

# Flexible Spacecraft Attitude Control using Hybrid Control Scheme of $H_\infty$ and Sliding Mode Control

**M. Sayanjali<sup>1\*</sup>, J. Roshanian<sup>2</sup>, and A. Ghafari<sup>3</sup>**

1, 2, 3. Iranian Space Agency, K. N. Toosi Univ. of Tech.

\*Africa Ave., Sayeh Ave., Tehran, Iran

**msayanjali@yahoo.com**

*In this paper, based on the Lagrange method, attitude motion equations for a flexible spacecraft have been derived. Flexible appendages are modeled by Euler-Bernoulli beam. Hybrid control scheme of  $H_\infty$  and sliding mode are used for attitude regulation. Switching between these two algorithms is determined using absolute error parameter, so that when this parameter is large (i.e. the attitude is far from its desired conditions) the sliding mode control is used. In contrast, when the spacecraft is close to the desired attitude, the control is based on  $H_\infty$  method. This hybrid scheme leads to a fast response and also robustness against uncertainty. Switching surface has been designed so that a certain cost function is minimized. In  $H_\infty$  controller design, the first three vibration modes of the flexible spacecraft are considered as well as the Euler angles and their rates.*

**Keywords:** Elasticity satellite, Sliding mode,  $H_\infty$ Control

# کنترل وضعیت ماهواره الاستیک با استفاده از ترکیب کنترلر $H_\infty$ و مدلغزشی

محمد سینجلی<sup>۱\*</sup>، جعفر روشنی یان<sup>۲</sup>، و علی غفاری<sup>۳</sup>

۱- سازمان فضایی ایران

۲ و ۳ - دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

\* خ. آفریقا، خ سایه

msayanjali@yahoo.com

ماهواره‌های سنجش از دور که عکس‌هایی با دقت تفکیک مکانی بالا تولید می‌کنند نیازمند دقت کنترلی بالا از مرتبه کوچک‌تر از ۰/۱ درجه هستند. بسیاری از ماهواره‌ها به‌منظور تولید توان مورد نیاز مجبور به استفاده از آرایه‌های خورشیدی بازشونده هستند که به دلیل محدودیت‌های جرمی از آلیاژهای سبک ساخته می‌شوند. این آرایه‌ها به دلیل گشتاورهای اغتشاشی‌ای که از خارج به آن وارد می‌شود ارتعاش می‌کنند و دقت نشانه‌روی مطلوب ماهواره را مختل می‌کنند. در این مقاله، با استفاده از روش لاگرانژ، معادلات خطی وضعیت ماهواره که در یک مدار دایروی حرکت می‌کند و دارای دو آرایه خورشیدی بازشونده است، استخراج شده است. همچنین از ترکیب دو روش کنترلی مدلغزشی و  $H_\infty$  به منظور رگولاسیون وضعیت ماهواره الاستیک استفاده شده است. هنگامی که ماهواره از وضعیت مطلوب دور باشد از کنترلر مدلغزشی استفاده می‌شود و هنگامی که ماهواره نزدیک وضعیت مرجع باشد از کنترلر  $H_\infty$  استفاده می‌شود. دوری و نزدیکی ماهواره به وضعیت مرجع با تعریف متغیری به نام خطای مطلق که برابر است با مجموع قدر مطلق زوایای اوپلر، مشخص می‌شود. در طراحی کنترلر مدلغزشی سطوح سوئیچ‌زنی به‌نحوی انتخاب شده است که تابع هزینه مشخص را می‌نیمد. در طراحی کنترلر  $H_\infty$  مقدار ممان وارده بر ماهواره ناشی از ارتعاشات ضمیمه‌های الاستیک به‌عنوان اغتشاش ورودی در نظر گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی: ماهواره الاستیک، کنترل مدلغزشی، کنترل  $H_\infty$

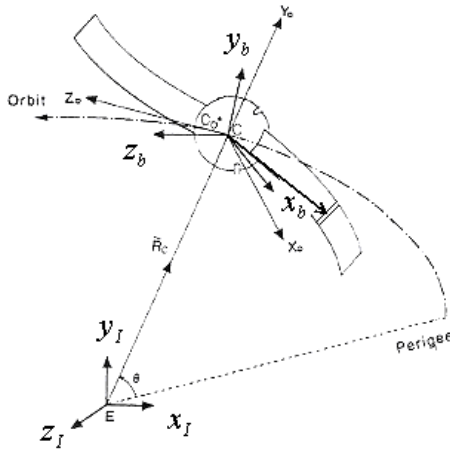
## مقدمه

امروزه، اکثر ماهواره‌های بزرگ شامل ضمامم الاستیک نظیر آرایه های خورشیدی، آنتن‌ها و ... هستند. ارتعاشات این ضمیمه‌ها بر اثر ممان اغتشاشی خارجی یا عملکرد سیستم کنترل وضعیت، بر دینامیک ماهواره تأثیرگذار است. در طراحی کنترلر برای ماهواره های الاستیک حتماً باید الاستیسیته ضمامم در نظر گرفته شود و در صورتی که کنترلر برای ماهواره الاستیک، با فرض صلب بودن ماهواره طراحی شود، ممکن است سیستم حلقه بسته از لحاظ دینامیکی ناپایدار باشد. در مرجع [۱] با تعریف تابع لیاپانوف مناسب و با فیدبک کردن مقدار ممان خمشی و نیروی برشی در

ریشه ضمیمه الاستیک (علاوه بر فیدبک زوایای اوپلر و نرخ تغییر آنها) کنترلر وضعیت طراحی شده است. در صورتی که ممان حاصله از ارتعاشات ضمامم الاستیک به‌عنوان اغتشاش ورودی در نظر گرفته شود، می‌توان با استفاده از کنترلر  $H_\infty$  نرم بی‌نهایت تابع تبدیل حلقه بسته بین اغتشاش و خروجی مطلوب را کمینه کرد و اثر ارتعاشات را تا حد ممکن کم کرد [۲].

در مرجع [۳] پارامترهای کنترلر بهینه با تعریف تابع هزینه و با استفاده از روش گرادیان استخراج شده است. در مرجع [۴] با استفاده از تئوری کنترلر بهینه و استفاده از معادلات لاگرانژ کنترلر بهینه طراحی شده است.

شده است. در ادامه از ترکیب دو روش کنترل  $H_\infty$  و مدلغزشی به منظور رگولاسیون وضعیت ماهواره الاستیک استفاده شده است. ترکیب این دو روش کنترلی علاوه بر کاهش زمان پاسخ سیستم باعث بهبود عملکرد سیستم می‌شود. همچنین مسئله مقاوم بودن کنترلر نیز لحاظ شده است. هنگامی که ماهواره از وضعیت مطلوب دور است از کنترلر مدلغزشی استفاده شده است و هنگامی که ماهواره به وضعیت مطلوب نزدیک است از کنترلر  $H_\infty$  استفاده شده است. سطوح سوئیچ‌زنی به‌نحوی انتخاب شده است که تابع هزینه تعریف شده می‌نیمد. در طراحی کنترلر  $H_\infty$  ممان ناشی از ارتعاش ضمامم الاستیک اغتشاش ورودی در نظر گرفته شده است و با استفاده از این روش نرم بی‌نهایت تابع تبدیل حلقه بسته بین ورودی اغتشاش و خروجی مطلوب کمینه می‌شود.



شکل ۱- هندسه شماتیک ماهواره الاستیک

به‌منظور استخراج معادلات حرکت از معادله لاگرانژ (۱) استفاده شده است.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial (U+T)}{\partial q_r} = Q_r \quad (1)$$

به‌طوری که  $T$  انرژی جنبشی ماهواره،  $U$  انرژی پتانسیل،  $Q_r$  نیروی تعمیم یافته و  $q_r$  مختصات تعمیم یافته است. انرژی جنبشی ماهواره از سه بخش تشکیل شده است: انرژی جنبشی به‌دلیل حرکت انتقالی ماهواره در مدار  $T_{orb}$ ، انرژی جنبشی به‌منظور حرکت دورانی ماهواره حول خودش  $T_{rot}$  و انرژی جنبشی برای ارتعاشات ضمامم الاستیک  $T_{vib}$ .

$$T = T_{orb} + T_{rot} + T_{vib} \quad (2)$$

انرژی جنبشی ماهواره را می‌توان از رابطه (۳) به‌دست آورد:

$$T = \frac{1}{2} \int_M \dot{R} \cdot \dot{R} \, dm \quad (3)$$

آقای فوجی یک کنترلر غیرخطی با استفاده از تئوری دوم لیاپانوف و با استفاده از معادلات غیرخطی وضعیت ماهواره طراحی کرده است [۵]. کنترلر مد لغزشی به‌منظور مانور سه محوره وضعیت در مراجع بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در [۶] انتگرال گشتاور اغتشاشی وارد به ماهواره به‌دلیل ارتعاش ضمیمه الاستیک در سطح لغزش وارد شده است. ترکیب روش مد لغزشی و کنترلر فعال ارتعاشات با استفاده از پیزوالکتریک به‌منظور مانور تک‌محوره ماهواره الاستیک استفاده شده است [۷]. در مرجع [۸] کنترلر مقاوم وضعیت با در نظر گرفتن عدم قطعیت در فرکانس طبیعی و میرایی مدهای ارتعاشی ضمیمه الاستیک طراحی شده است. در این مقاله، در ابتدا معادلات خطی حرکت سه‌محوره وضعیت ماهواره با استفاده از روش لاگرانژ استخراج شده است به‌طوری که آرایه‌های خورشیدی توسط تیر اوپلر- برنولی مدل

## مدل‌سازی ماهواره الاستیک

در این بخش، معادلات دینامیکی ماهواره استخراج شده است. با توجه به اینکه در بسیاری از مراجع فقط دینامیک وضعیت تک محوره بررسی شده است و در محدود مراجعی که حالت کلی بررسی شده است فرمول‌ها به‌طور کامل بیان نشده است، در این بخش جزئیات استخراج معادلات آورده شده است.

هندسه شماتیک ماهواره در شکل (۱) نشان داده شده است. ماهواره متشکل از یک بخش صلب مرکزی است که به آن دو ضمیمه الاستیک متصل شده است. ماهواره در مداری حول زمین با سرعت زاویه‌ای مداری  $\omega_0$  در حال چرخش است. دستگاه‌های مختصاتی که در شکل (۱) نشان داده شده‌اند عبارتند از:

(الف) دستگاه مختصات بدنی  $(x_b, y_b, z_b)$  در راستای گسترش ضمیمه الاستیک،  $y_b$  راستای ارتعاش ضمیمه الاستیک و  $z_b$  تکمیل‌کننده دستگاه مختصات راستگرد است.

(ب) دستگاه مختصات مداری  $(x_o, y_o, z_o)$  در راستای سرعت خطی ماهواره،  $y_o$  در راستای خط واصل بین مرکز جرم ماهواره و مرکز زمین و  $x_o$  عمود بر صفحه مداری و تکمیل‌کننده دستگاه مختصات راستگرد است.

(ج) دستگاه مختصات اینرسی  $(x_I, y_I, z_I)$ : مرکز این دستگاه مختصات روی مرکز زمین قرار دارد و  $x_I$  در راستای محور اعتدال بهاری،  $y_I$  در راستای چرخش زمین و  $z_I$  تکمیل‌کننده دستگاه مختصات راستگرد است.

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_0 \rho \sum_{i=1}^N \dot{q}_i T_1(i) + \rho \sum_{i=1}^N \dot{q}_i T_3(i) \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

$$T_{vib} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho \dot{q}_i \dot{q}_j T(i, j) \quad (3-10)$$

$$\{I\} = [I_1 \quad I_2 \quad I_3] \quad (4-10)$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho q_i q_j T(i, j) \\ \sum_{i=1}^N \rho q_i T_3(i) - r_0 \rho \sum_{i=1}^N q_i T_2(i) - I_{yx} \\ -I_{xz} \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \rho q_i T_3(i) - r_0 \rho \sum_{i=1}^N q_i T_2(i) - I_{yx} \\ I_{yy} + 2\sigma\rho \\ -I_{xy} \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_{zz} + 2\sigma\rho + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho q_i q_j T(i, j) \end{bmatrix}$$

$$T_3(i) = \int_0^L x \phi_i(x) dx$$

$$T_2(i) = \int_0^L \phi_i(x) dx$$

$$T(i, j) = \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

در روابط فوق  $\rho$  چگالی ضمیمه الاستیک،  $L$  طول ضمیمه و  $\sigma = r_0^2 L + r_0 L^2 + L^3 / 3$  است.

انرژی پتانسیل کرنشی برای تیر اوپلر- برنولی برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)^2 dx \quad (11)$$

$L$  طول ضمیمه الاستیک است. با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۰) در معادله لاگرانژ، معادلات حرکت ماهواره به دست می‌آیند:

$R$  بردار مکان المان جرم  $dm$  در دستگاه مختصات اینرسی است که می‌توان به صورت رابطه (۴) بیان کرد:

$$R = R_c + r \quad (4)$$

به طوری که  $R_c$  بردار مکان مرکز جرم ماهواره در دستگاه مختصات بدنی و  $r$  بردار مکان المان جرمی  $dm$  در دستگاه مختصات بدنی است. مشتق زمانی بردار  $R$  در دستگاه مختصات اینرسی برابر است با:

$$\dot{R} = \dot{R}_c + (\dot{r})_B + \bar{\omega}_{BI} \times \bar{r} \quad (5)$$

$$\omega_{BI} = \omega_{BR} + \omega_{RI,B} \quad (6)$$

$\dot{R}_c$  مشتق بردار مرکز جرم ماهواره در دستگاه مختصات اینرسی،  $(\dot{r})_B$  مشتق زمانی در دستگاه مختصات بدنی و  $\omega_{BI}$  مشتق اینرسی است.  $\omega_{BI}$  متشکل از دو بخش است: ۱- سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات بدنی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی است.  $\omega_{BI}$  متشکل از دو بخش است: ۱- سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات بدنی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی است.  $\omega_{BR}$  مداری  $\omega_{BR}$  ای بدنه نسبت به دستگاه مداری  $\omega_{BR}$ .

بردار مکان المان جرمی  $dm$  روی ضمیمه الاستیک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r = (r_0 + x) \hat{x}_b + y \hat{y}_b \quad (7)$$

$r_0$  شعاع بخش صلب مرکزی ماهواره،  $x$  فاصله المان جرمی  $dm$  از ریشه ضمیمه الاستیک و  $y$  مقدار جابه‌جایی المان به دلیل ارتعاشات است. با استفاده از روش مدهای فرضی می‌توان مقدار  $y$  را در هر نقطه به صورت زیر بیان کرد:

$$y = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) q_i(t) \quad (8)$$

$\varphi_i(x)$  شکل مدها،  $q_i(t)$  تابع دامنه و  $N$  تعداد مدهای در نظر گرفته شده است. برای تیر اوپلر برنولی یک سر درگیر- یک سر آزاد  $\varphi_i(x)$  برابر است با [۹]:

$$\varphi_i(x) = 1 - \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + 0.5(-1)^{j+1} \left(\frac{j\pi x}{L}\right)^2 \quad (9)$$

با جایگذاری روابط (۴) تا (۸) در رابطه انرژی جنبشی کل ماهواره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T = T_{orb} + T_{vib} + \{\omega\}^T \{H\} + \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I] \{\omega\} \quad (10)$$

به طوری که  $[I]$  تانسور ممان اینرسی و  $\{H\}$  اندازه حرکت زاویه ماهواره به دلیل ارتعاشات ضمامم الاستیک است.

$$T_{orb} = \frac{1}{2} M \dot{R}_c \cdot \dot{R}_c \quad (1-10)$$

با استفاده از تئوری کنترل  $H_\infty$  می توان کنترلر را به نحوی طراحی کرد که رابطه بین اغتشاش ورودی  $d$  و خروجی مطلوب را تضعیف کرد. برای استفاده از این روش باید معادلات حرکت به شکل فضای حالت زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B_1 w + B_2 u \\ z &= C\bar{x} \end{aligned} \quad (14)$$

به طوری که  $z$  خروجی مطلوب و  $\bar{x} = [x, \dot{x}]^T$  در این مقاله فرض شده است که بردار حالت  $\bar{x}$  اندازه گیری می شود. با استفاده از قضیه (۱). مرجع [۱۰] کنترلر  $u = K\bar{x}$  به نحوی طراحی می شود که هم سیستم حلقه بسته پایدار باشد و هم  $\|F_{zw}\| < \gamma$  عدد کوچک مثبت است.  $\|F_{zw}\|$  بیانگر میزان تأثیر اغتشاشات بر خروجی مطلوب است.

**قضیه ۱:** معادله فضای حالت یک سیستم در حالت کلی برابر است با:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (15)$$

$z$  خروجی مطلوب،  $w$  اغتشاش ورودی،  $u$  سیگنال کنترل و  $y$  خروجی اندازه گیری شده است. با تعریف ماتریس های همیلتونین زیر:

$$\begin{aligned} H_\infty &= \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{pmatrix} \\ J_\infty &= \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2^T \\ -B_1 B_1^T & -A \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

آنگاه کنترلی وجود خواهد داشت که توسط آن  $\|F_{zw}\| < \gamma$  برقرار باشد در صورتی که شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$\begin{aligned} (1) \quad H_\infty &\in \text{dom}(\text{Ric}) \quad , \quad X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \\ (2) \quad J_\infty &\in \text{dom}(\text{Ric}) \quad , \quad Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \\ (3) \quad \rho(X_\infty Y_\infty) &< \gamma^2 \end{aligned} \quad (17)$$

آنگاه کنترلر  $K(s)$  برابر است با:

$$\begin{aligned} K_{sub}(s) &= \begin{pmatrix} \hat{A}_\infty & -z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{A}_\infty &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty &= -B_2^T X_\infty \\ L_\infty &= -Y_\infty C_2^T \\ Z_\infty &= (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

تابع تبدیل  $K(s)$  ترکیب مشاهده گر و کنترلر است:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B_1 \tilde{w}_{wrost} + B_2 u + z_\infty L_\infty \\ u &= F_\infty \tilde{x} \\ \tilde{w}_{wrost} &= \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \tilde{x} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{yx} & -I_{xz} & \bar{0} \\ -I_{yx} & I_{yy} + 2\sigma\rho & -I_{yz} & \bar{0} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} + 2\sigma\rho & M_{\psi q} \\ 0 & 0 & M_{q\psi} & M_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 I_{xz} & \omega_0 I_{yx} & \bar{0} \\ \omega_0 I_{xz} & \omega_0 (-I_{yz} + I_{zy}) & \omega_0 (I_{yy} - I_{zz}) & 0 \\ -I_{yx} \omega_0 & \omega_0 (I_{yy} + 2\sigma\rho) & \omega_0 (I_{zy} - I_{yz}) & 0 \\ 0 & C_{q\psi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 (I_{zz} + 2\sigma\rho) & -\omega_0^2 I_{zy} & 0 \\ 0 & \omega_0^2 (I_{zz} - I_{yz} + 2\sigma\rho) & 0 & K_{\psi q} \\ 0 & 0 & K_{q\psi} & K_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ q \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

از بیان جزئیات فرمول (۱۲) برای صرفه جویی در تعداد صفحات صرف نظر شده است. در رابطه فوق  $\omega_0$  سرعت زاویه ای مداری ماهواره است. فرم ماتریسی رابطه فوق برابر است با:

$$\begin{aligned} M \ddot{y} + C \dot{y} + K y &= F u \\ y &= [\phi \quad \theta \quad \psi \quad q]^T \\ u &= [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \end{aligned}$$

$u_i$  گشتاور کنترلی حول محور  $i$  است.

## طراحی کنترلر

در این مقاله از ترکیب دو روش کنترلی  $H_\infty$  و کنترلی مدلزغشی به منظور رگولاسیون وضعیت ماهواره الاستیک استفاده شده است. استفاده از این دو روش کنترلی منجر می شود که سیستم هم پاسخ سریع و هم مقاومت بالا نسبت به عدم قطعیت ها و اغتشاشات داشته باشد. هنگامی که سیستم از وضعیت مطلوب دور است از کنترلی مدلزغشی استفاده می شود و هنگامی که ماهواره به وضعیت مطلوب نزدیک است از کنترلی  $H_\infty$  استفاده شده است. معیار دوری و نزدیکی ماهواره به وضعیت مطلوب با مقدار خطای مطلق  $e_{abs}$  بیان می شود که برابر است با:

$$e_{abs} = |\phi| + |\theta| + |\psi| \quad (13)$$

## طراحی کنترلر $H_\infty$

به منظور طراحی کنترلر  $H_\infty$  فقط دو مد اول ارتعاشی سیستم در نظر گرفته می شود و معادلات کنترلر با استفاده از فرم کاهش یافته معادلات حرکت وضعی ماهواره الاستیک استخراج می شود.

## طراحی کنترلر مد لغزشی

طراحی کنترلر مد لغزشی شامل دو مرحله است:

۱- انتخاب سطوح سوئیچ زنی

۲- طراحی کنترلر به نحوی که متغیرهای حالت به سطح لغزش برسند.

در این مقاله با استفاده از مرجع [۱۱] سطوح سوئیچ زنی به نحوی طراحی شده است که تابع هزینه  $J$  می نیمم شود.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{\infty} x(t) Q x'(t) dt \quad (20)$$

به طوری که  $x = [\varphi \theta \psi \dot{\varphi} \dot{\theta} \dot{\psi}]^T$  و  $Q$  ماتریس مثبت معین است. برای استفاده از روش کنترلر مد لغزشی باید معادلات سیستم به صورت رگولار مد لغزش نوشته شوند که برابر است با:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A_{11} z_1(t) + A_{12} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= A_{21} z_1(t) + A_{22} z_2(t) + B_2 u(t) \end{aligned} \quad (21)$$

به طوری که  $z_1 = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$ ،  $z_2 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$ ، ماتریس  $Q$  را به صورت زیر باز نویسی می کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

به طوری که  $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22} \in R^{3 \times 3}$

اگر سطح لغزش به صورت زیر انتخاب شود، آنگاه تابع هزینه مقدار می نیمم خواهد داشت:

$$z_2 = -Q_{22}^{-1} (A_{12}^T P_1 + Q_{21}) z_1 \quad (23)$$

$P_1$  جواب معادله ریکاتی جبری زیر است:

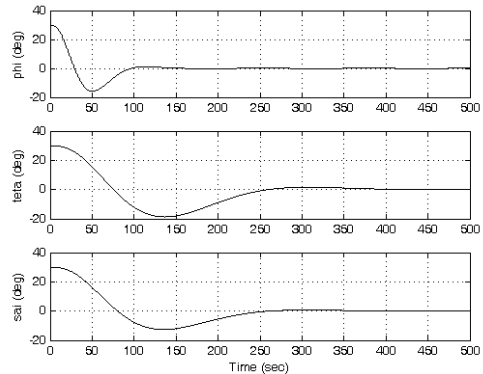
$$P_1 \hat{A} + \hat{A}^T P_1 - P_1 A_{12} Q_{22}^{-1} A_{12}^T P_1 + \hat{Q} = 0 \quad (24)$$

به طوری که

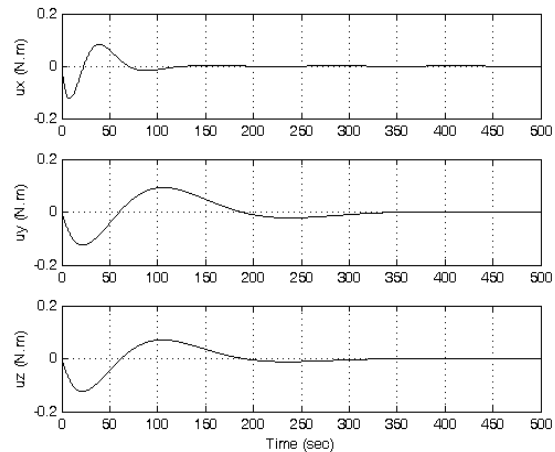
$$\hat{Q} = Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21} \quad \text{و} \quad \hat{A} = A_{11} - A_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21}$$

در نمودارهای (۵) تا (۷) عملکرد سیستم کنترلی در صورتی که فقط کنترلر مد لغزشی اعمال شود نشان داده شده است.

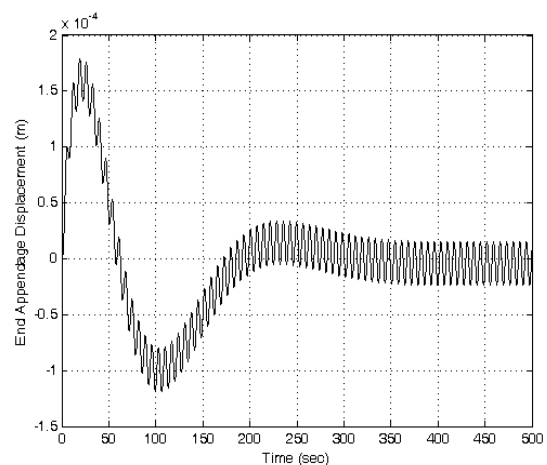
معادله اول معادله مشاهده گر است و عبارت  $\tilde{w} = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \tilde{x}$  تخمین اغتشاش است. در نمودارهای (۲) تا (۴) عملکرد سیستم کنترلی در صورتی که فقط کنترلر  $H_\infty$  اعمال شود نشان داده شده است.



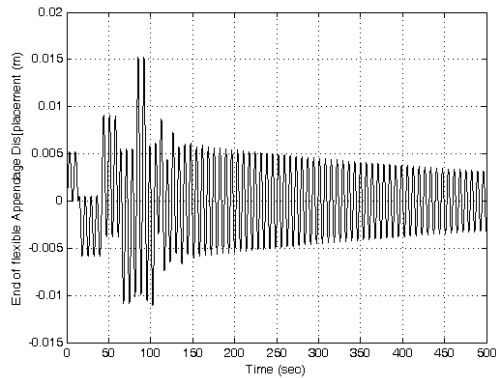
شکل ۲- نمودار زوایای اوپلر در صورتی که فقط از  $H_\infty$  استفاده شود.



شکل ۳- سیگنال های کنترلی در صورتی که فقط از  $H_\infty$  استفاده شود.



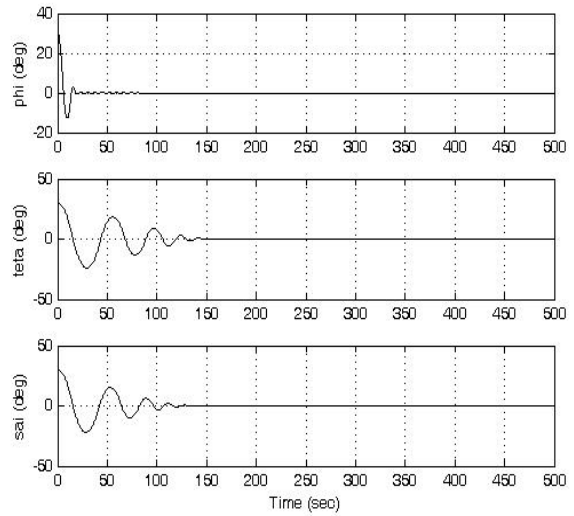
شکل ۴- جابه جایی انتهای ضمیمه در صورتی که فقط از  $H_\infty$  استفاده شود.



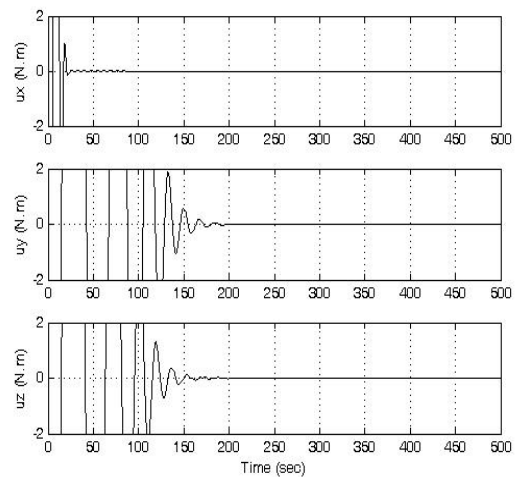
شکل ۷- جابه‌جایی انتهای ضمیمه در صورتی که فقط از مد لغزشی استفاده شود.

### شبیه‌سازی و نتایج

به منظور بررسی عملکرد سیستم کنترل طراحی شده شبیه سازی عددی در نرم افزار متلب/ سیمولینک انجام شده است. فرض شده است که وضعیت مطلوب ماهواره برابر با  $\varphi = \theta = \psi = 0$  و وضعیت اولیه برابر است با  $\varphi = \theta = \psi = 30^\circ$ . در نمودارهای (۸) تا (۱۰) عملکرد کنترلر طراحی شده نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود در صورتی که فقط از کنترل  $H_\infty$  استفاده شود؛ پاسخ سیستم کند خواهد بود ولی به تلاش کنترلی زیادی نیاز نیست. بر عکس همین قضیه در مورد استفاده از کنترل مد لغزشی به‌طور تنها صادق است. با ترکیب این دو کنترلر با توجه به نمودارهای نمایش داده شده می‌توان به ترکیبی از این دو خاصیت دست پیدا کرد. علاوه بر این با توجه به منطق کنترل  $H_\infty$  می‌توان به مقاومت سیستم اطمینان داشت.



شکل ۵- نمودار زوایای اویلر در صورتی که فقط از مد لغزشی استفاده شود.



شکل ۶- نمودار سیگنال‌های کنترلی در صورتی که فقط از مد لغزشی استفاده شود.