

Optimal Coupled Spacecraft Rendezvous and Docking Using Gauss Pseudospectral Method and Step by Step Linearization

S. H. Pourtakdoust^{1*}, R. Moradi² and R. Kamyar³

1, 2. Sharif University of Technology, Aerospace Engineering Department

3. Center for Research and Development in Space Science and Technology

*P.O. Box 11365-8639, Tehran

pourtak@sharif.edu

In this work the coupled nonlinear problem of optimal spacecraft rendezvous and docking (RVD) is addressed. In most of the previous studies on the subject of optimal RVD, decoupling is presumed to exist between the trajectory translational and the attitude motions and hence the optimal coupled analysis has not been yet addressed properly. However there are circumstances where these two motions are in fact coupled and interdependent and one such situation is investigated and analyzed in this article. By utilizing thrusters for the translational control and reaction wheels for the attitude control, one can uncouple the translational and rotational control to a high degree of approximation. However it can be shown that due to even very small thrust misalignments, the uncoupled problem changes to a highly coupled one. In this article, the nonlinear rendezvous and docking problem is assumed to be coupled and its optimal fuel-trajectory closed loop solution is obtained using two approaches of local linearization and Gauss Pseudospectral methods. Therefore the designed controllers are able to handle the highly nonlinear coupled rendezvous and docking optimally in the presence of system uncertainties as well as environmental disturbances. The results of the two solution approaches and their pertinent control strategies are compared and the merits and weaknesses of each are fully analyzed. Finally, a sensitivity analysis is also performed that shows the effects of thrust misalignments levels on the final state diversions.

Key word: rendezvous and docking, linearization, optimal coupled analysis

حل بهینه مسئله راندوو و لنگرگیری در گیر فضاپیما با رویکرد شبه طیفی گاوسی و خطی سازی گام به گام

سیدحسین پورتاکدوست^{۱*}، روزبه مرادی^۲ و رضا کامیار^۳

۱ و ۲- دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا

۳- پژوهشکده توسعه علوم و فناوری فضا

*تهران، خ. آزادی

pourtak@sharif.edu

در این مقاله، حل بهینه مسئله غیرخطی و درگیر راندوو و لنگرگیری دو فضاپیما به صورت نامقید و همزمان مورد بررسی قرار گرفته است. در غالب کارهای انجام شده قبلی، دو مسئله راندوو و لنگرگیری به صورت دو فرآیند مجزا انجام شده است و تاکنون مسئله طراحی کنترلر بهینه برای حرکات توأم انتقالی و دورانی فضاپیمای رهگیر صورت نگرفته است. از طرفی شرایط متنوعی می‌تواند وجود داشته باشد که این دو حرکت وابسته و درگیر شوند که در این مقاله به یکی از آن شرایط محتمل پرداخته شده است. هر چند با فرض استفاده از رانشگرهای هم راستا با مرکز جرم موتور برای حرکت انتقالی و استفاده از چرخ‌های واکنشی برای حرکت دورانی می‌توان این دو حرکت را از هم مستقل فرض کرد، نشان داده شده است که در صورت وجود عدم هم‌ترازی بردارهای رانش با مرکز جرم رهگیر حتی به میزان بسیار کوچک، مسئله راندوو و لنگرگیری از فرم مستقل درآمده و به فرم درگیر تبدیل می‌شود که مستلزم حل توأم معادلات خواهد بود. در این تحقیق حل مسئله ترکیبی غیرخطی برای راندوو و تغییر وضعیت فضاپیمای رهگیر به جهت لنگرگیری با فضاپیمای مادر، بر مبنای تئوری کنترل بهینه و استفاده از دو روش خطی سازی گام به گام و روش شبه طیفی گاوسی با کمینه‌سازی سوخت و تولید مسیر بهینه در یک الگوی حلقه بسته استخراج شده است. از این رو کنترلرهای طراحی شده قادر خواهند بود دو مانور راندوو و لنگرگیری را به صورت بهینه و مقاوم در مقابل عدم قطعیت‌ها و وجود اختلالات انجام دهند. سپس مقایسه‌ای بین این دو روش صورت گرفته و نقاط ضعف و قوت هر کدام مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. در نهایت تحلیلی روی حساسیت پاسخ نهایی سیستم راندوو و لنگرگیری درگیر غیرخطی با عدم هم‌راستایی رانشگرها نسبت به مرکز جرم انجام گرفته است.

واژه‌های کلیدی: راندوو و لنگرگیری، خطی‌سازی، تئوری کنترل بهینه

مقدمه

راندوو^۱ در فضا پروسه‌ای است که در آن فضاپیمایی به نام رهگیر^۲ مانورهایی را برای رسیدن به فضاپیمایی دیگر به نام هدف^۳ انجام می‌دهد. در کنار این فرآیند و همزمان با آن ممکن است بین این دو

وسيله مانور لنگرگیری^۴ نیز انجام گیرد. در مانور لنگرگیری هدف صفر کردن سرعت زاویه‌ای و زوایای وضعیت نسبی بین دو وسیله یا قسمت‌های وصل‌شونده است، حال آنکه در مانور راندوو هدف معمولاً برای صفر کردن سرعت و موقعیت نسبی تعریف می‌گردد. نمونه‌ای از عمل راندوو و لنگرگیری در مانور میان شاتل و ایستگاه فضایی ملاحظه می‌شود. نمونه‌ای دیگر، در عملیات تعمیر تلسکوپ

1. Rendezvous
2. Chaser
3. Target

کلاسیک کنترل بهینه و روش لیپانوف^{۱۷} بررسی شده‌اند [۲۲-۲۵]. کنترل جهتی با محدودیت کنترلی در مرجع [۲۶] بررسی شده است. کنترلرهای معکوس و پیش‌خورد نیز در مراجع [۲۷-۲۸] بررسی شده‌اند. فضاپیماهایی که عدم قطعیت، تکنیک‌های کنترل تطبیقی^{۱۸} دارند نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۲۹-۳۲]. کنترل‌های فازی و پیش‌بینی مدل^{۱۹} نیز برای طراحی کنترل‌های جهتی مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۳۳-۳۶]. کنترل مقاوم^{۲۰} نیز در این زمینه استفاده شده است [۳۷-۳۸].

با استناد به مطالعات صورت گرفته توسط نویسندگان، تنها مراجع [۳۹] و [۴۰] با مسئله راندوو و لنگرگیری به صورت همزمان برخورد کرده‌اند. اما این مقالات همچنان فرض درگیر نبودن این دو حرکت را لحاظ کرده‌اند.

همان‌طور که اشاره شد؛ سه دیدگاه مختلف برای حل مسئله راندوو و لنگرگیری مورد بررسی بوده است. برخی از مقالات فقط با مسئله راندوو سرو کار داشته و برخی دیگر مسئله لنگرگیری را بررسی کرده‌اند. تعداد کمی از مقالات نیز این دو مسئله را به صورت همزمان ولی غیر درگیر مورد بررسی قرار داده‌اند. بر فرض اینکه از رانشگرها برای حرکت انتقالی و از چرخ‌های واکنشی برای حرکت دورانی استفاده می‌گردد، و از نیروهای آیرودینامیکی نیز صرف‌نظر شود و فرض گردد که سازه انعطاف‌پذیر نیست و وزن رهگیر تغییر زیادی نمی‌کند می‌توان با تقریب خوبی این دو حرکت را از هم جدا فرض کرد. اما ممکن است شرایطی فراهم آید که این دو حرکت را بتوان از هم مستقل فرض کرد. یکی از این شرایط زمانی به وجود می‌آید که راستای بردارهای رانش دقیقاً از مرکز جرم رهگیر عبور نکند، بنابراین رانشگرها علاوه بر تأثیر بر حرکت انتقالی به صورت غیرمستقیم و با ایجاد اختلالات روی حرکت دورانی نیز تأثیرگذارند. برخلاف فرض لحاظ شده در مقالات قبلی - مبنی بر مستقل بودن این دو حرکت، در این مقاله فرض شده است که این دو حرکت به هم وابسته و درگیر هستند.

در کنار استراتژی‌های مختلفی که برای حل کنترلی یا هدایتی این مسئله وجود دارد، بحث می‌نیمم‌کردن مصرف سوخت اهمیت بسیار زیادی دارد. دلیل این مسئله در فضا به دلیل کم و محدود بودن منابع سوخت کاملاً مشهود است. اما به دلیل ماهیت غیرخطی مسئله، حل حلقه بسته سوخت بهینه منجر به مسیرهای ناهموار خواهد شد که از لحاظ مهندسی قابل قبول نیست. بنابراین

هابیل است. هم اکنون این موضوع با بحث سفر به سیارات دیگر مانند مریخ اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده است. در عملیات نشستن یا برخاستن از سطح مریخ مدول قمری^۵ شاتل باید با مدول دستور/ سرویس^۶ آن مانور راندوو و لنگرگیری را انجام دهد.

تاکنون دیدگاه‌های بی‌شماری برای حل مسئله راندوو و لنگرگیری مورد نظر بوده است [۱-۴۰]. تعدادی از این مراجع صرفاً به بحث راندوو (حرکت انتقالی) پرداخته [۱-۲۰] و دسته‌های دیگر نیز صرفاً حل مسئله لنگرگیری (حرکت دورانی) را مورد بررسی قرار داده‌اند [۲۱-۳۸]. در تمامی این کارها فرض اصلی این بوده که هیچ نوع درگیری بین این دو حرکت وجود نداشته است. در بین کارها و تحقیقاتی که بحث راندوو را مطرح کرده‌اند، تعدادی از روش‌های حل بهینه کلاسیک استفاده کرده‌اند [۱-۹]. در بین این کارها تعدادی فرض کرده‌اند که این مسئله مقید^۷ است [۱-۴] در حالی که تعدادی از مقالات فرض نامقید بودن را لحاظ کرده‌اند [۵-۷]. برخی فرض کرده‌اند که این مسئله از نوع مسیر- مقید^۸ بوده [۸] و دسته‌های دیگر نیز از برخی تعاریف جدیدتر مانند توابع تولیدکننده^۹ [۹] استفاده کرده‌اند. الگوریتم‌های کاشف^{۱۰} نیز به وفور در این مسئله مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش‌های تک‌هزینه‌ای^{۱۱} [۱۰-۱۲] و چند هزینه‌ای^{۱۲} [۱۳-۱۶] برای حل مسئله راندوو بررسی شده‌اند. کنترل لغزشی^{۱۳} نیز برای حل این مسئله مورد بررسی قرار گرفته است [۱۷]. برخی مقالات نیز مسئله راندوو را به صورت مسئله‌ای ایمنی^{۱۴} و جلوگیری از برخورد به موانع^{۱۵} مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۸-۲۰].

فرآیند لنگرگیری جزء بحث کنترل جهتی فضاپیما به شمار می‌رود. در این راستا نیز کارهای بسیار زیادی انجام گرفته است. لنگرگیری به صورت صفرکردن زوایای جهتی نسبی و سرعت‌های زاویه‌ای نسبی بین رهگیر و هدف تعریف می‌گردد. این بخش از حرکت نیز به دلیل مباحث ایمنی به هنگام نزدیک کردن رهگیر به هدف بسیار حائز اهمیت است. روابط اوایلر^{۱۶} حاکم بر این حرکت بوده و به دلیل زوایای بزرگ و نرخ‌های زاویه‌ای زیاد باید از روابط غیرخطی استفاده کرد. مقالات بسیار زیادی تاکنون این مسئله را بررسی کرده‌اند [۲۱]. برای مانورهای با زوایای زیاد روش‌های

5. Lunar module
6. Command/Service module
7. Bounded
8. Path constraint
9. Generating function
10. Heuristic algorithms
11. Single objective
12. Multi objective
13. Sliding mode control
14. Safety
15. Collision avoidance
16. Euler

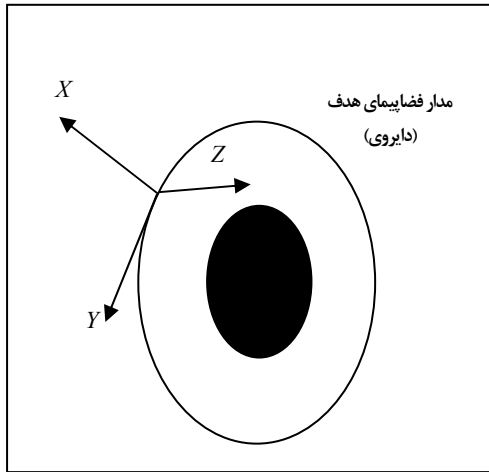
17. Lyapanov

18. Adaptive control

19. Model predictive

20. Robust control

مومتوم زاویه‌ای مدار^{۲۳} (عمود بر دو بردار قبل و به سمت خارج از صفحه مدار) قرار دارد.



شکل ۱. دستگاه مختصات مرجع متصل به هدف در حرکت انتقالی

با این مفروضات معادلات غیرخطی راندوو به فرم معادلات (۲) خواهند بود.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2(r_0 + x)M &= f_x/m \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2yM &= f_y/m \\ \ddot{z} + n^2zM &= f_z/m \end{aligned} \quad (2)$$

در این روابط n نشان‌دهنده سرعت زاویه‌ای مداری هدف بوده و از رابطه (۳) به دست می‌آید:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \quad (3)$$

مقدار n برای هدف ثابت بوده و انداز I آن به فاصله مدار هدف از مرکز زمین ارتباط دارد. m نیز جرم رهگیر است. در روابط (۲) پارامتر M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = \left[1 - \frac{r_0^3}{[(r_0 + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] \quad (4)$$

معادلات غیر خطی مسئله لنگرگیری (دوران)

معادلات حرکت دورانی هر فضاییما از معادله اولی استخراج می‌شوند. معادله اولی به فرم کلی به شکل زیر است [۴۲].

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \quad (5)$$

در کنار قید می‌نیم کردن مصرف سوخت باید قید هموارکردن مسیر نیز لحاظ شود.

در این مقاله فرض بر این بوده است که راستای رانشگرها دقیقاً از مرکز جرم عبور نکرده است، بنابراین حل بهینه همزمان و درگیر این دو مسئله بررسی شده است. از بعد کنترلی نیز با توجه به ماهیت تولید حل بهینه حلقه بسته و مقاوم از ایده خطی‌سازی گام به گام سیستم غیرخطی حول نقاط کار برای طراحی کنترلر حلقه بسته استفاده شده است. سپس با توجه به ضعف‌های این روش، حل بهینه مسئله راندوو و لنگرگیری با استفاده از روش قدرتمند و حلقه بسته شبه‌طیفی گاوسی (GP)^{۲۱} انجام گرفته است. جواب‌های این شبیه‌سازی نشان می‌دهند که حل به دست آمده از روش شبه‌طیفی گاوسی مزایا و معایبی در مقابل روش خطی‌سازی دارد و طراح می‌تواند بسته به مأموریت موردنظر و شرایط ساخت، یکی از دو روش را مورد بررسی قرار دهد. در نهایت به منظور به دست آوردن بازه قابل اطمینان برای عدم هم‌ترازی، تحلیلی روی حساسیت پاسخ نهایی سیستم نسبت به عدم هم‌ترازی رانشگرها انجام گرفته است.

معادلات غیر خطی مسئله راندوو (انتقال)

معادلات نسبی حرکت انتقالی را در فضای اینرسی می‌توان به صورت زیر نوشت [۴۱]:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{\mu \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^3} + \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_p \quad (1)$$

برای ساده‌تر کردن معادلات حرکت، فرض می‌شود که مدار هدف دایروی است و حرکت آن در محیطی بدون اختلال صورت می‌پذیرد. در این رابطه \mathbf{d} فاصله نسبی بین هدف و رهگیر بوده و \mathbf{f}_c و \mathbf{f}_p به ترتیب نیروهای کنترلی و اختلالی هستند. μ نیز پارامتر جاذبی زمین^{۲۲} است.

دستگاه مختصات مرجع به صورت متحرک و متصل به هدف در نظر گرفته می‌شود. دستگاه مختصات XYZ به صورت زیر تعریف شده و در شکل (۱) نشان داده شده است.

بردار X وضعیت شعاعی هدف را در دستگاه فوق نسبت به زمین نشان می‌دهد.

بردار Y امتداد بردار سرعت هدف را که همواره مماس بر مسیر حرکت آن است، نشان می‌دهد و بردار Z در راستای بردار

21. Gauss Pseudospectral

22. Earth gravitational parameter

23. Angular momentum

محورهای ۱ و ۲ بدنی هستند. با توجه به روابط (۲) و (۶) می‌توان گفت که ترم درگیر در معادلات راندوو و لنگرگیری ω_0 است، زیرا با تغییر موقعیت رهگیر در فضا این مقدار نیز تغییر می‌کند. اما با توجه به شبیه‌سازی‌های انجام گرفته در [۴۳] نشان داده شده است که می‌توان با تقریب خوبی این مقدار را ثابت در نظر گرفت.

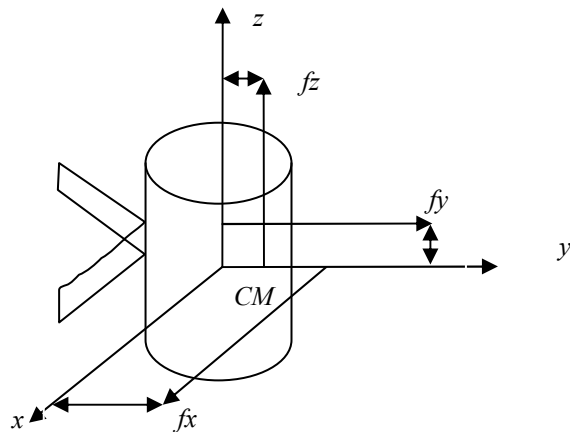
در این بخش استخراج معادلات انتقالی و دورانی درگیر به پایان می‌رسد. همان‌طور که نشان داده شد تنها عبارتی که در این روابط ایجاد درگیری می‌کند سرعت زاویه‌ای مدار را رهگیر است که می‌توان با تقریب‌های خوبی این درگیری را از بین برد و مقدار این کمیت را ثابت فرض نمود.

استخراج معادلات درگیر

در این بخش در مورد نحوه درگیر کردن معادلات دورانی و انتقالی بحث خواهد شد. قبل از استخراج معادلات، ساختار سیستمی رهگیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ساختار سیستمی رهگیر

در این مقاله ساختار بدنه رهگیر به صورت شکل (۲) در نظر گرفته شده است.



شکل ۲- ساختار سیستمی رهگیر

فرض می‌شود که ممان‌های اینرسی ناشی از بازوهای رهگیر (روبات) در مقابل بدنه آن ناچیز بوده و بنابراین می‌توان رهگیر را با استوانه‌ای متجانس^{۲۵} (توزیع یکنواخت جرم) مدل کرد. موقعیت رانشگرها نیز در شکل (۲) نشان داده شده است. با توجه به شکل فوق:

این رابطه به وضوح بیانگر این مطلب است که برای مشاهده تأثیر هرگونه گشتاور روی وضعیت جهتی می‌توان ترم $\mathbf{h} \times \boldsymbol{\omega}$ را به ترم \mathbf{h} به منظور بیان وضعیت در دستگاه بدنی اضافه کرد. مومنوم کل سیستم را می‌توان به صورت مجموع مومنوم بدنی و مومنوم چرخ‌های واکنشی تقسیم‌بندی کرد. این معادله در دستگاه بدنی بیان شده و در آن \mathbf{T} مجموع گشتاورهای خارجی اعمال شده به فضاییماست که برابر با مجموع گشتاورهای کنترلی و اختلالی است. در صورتی که این رابطه بسط داده شود در دستگاه بدنی به فرم زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{T_{dx} + G_x - \dot{h}_{wx}}{I_x} - \omega_y \omega_z \frac{I_z}{I_x} + \\ &\omega_z \omega_y \frac{I_y}{I_x} - \omega_y \frac{h_{wz}}{I_x} + \omega_z \frac{h_{wy}}{I_x} \\ \dot{\omega}_y &= \frac{T_{dy} + G_y - \dot{h}_{wy}}{I_y} - \omega_z \omega_x \frac{I_x}{I_y} + \\ &\omega_x \omega_z \frac{I_z}{I_y} - \omega_z \frac{h_{wx}}{I_y} + \omega_x \frac{h_{wz}}{I_y} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{T_{dz} + G_z - \dot{h}_{wz}}{I_z} - \omega_x \omega_y \frac{I_y}{I_z} + \\ &\omega_y \omega_x \frac{I_x}{I_z} - \omega_x \frac{h_{wy}}{I_z} + \omega_y \frac{h_{wx}}{I_z} \end{aligned} \quad (6)$$

در این رابطه بردار ω سرعت زاویه‌ای رهگیر بوده و در دستگاه بدنی بیان شده است. بردار \dot{h}_w فرامین کنترلی را نشان داده و بردار h_w نیز نشانگر مومنوم زاویه‌ای رهگیر است. در این رابطه بردار G_x گرادیان جاذبه^{۲۴} بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_z - I_y) \sin(2\phi) \cos^2(\theta) \\ G_y &= \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_z - I_x) \sin(2\theta) \cos(\phi) \\ G_z &= \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_x - I_y) \sin(2\theta) \sin(\phi) \end{aligned} \quad (7)$$

در این رابطه ω_0 سرعت زاویه‌ای مدار را رهگیر است. با توجه به حرکت رهگیر در مدارهای لحظه‌ای دایروی می‌توان از رابطه (۳) برای محاسبه آن استفاده کرد. I_x و I_y و I_z ممان‌های اینرسی حول سه محور هستند. زوایای ϕ و θ نیز به ترتیب زوایای اوپلر حول

خطی‌سازی این سیستم‌ها حول نقاط کاری و طراحی کنترلر بر مبنای سیستم خطی شده جدید است.

همان‌طور که از تعریف نیز بر می‌آید، نقاط کار را نمی‌توان از قبل تعیین کرد. در این بخش روشی بر مبنای الگوی کنترل بهینه ارائه می‌شود که می‌تواند با دقت بسیار زیادی حل بهینه سیستم‌های غیرخطی را به دست آورد و در فرایند توسعه حل، نقاط کاری سیستم خود به خود حاصل می‌شوند.

خطی‌سازی سیستم غیرخطی حول نقاط کار

در این مقاله از روش ژاکوبی^{۲۸} برای خطی‌سازی استفاده شده است. در این روش به این صورت عمل می‌شود که حول نقاط کار که به نوبه خود در فرایند حل حاصل می‌شوند معادلات سیستم غیرخطی، خطی‌سازی شده و سپس ماتریس‌های سیستم معادل خطی به دست می‌آیند. به عبارت دیگر اگر سیستم غیرخطی توسط رابطه

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), t) \quad (10)$$

بیان گردد، می‌توان با استفاده از روابط خطی‌سازی زیر آن را به سیستم خطی تبدیل کرد.

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\text{operating point}} \quad (11)$$

$$B = \left. \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\text{operating point}} \quad (12)$$

ابتدا نقطه کار سیستم همان شرایط اولیه سیستم رهگیر و مقادیر کنترلی صفر (در صورتی که بازه‌های انگرال‌گیری به اندازه کافی ریز در نظر گرفته شوند، این فرض خللی در روند کنترلی مسئله ایجاد نمی‌کند) در نظر گرفته می‌شود و سپس در فاصله زمانی نسبتاً ریز سیستم غیرخطی حول این شرایط خطی شده و قانون کنترل خطی حاصل می‌شود. سپس این قانون روی سیستم غیرخطی پیاده‌سازی می‌شود. بعد از اعمال این قانون کنترلی روی سیستم غیرخطی و حرکت سیستم به سمت جلو، نقاط به دست آمده نقاط کار جدید خواهند بود و سیستم غیرخطی دوباره حول این نقاط خطی‌سازی شده و سپس قانون کنترلی به دست آمده روی سیستم غیرخطی پیاده‌سازی می‌شود. سپس همین فرایند در بازه بعدی پیاده‌سازی می‌شود تا حل بهینه برای سیستم غیرخطی حاصل شود.

روش شبه طیفی گاوسی

از این روش برای تبدیل مسائل کنترل بهینه پیوسته همراه با قیود دیفرانسیلی، به مسائل کنترل بهینه گسسته با قیود جبری استفاده می‌شود. در ادامه اشاره مختصری به چگونگی پیاده‌سازی این روش

$$\begin{aligned} T_{dx} &= f_z dz - f_y dy \\ T_{dy} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

با مراجعه به مجموعه معادلات (۲) و (۶) و (۸) می‌توان اثر رانشگرها در حرکت دورانی را به صورت گشتاور و اختلال داخلی روی معادلات انتقالی در نظر گرفت.

با استخراج معادلات غیرخطی درگیر بحث این بخش به اتمام می‌رسد. این معادلات در استخراج قوانین کنترلی بخش بعد به کار گرفته خواهند شد.

کنترل بهینه

در این بخش مسئله خطی‌سازی معادلات غیرخطی درگیر راندوو و لنگرگیری با استفاده از ایده خطی‌سازی معادلات حول نقاط کار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تابع هزینه

تابع هزینه در این مقاله به منظور می‌نیم‌سازی سوخت در کنار هموارترسازی مسیر در نظر گرفته خواهد شد. دلایل این انتخاب نیز دو مورد زیر هستند:

۱- در کاربردهای فضایی محث می‌نیم‌کردن سوخت به دلیل محدودیت در سوخت‌گیری و حجم مخازن سوخت اولویت زیادی دارد.

۲- کاهش مصرف سوخت باعث ناهموار شدن مسیر حرکت می‌شود که این مسئله باعث صدمات سازه‌ای و افزایش اغتشاشات در سیستم می‌شود. بنابراین در کنار کاهش سوخت باید روی هموارسازی مسیر حرکت رهگیر نیز قید قرار داده شود، بنابراین فرم تابع هزینه انتخاب شده به صورت

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(\mathbf{t})^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}(\mathbf{t})^T \mathbf{R} \mathbf{u}(\mathbf{t})] dt \quad (9)$$

است. در این رابطه ماتریس‌های \mathbf{Q} و \mathbf{R} ماتریس‌های وزنی هستند که به ترتیب اهمیت همواری^{۲۶} مسیر و میزان انرژی را تعیین می‌کنند. در این مقاله این دو ماتریس قطری در نظر گرفته شده‌اند.

نقاط کار^{۲۷}

نقاط کار به مجموعه نقاطی گفته می‌شود که سیستم مقید است از آنها عبور کند. یکی از روش‌های کنترل سیستم‌های غیرخطی،

26. Smoothness

27. Operating points

28. Jacobian method

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}(\tau_i) \mathbf{L}_i^*(\tau) \quad (19)$$

که در آن‌ها:

$$\mathbf{L}_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (20)$$

$$\mathbf{L}_i^*(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (21)$$

$$\mathbf{L}_i(\tau_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (22)$$

$$\mathbf{L}_i^*(\tau_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (23)$$

با مشتق‌گیری از رابطه تقریبی حالت‌ها:

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau) = \sum_{i=0}^N \mathbf{x}(\tau_i) \dot{\mathbf{L}}_i(\tau) \quad (24)$$

که مشتق چندجمله‌ای‌های لاگرانژ با ماتریس تقریبی زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{D}_{ki} = \dot{\mathbf{L}}_i(\tau_k) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i, l}^N (\tau_k - \tau_j)}{\prod_{j=0, j \neq i, l}^N (\tau_i - \tau_j)} \quad (25)$$

$k = 1, \dots, N$ and $i = 0, \dots, N$

اکنون می‌توان مسئله بولزا را با به‌کارگیری تقریب‌های مطرح شده و رابطه تقریبی کوادراچر گاوس^{۳۴} موجود در [۴۶]، بازنویسی کرد:

$$J = \phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=1}^N \omega_k g(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) \quad (26)$$

$$\phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) = 0$$

$$C(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) \leq 0 \quad (k = 1, \dots, N)$$

$$\mathbf{X}_f \equiv \mathbf{X}_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k; \tau_k; t_0, t_f) \quad (27)$$

به‌طوری‌که:

$$\mathbf{X}_k \equiv \mathbf{X}(\tau_k) \in \mathbf{R}^n \quad (28)$$

$$\mathbf{U}_k \equiv \mathbf{U}(\tau_k) \in \mathbf{R}^m \quad (29)$$

$$\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{X}(-1) \quad (30)$$

مسئله جدید را می‌توان با هر روش برنامه‌ریزی غیرخطی حل کرد.

خواهد شد. برای دسترسی به توضیحات کامل‌تر به مراجع [۴۴] و [۴۵] مراجعه شود.

مسئله پیوسته بولزا^{۲۹}

مسئله کنترل بهینه پیوسته زیر که معروف به مسئله پیوسته بولزاست را در نظر بگیرید که در آن هدف یافتن کنترل $\mathbf{u}(\tau)$ حالت $\mathbf{x}(\tau)$ و زمان‌های ابتدا و انتهای t_0 و t_f است که تابع هدف زیر را ضمن ارضای قیود مربوطه، می‌نیمد.

$$J = \phi(x(-1), t_0, x(1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f) d\tau \quad (13)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau, t_0, t_f) \quad (14)$$

$$\phi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(1), t_f) = 0 \quad (15)$$

$$C(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f) \leq 0 \quad (16)$$

که در آن می‌توان با استفاده از انتگرال را با تبدیل زیر، به t_0 و t_f تغییر داد:

$$t = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2} \quad (17)$$

برای گسسته‌سازی این مسئله با استفاده از روش شبه طیفی گاوسی، دو رویکرد مستقیم^{۳۰} و غیرمستقیم وجود دارد. در روش اول، جملات تقریب زده شده مستقیماً وارد صورت مسئله شده و آن را به فرم مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی^{۳۱} در می‌آورد. در روش دوم، تابع همیلتونین افزوده^{۳۲} شده را محاسبه کرده و شروط لازم حاصل شده از آن تقریب زده می‌شوند. نقاط مسئله گسسته شده، نقاط لژاندر گاوس^{۳۳} نام دارند.

روش گسسته‌سازی مستقیم

روش شبه‌طیفی گاوس همانند روش‌های لژاندر و چبیشف، بر اساس تقریب حالت‌ها و کنترل‌ها توسط چندجمله‌ای‌های درون‌یاب است. حالت‌ها با استفاده از N+1 درون‌یاب چندجمله‌ای درون‌یاب تقریب زده می‌شوند:

$$\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^N \mathbf{X}(\tau_i) \mathbf{L}_i(\tau) \quad (18)$$

29. Bolza

30. Direct

31. Nonlinear programming

32. Augmented Hamiltonian function

33. Legendre-Gaussian (LG)

34. Gauss quadrature

روش گسسته‌سازی غیرمستقیم

روش غیرمستقیم حل مسئله بولزا، شامل استفاده از حساب تغییرات و اصل پونتریگن^{۳۵} برای دستیابی به شروط لازم برای بهینگی است [۴۷]. بدین ترتیب ابتدا تابع همیتونین افزوده شده محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}, \tau, t_0, t_f) = & \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau; t_0, t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau; t_0, t_f) & \quad (۳۱) \\ - \boldsymbol{\mu}^T(\tau) C(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau; t_0, t_f) & \end{aligned}$$

که در آن λ بردار شبه حالتها^{۳۶} و $\boldsymbol{\mu}$ ضرایب لاگرانژ مربوط به قیود نامساوی هستند. در نتیجه شروط بهینگی عبارتند از:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau; t_0, t_f) = \frac{t_f - t_0}{2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad (۳۲)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} \left(-\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \right) & \\ = -\frac{t_f - t_0}{2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} & \quad (۳۳) \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} - \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial C}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} \quad (۳۴)$$

$$\phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (۳۵)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(\tau_0) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}(\tau_0)} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(\tau_0)} & \quad (۳۶) \\ & \quad (۳۷) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}(\tau_f)} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(\tau_f)}$$

$$\mathbf{H}(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial t_f} \quad (۳۸)$$

$$\mathbf{H}(t_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial t_0} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial t_0} \quad (۳۹)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_j(\tau) = 0 \text{ when } c_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau; t_0, t_f) < 0 & \\ j = 1, \dots, c & \quad (۴۰) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_j(\tau) \leq 0 \text{ when } c_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau; t_0, t_f) = 0 & \\ j = 1, \dots, c & \end{aligned}$$

همچنین می‌توان نشان داد:

$$\mathbf{H}(t_0) = -\frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t_0} d\tau + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{H} d\tau \quad (۴۱)$$

$$\mathbf{H}(t_f) = \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t_f} d\tau + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{H} d\tau$$

برای تقریب شبه حالتها می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(\tau) \approx \boldsymbol{\Lambda}(\tau) = \sum_{i=1}^{N+1} \boldsymbol{\lambda}(\tau_i) \mathbf{L}_i^T(\tau) & \\ \mathbf{L}_i^T(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i, l}^{N+1} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} & \quad (۴۲) \end{aligned}$$

در نتیجه معادلات جبری نهایی برای تقریب شرایط بهینگی لازم (پیوسته) در نقاط لزاندر- گاوس عبارتند از:

$$\sum_{i=0}^N \mathbf{X}_i \mathbf{D}_{ki} = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}_k \quad (۴۳)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{D}_{ki}^1 + \boldsymbol{\Lambda}_f \mathbf{D}_{kN+1}^1 = & \\ \frac{t_f - t_0}{2} \left(-\frac{\partial g_k}{\partial \mathbf{X}_k} - \boldsymbol{\Lambda}_k^T \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{X}_k} + \boldsymbol{\mu}_k^T \frac{\partial C_k}{\partial \mathbf{X}_k} \right) & \quad (۴۴) \\ & \quad (۴۵) \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial g_k}{\partial \mathbf{U}_k} - \boldsymbol{\Lambda}_k^T \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{U}_k} + \boldsymbol{\mu}_k^T \frac{\partial C_k}{\partial \mathbf{U}_k}$$

$$\phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) = 0;$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}_0} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}_0}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_f = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}_f} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}_f}$$

$$-\frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial t_0} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{H}_k = \quad (۴۶)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_0} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial t_0}$$

$$\begin{aligned} \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial t_f} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{H}_k = & \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial t_f} & \quad (۴۷) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{jk} \leq 0 \text{ when } C_{jk} = 0 & \quad (۴۸) \\ \boldsymbol{\mu}_{jk} = 0 \text{ when } C_{jk} < 0 & \quad (۴۹) \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{f}_k \quad (۵۰)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_F = \boldsymbol{\Lambda}_0$$

$$+ \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \left(-\frac{\partial g_k}{\partial \mathbf{X}_k} - \boldsymbol{\Lambda}_k^T \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{X}_k} + \boldsymbol{\mu}_k^T \frac{\partial C_k}{\partial \mathbf{X}_k} \right) \quad (۵۱)$$

$$K = 1, \dots, N \text{ and } j = 1, \dots, c$$

35. Pontryagin

36. Costates

در جدول (۵) ماتریس‌های وزنی برای حل مسئله درگیر راندوو و لنگرگیری با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس آمده است. در جدول (۶) مقادیر اولیه شبیه‌سازی روش شبه‌طیفی گاوس برای حل مسئله درگیر راندوو و لنگرگیری آمده است.

جدول ۴- ماتریس‌های وزنی برای حل مسئله درگیر راندوو و لنگرگیری با استفاده از روش خطی‌سازی گام به گام

مقادیر ثابت	عناصر قطری ماتریس R	مقادیر ثابت	عناصر قطری ماتریس Q
۹۰	R(۱,۱)	۱e-۱	Q(۱,۱)
۹۰	R(۲,۲)	۱e-۱	Q(۲,۲)
۹۰	R(۳,۳)	۱e-۱	Q(۳,۳)
۱۰۰	R(۴,۴)	۱e-۱۰	Q(۴,۴)
۱۰۰	R(۵,۵)	۱e-۱۰	Q(۵,۵)
۱۰۰	R(۶,۶)	۱e-۱۰	Q(۶,۶)
		۲	Q(۷,۷)
		۲	Q(۸,۸)
		۲	Q(۹,۹)
		۱e-۲	Q(۱۰,۱۰)
		۱e-۲	Q(۱۱,۱۱)
		۱e-۲	Q(۱۲,۱۲)
		۲e-۳	Q(۱۳,۱۳)
		۲e-۳	Q(۱۴,۱۴)
		۲e-۳	Q(۱۵,۱۵)

جدول ۵- پارامترهای تابع هزینه برای حل مسئله درگیر راندوو و لنگرگیری با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس

مقادیر ثابت	عناصر قطری ماتریس R	مقادیر ثابت	عناصر قطری ماتریس Q
۲e-۵	R(۱,۱)	۱e-۱	Q(۱,۱)
۲e-۵	R(۲,۲)	۱e-۱	Q(۲,۲)
۲e-۵	R(۳,۳)	۱e-۱	Q(۳,۳)
۱e-۶	R(۴,۴)	۱e-۱۰	Q(۴,۴)
۱e-۶	R(۵,۵)	۱e-۱۰	Q(۵,۵)
۱e-۶	R(۶,۶)	۱e-۱۰	Q(۶,۶)
		۱e-۳	Q(۷,۷)
		۱e-۳	Q(۸,۸)
		۱e-۳	Q(۹,۹)
		۰.۱۵	Q(۱۰,۱۰)
		۰.۱۵	Q(۱۱,۱۱)
		۰.۱۵	Q(۱۲,۱۲)
		۱	Q(۱۳,۱۳)
		۱	Q(۱۴,۱۴)
		۱	Q(۱۵,۱۵)

لازم به ذکر است که در معادلات بالا، مجهولات زیر:

$$\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{X}(-1), \mathbf{X}_k \equiv \mathbf{X}(\tau_k) \in \mathbf{R}^n$$

$$\mathbf{X}_f \equiv \mathbf{X}(1), \mathbf{U}_k \equiv \mathbf{U}(\tau_k) \in \mathbf{R}^m$$

$$\mathbf{\Lambda}_0 \equiv \mathbf{\Lambda}(-1), \mathbf{\Lambda}_k \equiv \mathbf{\Lambda}(\tau_k) \in \mathbf{R}^n$$

$$\mathbf{\Lambda}_f \equiv \mathbf{\Lambda}(1), \boldsymbol{\mu}_k \equiv \boldsymbol{\mu}(\tau_k) \in \mathbf{R}^m$$

$$t_0 \in \mathbf{R}, t_f \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}^q$$

باید به دست آیند.

مجموعاً به تعداد $(2n + m + c)N + 4n + q + 2$ مجهول وجود دارد که به همین تعداد معادله برای آنها نوشته شده است. حل این مجموعه معادلات جبری غیرخطی، پاسخی غیرمستقیم برای مسئله کنترل بهینه خواهد بود.

نتایج پیاده‌سازی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی و جزییات بیشتر در مورد نحوه انتخاب پارامترهای سیستم و کنترل ارائه خواهد شد.

پارامترهای شبیه‌سازی

پارامترهای هندسی و جرمی سیستم رهگیر در جدول (۱) نشان داده شده‌اند.

جدول ۱- پارامترهای سیستمی رهگیر

ارتفاع رهگیر	شعاع استوانه رهگیر	جرم رهگیر
۴متر	۲متر	۵۰کیلوگرم

پارامترهای مداری فضایی‌های هدف نیز در جدول (۲) نشان

داده شده‌اند.

جدول ۲- پارامترهای مداری

پارامتر جاذبی	شعاع زمین	فاصله مدار هدف از زمین
$398600 \text{ km}^3 / \text{s}^2$	۶۳۷۸ کیلومتر	۳۰۰ کیلومتر

میزان عدم تطابق رانشگرهای رهگیر در سه راستا در جدول

(۳) نشان داده شده است.

جدول ۳- میزان عدم تطابق

راستای x	راستای y	راستای z
۰/۱ میلی‌متر	۰/۱ میلی‌متر	۰/۱ میلی‌متر

در جدول (۴) ماتریس‌های وزنی برای حل مسئله درگیر راندوو

و لنگرگیری با استفاده از روش خطی‌سازی گام به گام آمده است.

جدول ۶- مقادیر اولیه شبیه‌سازی روش شبه‌طیفی گاوس برای حل مسئله درگیر راندوو و لنگرگیری

$p(0)$	1 deg/s	$p(t_f)$	free
$q(0)$	1 deg/s	$q(t_f)$	free
$r(0)$	1 deg/s	$r(t_f)$	free
$h_x(0)$	0	$h_x(t_f)$	free
$h_y(0)$	0	$h_y(t_f)$	free
$h_z(0)$	0	$h_z(t_f)$	free
$\phi(0)$	40 deg	$\phi(t_f)$	free
$\theta(0)$	40 deg	$\theta(t_f)$	free
$\psi(0)$	-40 deg	$\psi(t_f)$	free
$x(0)$	$9/64 \text{ km}$	$x(t_f)$	free
$y(0)$	$-5/0.9$	$y(t_f)$	free
$z(0)$	$32/89 \text{ km}$	$z(t_f)$	free
$\dot{x}(0)$	0.05334 km/s	$\dot{x}(t_f)$	free
$\dot{y}(0)$	0.0285 km/s	$\dot{y}(t_f)$	free
$\dot{z}(0)$	0.0398 km/s	$\dot{z}(t_f)$	free

- تحلیل حساسیت پاسخ نهایی (خطای نهایی) سیستم راندوو و لنگرگیری درگیر غیرخطی به ازای ورودی‌های مختلف، عدم هم‌ترازی راستای رانش‌گرها نسبت به مرکز جرم رهگیر در آخرین قسمت بخش بعدی آمده است. مقادیر عدم تطابق به گونه‌ای انتخاب شده‌است که سیستم رفتار معقول و کاربردی از خود نشان دهد.

نتایج شبیه‌سازی

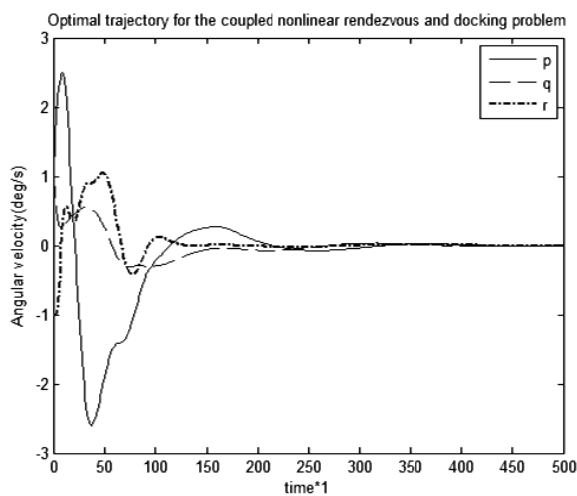
با توجه به توضیحات داده شده در بخش قبل، نتایج شبیه‌سازی در بخش‌های زیر اشاره شده است.

جدول (۷) مقادیر توابع هزینه را با استفاده از دو روش شبه‌طیفی گاوس و روش خطی‌سازی گام به گام (به منظور اعتبارسنجی) در مسئله راندوو و لنگرگیری درگیر نشان می‌دهد.

جدول ۷- مقادیر توابع هزینه را با استفاده از دو روش شبه‌طیفی گاوس و روش خطی‌سازی گام به گام در مسئله ملاقات و لنگرگیری درگیر

روش شبه‌طیفی گاوس		روش خطی‌سازی	
هزینه کل	۶۱۷.۴۳	هزینه کل	۸۲۲.۶۵

در شکل‌های (۳) تا (۸) پاسخ بهینه سیستم غیرخطی و درگیر راندوو و لنگرگیری بازای شرایط اولیه ارائه شده در بخش با استفاده از هر دو روش نشان داده شده است. در این دو روش، با توجه به ماهیت حل کنترلی که حل حلقه بسته را ارائه می‌دهد، پاسخ سیستم دارای مقاومت^{۳۸} زیادی در مقابل اختلالات است. این موضوع برتری این دو روش را در مقابل حل‌های حلقه باز مانند تغییرات اکستریمال‌ها^{۳۹} نشان می‌دهد.



(الف)

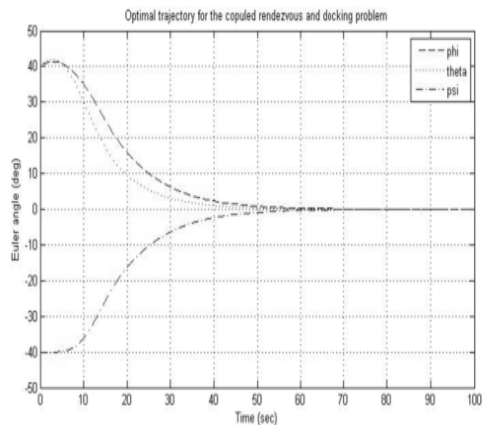
نکات

- در تمام شبیه‌سازی‌های انجام شده بازه‌های زمانی انتگرال‌گیری یک ثانیه در نظر گرفته شده است.
- تعداد نقاط خطی‌سازی در روش شبه‌طیفی گاوس پنجاه نقطه در نظر گرفته شده است. انتخاب این نقاط به وسیله سعی و خطا و به منظور افزایش دقت حل انجام گرفته است.
- تغییرات سرعت زاویه‌ای مداری رهگیر ثابت و برابر مقدار اولیه آن در نظر گرفته شده است.
- زمان انجام عملیات راندوو و لنگرگیری به وسیله هر دو روش ۵۰۰ ثانیه بوده است (نمودارهای روش شبه‌طیفی گاوس به دلیل واضح‌تر شدن تا ۱۰۰ ثانیه نشان داده شده‌اند).
- مقادیر اولیه و نهایی حالت‌ها هر دو روش یکسان در نظر گرفته شده است.
- مقادیر اختلالی^{۳۷} در هر سه راستای محورهای بدنی 10^{-5} N.m و ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

38. Robustness

39. Variation of extremals

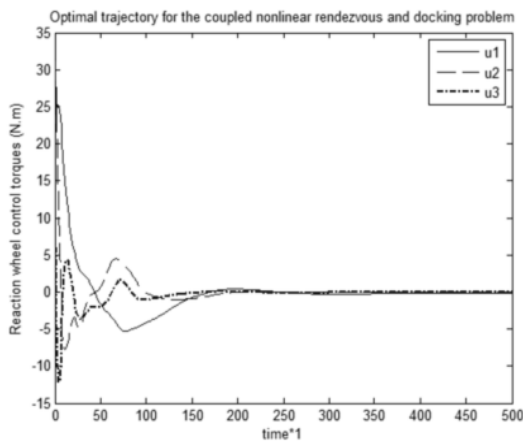
37. Disturbance forces



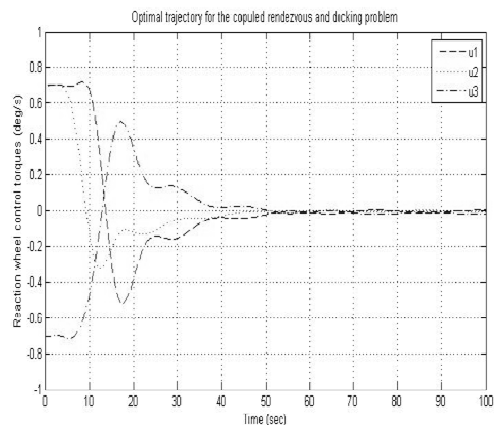
(ب)

شکل ۴- مسیر بهینه فرامین کنترلی چرخهای واکنشی در مسئله ملاقات و اتصال غیرخطی حلقه بسته (الف) با روش خطی سازی و (ب) شبهطیفی گاوس با اعمال اختلالات

علاوه بر موارد ذکر شده در مورد شکل (۳)، در این حالت فراجاهش روش شبهطیفی گاوس کمتر است.

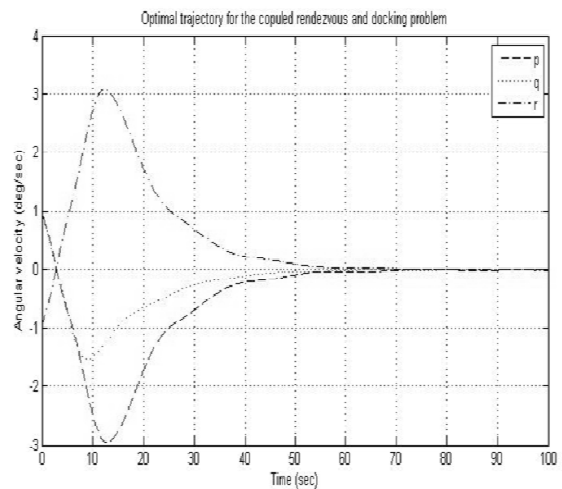


(الف)



(ب)

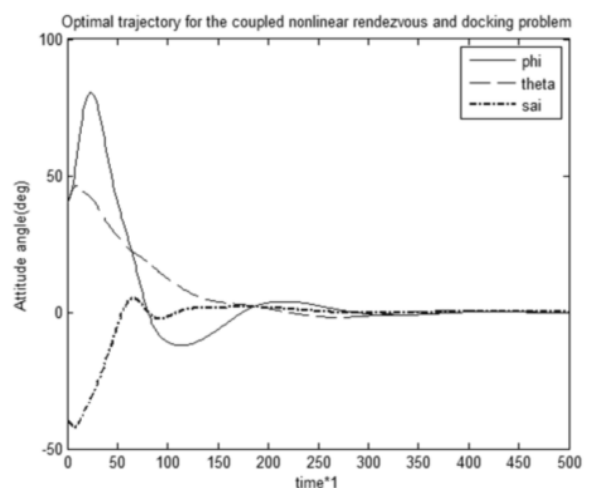
شکل ۵- مسیر بهینه فرامین کنترلی چرخهای واکنشی در مسئله ملاقات و اتصال غیر خطی حلقه بسته (الف) با روش خطی سازی و (ب) شبه طیفی گاوس با اعمال اختلالات



(ب)

شکل ۳- مسیر بهینه خطای سرعت زاویه ای در مسئله ملاقات و اتصال غیرخطی حلقه بسته: (الف) با روش خطی سازی و (ب) شبهطیفی گاوس با اعمال اختلالات

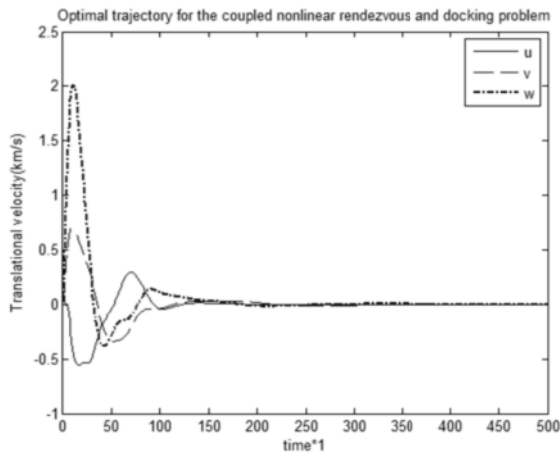
با توجه به شکل فوق می توان گفت که با استفاده از روش خطی سازی حول نقاط کار سیستم راحت تر به مسیر مطلوب همگرا شده و بنابراین زمان نشست^{۴۰} بیشتری خواهد داشت. همین مسئله باعث می شود تا مقادیر کنترلی کمتری در این حالت نیاز باشد. در عین حال نمودارهای به دست آمده از روش شبهطیفی گاوس هموارتر^{۴۱} هستند. این امر مزیت بسیار مهمی از نظر سازه ای به شمار می رود.



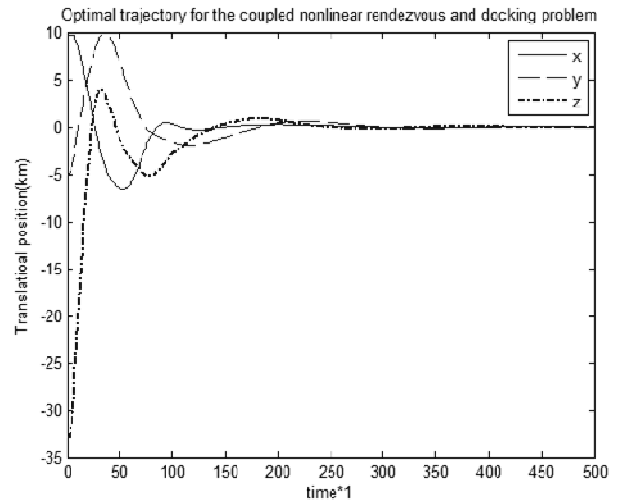
(الف)

40. Settling time
41. Smooth

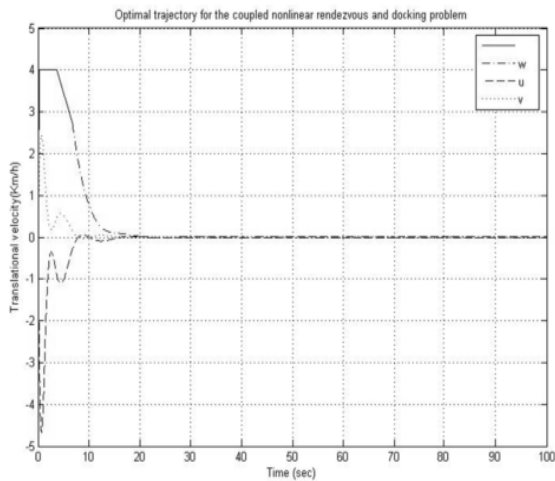
با توجه به شکل فوق ملاحظه می‌گردد که فرامین کنترلی چرخ‌های واکنشی با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس کمتر خواهد بود. این یک مزیت مهم در استفاده از این روش است، زیرا معمولاً اعمال کردن محدودیت‌های کنترلی در فضا بسیار مهم است.



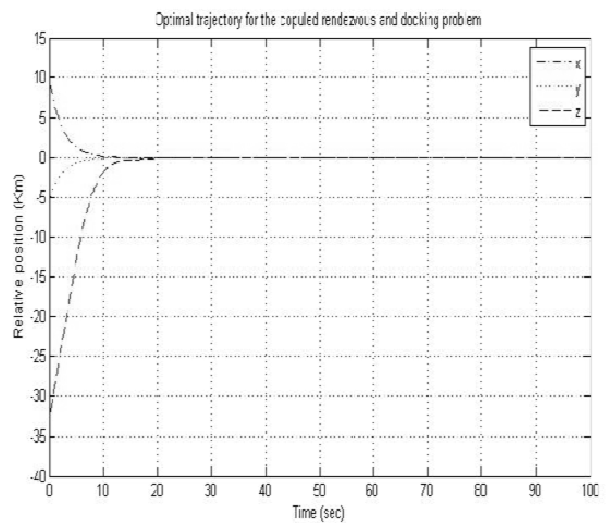
(الف)



(الف)



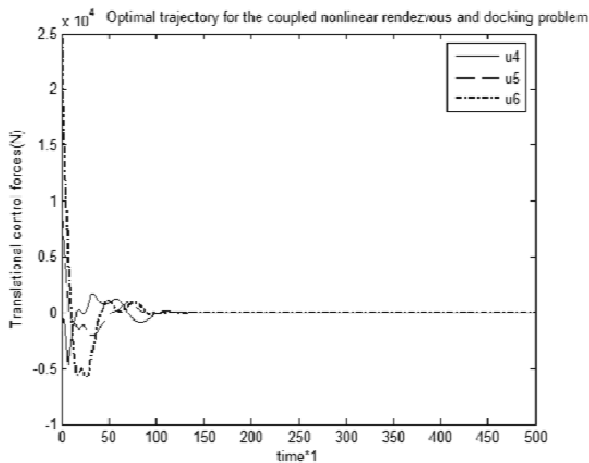
(ب)



(ب)

شکل ۷- مسیر بهینه خطای سرعت نسبی در مسئله ملاقات و اتصال غیرخطی حلقه بسته (الف) با روش خطی‌سازی و (ب) شبه‌طیفی گاوس با اعمال اختلالات

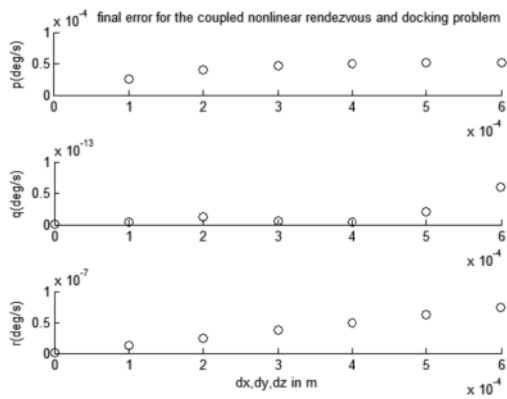
تمامی موارد ارائه شده در مورد اشکال قبل در این مورد نیز صادق هستند.



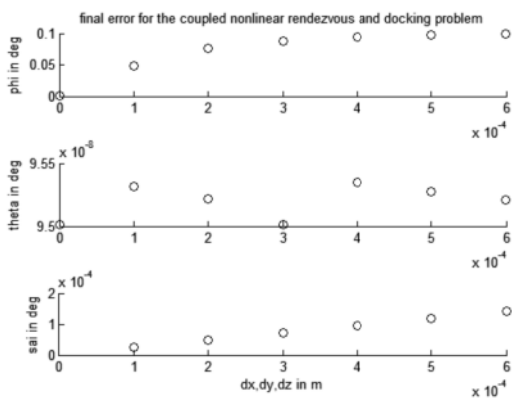
(الف)

شکل ۶- مسیر بهینه خطای موقعیت نسبی در مسئله ملاقات و اتصال غیرخطی حلقه بسته (الف) با روش خطی‌سازی و (ب) شبه‌طیفی گاوس با اعمال اختلالات

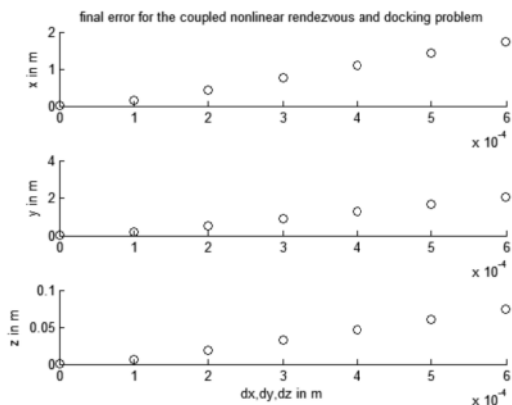
شکل فوق نشان‌دهنده صحت مطلب ارائه شده در بخش قبل مبنی بر زیادبودن زمان نشست و ناهموارتر بودن مسیر به هنگام استفاده از روش خطی‌سازی است.



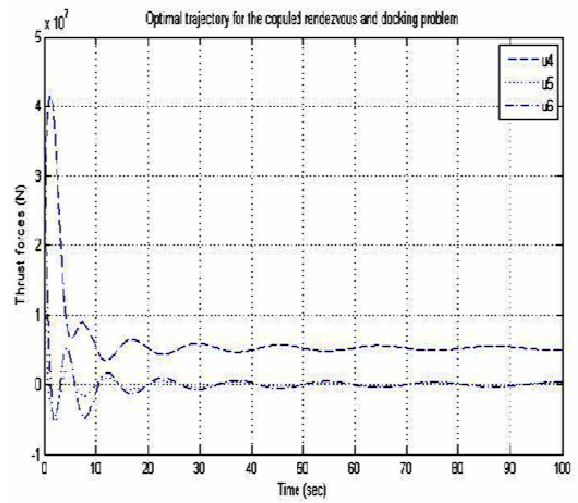
شکل ۹- تحلیل حساسیت خطای نهایی سرعت زاویه ای در مسئله درگیر نسبت به عدم تطابق



شکل ۱۰- تحلیل حساسیت خطای نهایی زوایایی جهتی در مسئله درگیر نسبت به عدم تطابق



شکل ۱۱- تحلیل حساسیت خطای نهایی موقعیت نسبی در مسئله درگیر نسبت به عدم تطابق

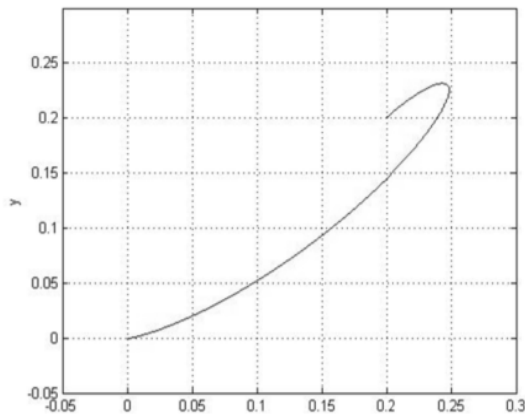


(ب)

شکل ۸- مسیر بهینه فرامین کنترلی رانشگرها در مسئله ملاقات و اتصال غیرخطی حلقه بسته (الف) با روش خطی سازی و (ب) شبه طیفی گاوس با اعمال اختلالات

شکل (۸) نشانگر این واقعیت مهم است که استفاده از روش خطی سازی محدودیت کمتری روی میزان نیروی اعمال شده به وسیله رانشگرها قرار می دهد. این مطلب می تواند به عنوان پارامتری مهم در کنار فرامین جرخ های واکنشی برای طراحی سیستم کنترلی بهینه و مسئله راندوو و لنگرگیری به کار رود. به عبارتی دیگر، در صورتی که بتوان از رانشگرهای قوی استفاده کرد روش شبه طیفی گاوس می تواند به نسبت روش خطی سازی، روش بهتری باشد. اما هنگامی که محدودیت بیشتری روی رانشگرها وجود داشته باشد می توان با استفاده از سازه مقاوم تر و جریمه دادن روی تابع هزینه مسئله بهینه راندوو و لنگرگیری را با روش خطی سازی گام به گام انجام داد.

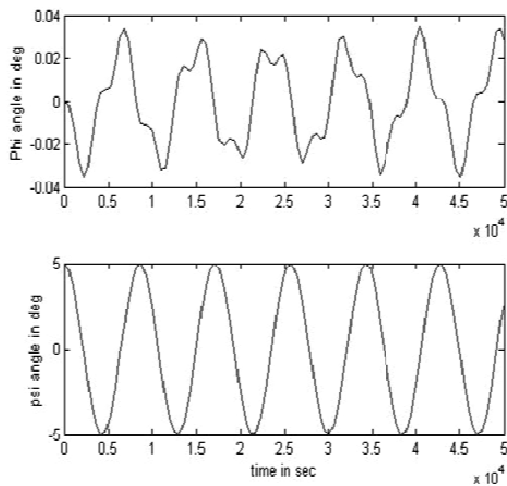
در شکل های (۹) تا (۱۲) حساسیت مقادیر نهایی سیستم غیرخطی راندوو و لنگرگیری نسبت به عدم هم ترازی موتورها نشان داده شده است. این شکل ها به خوبی رابطه بین زیاد شدن میزان هم تراز و خطای نهایی را نشان می دهند که واقعیت بدیهی به نظر می رسد. طراح می تواند با توجه به محدودیت های موجود در پروسه ساخت خطای نهایی را از روی این شکل ها به دست آورده و مأموریت خود را بر این اساس تعریف نماید.



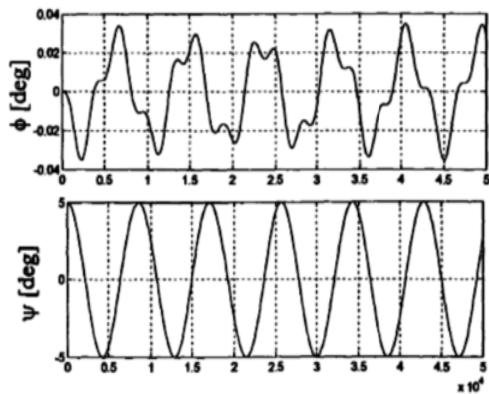
ب) نمودار خطی راندوو به دست آمده توسط مقاله حاضر

شکل ۱۳- مقایسه دقت مدل مورد استفاده در مسئله راندوو توسط مرجع [۹] (شکل الف) و مقاله حاضر (شکل ب)

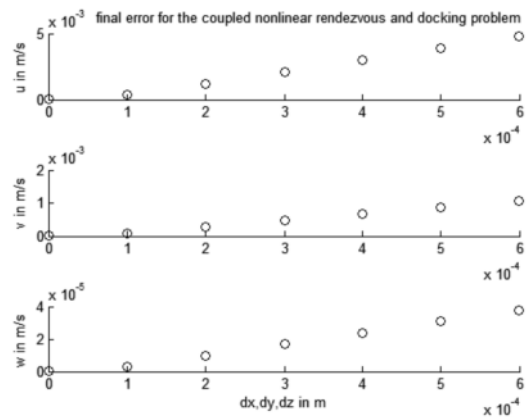
در مورد لنگرگیری نیز چنین مقایسه‌ای با مرجع [۴۲] انجام گرفته و نتیجه شبیه‌سازی‌ها در شکل (۱۴) نشان داده شده است.



الف) نمودار خطی لنگرگیری به دست آمده توسط [۴۲]



شکل ۱۴- مقایسه دقت مدل مورد استفاده در مسئله لنگرگیری توسط مرجع [۴۲] (شکل الف) و مقاله حاضر (شکل ب)

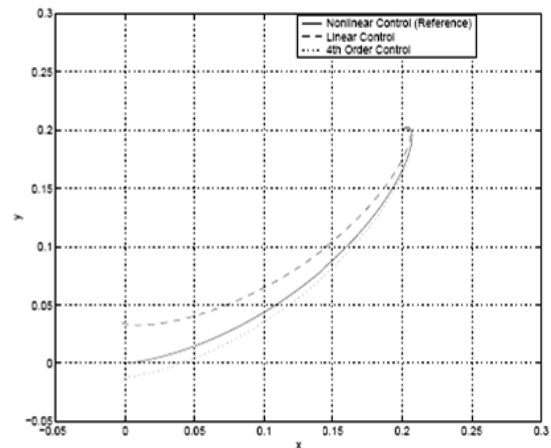


شکل ۱۲- تحلیل حساسیت خطای سرعت نسبی نهایی در مسئله درگیر نسبت به عدم تطابق

اعتبارسنجی بر روی مدل سیستم راندوو و لنگرگیری

در این بخش دقت مدل دینامیکی مسئله راندوو و لنگرگیری استفاده شده در این مقاله مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور و اعتبارسنجی معادلات راندوو از مرجع [۹] استفاده شده است. شکل (۱۳) نمودار به دست آمده توسط این مرجع و مقاله حاضر را نشان می‌دهد:

مقایسه این دو نمودار نشان می‌دهد که سیستم راندوو خطی شده در این مقاله مشابه سیستم غیرخطی مورد استفاده در مرجع [۹] بوده و بنابراین می‌توان با تقریب خوبی سیستم غیرخطی راندوو را حول نقطه کاری خطی‌سازی کرده و از آن برای طراحی کنترلر استفاده کرد.



الف) نمودار خطی راندوو به دست آمده توسط [۹]

- [2] Bevilacqua, R., Romano, M. and Yakimenko, O., "Online Generation of Quasi-Optimal Spacecraft Rendezvous Trajectories", *Science Direct, Acta Astronautica*, Vol. 64, No. 2-3, 2008, pages 345-358.
- [3] Carter, T. E., "Optimal Power-Limited Rendezvous of a Spacecraft with Bounded Thrust and General Linear Equations of Motion", *Springer, Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 87, No. 3/December, 1995, pages 487-515.
- [4] Frieland, B. and Cohen, V., "Quasi-Optimum Control for Minimum-Time Rendezvous", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.11, Issue3, 1966, ISSN: 0018-9286, pages 525-528.
- [5] Bevilacqua, R. and Romano, M., "Fuel Optimal Spacecraft Rendezvous With Hybrid on-off Continuous and Impulsive Thrust", *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 30, No. 4, 2007, pages 1175-1178.
- [6] Miele, A., Weeks, M.W. and Ciarcia, M. "Optimal Trajectories for Spacecraft Rendezvous", *Springer, Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 132, No. 3, 2007, pages 353-376(24).
- [7] Alfriend, K. T. and Kashiwang, Y. "Minimum Time Orbital Rendezvous Between Neighboring Elliptic Orbits", *Springer, Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 4, No. 4, 1969, pages 260-276.
- [8] Taur, D. R., Coverstone-Carroll and Prussing, E., "Optimal Impulsive Time Fixed Orbital Rendezvous and Interception With Path Constraints" *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 18, No. 1, 1995, page 54.
- [9] Park, C. Guibout, V. and J. Scheeres, D. "Solving Optimal Continuous Thrust Rendezvous Problems with Generating Functions" *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 29, No. 2, 2006, pages 321-331.
- [10] Luo, Y. Z., Tang, G. J. and Li, H.Y., "Optimization of Multiple-Impulse Minimum Time Rendezvous Using Hybrid Genetic Algorithm", *Science Direct, Acta Astronautica*, Vol. 10, No. 6, 2006, pages 534-540
- [11] kim, Y. H. and Spencer, D. B., "Optimal Spacecraft Rendezvous Using Genetic Algorithm," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 39, No. 6, 2002, pages 859-865.
- [12] Luo, Y. Z., Tang, G. J., "Spacecraft Optimal Rendezvous Controller Using Simulated Annealing", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 9, Issue 8, 2005, pages 732-737
- [13] Lous, Y. Z., Lei, Y. J. and Tang, G. J., "Optimal Multi-Objective Impulsive Linear Rendezvous," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 30, No. 2, 2007, page 383.
- [14] Lous, Y. Z., Lei, Y. J. and Tang, G. J., "Optimal Multi-Objective Impulsive Nonlinear Rendezvous," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 30, No. 4, 2007, page 994.
- [15] Tang, G. J. Luo, Y. Z. and Li, H. Y. "Optimal Robust Linearized Impulsive Rendezvous", *Science Direct, Acta Astronautica*, Vol. 11, No. 7-8, 2007, pages 563-569.

مقایسه این دو نمودار نیز که شبیه‌سازی معادلات خطی لنگرگیری هستند به خوبی دقت تقریب معادلات غیرخطی با خطی را نشان می‌دهد؛ به طوری که تقریباً تفاوتی بین دو نمودار دیده نمی‌شود.

نتیجه‌گیری

نتایج این بررسی نشان می‌دهد که کنترلرهای بهینه طراحی شده با توجه به ماهیت حلقه بسته بودنشان می‌توانند به طور مؤثر عملیات راندوو و لنگرگیری را حتی در زمان عدم قطعیت از شرایط محیطی سیستمی اجرا کنند. مزایا و معایب دو روش بررسی شده در جدول (۸) نسبت به هم ارائه شده است.

جدول ۸- مزایا و معایب دو روش بررسی شده نسبت به هم و روش‌های حلقه باز

روش شبیه طیفی گاوس	روش خطی‌سازی گام به گام	روش قابلیت
زیاد	زیاد	مقاومت
کم	زیاد	تابع هزینه
هموار	ناهموار	مسیر
زیاد	کم	محدوده بالا و پایین فرامین رانش‌گرها
کم	زیاد	محدوده بالا و پایین فرامین چرخ‌های واکنشی

در این تحقیق مسئله غیرخطی درگیر و همزمان راندوو و لنگرگیری در این مقاله برای اولین بار بررسی شده است و حل بهینه آن نسبت به تابع هزینه سوخت- مسیر ارائه شده است. با توجه به حل حلقه بسته به دست آمده حاصل از روش‌های به کار رفته، می‌توان برای طیف وسیعی از شرایط اولیه و محیط‌های اختلالی از آنها استفاده کرد. نمودارهای حساسیت سیستم نشان می‌دهند که با زیاد شدن میزان عدم تطابق از یک حد، دیگر نمی‌توان به شرایط راندوو و لنگرگیری ایده‌آل رسید. بحث وجود قید روی حالت‌های سیستم و یا کنترل به دلیل ایجاد پیچیدگی مدل مسئله مورد بررسی قرار نگرفت و به عنوان کارهای آتی در نظر است. استفاده از روش خطی‌سازی تنها زمانی توصیه می‌شود که بتوان از چرخ‌های واکنشی دارای محدوده عملکرد بیشتری استفاده کرد.

مراجع

- [1] Mengali, G. and Quarta, A. A., "Fuel Optimal Power Limited Rendezvous With Variable Thruster Efficiency," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 28, No. 6, 2005, pages, 1194-1199.

- and *Electronic Systems*, Vol.20, No.2 March 1984, 94-103.
- [29] Chen, Y. P., and Lo, S. C., "Sliding Mode Controller Design for Spacecraft Attitude Tracking Maneuvers", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.29, No.4, Oct. 1993, 1328-1333.
- [30] Singh, S. N., "Nonlinear Adaptive attitude control of spacecraft", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.23, No.3, 1987, 371-379
- [31] Slotine, J. J. E., and Di Benedetto, M. D., Hamiltoman, "Adaptive Control of Spacecraft", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.35, No.7, 1990, 848-852.
- [32] Cristi, R., Burl, J., and Russo, N., "Adaptive Quaternion Feedback Regulation of Eigen axis Rotations", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.17, No.6 Nov.-Dec.1994,
- [33] Antony Satyadas and K. Krishnakumar, "GA-optimized Fuzzy Controller for Spacecraft Attitude Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, SN: 0-7803-1896-X/94.
- [34] Kwan, C. M., H. Xu, Lewis, F. L., Haynes, L. and Pryor, J. D., "Robust Spacecraft Attitude Control Using Fuzzy CMAC", *Proceedings of the 1996 IEEE International Symposium on Intelligent Control Dearborn, MI* September 15-18,1996.
- [35] Liang, J., "Time-Optimal Magnetic Attitude Control for Small Spacecraft", *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, December 14-17, 2004, Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- [36] Kim, J. and L. Crassidis, J., "Spacecraft Attitude Control Using Approximate Receding-Horizon Model-Error Control Synthesis", *Journal of guidance, Control and dynamics*, Vol. 29, No. 5, September-October 2006, pages 1023-1031.
- [37] Luo, W., Chu, YC. and Ling, KV., "H-Inverse Optimal Attitude-Tracking Control of Rigid Spacecraft", *Journal of Guidance, Navigation and Dynamics*, Vol. 28. No. 3, May-June 2005, page 481-494.
- [38] Li, Z. and Wang, B. "Robust Attitude Tracking Control of Spacecraft in the Presence of Disturbances", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2007, page 1156.
- [39] Singla, P., Subbarao, K., Hughes, D. and L. Junkins, J., "Structured Model Reference Adaptive Control for Vision Based Spacecraft Rendezvous and Docking", *Advances in the Astronautical Sciences*, AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Puncce, Puerto Rico, Vol. 114, 2003, pages 55-75.
- [40] Philipa, N. K. and Ananthasayanam, M. R., "Relative Position and Attitude Estimation and Control Schemes for the Final Phase of an Autonomous Docking Mission of Spacecraft", *Acta Astronautica*, Vol. 52, No.7, 2003, pages 511 – 522.
- [41] J. Irvin, D. and Captain, Jr., "A Study of Linear Vs. Nonlinear Control Techniques for the Reconfiguration of Satellite Formations", *Wright-Patterson Air Force Base, Ohio*, Advances in the Astronautical Sciences, 2002.
- [16] Moradi, R., Nobahari, H. and Pourtakdoust, S. H., "Optimal Control of Spacecraft Rendezvous Using Multi Objective and Colony Optimization", *AIAA southern California Aerospace systems and technology conference*, 2009.
- [17] Park, J. U., Choi, K. H. and Lee, S., "Orbital Rendezvous Using Two-Step Sliding Mode Control", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 3, No. 4, 1999, pages 239-245.
- [18] Matsumoto, Sh., Jacobsen, S., Dubowsky, S. and Y. Ohkami, "Approach Planning and Guidance for Uncontrolled Rotating Satellite Capture Considering Collision Avoidance", *Proceeding of the 7th International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space*, I-SAIRAS 2003, NARA, Japan, May 19-23, 2003.
- [19] Jacobsen, S., Lee, Ch., Zhu, C., and Dubowsky, S., "Planning of Safe Kinematic Trajectories for The Free Flying Robots Approaching an Uncontrolled Spinning Satellite", *Proceedings of DETC.02ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Montreal, Canada*, 2002.
- [20] Louis S. Breger, Jonathan P How., "Safe Trajectories for Autonomous Rendezvous of Spacecraft" *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 31, No. 5, 2008, pages 1478-1489.
- [21] Zeng Y. and Singh, S. N., "Dynamic Feedback Linearizing Attitude Control of Spacecraft with Uncertain Dynamics", *AIAA Guidance, Navigation and Control, Conference and Exhibit*, 1998- 4229.
- [22] Wei, B., and Barba, P. M. "Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers" *Journal of guidance, Control, and Dynamics*, Vol.8, 1985, 360-365.
- [23] Wei, B., Weiss, H., and Arapostathis "Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotation" *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.128, 1989, 375-380.
- [24] Tsiotras, P. "New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies" *Proceedings, IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Palo Alto, CA, Sept.1994, 316-321.
- [25] Tsiotras, P., "A Passivity Approach to Attitude Stabilization Using Non redundant Kinematic Parameterizations", *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, Dec.1995, 515-520.
- [26] Wei, B., and Lu, J., "Feedback Control Logic for Spacecraft Eigenaxis Rotations Under Slow Rate and Control Constraints", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.18, No.6, Nov.-Dec.1995, 1372-1379.
- [27] Dwyer, T. A. W., "Exact Nonlinear Control of Large Angle Rotational Maneuvers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-29, Sept.1984, 769-774.
- [28] Singh, S. N., and De Araujo, A. D., "Asymptotic Reproducibility in Nonlinear Systems and Attitude Control of Gyrostat", *IEEE Transactions on Aerospace*

- [45] Benson, D. A., Huntington, G. T., Thorvaldsen, T. P. and Rao, A. V., "Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation via an Orthogonal Collocation Method", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 6, November-December, 2006, Page 1435-1440.
- [46] Davis, P., Interpolation and Approximation, *Dover Publications*, 1975.
- [47] Kirk, D. E., Optimal Control Theory, *Dover Publications*, 1970.
- [42] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge Aerospace Series 2000.
- [43] Pourtakdoust, S.H. and Moradi, R., Optimal Control of Coupled Spacecraft Rendezvous and Docking, Master Thesis, Sharif University of Technology, Aerospace Engineering Department, 2010.
- [44] Benson, D. A., A Gauss Pseudo spectral Transcription for Optimal Control, *Ph.D. Dissertation*, Department of Aeronautics and Astronautics, MIT, November 2004.