JSST Journal of Space Science & Technology

Vol. 1, No. 2, Winter 2009

Optimal Low-Thrust Spacecraft Trajectories Using Time-Domain Finite Element Method

S. A. Fazelzadeh[1*], and Gh. A. Varzandian[2]

1, 2. Mechanical Eng. Dept. Shiraz Univ.

*No.71344, Shiraz, Iran

fazelzad@shirazu.ac.ir

In this study, optimal low-thrust spacecraft trajectories are obtained by time-domain finite element method. Equations of motion are expressed in state-space form. The performance index is considered as minimum time. The problem has been formulated through the variational approach. The time-domain finite element discretized form of the performance index, state equation constraints and the related boundary conditions are presented. By setting out the discrete equations, a set of nonlinear algebraic equations is generated and by using Newton–Raphson method, optimum answer is attained. The effects of the number of time segments on the performance index are examined. Furthermore, the influences of effective exhaust velocities on the optimal trajectory are demonstrated.

Keywords: Low-thrust spacecraft, Optimal trajectory, Minimum time performance, Time-domain Finite element

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۱/ شمارهٔ ۲ / زمستان ۱۳۸۷
ص. ص ۴۳-۵۰

کاربرد روش اجزای محدود در دامنهٔ زمان برای تعیین مسیرهای بهینهٔ پرواز فضاپیما با رانش محدود

سید احمد فاضل‌زاده حقیقی[1]* و غلامعلی ورزندیان[2]

۱ و ۲- دانشگاه شیراز، دانشکده مهندسی، بخش مهندسی مکانیک

* شیراز ، خ ملاصدرا، دانشگاه شیراز، بخش مهندسی مکانیک

fazelzad@shirazu.ac.ir

در این مقاله، مسیرهای بهینه حرکت هر فضاپیما تحت رانش محدود با به‌کارگیری روش اجزای محدود در دامنهٔ زمان مدل‌سازی و ارائه شده است. در ابتدا، با توجه به معادلهٔ گرانش نیوتن، معادلات فضای حالت حرکت فضاپیما با رانش محدود ارائه شده و سپس با در نظر گرفتن تابع عملکرد حداقل زمان مسئلهٔ کنترل بهینه تنظیم شده است. همچنین با گسسته‌سازی مسئله در دامنهٔ زمان و استفاده از روش حساب تغییرات، فرم اجزای محدود معادلات استخراج شده است. این معادلات به‌صورت غیرخطی بوده و با استفاده از الگوریتم نیوتن- رافسون معادلات غیرخطی حل و نتایج ارائه شده است و نهایتاً مسیرهای بهینهٔ پرواز به ازای ضرایب سرعت خروجی مؤثر ترسیم شده است.

واژه‌های کلیدی: مسیرهای بهینه، فضاپیما با رانش محدود، کنترل بهینه، روش اجزای محدود زمانی، تابع عملکرد حداقل زمان

مقدمه

اصول تغییراتی یکی از مشترکات پایه‌ای تئوری کنترل بهینه و روش اجزای محدود است و در سال‌های اخیر تلاش‌هایی برای به کارگیری روش اجزای محدود در حل مسائل کنترل بهینه صورت پذیرفته است. در این پژوهش با به‌کارگیری روش اجزای محدود در دامنهٔ زمان به مدل‌سازی مسئلهٔ کنترل بهینهٔ مسیر فضاپیماها اقدام شده است.

به دنبال پایه‌گذاری علم حساب تغییرات در قرن هفدهم توسط ریاضیدانان بزرگی چون نیوتن و لایبنیتز در زمینه‌های مهندسی میدان‌های تحقیقاتی متنوعی بنیانگذاری شد که امروزه، هرکدام مبانی گسترده و پیچیده‌ای دارند. تئوری‌های بهینه‌سازی و کنترل بهینه و روش اجزای محدود از جمله محصولات علم حساب تغییرات به‌شمار می‌آیند. از زمان ابداع و توسعهٔ روش حساب تغییرات، مسائل بهینه‌سازی به یکی از مهم‌ترین عناوین کارهای تحقیقاتی و پژوهشی تبدیل شده است [۱]. تاکنون مسائل بهینه‌سازی زیادی در مورد مانورهای ماهواره‌ها با کاربردهای دوبعدی مطرح و حل شده‌اند [۲] مسئلهٔ انتقال بین دو مدار بیضوی هم صفحه به‌وسیلهٔ دو نیروی ضربه‌ای [۳ و۴]، انتقال به مدار سنکرون زمین [۵]، قراردادن ماهواره در یک مدار حول سیارهٔ مریخ [۶]، ملاقات بین مدارهای دایره‌ای هم صفحه با یک زمان پایان مشخص با استفاده از روش‌های چندضربه‌ای [۷]، ملاقات بهینه بین مدارهای بیضوی توسط بادبان‌های خورشیدی و کنترل جهت‌گیری آنها [۸] و انجام مانورهای گریز دوبعدی در صورت احتمال برخورد با اجرام سرگردان آسمانی [۹] بررسی رفتار دینامیکی فضاپیماها بر اساس المان‌های مداری نسبی [۱۰] از جمله نمونه‌هایی هستند که در کنترل بهینهٔ حرکت دو بعدی سفینه‌های فضایی به چشم می‌خورند. به دلیل رفتار غیرخطی معادلات حرکت، بسیاری از پژوهشگران معمولاً روش‌های خطی‌سازی ساده با فرض کوتاه‌بودن طول مسیر را به

کار می‌برند [۱۰]. برای نمونه می‌توان انجام مانور ملاقات دو سفینه که هر دو حرکت فعال و پویا با اعمال نیرو دارند [۱۱] و انجام مانور گریز ضربه‌ای با برگشت توسط نیروی رانش به پایین به صورت انجام ملاقات [۱۲] را نام برد. با استفاده از روش‌های حل تقریبی و برنامه‌ریزی غیرخطی مسائل مسیر حرکت بهینه شبیه‌سازی شده است [۱۳-۱۷]. استفاده از روش کنترل لیاپانوف و الگوریتم ژنتیک [۱۸] و روش‌های کنترل عصبی را می‌توان از جدیدترین روش‌های بهینه‌سازی مسیر پرواز فضاپیماها با رانش محدود دانست [۱۹].

معادلات حاکمه بر یک مسئلهٔ کنترل بهینه عموماً به یک مسئلهٔ مقدار مرزی دو نقطه‌ای منجر می‌شود که با روش‌های مختلفی حل‌شدنی است [۲۰]. این روش‌ها به‌طورکلی به دو دسته مستقیم و غیرمستقیم تقسیم‌بندی می‌شوند.

در روش مستقیم، یک مسئلهٔ سیستم پیوسته به وسیلهٔ یک سیستم معادلات جبری غیرخطی تقریب زده می‌شود که نهایتاً به حل یک مسئلهٔ بهینه‌سازی پارامتری منجر می‌شود. روش‌هایی مثل روش برنامه‌ریزی غیرخطی اسپار، روش پهلوی هم‌گذاری و روش خطی‌سازی گام به گام از این جمله‌اند. در روش‌های مستقیم مسئلهٔ پیوسته به‌وسیلهٔ یک مسئلهٔ بهینه سازی پارامتری تقریب زده می‌شود و از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی برای حل استفاده می‌شود. این پارامتری‌کردن می‌تواند تنها روی متغیرهای کنترلی اعمال شود و معادله‌های حالت به طور جداگانه انتگرال‌گیری شده یا متغیرهای حالت و کنترلی با هم پارامتری و سپس از روش انتگرال‌گیری همزمان حل شوند. روش‌های مستقیم بهینه‌سازی معمولاً به حدس اولیه حساس هستند و بررسی حساسیت سیستم به پارامترهای اولیه در آنها کار دشواری است. این روش‌ها براساس تجربهٔ طراح می‌توانند به‌کارگرفته شوند و بررسی امکان بود یا نبود پاسخ تقریباً امکان پذیر نیست.

در روش غیرمستقیم، با استفاده از حساب تغییرات یک مسئله مقدار مرزی دونقطه‌ای مورد تحلیل قرار می‌گیرد. روش هایی مثل کاهش سریع، تغییر اکسترمم‌ها، تصویر گرادیان و خطی سازی ناقص از این جمله‌اند که بعضی روش غیرصریح و بعضی دیگر روش صریح هستند. نقطهٔ اشتراک تمام این روش‌ها غیرمستقیم‌بودن آنهاست. در حقیقت معادله‌هایی که نتیجهٔ یک بهینه‌یابی تابعی هستند باید با روشی حل شوند که هیچ‌گونه وابستگی به مرحله‌های بهینه‌سازی نداشته باشند. در تمام این روش‌ها مشکل همگرایی و پایداری وجود دارد و رسیدن به جواب بهینه معمولاً کار دشواری است. نیاز به حدس اولیه به نوبهٔ خود حساسیت مسئله را پیش می‌آورد و ایجاد مشکل می‌کند. هاجز و همکارانش [۲۲ و ۲۱]، برای حل مسائل کنترل بهینه قیددار از این روش استفاده کرده‌اند. ایشان شرایط بهینگی مسئله پایه کنترل بهینه را به کمک حساب تغییرات و براساس اصل تضعیف همیلتون استخراج و معادلات حاکم را به کمک روش اجزای محدود در دامنهٔ زمان حل کرده‌اند.

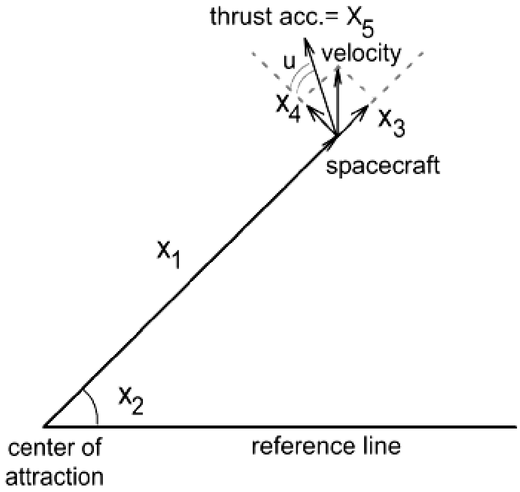
فاضل‌زاده و ورزندیان [۲۳] مسئلهٔ مسیر حرکت بهینهٔ فضاپیما را با در نظر گرفتن حداقل تلاش کنترلی به عنوان تابع معیار و مدل‌کردن دینامیک سیستم با چهار متغیر حالت و همچنین در نظر گرفتن شتاب ناشی از سیستم پیشرانهٔ فضاپیما به عنوان پارامتر کنترلی با استفاده از روش اجزای محدود در دامنهٔ زمان حل کرده است و نتایج حاصله را با روش خطی‌سازی گام به گام ارائه شده در مرجع [۲] مقایسه و تطابق خوبی را مشاهده کرده‌اند.

در مقالهٔ حاضر، با افزودن یک متغیر حالت جدید به معادلات حرکت فضاپیما، تغییرات شتاب رانش فضاپیما لحاظ شده است و با در نظر گرفتن تابع عملکرد حداقل زمان و اعمال شرایط کنترل بهینه، مسیر بهینهٔ پرواز در حداقل زمان تحت رانش محدود به‌دست آمده است. اینگونه مسائل برای مطالعهٔ انتقال فضاپیماها به مدارهایی با فاصلهٔ نسبتاً کم مورد توجه قرار می‌گیرند. نهایتاً پس از تنظیم معادلات حاکمه بر مسئله، با به‌کارگیری روش اجزای محدود اقدام به شبیه‌سازی عددی کرده و نتایج حاصله ارائه شده است.

معادلات حرکت فضاپیما با رانش محدود

هنگام بررسی حرکت انتقالی ماهواره‌ها و سفینه‌های فضایی، ماهواره به صورت نقطه‌ای مادی با جرم متمرکز فرض شده‌است و دینامیک حرکت به صورت دینامیک ذره که بیان حرکت مرکز جرم سیستم است مورد استفاده قرار می‌گیرد.

از آنجاکه هدف مدل‌سازی دو بعدی است، دستگاه مختصات قطبی متعامد برای به‌دست آوردن سرعت و شتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد (شکل ۱). در این مقاله مدل رانش متغیر را برای نیروی جلوبرنده فضاپیما در نظر گرفته‌ایم [۱۷]. مدل رانش مورد مطالعه یک سیستم رانش محدود و متغیر به صورت $\dot{a}_T = \dfrac{a_T^2}{c}$ است. در این رابطه a_T شتاب نیروی رانش و c ضریب سرعت خروجی مؤثر است. ضمناً کنترل مسئله زاویهٔ نیروی جلوبرنده است. در این مطالعه مدل‌سازی بر اساس مسئلهٔ دو جسم نیوتنی بنا نهاده شده است و از این رو مبدأ مختصات همواره مرکز سیاره درنظرگرفته می شود.



شکل ۱- متغیرهای حالت و کنترل مسئله [۱۷]

همچنین فرض بر این است که در طول انجام مانور حرکت انتقالی سیاره به دور خورشید تأثیری در دینامیک سیستم نمی‌گذارد که با توجه به زمان کوتاه بسیاری از مانورها منطقی است. اما در انجام سفرهای بین سیاره‌ای باید دستگاه مختصات اینرسی به جای مرکز سیاره در مرکز خورشید قرار داده شود که بدین ترتیب حرکت سیاره نیز در معادله‌ها وارد می‌شود. در سیستم مختصات قطبی، معادله‌های مربوط به مؤلفه‌های سرعت و شتاب چنین به دست می‌آیند:

$$v_r = \dot{r} \tag{۱}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \tag{۲}$$

$$a_r = -\frac{\mu}{r^2} + r\dot{\theta}^2 + U_r \tag{۳}$$

$$a_\theta = -\dot{r}\dot{\theta} + U_\theta \tag{۴}$$

مؤلفه‌های v_r، v_θ، a_r و a_θ به ترتیب بیانگر سرعت و شتاب در جهت‌های r و θ هستند. ضریب μ نیز بیانگر ثابت گرانشی سیاره است که در این مقاله $\mu = 1$ در نظر گرفته شده است. همچنین مؤلفه‌های شتاب شعاعی و زاویه ای U_r و U_θ توسط سیستم پیشرانه فضاپیما ایجاد می‌شوند. برای بیان معادله‌های (۱) تا (۴) به‌همراه مدل شتاب نیروی رانش به صورت معادله‌های حالت سیستم، متغیرهای حالت $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$ به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \dot{r}, x_4 = r\dot{\theta}, x_5 = a_T \tag{۵}$$

بنابراین معادلات حالت زیر به‌دست می آیند:

$$\dot{x}_1 = x_3 \tag{۶}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_4}{x_1} \tag{۷}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{{x_1}^2} + \frac{{x_4}^2}{x_1} + x_5 \sin u \tag{۸}$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{x_3 x_4}{x_1} + x_5 \cos u \tag{۹}$$

$$\dot{x}_5 = x_5^2 / c \tag{۱۰}$$

بر اساس جملهٔ آخر معادله (۸) و (۹) می‌توان $U_r = x_5 \sin u$ و $U_\theta = x_5 \cos u$ را تعریف و اندازهٔ شتاب ناشی از سیستم پیشرانش را به‌صورت $|U| = \sqrt{U_r^2 + U_\theta^2}$ نشان داد.

فرم تضعیف‌شدهٔ معادلات و شرایط مرزی

در این مرحله با به‌کاربردن روش حساب تغییرات، فرم تضعیف‌شدهٔ معادلات کنترل بهینه استخراج می‌شود. یک سیستم شامل n متغیر حالت x و m کنترل u را درنظر می‌گیریم. معادلهٔ حالت سیستم به صورت $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ نوشته می‌شود. اجزای تشکیل‌دهندهٔ شاخص عملکردی J_0 را با یک انتگرال‌گیر $L(x,u,t)$ و توابع گسسته $\phi(x(t),t)$ (تعریف شده در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی) تعریف می‌کنیم. علاوه بر این، هر قیدی که در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی بر روی متغیرهای حالت و زمان وجود داشته باشد با مجموعه توابع $\psi(x(t),t)$ معرفی می‌شود. این قیود و معادلات حالت سیستم به ترتیب با ضرایب لاگرانژ ν (تعریف شده در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی) و $p(t)$ به رابطهٔ مربوط به شاخص عملکردی افزوده می شود. در نهایت شاخص عملکردی به فرم زیر در می‌آید [۲۰]:

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_f} \left[L(x,u,t) + p^T (f - \dot{x}) \right] dt + \Phi \Big|_{t_0}^{t_f} \tag{۱۱}$$

که $\Phi = \phi(x(t),t) + \nu^T \psi(x(t),t)$ است.

با تعریف

$$\hat{x}\Big|_{t_0} = x(t_0) \qquad and \qquad \hat{x}\Big|_{t_f} = x(t_f) \tag{۱۲}$$

و افزودن $\alpha^T (x - \hat{x})\Big|_{t_0}^{t_f}$ به J_0 که در آن α یک مجموعه ضرایب لاگرانژ گسسته نامعین تعریف شده در t_0 و t_f است، شاخص عملکردی جدیدی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[L(x,u,t) + p^T (f - \dot{x}) \right] dt + \Phi \Big|_{t_0}^{t_f} + \alpha^T (x - \hat{x}) \Big|_{t_0}^{t_f} \tag{۱۳}$$

برای استخراج اصل تضعیف، لازم است که δJ، تغییر اول J، تعیین شود. اگر $\delta x(t_f)$ و $\delta p(t_f)$ به ترتیب تغییرات x و p در $t=t_f$ باشد و t_f ثابت نگه داشته شود، و همچنین اگر $dx(t_f)$ و $dp(t_f)$ به ترتیب تغییرات x و p در $t=t_f$ هنگامی‌که t_f متغیر آزاد است، باشند تغییرات در $t=t_f$ با معادلات خطی زیر بیان می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned} \delta x(t_f) &= dx(t_f) - \dot{x}\Big|_{t_f} dt_f \\ \delta p(t_f) &= dp(t_f) - \dot{p}\Big|_{t_f} dt_f \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

در نتیجه تغییر اول J عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{t_0}^{t_f} &\{\delta p^T(f-\dot{x}) - \delta\dot{x}^T p + \\ &\delta x^T[(\frac{\partial L}{\partial x})^T + (\frac{\partial f}{\partial x})^T p] + \\ &\delta u^T[(\frac{\partial L}{\partial u})^T + (\frac{\partial f}{\partial u})^T p]\}dt + \\ &dt_f[L + p^T(f-\dot{x}) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}]\Big|_{t_f} + \\ &\delta\nu^T\psi\Big|_{t_0}^{t_f} + dx^T(\frac{\partial \Phi}{\partial x})\Big|_{t_0}^{t_f} + \\ &\delta\alpha^T(x-\hat{x})\Big|_{t_0}^{t_f} + \alpha^T(dx - d\hat{x})\Big|_{t_0}^{t_f} \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

شرط لازم برای کمینه‌شدن J این است که $\delta J = 0$ باشد. با تعریف

$$\hat{p}\Big|_{t_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{t_0} \qquad and \qquad \hat{p}\Big|_{t_f} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{t_f} \qquad (۱۶)$$

و با انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء و آماده‌سازی معادلات، فرم نهایی تضعیف‌شده همراه با شرایط مرزی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} &\{\delta\dot{p}^T x - \delta\dot{x}^T p + \delta x^T[(\frac{\partial L}{\partial x})^T \\ &+ (\frac{\partial f}{\partial x})^T p] + \delta p^T f + \delta u^T[(\frac{\partial L}{\partial u})^T \\ &+ (\frac{\partial f}{\partial u})^T p]\}dt \\ &+ dt_f[L + p^T f + \frac{\partial \Phi}{\partial t}]\Big|_{t_f} \\ &+ \delta\nu^T\psi\Big|_{t_f} + \delta x^T\hat{p}\Big|_{t_0}^{t_f} - \delta p^T\hat{x}\Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

روش اجزای محدود در دامنهٔ زمان

بازهٔ زمانی مسئله از t_o تا t_f را به N جزء تقسیم‌بندی می‌شود و زمان بی‌بعد شده به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

$$\tau = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} = \frac{t-t_i}{\Delta t_i} \qquad (۱۸)$$

به منظور ساده‌تر شدن محاسبات بازه‌های زمانی $\Delta t_i, i=1,2,...,N+1$ را هم اندازه در نظر می‌گیریم.

متغیرهای حالت و وابستهٔ حالت را به ترتیب با x و p نشان می‌دهیم و توابع شکل قطعه‌ای ثابت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = \begin{Bmatrix} \hat{x}_i, \tau = 0 \\ \bar{x}_i, 0 < \tau < 1 \\ \hat{x}_{i+1}, \tau = 1 \end{Bmatrix} \quad p = \begin{Bmatrix} \hat{p}_i, \tau = 0 \\ \bar{p}_i, 0 < \tau < 1 \\ \hat{p}_{i+1}, \tau = 1 \end{Bmatrix}, \qquad (۱۹)$$

با توجه به اینکه مشتقات u و δu در فرمول‌بندی ظاهر نمی‌شوند یک تابع شکل ثابت برای آنها به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$u = \bar{u}_i \quad , \quad \delta u = \delta\bar{u}_i \qquad (۲۰)$$

با اعمال توابع شکل x, p, u نهایتاً فرم تضعیف‌شدهٔ کلی برای مسئلهٔ کنترل بهینه‌سازی انتهای زمانی ثابت را می‌توان بر حسب پارامترهای فوق و رابطهٔ (۱۵) استخراج کرد که فرم نهایی آن به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} &< \delta x_i^T\left[\bar{p}_i + \frac{\Delta t_i}{2}(\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}})_i^T\bar{p}_i + \frac{\Delta t_i}{2}(\frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{x}})_i^T\right] \\ &- \delta p_i^T(\bar{x}_i - \frac{\Delta t_i}{2}\bar{f}_i) - \delta x_{i+1}^T[\bar{p}_i - \frac{\Delta t_i}{2}(\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}})_i^T\bar{p}_i \\ &- \frac{\Delta t_i}{2}(\frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{x}})_i^T] + \delta p_{i+1}^T(\bar{x}_i + \frac{\Delta t_i}{2}f_i) + \delta\bar{u}_i^T\{\Delta t_i \\ &[(\frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{u}})_i^T + (\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{u}})_i^T\bar{p}_i]\} > + dt_f(\hat{L} + \hat{p}_f^T\hat{f} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \\ &+ \nu^T\frac{\partial\psi}{\partial t})\Big|_{t_f} + \delta\nu^T\psi\Big|_{t_f} - \delta x_1^T\hat{p}_o + \delta p_1^T\hat{x}_o \\ &+ \delta x_{N+1}^T\hat{p}_f - \delta p_{N+1}^T\hat{x}_f = 0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

جهت استخراج دستگاه معادلات حاکمه باید ضریب ترم‌هایی که نماد تغییراتی مساوی صفر دارند تا شرایط بهینه‌شدن برقرار شود. در این صورت با بسط رابطهٔ (۲۱) و جداکردن ضرایب به دستهٔ معادلات زیر می‌رسیم:

۱. ضریب δx_1^T:

$$\bar{p}_1 + \frac{\Delta t_1}{2}(\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}})_1^T\bar{p}_1 + \frac{\Delta t_1}{2}(\frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{x}})_1^T - \hat{p}_0 = 0 \qquad (۲۲)$$

۲. ضریب δp_1^T:

$$\hat{x}_o - \bar{x}_1 + \frac{\Delta t_1}{2}\bar{f}_1 = 0 \quad (۲۳)$$

۳. ضریب δx_k^T: $(k = 2,3,...,N)$

$$\bar{p}_k + \frac{\Delta t_k}{2}(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}})_k^T \bar{p}_k + \frac{\Delta t_k}{2}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}})_k^T - \bar{p}_{k-1} + \frac{\Delta t_{k-1}}{2}(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}})_{k-1}^T \bar{p}_{k-1} + \frac{\Delta t_{k-1}}{2}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}})_{k-1}^T = 0 \quad (۲۴)$$

۴. ضریب δp_k^T: $(k = 2,3,...,N)$

$$\bar{x}_{k-1} + \frac{\Delta t_{k-1}}{2}\bar{f}_{k-1} - \bar{x}_k + \frac{\Delta t_k}{2}\bar{f}_k = 0 \quad (۲۵)$$

۵. ضریب $\delta \bar{u}_k^T$: $(k = 1,2,...,N)$

$$(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{u}})_k^T + (\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}})_k^T \bar{p}_k = 0 \quad (۲۶)$$

۶. ضریب δx_{N+1}^T:

$$\hat{p}_f - \bar{p}_N + \frac{\Delta t_N}{2}(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}})_N^T \bar{p}_N + \frac{\Delta t_N}{2}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}})_N^T = 0 \quad (۲۷)$$

۷. ضریب δp_{N+1}^T:

$$\bar{x}_N + \frac{\Delta t_N}{2}\bar{f}_N - \hat{x}_f = 0 \quad (۲۸)$$

۸. ضریب δv^T:

$$\psi \,|_{t_f} = 0 \quad (۲۹)$$

۹. ضریب dt_f:

$$(\hat{L} + \hat{p}_f^T \hat{f} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t})\Big|_{t_f} = 0 \quad (۳۰)$$

این نه دسته معادله باید به طور همزمان حل شوند.

شاخص عملکرد حداقل زمان ، قیود و شرایط مرزی

در این مقاله مسئلهٔ کنترل بهینه مورد نظر کمینه‌کردن زمان پرواز است که شاخص عملکردی آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (۳۱)$$

تعداد جواب‌های امکان‌پذیر بهینه می‌تواند بیش از یکی باشد که در این حالت مجموعه‌ای از پاسخ‌ها به‌دست می‌آید. انتخاب یک جواب بر اساس سلیقهٔ طراح و معیارهای ذهنی وی شکل می گیرد ولی در هر صورت پاسخ مطلوب در اینجا باید کمترین مقدار تابع معیار عملکرد را به دست دهد.

در زمان پایانی $t = t_f$ تعدادی از متغیرها شامل متغیرهای حالت معلوم بوده و متغیرهای وابسته حالت مجهول هستند. به همین دلیل این نوع مسئله کنترل بهینه با توجه به شرایط مرزی ابتدا و انتها، مسئلهٔ مرزی دو نقطه‌ای نامیده می‌شود. حل اینگونه مسائل نیز نسبت به حالتی که شرایط مرزی در ابتدا یا انتها همگی معلوم باشند مشکل‌تر است.

متغیرهای حالت این مسئله را مؤلفه‌های سرعت و بردار مکان ماهواره تشکیل می‌دهند که به‌طورکلی محدودیتی بر روی آنها وجود ندارد و چون از نظر فیزیکی بی‌نهایت نمی‌شوند واردکردن آنها به عنوان قید ضرورتی ندارد.

در مورد شرایط مرزی ابتدایی و نهایی برای این مسئله خاص شرایط زیر را در نظر گرفته‌ایم:

$$X_o = \{1,0,0,1,0.1\}^T, X(t_f) = \{3, free, 0, 0.447, free\}^T \quad (۳۲)$$

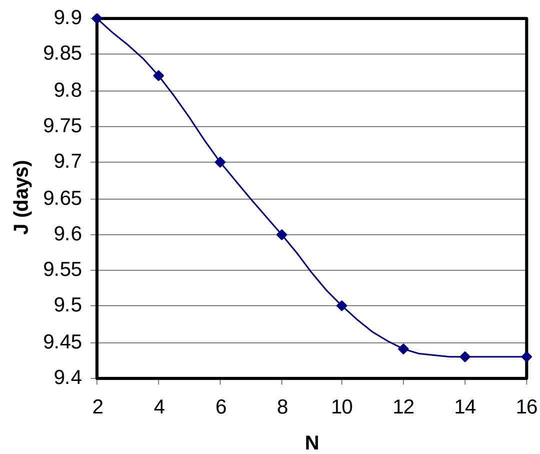
از آنجاکه هیچگونه قیدی روی زاویهٔ x_2 وجود ندارد؛ این متغیر در زمان انتها، آزاد فرض شده است. در مورد شرایط مرزی متغیرهای وابسته حالت $\hat{p}_f$ را می‌توان بر حسب سایر پارامترهای مجهول مسئله بیان کرد. در مسئلهٔ حاضر با اعمال معادلات لازم داریم:

$$\begin{aligned} &\phi = 0 \\ &\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_f - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ .447 \end{bmatrix} \\ &\hat{p}_f = [\nu_1 \quad 0 \quad \nu_2 \quad \nu_3 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (۳۳)$$

حل عددی و ارائهٔ نتایج

با استفاده از معادلات حاصله، شبیه‌سازی عددی برای یافتن مسیرهای بهینهٔ حرکت فضاپیما تحت رانش محدود به ازای تابع عملکردی حداقل زمان پرواز برای یک مانور کوتاه مدت ارائه شده است.

دستگاه معادلات غیرخطی حاصله، به ازای تعداد تقسیمات زمانی $N = 2,4,...,16$، سرعت مؤثر خروجی $C=1.0$ و شعاع مدار هدف $R=3$ توسط الگوریتم نیوتن رافسون برای دستگاه‌های چند متغیره حل شده و تغییرات شاخص عملکردی مسئله با تغییر تعداد المان‌ها در شکل (۲) نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد المان‌ها به مرور تغییرات شاخص عملکردی محدودتر می‌شود. به‌طوری‌که در انتهای نمودار تغییرات J بسیار کم است و عملاً همگرایی اتفاق افتاده است. این نتیجه بیانگر کفایت تعداد المان‌های مورد نیاز است. از این جهت محاسبات شبیه‌سازی براساس $N = 16$ انجام و ارائه شده است.



شکل۲– تغییرات شاخص عملکردی بر حسب تعداد المان

ذکر این نکته لازم است که با افزایش تعداد المان‌ها، تعداد معادلات و زمان محاسبات افزایش زیادی می‌یابد. در جدول (۱) زمان محاسبات برحسب ثانیه، با استفاده از کامپیوتر پنتیوم نشان داده شده است.

جدول ۱– زمان محاسبات اجرای برنامه

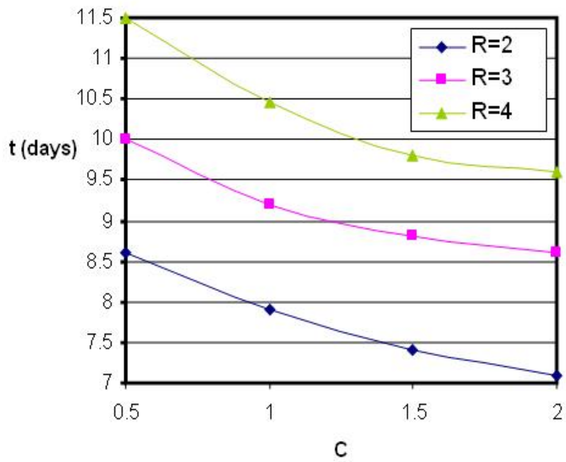
تعداد المان N	تعداد معادلات	زمان محاسبات (sec)
۲	۳۶	۱۷
۴	۵۸	۶۹
۶	۸۰	۱۴۷
۸	۱۰۲	۲۲۱
۱۰	۱۲۴	۳۳۳
۱۲	۱۴۶	۴۴۳
۱۴	۱۶۸	۵۴۵
۱۶	۱۹۰	۶۵۹

CPU: 2.4GHz

جهت اعتبارسنجی نتایج، مقادیر عددی با نتایج مرجع [۱۷] مقایسه شده است. در مرجع مذکور مسیر بهینهٔ حرکت فضاپیما با در نظر گرفتن شرایط و معادلات دینامیک مشابه مقاله حاضر و با روش پهلوی هم‌گذاری همراه با برنامه‌ریزی غیرخطی حل شده است. با مقایسهٔ نتایج به ازای ضریب سرعت خروجی مؤثر $C=1.5$ و شعاع مدار هدف $R=3$ مشخص زمان پروازی ۱۰/۸۸ به‌دست آمده در حالی‌که در مسیر مشابه با روش اجزای محدود زمان کمتری و برابر با ۸/۸ به‌دست آمده است. یکی از دلایل زمان پرواز بیشتر در مرجع [۱۷] قطع شدن نیروی پیشرانه در فواصل میانی مسیر پرواز است. همچنین در جدول (۲) تغییرات زمان پرواز فضاپیما با توجه به تغییر ضریب سرعت خروجی مؤثر و مدار هدف نشان داده شده است و در شکل (۳) این تغییرات به صورت نمودار رسم شده است.

جدول ۲- تغییرات زمان پرواز فضاپیما با توجه به تغییر ضریب سرعت خروجی مؤثر و مدار هدف

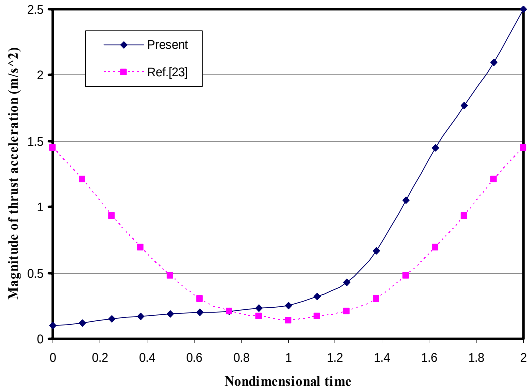
C	R ۲	R ۳	R ۴
۰.۵	۸.۶	۱۰	۱۱.۵
۱	۷.۹	۹.۴۲	۱۰.۴۵
۱.۵	۷.۴	۸.۸	۹.۸
۲	۷.۱	۸.۶	۹.۶



شکل ۳– مقایسهٔ زمان پرواز فضاپیما با توجه به تغییر ضریب سرعت خروجی مؤثر و مدار هدف

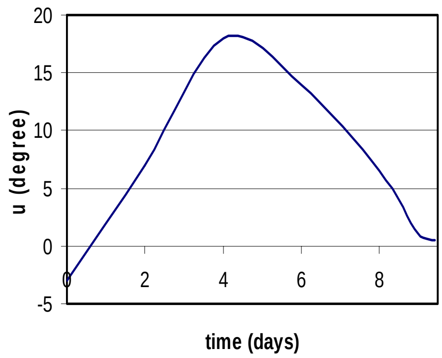
در شکل (۴)، تاریخچهٔ زمانی اندازهٔ شتاب پیشرانش $|U|$(متر بر مجذور ثانیه) نسبت به زمان بدون بعد برای دو تابع عملکردی مسئله حداقل تلاش کنترلی و حداقل زمان پرواز را نشان می‌دهد که به‌ترتیب در مرجع [۲۳] و مقالهٔ حاضر مورد بررسی قرارگرفته‌اند. لازم به توضیح است که زمان بدون بعد مدت زمان لازم برای گردش زاویه‌ای به اندازهٔ 2π در مدار پایهٔ مسئله است.

همانگونه که مشاهده می‌شود اندازهٔ شتاب پیشرانش مربوط به نتایج مرجع [۲۳] از مقدار نسبتاً زیادی شروع شده است و رو به کاهش می گذارد و در میانهٔ مسیر به حداقل مقدار خود می‌رسد و پس از آن رو به افزایش است. در حالی‌که نتایج اندازهٔ شتاب پیشرانش مربوط به مسئلهٔ حاضر، از مقادیر نسبتاً کم شروع شده و روندی صعودی را طی می‌کند. با در نظر گرفتن شرایط مرزی اولیه و نهایی یکسان برای هر دو مسئله ملاحظه می‌شود که مدت زمان کل پرواز در مسئلهٔ حاضر کمتر از مدت زمان پرواز فضاپیما در مرجع [۲۳] است و عملاً با ماهیت تابع عملکردی مسئله مطابقت دارد.

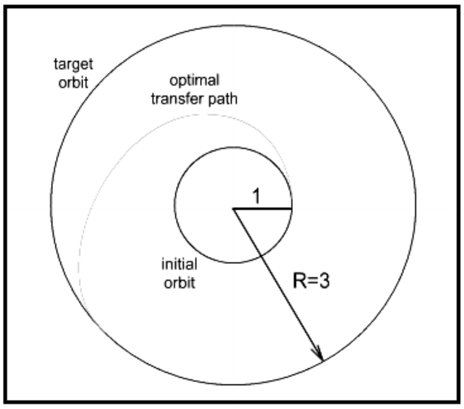


شکل ۴- تغییرات اندازهٔ شتاب پیشرانش برحسب زمان بدون بعد

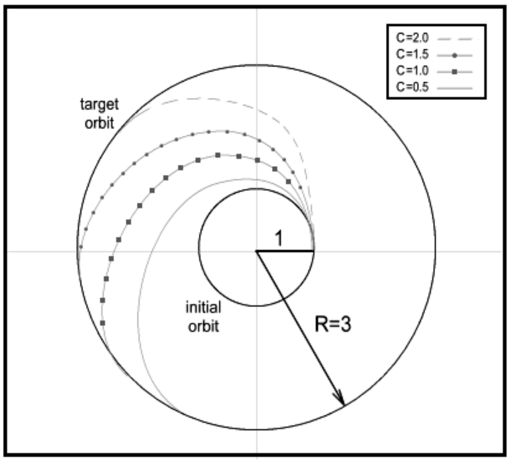
شکل (۵) رفتار زاویهٔ کنترلی مربوط به سیستم پیشرانش را نسبت به زمان نشان می‌دهد. شکل (۶) نیز مسیر بهینه شدهٔ حرکت فضاپیما را به‌ازای ضریب سرعت خروجی مؤثر واحد برای سیستم رانش بین دو مدار نشان می‌دهد. و در شکل (۷) مسیرهای مختلف پرواز فضاپیما با توجه به تغییر ضریب سرعت خروجی مؤثر نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود با کاهش ضریب سرعت خروجی مؤثر طول مسیر و زمان پرواز افزایش می‌یابد.



شکل۵- تغییرات زاویه کنترلی برحسب زمان



شکل۶- مسیر بهینهٔ فضاپیما به‌ازای ضریب سرعت خروجی مؤثر واحد



شکل ۷- مقایسهٔ مسیرهای فضاپیما با توجه به تغییر ضریب سرعت خروجی مؤثر

نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئلهٔ یافتن مسیرهای بهینهٔ یک فضاپیما تحت رانش پیوسته و محدود با استفاده از روش اجزای محدود در دامنهٔ زمان با تابع عملکردی حداقل زمان مورد مدل‌سازی و بررسی قرار گرفته است. روش به‌کار رفته روشی سیستماتیک است و برحسب نوع تابع می‌توان عملکرد، معادلات سیستم، قیدها و شرایط مرزی گسسته‌شده را برنامه‌نویسی کرد و هیچ‌گونه محدودیتی برای مسائل خطی و غیرخطی ندارد. این روش نیازی به ساده‌سازی هنگام منفردشدن یکی از ماتریس‌های متشکله ندارد. از آنجاکه الگوریتم نیوتن رافسون نیاز به حدس اولیه دارد، جهت همگرایی سریع‌تر نیز بسیار مفید خواهد بود که از پاسخ‌های مربوط به المان‌های درجات پایین برای حدس‌های اولیهٔ المان‌های درجات بالاتر استفاده نماییم.

بدیهی است که با افزایش تعداد المان‌ها زمان محاسبات افزایش می یابد ولی در عین حال به جواب‌های دقیق‌تری نیز دست خواهیم یافت. همچنین قادر خواهیم بود مسائل مربوط به مانورهای بلند مدت را نیز به کمک این روش مدل‌سازی و بررسی نماییم. نتایج حاصله نشان می‌دهد که با افزایش ضریب سرعت خروجی مؤثر، زمان کل پرواز کاهش می‌یابد.

مراجع

[1] Kaplan, M. H., *Modern Spacecraft Dynamics and Control*, Wiley, New York, 1976.

[2] Pourtakdoust, S. H., Jalali, M. A. and Saberian, J. R., "Determination of Optimal Spacecraft Trajectories Using a Step-by-Step Linearization Method", *AAS /AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Huntsvilee, Alabama, 1997.

[3] Lawden, D. F., "Time-Closed Optimal Transfer by Two Impulses Between Coplanar Elliptical Orbits", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No 3, pp. 585-587, 1993.

[4] Lawden, D. F., "Optimal Transfers Between Coplanar Elliptical Orbits", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, No 3, pp. 787-791, 1992.

[5] Redding. D C. and Breakwall, J. V., "Optimal Low Thrust Transfers to Synchronous Orbit", Journal of *Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 7, No 2, pp. 148-155, 1984.

[6] Parvez, S. A. and Holman, J. M. L., "Thrust Insertion into Orbit Around Mars", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 11, No 5, pp. 475-477, 1988.

[7] Prussing, S. A. and Chiu, J. H., "Optimal Multiple-Impulse Time Fixed Rendezvous Between Circular Orbits", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 9,No 1, pp. 17-22, 1986.

[8] Rao, P. V. S. and Ramanan, R. V. , "Optimum Rendezvous Transfer Between Coplanar Heliocentric Elliptic Orbits Using Solar Sail", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15,No 6, pp. 1507-1509, 1992.

[9] Widhalm, J. W. and Heise, S. A., "Optimal In-Plane Orbital Evasive Maneuvers Using Continuous Low-Thrust Propulsion", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 14,No 6, pp. 1323-1326, 1991.

[10] H. Baoyin, Li Junfeng and Gao Yunfeng, "Dynamical behaviors and relative trajectories of the spacecraft formation flying", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 6, Issue 4, pp. 295-301, 2002.

[11] Coverstone – Carrol, V. and Prussing, J. E., "Optimal Cooperative Power-Limited Rendezvous Between Nieghboring Circular Orbits", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 16, No 6, pp. 1045-1054, 1993.

[12] Lembeck, C. A. and Prussing, J. E., "Optimal Impulsive Intercept With Low-Thrust Rendezvous Return", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No 3, pp. 426-433, 1993.

[13] A. Miele and S. Mancuso, "Optimal Trajectories For Earth–Moon–Earth Flight", *Acta Astronautica*, Vol. 49, Issue 2, pp.59-71, 2001.

[14] Dickmanns, E. D. and Well, H., "Approximate Solution of Optimal Control Problems Using Third-Order Hermite Polynomial Functions", *Proceedings of the 6th Technical Conference on Optimization Techniques*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[15] Hargraves, C. R., Johnson, F., Paris, S., and Retti, I., "Numerical Computation of Optimal Atmospheric Trajectories", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 4, No 4, pp. 406-414, 1981.

[16] Betts, J. T. and Huffman, W., "Application of Spare Nonlinear Programming to Trajectory Optimization", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, pp.198-206, 1992.

[17] Enright, P. J. and Conway, B. A., "Optimal Finite-Thrust Spacecraft Trajectories Using Collocation and Nonlinear Programming", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 14, No 5, pp. 981-985, 1991.

[18] Yuan R., Pingyuan C. and Enjie L., "A low-thrust guidance law based on Lyapunov feedback control and hybrid genetic algorithm", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol. 79, No. 2, pp.144-149, 2007.

[19] Carnelli I., Dachwald B. and Vasile M., "Evolutionary neurocontrol: A novel method for low-thrust gravity-assist trajectory optimization", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 2, pp. 615-624, 2009.

[20] Kirk, D. E., *Optimal Control Theory (An Introduction)*, Prentice-Hall, New Jeresy, 1970.

[21] Hodges D. H. and Bless R. R, "Weak Hamiltonian Finite Element Method for Optimal Control Problems", *Journal of guidance, Control and Dynamics*, Vol. 14, No.1, pp.148-156, 1990.

[22] Bless R. R., Hodges D. H. and Seywald H., "Finite Element Method for the Solution of state-constrained optimal control problem", *Journal of guidance, Control and Dynamics*, Vol. 18, No.5, pp. 1036-1043, 1995.

[23] Fazelzadeh S. A. and Varzandian A., "Determination of Optimal Spacecraft Trajectory Using Time Domain Finite Element Method", *Amirkabir Journal of Science and Technology*, Vol. 68, pp.29-36, 2008.