن برحسب $\dot{\omega}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{bi}}$ نهایتاً به رابطه زیر خواهیم رسید که به معادله اولر معروف است:

$$\dot{\omega} = -I^{-1}\omega^{\times}I\omega + I^{-1}T = -I^{-1}\omega^{\times}I\omega + I^{-1}(T_{GG} + T_C + T'_d) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x}\omega_y\omega_z + \frac{T_x}{I_x} \\ \frac{I_z - I_x}{I_y}\omega_z\omega_x + \frac{T_y}{I_y} \\ \frac{I_x - I_y}{I_z}\omega_x\omega_y + \frac{T_x}{I_x} \end{bmatrix} . \qquad (۸)$$

که در عبارت $T = (T_{GG} + T_C + T'_d)$، T_{GG} گشتاور گرادیان جاذبه، T_C گشتاور کنترلی و T'_d گشتاورهای اغتشاشی وارده بر ماهواره است. در اینجا گشتاور کنترلی همان گشتاور ناشی از سیم‌پیچ‌های مغناطیسی است.

به دست آوردن معادلات حالت از معادلات حرکت

به منظور به دست آوردن معادلات حالت، بایستی همه گشتاورها و سرعت‌های زاویه‌ای، در دستگاه بدنه بیان شوند و در معادلهٔ اصلی (۶) وارد شوند.

جدول ۱. اعمال ورودی‌های ماهواره مورد نظر با کمک خانه‌های فرمول‌بندی‌شده Excel (فرمول‌ها از مرجع [۳]) و مشاهده خروجی‌ها در حالت غیرفعال بودن کنترلر مغناطیسی (در حالت بوم بازشده و اعمال گشتاور گرادیان جاذبه)

جدول اعمال ورودی و مشاهده خروجیها برای مشاهده گشتاورهای چهارگانه

ورودیهای مشترک :

ارتفاع مداری	Km	890
زاویه انحراف از راستای روبه زمین یعنی θ	deg	10
دوقطبی مغناطیسی (D) بر حسب	$A.m^2$	0.05
زاویه تابش تشعشعات خورشیدی (i)	deg	0
ضریب پسای آیرودینامیکی C_d	بی بعد	2.3
فاکتور انعکاسی q	بی بعد	0.6
لحاظ (بیشینه/کمینه/متوسط) چگالی		بیشینه

پارامترهای مداری

شیب مداری	50
گریز از مرکز	0

ورودیها برای پیکربندی خاص

جرم ماهواره	Kg	75
جرم سر بوم	Kg	4
طول بوم	m	4.5
چگالی متوسط قسمت اصلی ماهواره	g/cm^3	0.4
چگالی وزنه سر بوم	g/cm^3	7.8
نسبت بعد z به x,y	بی بعد	1.4
وضعیت بوم ماهواره(باز یا جمع)		باز

توجهات : محاسبات با استفاده از روابط کتاب ورتز مرجع ۳ انجام شده است
محاسبات با فرض مدار دایروی است

نتایج :

سرعت ماهواره	m/s	7406
چگالی متوسط در ارتفاع گردشی	Kg/m3	2.5E-13

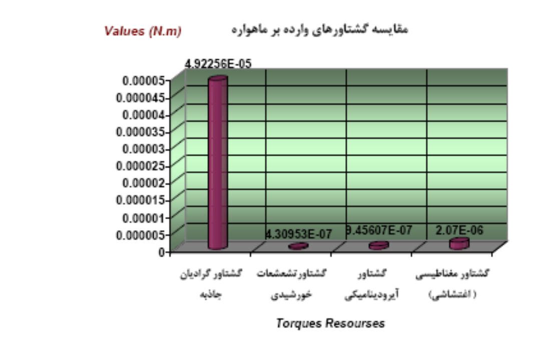
نتایج برای پیکربندی تعریف شده(خاص)

Iz	Iy	Ix	Zcm	Zcsp	Zcp
2.99	97.40	95.41	0.61	0.45	0.45

ممان اینرسی های کل ماهواره؛ فاصله مرکز جرم،فشار و تشعشع(m)

(Zcm-Zcp) : 16.4 Cm

سرعت زاویه ای(rad/s)	0.001019	دوره تناوب ثانیه	6166.4
سرعت زاویه ای deg/s	0.058381	دوره تناوب دقیقه	102.77



بر مبنای مرجع [۴] برای گشتاور گرادیان جاذبه داریم:

$$T_{GG} = 3\omega_O^2 \hat{o}_3^{\times} I.\hat{o}_3 \quad \& \quad \omega_O = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha^3}} \quad \Rightarrow T_{GG} = \frac{3\mu}{\alpha^3}\hat{o}_3^{\times} I.\hat{o}_3 \qquad (۹)$$

که در آن $\hat{\mathbf{o}}_3$ بردار یکه راستای Z دستگاه مختصات مداری است که در دستگاه بدنه تصویر شده است. یعنی بردار راستای روبه‌زمین در محورهای بدنه تصویر می‌شوند؛ پس داریم:

$$\hat{\mathbf{o}}_3 = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{o}}_3.\hat{\mathbf{b}}_1\\ \hat{\mathbf{o}}_3.\hat{\mathbf{b}}_2\\ \hat{\mathbf{o}}_3.\hat{\mathbf{b}}_3\end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

در حقیقت $\hat{\mathbf{o}}_3$ ستون سوم ماتریس انتقال $\mathbf{R}_{bo}$ است که در معادله (۲۱) به دست آورده‌ایم. با این اوصاف داریم:

$$\hat{\mathbf{o}}_3 = \begin{bmatrix}-\theta\\ \varphi\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\mathbf{o}}_3^{\times} = \begin{bmatrix}0 & -1 & \varphi\\ 1 & 0 & \theta\\ -\varphi & -\theta & 0\end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

و با جایگذاری در (۹) داریم:

$$\mathbf{T}_{GG} = 3\omega_O^2 \begin{bmatrix}0 & -1 & \varphi\\ 1 & 0 & \theta\\ -\varphi & -\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{I}_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{zz}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-\theta\\ \varphi\\ 1\end{bmatrix} =$$

$$3\omega_O^2 \begin{bmatrix}0 & -\mathbf{I}_{yy} & \varphi\mathbf{I}_{zz}\\ \mathbf{I}_{xx} & 0 & \theta\mathbf{I}_{zz}\\ -\varphi\mathbf{I}_{xx} & -\theta\mathbf{I}_{yy} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\theta\\ \varphi\\ 1\end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}_{GG} = 3\omega_O^2 \begin{bmatrix}(-\varphi\mathbf{I}_{yy} + \varphi\mathbf{I}_{zz})\\ (-\theta\mathbf{I}_{xx} + \theta\mathbf{I}_{zz})\\ \varphi\theta\mathbf{I}_{xx} - \theta\varphi\mathbf{I}_{yy}\end{bmatrix} = \qquad (۱۲)$$

$$3\omega_O^2 \begin{bmatrix}\varphi(\mathbf{I}_{zz} - \mathbf{I}_{yy})\\ \theta(\mathbf{I}_{zz} - \mathbf{I}_{xx})\\ \varphi\theta(\mathbf{I}_{xx} - \mathbf{I}_{yy})\end{bmatrix} \cong 3\omega_O^2 \begin{bmatrix}\varphi(\mathbf{I}_{zz} - \mathbf{I}_{yy})\\ \theta(\mathbf{I}_{zz} - \mathbf{I}_{xx})\\ 0\end{bmatrix}$$

برای گشتاور کنترلی خواهیم داشت :

$$\vec{T_C} = \vec{M} \times \vec{B} \Rightarrow T_C = M^{\times}B \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{cx}\\ \mathbf{T}_{cy}\\ \mathbf{T}_{cz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\mathbf{M}_z & \mathbf{M}_y\\ \mathbf{M}_z & 0 & -\mathbf{M}_x\\ -\mathbf{M}_y & \mathbf{M}_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_x\\ \mathbf{B}_y\\ \mathbf{B}_z\end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

اگر بردار $\vec{\mathbf{M}}$ را به دو مؤلفه عمود و موازی با راستای بردار $\vec{\mathbf{B}}$ تفکیک کنیم، با توجه به صفر بودن ضرب خارجی دو بردار موازی خواهیم داشت:

$$\vec{\mathbf{T}}_C = (\vec{\mathbf{M}}_{\perp} + \vec{\mathbf{M}}_{II}) \times \vec{\mathbf{B}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{T}}_C = \vec{\mathbf{M}}_{\perp} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۱۴)$$

از رابطهٔ بالا این نتیجهٔ مهم حاصل می‌شود که مؤلفهٔ موازی میدان دوقطبی مغناطیسی هیچ نقشی در ایجاد گشتاور کنترلی نخواهد داشت. لذا یکی از اقدامات مهم در بهینه‌سازی مصرف توان الکتریکی در سیم‌پیچ‌ها این است که توزیع جریان در سه کویل متعامد به گونه‌ای باشد که همواره دوقطبی مغناطیسی عمود بر میدان باشد؛ تا توانی از جریان صرف ایجاد دوقطبی موازی نشود. ولی از طرف دیگر، این نکته شایان توجه است که میزان و جهت دوقطبی مغناطیسی توسط کنترلر تعیین می‌شود و خروجی کنترلر لزوماً چنین شرایطی را دارا نیست. لذا از تابع تصویرکننده[1] دوقطبی مغناطیسی بر طبق تعریف زیر استفاده خواهیم کرد. پیشنهاددهنده این تابع آقای دکتر ویزنیفسکی در مرجع [۵] است. فایده بزرگ این کار این است که همچنان که در رابطه (۱۶) دیده می‌شود، عملگر کنترلی u مقدار مورد نیاز را بدون محدودیت اختیار می‌کند.

$$\vec{M} = \frac{\vec{u} \times \vec{\mathbf{B}}}{\|\vec{\mathbf{B}}\|} \qquad (۱۵)$$

بر این مبنا برای عبارت $I^{-1}T_C$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{I}^{-1}\mathbf{T}_C = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M}^{\times}\mathbf{B} = \frac{1}{\|\mathbf{B}\|}\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{u}^{\times}\mathbf{B})^{\times}\mathbf{B} = -\frac{1}{\|\mathbf{B}\|}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{B}^{\times}(\mathbf{u}^{\times}\mathbf{B}) = \qquad (۱۶)$$
$$\rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{B}\|}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{B}^{\times}\mathbf{B}^{\times}\mathbf{u}$$

با جایگذاری مقدار $B^{\times} = \begin{bmatrix}0 & -\mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y\\ \mathbf{B}_x & 0 & -\mathbf{B}_z\\ -\mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z & 0\end{bmatrix}$ در (۱۶) داریم :

$$\mathbf{I}^{-1}\mathbf{T}_C = \frac{1}{\|\mathbf{B}\|}\mathbf{I}^{-1}\begin{bmatrix}-(\mathbf{B}_y^2 + \mathbf{B}_z^2) & \mathbf{B}_x\mathbf{B}_y & \mathbf{B}_x\mathbf{B}_z\\ \mathbf{B}_x\mathbf{B}_y & -(\mathbf{B}_x^2 + \mathbf{B}_z^2) & \mathbf{B}_y\mathbf{B}_z\\ \mathbf{B}_x\mathbf{B}_z & \mathbf{B}_y\mathbf{B}_z & -(\mathbf{B}_x^2 + \mathbf{B}_x^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

حال برای سرعت زاویه‌ای لازم است که رابطهٔ بین $\boldsymbol{\omega}$ و نرخ زوایای اویلر را بدانیم. یادآوری می‌کنیم که $\boldsymbol{\omega}$ در معادلات به سرعت زاویه‌ای ماهواره نسبت به دستگاه اینرسی است، ولی زوایای اویلر نسبت به دستگاه مداری سنجیده می‌شوند. با توجه به گردش مداری ماهواره، راستای روبه‌زمین در طی گردش تغییر می‌کند و این دستگاه نسبت به دستگاه اینرسی مداری زمین- مرکزی در حال گردش حول محور دوم خود است. اگر $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\omega}_b^{bi}$ و $\omega^o = \boldsymbol{\omega}_b^{oi}$ سرعت زاویه‌ای دستگاه مداری نسبت به دستگاه اینرسی و $\boldsymbol{\omega}^{bo} \equiv \boldsymbol{\omega}_b^{bo}$ سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به دستگاه مداری باشد، که همگی در دستگاه بدنه بیان می‌شوند، رابطه این سه سرعت زاویه‌ای به صورت ذیل خواهد بود:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{bi} = \boldsymbol{\omega}^{bo} + \boldsymbol{\omega}^{oi} \qquad (۱۸)$$

اندیس b در همه این سرعت‌های زاویه‌ای به معنای بیان مؤلفه‌های این بردارها در دستگاه بدنه است که به جهت اختصار در نشانه‌گذاری معمولاً حذف می‌شود. با توجه به تعاریف دستگاه‌ها و با فرض گردش مداری در جهت پاد ساعتگرد، وقتی از فراز قطب شمال به ماهواره می‌نگریم برای $\boldsymbol{\omega}^{oi}$ داریم:

$$\boldsymbol{\omega}^{oi} = \mathbf{R}_{bo}\{-\omega_o\hat{\mathbf{o}}_2\} \qquad (۱۹)$$

---
1. Mapping Function

که در این رابطه $\hat{o}_2$ بردار یکه دستگاه مداری و ω_o مقدار سرعت زاویه‌ای گردش مداری ماهواره نسبت به دستگاه مداری اینرسی است و ماتریس انتقال R_{bo} برای بیان این سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنه در عبارت $\{-\omega_c\hat{o}_2\}$ ضرب می‌شود.

ماتریس انتقال R_{bo} با ترتیب ۱ ← ۲ ← ۳ با سه حرکت متوالی چارچوب مداری را بر بدنه منطبق می‌کند. این ماتریس برحسب زوایای اویلر به شکل ذیل بیان می‌شود:

$$R_{bo}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\sin\theta\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi\end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

فرض زوایای کوچک بر مبنای پایدارسازی توسط بوم گرادیان جاذبه قابل توجیه است. با فرض کوچک بودن زاویه‌ای مانند β داریم:

$$\mathbf{Sin\beta\approx\beta \quad \& \quad Cos\beta\approx 1}$$

با در نظر گرفتن این دو رابطه تقریبی، همچنین صفر فرض کردن ترم‌هایی که از ضرب دو ترم کوچک یا بیشتر تشکیل می‌شوند، خواهیم داشت:

$$\mathbf{R_{bo}}\cong\begin{bmatrix}1 & \psi & -\theta\\ -\psi & 1 & \varphi\\ \theta & -\varphi & 1\end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

در مورد ω^{bo} بایستی رابطه نرخ تغییرات زوایای اویلر را به مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در یک دستگاه مرجع معین به دست بیاوریم. با فرض سه دوران اویلر با ترتیب ۱ ← ۲ ← ۳ یعنی $\psi\to\theta\to\phi$، اگر $\omega^{br}=\begin{bmatrix}p & q & r\end{bmatrix}^T$ باشد، رابطه آن با مشتق زوایای اویلر بنا بر آنچه در مرجع [۶] شرح داده شده است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases}p=\dot{\phi}-\dot{\psi}\,Sin(\theta)\\ q=\dot{\theta}\,Cos(\phi)+\dot{\psi}\,Cos(\theta)Sin(\phi)\\ r=\dot{\psi}\,Cos(\theta)Cos(\phi)-\dot{\theta}\,Sin(\phi)\end{cases} \quad (۲۲)$$

حال اگر دستگاه مرجع ما دستگاه مداری باشد، یعنی $\omega^{br}=\omega^{bo}$، با اعمال همان فرضیات زوایای کوچک و نرخ تغییرات کوچک برای رابطه (۲۲) داریم:

$$\omega^{bo}=\begin{bmatrix}p & q & r\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T \quad (۲۳)$$

همچنین از رابطهٔ (۲۱) و (۱۹) خواهیم داشت:

$$\omega^{oi}=\mathbf{R_{bo}}\begin{bmatrix}0\\ -\omega_o\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \psi & -\theta\\ -\psi & 1 & \varphi\\ \theta & -\varphi & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\omega_o\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\omega_o\psi\\ -\omega_o\\ +\omega_o\varphi\end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

از روابط (۱۸)، (۲۳) و (۲۴) برای ω خواهیم داشت:

$$\omega=\omega^{bi}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\omega_o\psi\\ -\omega_o\\ +\omega_o\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}-\omega_o\psi\\ \dot{\theta}-\omega_o\\ \dot{\psi}+\omega_o\varphi\end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

و از آنجا داریم:

$$\dot{\omega}=\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}-\omega_o\dot{\psi}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{\psi}+\omega_o\dot{\varphi}\end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

تا اینجا معادلات حرکت را در دستگاه بدنه به دست آورده‌ایم.

می‌دانیم که در به دست آوردن معادلات حالت، در صورتی که در معادلات مشتقات بالاتر از مشتق مرتبه اول متغیرهای حالت وجود داشته باشند، از کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم؛ که نتیجه آن افزایش تعداد معادلات یعنی افزایش تعداد متغیرهای حالت در عوض کاهش مرتبه است که در این مسئله با تعریف مشتق زوایای اویلر به‌عنوان متغیرهای حالت، سه متغیر دیگر به معادلات حالت افزوده می‌شوند.

$$\begin{cases}\dot{X}=AX+Bu+Hw\\ Y=CX\end{cases}$$

با جایگذاری معادلات (۱۲)، (۱۷)، (۲۵) و (۲۶) در قسمت اول رابطه (۸) و صفر فرض کردن ترم‌های کوچک با مرتبه بالاتر از یک مثل $\theta\dot{\theta},\ \psi\theta\ \&\ \phi\dot{\psi}$ و همچنین با در نظر گرفتن معادله کاهش مرتبه ذیل

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{\phi}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{\psi}\end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

و نیز با توجه به مرجع [۴] خواهیم داشت:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\begin{bmatrix}\varphi\\ \theta\\ \psi\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -4\omega_O^2\sigma_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_O(1-\sigma_x)\\ 0 & 3\omega_O^2\sigma_y & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega_O^2\sigma_z & -\omega_O(1+\sigma_z) & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \theta\\ \psi\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}+\mathbf{B}_{6\times3}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}+Hw$$

$$\textbf{where}\quad \sigma_x=\frac{I_y-I_z}{I_x}\quad \sigma_y=\frac{I_z-I_x}{I_y}\quad \sigma_z=\frac{I_x-I_y}{I_z} \quad (۲۸)$$

$$and:\quad \mathbf{B}_{6\times3}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \frac{1}{\|B\|}I^{-1}\begin{bmatrix}-(B_y^2+B_z^2) & B_xB_y & B_xB_z\\ B_xB_y & -(B_x^2+B_z^2) & B_yB_z\\ B_xB_z & B_yB_z & -(B_x^2+B_y^2)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

که در آن u مربوط به گشتاوردهنده مغناطیسی است و به میزان دوقطبی ایجادشونده در کویل‌ها مربوط می‌شود. $\mathbf{B}_{6\times3}$ ماتریسی است که تابع میدان مغناطیسی محلی است که به علت گردش ماهواره حول زمین با زمان متغیر است.

جایگذاری مقادیر در معادلات حالت و اعمال کنترلر

هنگام عبور ماهواره از فراز ایستگاه زمینی نیازمند اعمال کنترلر برای ایجاد دقت نشانه‌روی بالاتر هستیم. با توجه به اینکه رسیدن به پاسخ مطلوب در سیستم‌های کنترلی نیازمند گذشت زمان معینی است، پس لازم است که پیش از اینکه ماهواره به بالای پایگاه زمینی برسد کنترلر روشن شود. در مورد ماهواره مورد نظر با توجه به اینکه ایستگاه زمینی در تهران با عرض ۳۶ و طول جغرافیایی ۵۰/۵ قرار دارد و با توجه به فرض زاویه شیب مداری ۵۰ درجه، نقطه 45E 29.3N با ارتفاع مداری ۸۹۰ کیلومتر به‌عنوان ورودی نرم‌افزار MATLAB7.1 برای تعیین بردار میدان مغناطیسی داده شده است (شکل ۱). مشخصات ماهواره در جدول ۱ داده شده است. که این داده‌ها در معادلات حالت اعمال شده است.

اعمال روش LQR

روش LQR را برای کنترل وضعی ماهواره برگزیده‌ایم. در این روش با حل معادله ریکاتی مقدار ماتریس بهره به دست می‌آید. بنابر مرجع [۵] برای معادله ریکاتی داریم:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} - \mathbf{PBB}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q}_{6\times6} = \mathbf{0} \qquad (۲۹)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_{3\times6}\,\mathbf{X} = -\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{3\times3}\mathbf{P}_{6\times6}\mathbf{X} \qquad (۳۰)$$

که برای حل آن از برنامه نوشته‌شده در فایل MACS_3.m در نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. این برنامه با گرفتن ورودی‌ها، ماتریس‌های معادلات حالت را محاسبه می‌کند و سپس مقدار ماتریس بهره را با حل معادله ریکاتی محاسبه می‌نماید. انتخاب Q در این روش مهم است. می‌دانیم که تعیین ماتریس Q توسط طراح انجام می‌پذیرد. با توجه به تعداد حالت‌های معادله حالت، Q ماتریسی ۶*۶ خواهد بود. مشابه آنچه در مراجع [۴] و [۸] داریم، این ماتریس را قطری انتخاب می‌کنیم ولی برای ماهواره مورد نظر ما Q متفاوت است. زیرا در این تحلیل برای ما فقط دو حالت در انحراف ماهواره از راستای ندیر (روبه‌زمین) حائز اهمیت است. این دو حالت زوایای θ و ϕ است. زیرا زاویه حول محور Z بدنه در کار دوربین‌ها و یا آنت‌ها اهمیت اساسی ندارد. با این اوصاف برای Q مقدار ذیل پیشنهاد می‌شود:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .001 \end{bmatrix}$$

با این Q، مقدار ماتریس بهره برابر است با:

$$\mathbf{K}_{3\times6} = \begin{bmatrix} -0.0303 & 0.0618 & -0.0034 & -322.0080 & -199.5771 & -16.5650 \\ -0.1558 & -0.0284 & 0.0010 & -197.1133 & -515.9084 & 9.2662 \\ 0.0931 & 0.1165 & -0.0059 & -301.5605 & 161.8965 & -32.7045 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس برای بررسی پایداری برابر است با:

$$[\mathbf{eig}] = (\mathbf{1E}-\mathbf{4}) * \begin{bmatrix} -1.818+8.5021i \\ -1.818-8.5021i \\ -0.5982+20.2904i \\ -0.5982-20.2904i \\ -0.8974+17.2171i \\ -0.8974-17.2171i \end{bmatrix}$$

نتیجه‌گیری

در تحلیل نتایج، نکات ذیل حائز اهمیت است:

۱. تحلیل پایداری کنترلر که از طریق بررسی مقادیر ویژه امکان‌پذیر خواهد بود. با توجه به مرجع [۴]، در صورت وجود ناپایداری، با تغییر Q و سعی و خطا می‌توان پایداری را محقق کرد. در مسئله ما همه مقادیر ویژه پایدار هستند به این معنا که دارای جزء حقیقی مثبت نیستند. و چون سه جفت مختلط داریم طبیعت هارونیک دارند که دو جفت آنها جزء حقیقی کوچک‌تر دارند و دارای میرایی کمتر هستند. البته متناظر با مودها و حالت‌هایی هستند که پایداری آنها کمتر مد نظر بوده است.

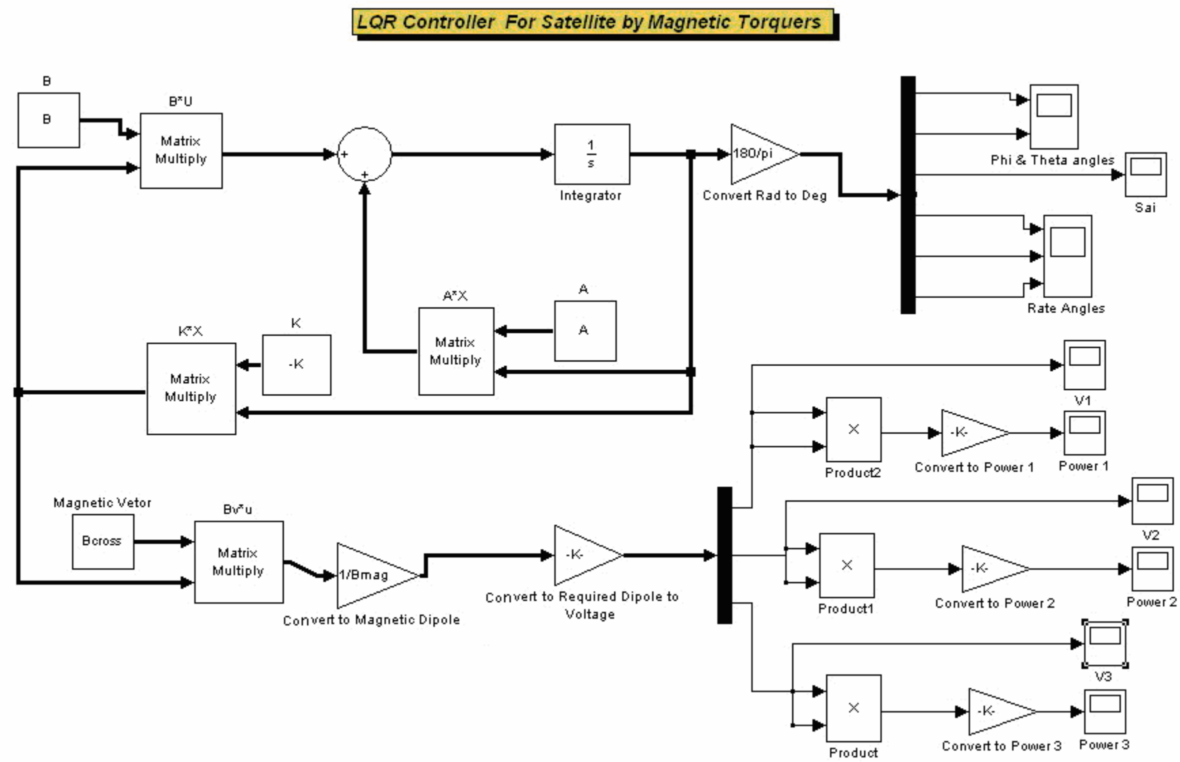
۲. با به دست آمدن u با استفاده از رابطه (۱۵) و (۳۰) دوقطبی مغناطیسی، $\vec{\mathbf{M}}$ به دست می‌آید. با توجه به مشخصات کویل‌ها و ولتاژ ماکزیممی که منبع تغذیه ماهواره می‌تواند تأمین کند و همچنین حد ماکزیمم ولتاژ کاری سیم‌پیچ‌ها (محدوده خطی)، محدودیت $\vec{\mathbf{M}}$ تعیین می‌شود و مشخص می‌گردد که آیا کنترلر از توان واقعی قابل اعمال فراتر رفته یا نه.

۳. زمان پاسخ برای حالت‌های مورد نظر بایستی در زمانی کمتر از زمان روشن بودن سیستم کنترلی به دقت

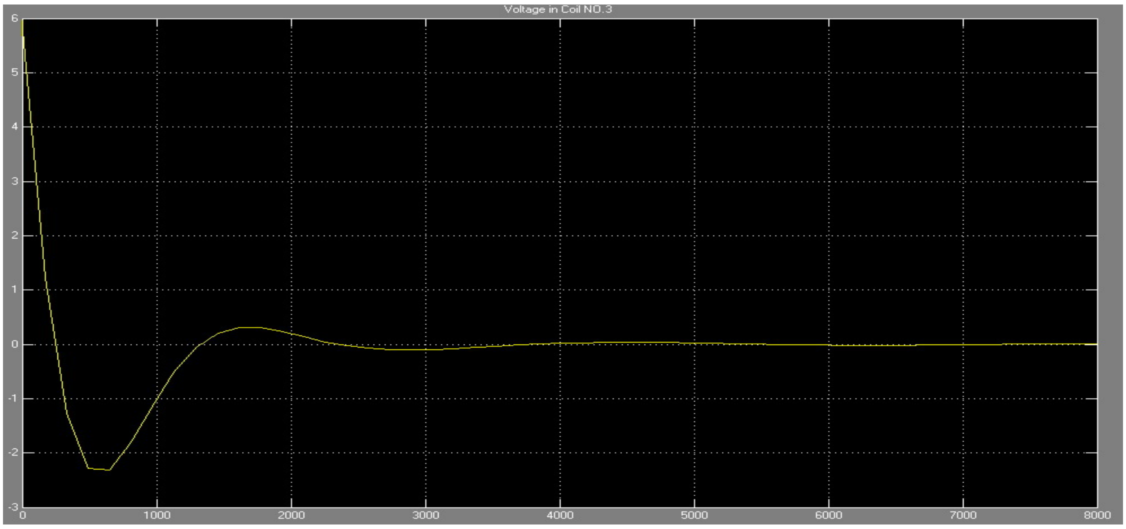
مطلوب برسد. مثلاً اگر میزان انحراف از راستای روبه‌زمین حدود ۵ درجه باشد، بایستی در شبیه‌سازی زوایای θ و ϕ به مقداری کمتر از ۵ درجه در مدت زمان مناسب میل کند. حال اگر این شرایط برقرار نباشد، بایستی در انتخاب توابع، وزنه تأثیر عملگر u افزایش یابد؛ البته با لحاظ شرایط قسمت ۲ یعنی در نظر گرفتن محدودیت توان عملگرهای مغناطیسی.

۴. عملگر مغناطیسی برگزیده در این تحقیق مدل ZARM-MT30-2-CGS است که تا ولتاژ ۲۵ ولت محدوده کاری خطی آن است؛ و با توجه به اینکه ماکزیمم ولتاژ مورد نیاز که در کویل سوم اتفاق افتاده است در حدود ۶ ولت است (شکل ۳- الف)، از این‌رو شرایط قسمت ۲ برقرار است. در شکل ۲ محیط سیمولینک برای پیاده‌سازی کنترلر نشان داده شده است. و با استفاده از ضرایب تبدیل خاص کویل MT30-2-CGS میزان ماکزیمم ولتاژ مورد نیاز برای عملگر کویل مغناطیسی تعیین می‌شود.

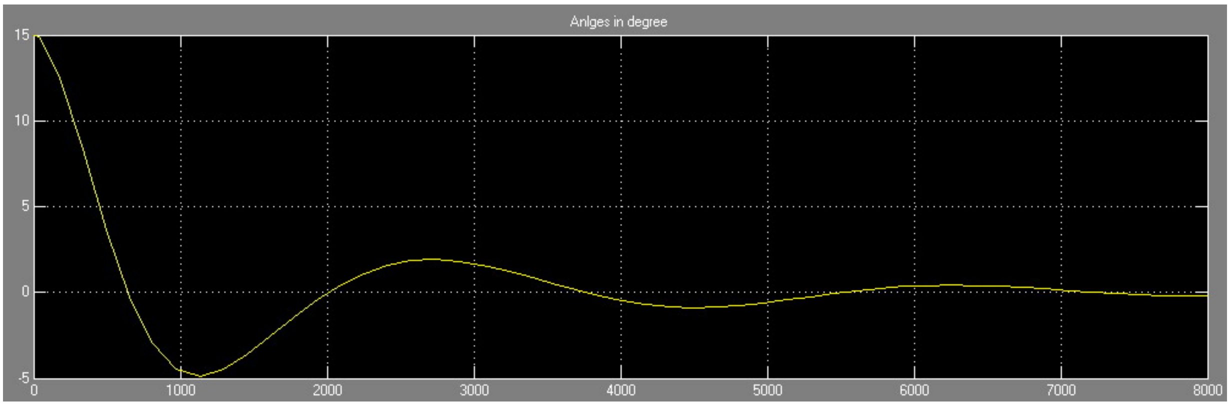
۵. در شکل ۳ نتایج شبیه‌سازی برای انحراف اعمالی ۱۵ درجه در زوایای θ و ϕ، به‌عنوان شرایط اولیه سیستم در حالت روشن شدن کنترلر نشان داده شده است، که به‌وضوح تأثیر کنترلر را در پایدارسازی و افزایش دقت نشانه‌روی نشان می‌دهد.



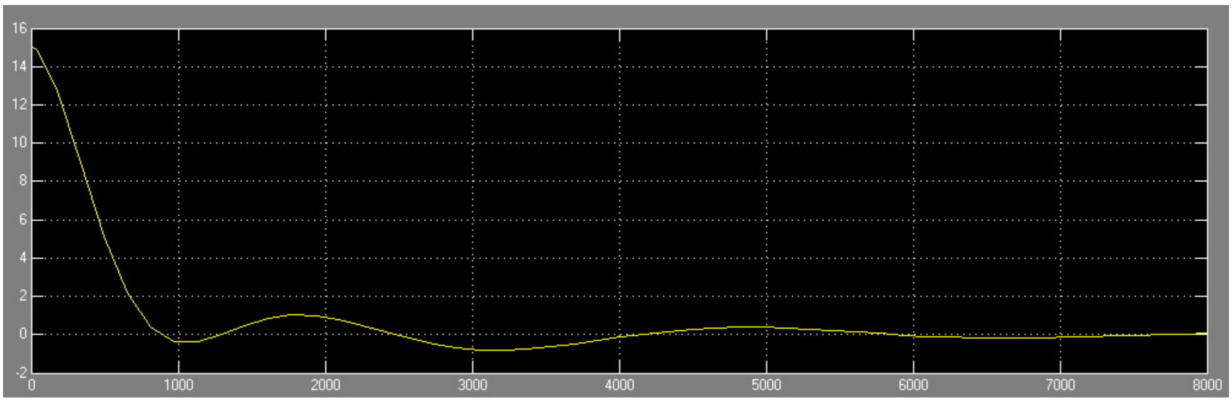
شکل ۲. پیاده‌سازی کنترلر در محیط سیمولینک MATLAB7.1 و تعیین ولتاژ مورد نیاز برای اعمال به کویل‌های سه‌گانه



شکل ۳ (الف) منحنی ولتاژ مورد نیاز برحسب زمان (ثانیه) برای اعمال به کویل سوم



شکل ۳. (ب) منحنی تغییرات زاویهٔ ϕ برحسب زمان (ثانیه) از شرایط اولیهٔ ۱۵ درجه (ادامه)



شکل ۳ . (ج) منحنی تغییرات زاویهٔ θ برحسب زمان (ثانیه) از شرایط اولیهٔ ۱۵ درجه (ادامه)

تقدیر و تشکر

این مقاله بر مبنای تحقیق انجام‌شده در مورد کنترل وضعی ماهواره با کمک گشتاوردهنده‌های مغناطیسی با حمایت مرکز تحقیقات مخابرات ایران تهیه و تنظیم گردیده است که در اینجا لازم است از همکاری‌های مرکز تحقیقات مخابرات ایران تقدیر و تشکر فراوان به عمل آید.

مراجع

۱. سلیمی، ا.، "کنترل وضعی ماهواره با روش‌های غیرفعال و فعال"، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده فنی و مهندسی گروه مکانیک، بخش هوافضا، سمینار کارشناسی ارشد، ۸۴.

2. Wertz, J.R., *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Reidel Publishing Company, Dordrecht: 1978.

3. Wertz, J.R., and W.J. Larson, editors, *Space Mission Analysis and Design*, Microcosm Press, El Segundo, California, 3rd edition, 1999.

4. Makovec K.L., "A Nonlinear Magnetic Controller for Three-Axis Stability of Nanosatellites", MSc. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2001.

5. Wi´sniewski, R., "Satellite Attitude Control Using Only Electromagnetic Actuation", Ph.D. Thesis, Department of Control Engineering Aalborg University, ISSN 0908-1208, 1996.

6. Sidi Marcel, J., “Spacecraft dynamics and control a practical engineering approach”, Cambridge Aerospace Series, 1997.

7. Attitude Control System for AAUSAT-II, Aalborg University, Institute of Electronic Systems, IAS8, 2004.

8. Renk, F., "Attitude Control for a Micro-Satellite Using only Magnetic Coils and Target Pointing for Multiple Satellites", MSc. Thesis, Australian Centre for Field Robotics, The University of Sydney, 2005.