Vol. 3, No. 1, 2, Spring and Summer 2010

JSST
Journal of Space Science & Technology

# Short Time Stability Approach to Guidance Law Design

**E. Mohammadzaman[1*] and H. R. Momeni[2]**

1, 2. Department of Electrical & Computer Engineering, Tarbiat Modares University

* Gisha Bridge, Jalal Ale Ahmad Av., Tehran, IRAN

**mohammadzaman@modares.ac.ir**

*In this paper a new guidance law is proposed to guarantee the stability of the guidance loop considering first order pursuit dynamics using short time stability theorem. As homing guidance is operates over a finite time, short time stability criterion which is defined over a specified time interval can be used effectively in guidance loop stability analysis. Proposed guidance law utilizes line of sight angular rate and pursuit acceleration measurements. Stability region which depends on the pursuit dynamics and guidance gains is an analytical expression in terms of time to go. Stability condition of the new guidance law is less conservatism than classical proportional navigation guidance law.*

**Keywords:** proportional navigation (PN), short time stability, pursuit dynamics

1. PhD. Student
2. Associate Professor (Corresponding Author)

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۳/ شمارهٔ ۱ و ۲/ بهار و تابستان ۱۳۸۹
ص. ص ۴۴- ۳۷

# طراحی قانون هدایت با استفاده از روش پایداری زمان کوتاه

**ایمان محمدزمان[1]* و حمیدرضا مؤمنی[2]**

**۱ و ۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس**

*تهران، جلال آل احمد، پل گیشا

**mohammadzaman@modares.ac.ir**

*در این مقاله یک قانون هدایت به منظور پایداری حلقهٔ هدایت با وجود دینامیک مرتبهٔ اول رهگیر با استفاده از روش پایداری زمان کوتاه طراحی شده است. با توجه به این‌که مسئلهٔ درگیری رهگیر و هدف در یک مدت زمان محدود تعریف می‌شود، لذا استفاده از مفاهیم پایداری زمان کوتاه در آنالیز پایداری حلقهٔ هدایت اهمیت خاصی دارد. قانون ارائه شده علاوه بر نرخ چرخش خط دید، که در هدایت تناسبی مورد استفاده قرار می‌گیرد، از شتاب رهگیر نیز در محاسبهٔ قانون هدایت استفاده کرده است. شرط پایداری به‌دست آمدهٔ یک عبارت تحلیلی برای محدودهٔ پایداری حلقهٔ هدایت بر اساس زمان پرواز است که وابسته به پارامترهای سیستم و بهره‌های قانون هدایت است. با انتخاب و تنظیم بهره‌های حلقهٔ هدایت، شرط پایداری قانون هدایت جدید نسبت به قانون هدایت تناسبی دارای فضای پایداری بیشتر است و محافظه‌کاری کمتری دارد.*

**واژه‌های کلیدی:** هدایت تناسبی، پایداری زمان‌کوتاه، دینامیک رهگیر

## مقدمه

قانون هدایت تناسبی، روشی متداول در هدایت فاز نهایی رهگیرهاست و مقالات زیادی به بررسی عملکرد آن پرداخته‌اند [۱-۳]. این روش برای حالت دینامیک ایده‌آل رهگیر که در آن تأخیری بین اندازه‌گیری نرخ چرخش خط دید و شتاب اعمالی به رهگیر وجود ندارد، عملکرد مناسبی دارد و منجر به برخورد نقطه‌ای بین رهگیر و هدف بدون مانور می‌گردد [۴]. ولیکن در حالت واقعی با درنظرگرفتن دینامیک رهگیر، در انتهای مسیر برخورد، نرخ چرخش خط دید به سمت واگرایی میل می‌کند بنابراین شتاب رهگیر نیز افزایش می‌یابد و حلقهٔ هدایت به سمت ناپایداری حرکت می‌کند. این واگرایی تأثیر زیادی در فاصلهٔ ازدست‌دهی[3] گذاشته‌است و عملکرد حلقهٔ هدایت را کاهش می‌دهد [۵-۸].

تابحال پاسخ بسته‌ای برای حلقهٔ هدایت تناسبی با درنظرگرفتن دینامیک رهگیر، ارائه نشده است. ولیکن می‌توان به بررسی اثر دینامیک رهگیر و بهرهٔ حلقهٔ هدایت در پایداری حلقهٔ هدایت پرداخت. مرجع [۵] به آنالیز قانون هدایت تناسبی با وجود دینامیک رهگیر می‌پردازد و شروط کافی برای برقراری پایداری حلقهٔ هدایت را با استفاده از تعمیم روش پایداری کالمن- یاکوبویچ- پوپوف ارائه کرده است. در این مرجع، یک عبارت تحلیلی از زمان باقیمانده تا برخورد برای تضمین پایداری بیان کرده است. مرجع [۶] نتایج ارائه شده در مرجع [۵] را بسط داده و از روش ملاک دایره برای به‌دست‌آوردن شرط پایداری حلقهٔ هدایت استفاده کرده است. با استفاده از ملاک دایره، شرایط کافی پایداری برای هر زمان پرواز دلخواه به‌دست می‌آید و نتایج مرجع [۵] را که فقط برای زمان‌های پرواز طولانی مورد استفاده قرار می‌گرفت بسط داده است. در مرجع [۷] با استفاده از ملاک دایره، شروط کافی پایداری حلقهٔ هدایت با درنظرگرفتن دینامیک رهگیر برای قانون هدایت متناسب با چرخش خط دید را ارائه کرده است. در مرجع [۸] با استفاده از تعریف پایداری زمان کوتاه[4] شروط کافی پایداری حلقهٔ هدایت با

۱. دانشجوی دکتری

۲. دانشیار (نویسندهٔ مخاطب)

3. Miss Distance

4. Short Time Stability

درنظرگرفتن قانون هدایت تناسبی و دینامیک رهگیر را به‌دست آورده است. شروط به‌دست‌آمده در این حالت محافظه‌کاری کمتری نسبت به پایداری پوپوف دارد.

موارد بیان‌شده با درنظرگرفتن هدایت تناسبی مانند قانون هدایت اعمالی به رهگیر است که به آنالیز حلقهٔ هدایت با درنظرگرفتن دینامیک رهگیر پرداخته است. اما برای طراحی قانون هدایت می‌توان از ایدهٔ پایداری زمان کوتاه استفاده کرد- تابحال طراحی قانون هدایت با درنظرگرفتن دینامیک رهگیر با استفاده از ایدهٔ پایداری زمان کوتاه گزارش نشده است. مرجع [۳] با استفاده از تئوری کنترل کلاسیک و قانون هدایت تناسبی، به طراحی قانون هدایت برای نزدیک‌شدن شتاب واقعی رهگیر به فرمان شتاب پرداخته است. این مقاله از شتاب رهگیر برای بهبود فاصلهٔ ازدست‌دهی استفاده کرده‌است ولیکن پایداری حلقهٔ هدایت و شروط لازم برای تضمین همگرایی حالت‌های سیستم ارائه نشده است. در مرجع [۹] کلاس جدیدی از قوانین هدایت تناسبی با استفاده از روش لیاپانوف و حل مسئلهٔ پایداری با فرض ایده‌آل بودن دینامیک رهگیر به‌دست آمده‌است. تابع لیاپانوف در این حالت، مربع نرخ چرخش خط دید درنظرگرفته شده‌است. مرجع [۱۰] به‌جای استفاده از تقریب کوچک‌بودن زاویهٔ خط دید در مرجع [۹]، از حالت کلی غیرخطی استفاده کرده‌است. مرجع [۱۱] یک روش به‌منظور انتخاب متغیرهای مورد استفاده در سنتز لیاپانوف پیشنهاد کرده‌است که از رخ‌دادن حالت تکین در مرجع [۹] و [۱۰] جلوگیری می‌کند. مرجع [۱۲] نتایج به‌دست آمده از مرجع [۱۰] را به حالت سه بعدی تعمیم داده است. قوانین هدایت اشاره شده، بر اساس تئوری لیاپانوف طراحی شده‌است و پایداری نمایی یا مجانبی را بررسی می‌کنند. این قوانین نرخ چرخش خط دید را با گذشت زمان به بی‌نهایت به سمت صفر یا همسایگی کوچکی از آن هدایت می‌کنند. این موارد با مشاهدات عملی مطابقت ندارد. در بسیاری از کاربردها، زمان هدایت نهایی بسیار کوتاه و گاهی اوقات در حد چند ثانیه بوده‌است؛ به‌طوری‌که قانون هدایت باید محدود بودن نرخ چرخش خط دید را در زمان محدود تضمین کند. در پایداری زمان کوتاه، پایداری در مدت زمان محدودی تعریف و بررسی می‌شود [۱۳]. مرجع [۱۴] نیز با ارائهٔ رویکردی جدید از پایداری زمان محدود، یک قانون هدایت با همگرایی زمان محدود بر اساس نامساوی دیفرانسیلی لیاپانوف ارائه کرده است. این قانون در حالت‌های خاص مشابه قانون هدایت مد لغزشی است و شرط پایداری زمان محدود را نیز ارضا می‌کند، ولی دینامیک رهگیر در این مقاله به‌صورت ایده‌آل درنظرگرفته شده است.

در این مقاله، با استفاده از تئوری پایداری زمان کوتاه [۱۵] و استفاده از آن در آنالیز پایداری حلقهٔ هدایت، به طراحی قانون هدایت پرداخته شده‌است و رفتار مسیرهای حالت در یک بازهٔ زمانی مشخص‌شده با درنظرگرفتن دینامیک مرتبهٔ اول برای رهگیر بررسی می‌گردد. قانون هدایت ارائه شده در این مقاله، از شتاب رهگیر و نرخ چرخش خط دید بین رهگیر و هدف، بازخورد[5] می‌گیرد و در نهایت یک عبارت تحلیلی برای برقراری پایداری زمان کوتاه حلقهٔ هدایت ارائه می‌کند. با استفاده از شرط به‌دست آمده، می‌توان بهره‌های حلقهٔ هدایت را طوری تنظیم کرد که ناحیهٔ همگرایی افزایش یابد. همچنین آنالیز پایداری حلقهٔ هدایت نشان داده است که پایداری قانون هدایت جدید محافظه‌کاری کمتری نسبت به پایداری قانون هدایت تناسبی دارد و ناحیهٔ همگرای آن افزایش یافته است.

## سینماتیک نسبی بین رهگیر و هدف

مطابق شکل (۱)، سینماتیک نسبی بین رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\dot{r} = -2\frac{\dot{R}}{R}r + \frac{1}{R}(a_{t_\theta} - a_{m_\theta}) \qquad (۱)$$

که در آن $R$ فاصلهٔ نسبی هدف و رهگیر، $\dot{R}$ مشتق اول فاصلهٔ نسبی هدف و رهگیر نسبت به زمان، $r$ نرخ چرخش خط دید و $a_{t_\theta}$ و $a_{m_\theta}$ به‌ترتیب شتاب هدف و رهگیر در راستای عمود بر خط دید هستند. اگر رهگیر با سرعت نزدیک‌شوندگی ثابت $V_C$ به هدف برخورد کند، برد $R$ به‌سادگی به‌صورت $R = V_C t_{go}$ نمایش داده می‌شود که در آن $t_{go}$ نشان‌دهندهٔ زمان باقیمانده تا برخورد بین رهگیر و هدف است. همچنین $V_C = -\dot{R}$ است. در نتیجه معادلهٔ غیرخطی (۱) تبدیل به معادلهٔ خطی زیر می‌شود:

$$V_C t_{go}\dot{r} - 2V_C r = -a_{m_\theta} + a_{t_\theta} \qquad (۲)$$

با تعریف متغیر $\delta = V_C r$، معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{\delta} = \frac{2}{t_{go}}\delta + \frac{1}{t_{go}}(-a_{m_\theta} + a_{t_\theta}) \qquad (۳)$$

در بسیاری از مقالات، دینامیک رهگیر و اتوپایلوت را به‌صورت ایده‌آل درنظر می‌گیرد و $a_{m_\theta}$ همان فرمان شتاب ایجادشده توسط قانون هدایت است. ولیکن در حالت واقعی، سیستم پرنده شامل دینامیک وسیلهٔ پرنده، اتوپایلوت و عملگر است و درنظرنگرفتن این دینامیک در طراحی قانون هدایت ممکن است حتی منجر به ناپایداری حلقهٔ هدایت شود. به‌طورکلی دینامیک رهگیر در حالت حلقه‌بسته و با وجود اتوپایلوت را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

5. Feedback

$$\dot{x}_m = F_m x_m + G_m a_{mc} \quad (۴)$$

$$a_{m_\theta} = H_m x_m \quad (۵)$$

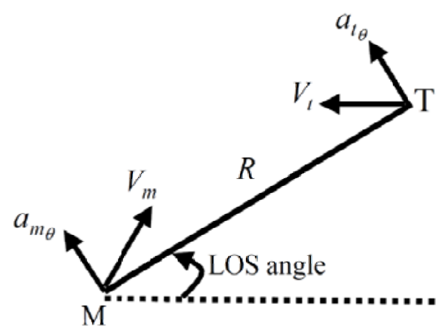
که در آن $x_m$ حالت‌های جسم پرنده، $F_m$، $G_m$ و $H_m$ ماتریس‌هـایی با ابعاد مناسب و $a_{mc}$ فرمان شتاب تولید شده توسط قانون هدایت اسـت. در این مقاله، قانون هدایت به‌صورت فیدبک حالت از $a_{m_\theta}$ و $\delta$ به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$a_{mc} = K_1\delta + K_2 a_{m_\theta} \quad (۶)$$

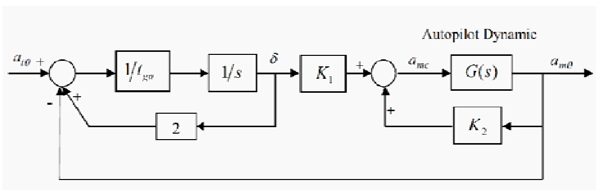
با استفاده از معادلات (۳) تا (۶)، دینامیک حلقۀ هدایت به‌صورت معادلات دیفرانسیل خطی متغیر با زمان همگن زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/t_{go} & (-1/t_{go})H_m \\ K_1 G_m & F_m + G_m K_2 H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1/t_{go})a_{t_\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

در شکل (۲)، بلوک دیاگرام حلقۀ هدایت با قانون هدایت جدید و درنظر گرفتن دینامیک رهگیر نشان داده شده است. در این شکل $K_1$ و $K_2$ بهره‌های حلقۀ هدایت با توجه به قانون ارائه شده مطابق رابطۀ (۷) است و $G(s)$ تابع تبدیل دینامیک رهگیر یا به عبارت دیگر دینامیک اتوپایلوت است که در این مقاله به‌صورت سیستم درجۀ اول درنظر گرفته شده است.




**شکل ۱**– سینماتیک نسبی رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی




**شکل ۲**– بلوک دیاگرام حلقۀ هدایت با استفاده از قانون هدایت جدید

## پایداری زمان کوتاه

در سیستمی با شرایط اولیۀ محدود، اگر حالت‌های آن در یک بازۀ زمانی معین از حد مشخصی تجاوز نکنند به آن پایداری زمان کوتاه گفته می‌شود [۱۳-۱۵]. باید توجه داشت که پایداری مجانبی لیاپانوف و پایداری زمان محدود دو مفهوم مجزاست و یک سیستم می‌تواند پایداری مجانبی لیاپانوف داشته باشد ولی به‌صورت زمان کوتاه پایدار نباشد و بالعکس [۱۵]. پایداری مجانبی لیاپانوف برای مطالعۀ رفتار سیستمی در یک بازۀ زمانی به‌اندازۀ کافی بزرگ مناسب است؛ درحالی‌که پایداری زمان کوتاه برای بررسی رفتار سیستم‌های با بازۀ زمانی محدود مناسب است. نتایج پایداری زمان محدود در مرجع [۸] برای حالت‌های عمومی‌تر شامل وزن‌های متغیر با زمان حالت‌ها و باندهای متغیر با زمان بسط داده شده است و شرایط کافی برای پایداری زمان محدود هدایت تناسبی ارائه شده است. در این مقاله از نتایج به‌دست آمده در مرجع [۸] برای طراحی قانون هدایت جدید با استفاده از پایداری زمان کوتاه استفاده می‌شود.

تعریف ۱ (پایداری زمان کوتاه [۸]): یک سیستم خطی متغیر با زمان به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t), \quad x \in R^n, \quad F(t) \in R^{n\times n} \quad (۸)$$

با توجه به ماتریس مثبت معین $P(t) \in R^{n\times n}$، $C(t) \in R_+$، $C_0 \in R_+$ و $T \in R_+$، سیستم (۸) پایدار P زمان کوتاه گفته می‌شود اگر

$$x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) \le C_0 \quad (۹)$$

دلالت بر:

$$x^T(t)P(t)x(t) \le C(t) \quad (۱۰)$$

در بازه زمانی $[t_0, t_0 + T]$ داشته باشد.

ماتریس مثبت معین $P(t)$ یک وزن متغیر با زمان بر روی حالت‌هاست و اسکالر $C(t)$ مشخص‌کنندۀ باند متغیر با زمان نرم حالت در زمان $t$ است. یک شرط لازم برای پایداری P زمان‌محدود در قضیۀ زیر آمده است.

قضیه ۱ (شرط لازم برای پایداری P زمان‌محدود [۸]): فرض می‌شود ماتریس متقارن مثبت معین $P(t) \in R^{n\times n}$ به‌صورت $P(t) = N^T(t)N(t)$ تجزیه شده که $N(t) \in R^{n\times n}$ یک ماتریس غیرتکین است و ماتریس $U(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(t) \equiv (\dot{N}N^{-1})^T + \dot{N}N^{-1} + (NFN^{-1})^T + NFN^{-1} \quad (۱۱)$$

آن‌گاه سیستم (۸) پایداری P زمان‌محدود با توجه به $P(t)$، $C(t)$، $C_0$ و $T$ است اگر ماتریس $H(t)$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود برای تمامی زمان‌های $t \in [t_0, t_0 + T]$ معین منفی نباشد.

$$H(t) \equiv \left[ -U + \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} I \right] \tag{۱۲}$$

## طراحی قانون هدایت با استفاده از تئوری پایداری زمان کوتاه

از دیدگاه عملی، از آن‌جا که حلقهٔ هدایت در مدت زمان محدودی عمل می‌کند، استفاده از ایدهٔ پایداری زمان کوتاه برای بررسی مفهومی قانون هدایت ارائه شده مناسب است. در این قسمت به بررسی پایداری زمان محدود قانون هدایت ارائه شده پرداخته می‌شود.

لم ۱: یک سیستم خطی متغیر با زمان به‌صورت زیر درنظرگرفته می‌شود:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \tag{۱۳}$$

اگر پارامترهای سیستم $F(t)$ و $G(t)$ و ورودی $u(t)$ شروط زیر را ارضا کنند:

$$\|F(t)\| > \varepsilon_F, \qquad \|G(t)\| < \delta_G, \qquad \|u(t)\| < \delta_u \tag{۱۴}$$

که $\varepsilon_F > 0$، $\delta_G < \infty$ و $\delta_u < \infty$ آن‌گاه محدود بودن $\|\dot{x}(t)\|$ بیان‌کنندهٔ محدودبودن $\|x(t)\|$ است [۸].

لم ۱، استفاده از $\|\dot{x}_m(t)\|$ به‌جای $\|x_m(t)\|$ را برای تست محدودبودن $\|x_m(t)\|$ توجیه می‌کند. با توجه به مفهوم لم ۱، بردار حالت جدید $\xi$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi \equiv \dot{x}_m \tag{۱۵}$$

آن‌گاه $x_m$ بر اساس ترم‌های $\xi$ و $\delta$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x_m = (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1}\xi - (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} K_1 G_m \delta \tag{۱۶}$$

همچنین دینامیک حلقهٔ هدایت که در معادلهٔ (۷) بیان شد با فرض هدف بدون مانور بر اساس $\xi$ و $\delta$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{\delta} = \left( \frac{2}{t_{go}} + \frac{1}{t_{go}} H_m (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} K_1 G_m \right)\delta - \frac{1}{t_{go}} H_m (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} \xi \tag{۱۷}$$

$$\dot{\xi} = \{-\frac{1}{t_{go}} K_1 G_m H_m (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} + (F_m + G_m K_2 H_m)\}\xi + K_1 G_m \{\frac{2}{t_{go}} + \frac{1}{t_{go}} H_m (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} K_1 G_m\}\delta \tag{۱۸}$$

حلقهٔ هدایت آشیانه‌یاب شامل دینامیک جستجوگر، کامپیوتر هدایت و دینامیک رهگیر است. در این مقاله، جستجوگر به‌صورت یک انتگرال‌گیر خالص مدل شده‌است که نرخ چرخش خط دید را بدون تأخیر تولید می‌کند. کامپیوتر هدایت به‌صورت یک تابع جبری که فرمان شتاب را با استفاده از اطلاعات به‌دست آمده از جستجوگر محاسبه می‌کند، مدل شده است. دینامیک رهگیر و اتوپایلوت که شامل دینامیک وسیله، اتوپایلوت و عملگر است، به‌صورت سیستم درجهٔ یک مدل شده است. بدون ازدست‌دادن عمومیت مسئله، بهرهٔ dc تابع تبدیل رهگیر از فرمان هدایت به شتاب رهگیر، یک فرض شده است. به عبارت دیگر $H_m F_m^{-1} G_m = -1$ است و این بدان معناست که شتاب رهگیر در حالت ماندگار، فرمان هدایت را تعقیب می‌کند. همچنین فرض می‌شود دینامیک رهگیر و اتوپایلوت به‌صورت یک سیستم درجهٔ یک مدل شده است:

$$\frac{a_{m\theta}(s)}{a_{mc}(s)} = \frac{1}{\alpha s + 1} \tag{۱۹}$$

که معادل تحقق فضای حالت با $F_m = -1/\alpha$، $G_m = 1/\alpha$ و $H_m = 1$ است. با استفاده از تبدیل $\xi = \varepsilon\varsigma$، معادلهٔ (۱۷) و (۱۸) به‌صورت رابطهٔ (۲۰) نوشته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\varsigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{t_{go}} + \frac{K_1}{t_{go}(K_2 - 1)} & \frac{-1}{t_{go}} \frac{\alpha}{(K_2 - 1)} \varepsilon \\ \frac{2K_1}{\alpha t_{go} \varepsilon} + \frac{K_1^2}{\alpha t_{go}(K_2 - 1)\varepsilon} & \frac{(K_2 - 1)}{\alpha} - \frac{K_1}{t_{go}(K_2 - 1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \varsigma \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{t_{go}}\left(2 + \frac{K_1}{(K_2 - 1)}\right) & \frac{1}{t_{go}}\left(\frac{-\alpha}{(K_2 - 1)}\varepsilon + \frac{2K_1}{\alpha\varepsilon} + \frac{K_1^2}{\alpha(K_2 - 1)\varepsilon}\right) \\ \frac{1}{t_{go}}\left(\frac{-\alpha}{(K_2 - 1)}\varepsilon + \frac{2K_1}{\alpha\varepsilon} + \frac{K_1^2}{\alpha(K_2 - 1)\varepsilon}\right) & \frac{2(K_2 - 1)}{\alpha} - \frac{2K_1}{t_{go}(K_2 - 1)} \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

که در آن $\varepsilon$ یک پارامتر آزاد برای کاهش محافظه‌کاری شرط پایداری است. دقت شود که معنای فیزیکی پایداری زمان‌کوتاه وابسته به پارامترهایی مانند $P(t)$، $C(t)$ و $C_0$ دارد. در این مقاله، این پارامترها بر اساس تعریف زیر از پایداری حلقهٔ هدایت مشخص شده‌اند.

*تعریف ۲ (پایداری حلقهٔ هدایت):* یک حلقهٔ هدایت پایدار گفته می‌شود اگر خاصیت‌های زیر ارضا شوند:

خاصیت ۱: حالت‌های رهگیر و اتوپایلوت محدود باشند.
خاصیت ۲: نرخ چرخش خط دید محدود باشد.
خاصیت ۳: فرمان شتاب محدود باشد.

مطابق رابطهٔ (۶)، فرمان شتاب با استفاده از نرخ چرخش خط دید و حالت خروجی رهگیر و اتوپایلوت (شتاب رهگیر) محاسبه

می‌شود. لذا محدود بودن آن‌ها باعث محدود ماندن فرمان شتاب خواهد بود و برآورده شدن خاصیت ۱ و ۲ منجر به برآورده شدن خاصیت ۳ می‌شود.

یکی دیگر از پارامترهای مهم در بررسی قانون هدایت، میزان فاصلهٔ ازدست دهی صفر[6] است. تعریف فاصلهٔ ازدست‌دهی صفر بدین صورت است که اگر هدف بر روی مسیر فعلی خود و بدون مانور حرکت کند و رهگیر مانور، اصلاحی دیگری انجام ندهد چه فاصله‌ای بین رهگیر و هدف ایجاد می‌شود. این فاصله با فرض زمان باقیمانده تا برخورد نسبتاً کوچک و دینامیک نسبتاً سریع رهگیر به‌صورت تقریبی با رابطهٔ زیر بیان می‌شود [۱] و [۸]:

$$ZEM(t)=\delta(t)t_{go}^2 \quad (۲۲)$$

بنابراین طبق خاصیت ۲ و رابطهٔ (۲۱)، با گذشت زمان به سمت $t_F$ فاصلهٔ ازدست‌دهی صفر به سمت صفر میل می‌کند و لذا شرط برخورد بین رهگیر و هدف نیز برآورده می‌شود. با افزایش ناحیهٔ پایداری حلقهٔ هدایت، زمان پایداری حلقهٔ هدایت افزایش می‌یابد و این به معنای آن است که به ازای $t_{go}$ کوچک‌تری پایداری برقرار است و لذا فاصلهٔ ازدست‌دهی صفر کمتر می‌شود و به سمت برخورد نقطه‌ای با هدف در زمان $t_F$ پیش می‌رود.

تعریف ۲ می‌تواند به‌صورت مسئلهٔ پایداری P زمان محدود به‌وسیلهٔ انتخاب مناسب وزن P و باند مناسب برای $x^TPx$ فرموله شود. برای مثال مطابق [۸] می‌توان $P(t)$ به‌صورت ماتریس واحد و $C(t)$ یک عدد ثابت درنظرگرفته شود و $U(t)$ به‌صورت رابطهٔ (۲۲) به‌دست می‌آید.

با توجه به رابطهٔ (۲۲)، شرط کافی برای پایداری زمان محدود با استفاده از قضیهٔ ۱ به‌صورت زیر است:

$$K_2<1 \quad (۲۳)$$

$$K_1\geq 2(1-K_2) \quad (۲۴)$$

$$t_{go}\geq\frac{K_1\alpha}{(K_2-1)^2}+\frac{(-\alpha^2\varepsilon^2+2K_1(K_2-1)+K_1^2)^2}{\alpha\varepsilon^2(8K_2-8+4K_1)(K_2-1)^2} \quad (۲۵)$$

به‌منظور کمینه‌کردن حد پایین $t_{go}$ در شرط پایداری (۲۵)، پارامتر آزاد $\varepsilon$ به‌صورت زیر درنظرگرفته می‌شود:

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{K_1^2-2K_1+2K_1K_2}}{\alpha} \quad (۲۶)$$

و لذا رابطهٔ (۲۵) به‌صورت زیر ساده‌تر می‌شود:

$$t_{go}\geq\frac{K_1\alpha}{(K_2-1)^2} \quad (۲۷)$$

6. Zero Effort Miss

شرط به‌دست‌آمده از این روابط را می‌توان برای تعیین پارامترهای سیستم و طراحی قانون هدایت نیز استفاده کرد. در حالت خاص اگر $K_2=0$ درنظرگرفته شود، قانون هدایت، تبدیل به هدایت تناسبی می‌شود و شروط پایداری آن به‌صورت زیر است:

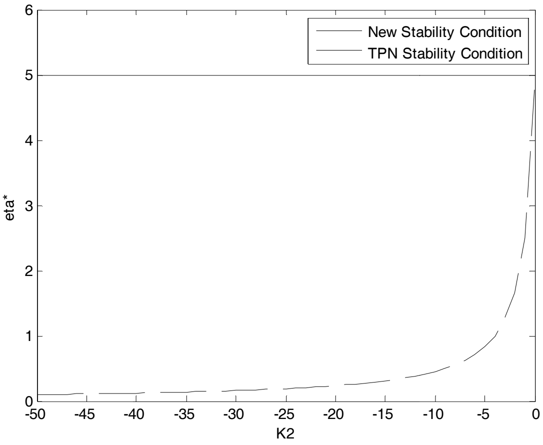
$$K_1=N\geq 2 \quad (۲۸)$$

$$t_{go}\geq K_1\alpha \quad (۲۹)$$

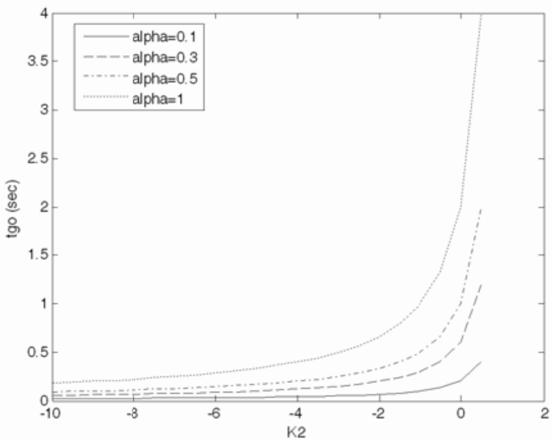
که در آن N ضریب ناوبری تناسبی است. این شروط درست مطابق شروط به‌دست آمده در مراجع مختلف برای پایداری زمان کوتاه هدایت تناسبی است [۸]. با توجه به رابطهٔ (۲۷) مشاهده می‌شود که قانون طراحی‌شدهٔ جدید حد پایداری بیشتری نسبت به هدایت تناسبی دارد و با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی می‌توان به نتایج بهتری نسبت به هدایت تناسبی رسید. مطابق شرط (۲۳) و (۲۷) هرچه مقدار $K_2$ کاهش یابد و به سمت اعداد منفی‌تر میل کند، ناحیهٔ پایداری افزایش می‌یابد. با افزایش محدودهٔ پایداری حلقهٔ هدایت، عملکرد رهگیر در برخورد با هدف نیز بهبود می‌یابد و خطای ازدست‌دهی صفر و فاصلهٔ ازدست‌دهی کاهش می‌یابد. همچنین به‌صورت تحلیلی می‌توان عملکرد حلقهٔ هدایت را بررسی کرد و مقادیر اولیهٔ مناسبی مانند سرعت اولیهٔ رهگیر، زاویهٔ پرتاب و ... را مشخص کرد تا پایداری حلقهٔ هدایت در مدت زمان بیشتری تضمین شود و نهایتاً عملکرد رهگیر بهبود یابد.

محدودهٔ پایداری قانون هدایت تناسبی و قانون هدایت جدید در شکل (۳)، نمایش داده شده است. با تعریف $\eta^*=t_{go}^*/\alpha$ که در آن $t_{go}^*$ کوچک‌ترین حد زمان باقیمانده تا برخورد به‌منظور حفظ پایداری حلقهٔ هدایت است، می‌توان تغییرات $\eta^*$ را بر حسب تغییرات $K_2$ مشاهده کرد. مطابق شکل برای $K_1=N=5$، شرط پایداری قانون هدایت تناسبی یک شرط ثابت و بدون تغییر نسبت به $K_2$ بوده ولی در قانون هدایت جدید، $\eta^*$ با کاهش $K_2$، کاهش یافته و لذا محدوده پایداری حلقه هدایت افزایش می‌یابد.

شرط پایداری قانون هدایت طراحی شده با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴) و (۲۷) بر حسب مقادیر مختلف $K_2$ و $K_1=2(1-K_2)$ و به ازای مقادیر مختلف ثابت زمانی دینامیک رهگیر در شکل (۴)، نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که برای یک ثابت زمانی مشخص، با کاهش بهرهٔ $K_2$ محدودهٔ پایداری حلقهٔ هدایت افزایش می‌یابد. همچنین، افزایش ثابت زمانی منجر به کاهش ناحیهٔ پایداری حلقهٔ هدایت شده است.




**شکل۳**- مقادیر $\eta^*$ بر اساس شرط قانون هدایت جدید و هدایت تناسبی

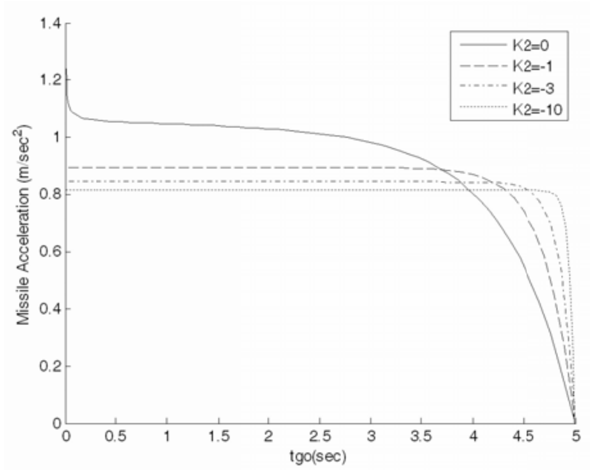



**شکل ۴**- محدودهٔ پایداری حلقهٔ هدایت نسبت به $K_2$ و به ازای مقادیر مختلف ثابت زمانی دینامیک رهگیر

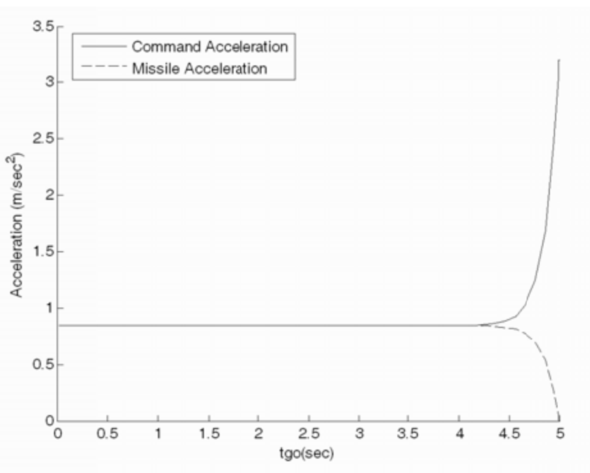
## نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت به شبیه‌سازی عملکرد قانون هدایت طراحی‌شده و تحلیل نتایج پایداری زمان کوتاه آن پرداخته شده است. روابط سینماتیکی خطی‌شده برای بیان حرکت نسبی بین رهگیر و هدف درنظرگرفته شده است. برای تمامی شبیه‌سازی‌ها مطابق مرجع [۸]، مقدار اولیهٔ فاصلهٔ ازدست‌دهی صفر برابر با ۱۰ متر درنظرگرفته شده و شرایط اولیهٔ متغیر حالت $\delta(t)$ با توجه به رابطهٔ (۲۱) به‌صورت $\delta(0) = ZEM(0)/t_f^2$ است. در شکل (۵)، شتاب رهگیر به ازای مقادیر مختلف $K_2$، $K_1 = 2(1-K_2)$، $\alpha = 0.5$ و زمان پایانی $T_f = 5$ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با کاهش بهرهٔ $K_2$ شتاب سیستم به سمت مقادیر کمتر یا به عبارتی پایداری بیشتر رفته است و این نکته مطابق نتیجهٔ به‌دست آمده در قسمت قبل است. در شکل (۶) شتاب رهگیر و فرمان شتاب در قانون هدایت جدید به ازای $\alpha = 0.5$، $K_1 = 8$ و $K_2 = -3$ نشان داده شده است.

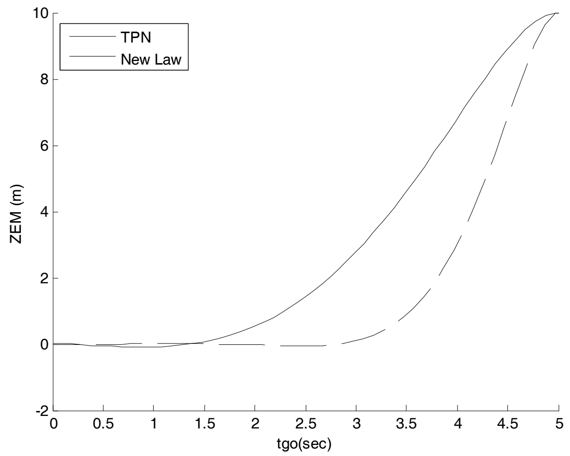
با توجه به روابط پایداری (۲۳) و (۲۴) و (۲۷) برای قانون هدایت جدید و روابط (۲۸) و (۲۹) برای قانون هدایت تناسبی می‌توان گفت اگر ثابت زمانی دینامیک رهگیر $\alpha = 0.5$ و شرط ناپایداری $t_{go} = 1.5$ برای هر دو قانون فرض شود، باید در قانون هدایت تناسبی $N = 3$ درنظرگرفته شود و در قانون هدایت جدید می‌توان بهره‌های حلقهٔ هدایت را به‌صورت $K_1 = 12, K_2 = -1$ در نظر گرفت. در شکل (۷)، خطای ازدست‌دهی صفر برای این دو قانون نشان داده شده است. با توجه به این‌که شرط ناپایداری در هر دو قانون یکسان درنظرگرفته شده است ولیکن قانون هدایت جدید منجر به خطای ازدست‌دهی کمتری نسبت به قانون هدایت تناسبی شده و این مسئله نشان‌دهندهٔ محافظه‌کاری کمتر و ناحیهٔ پایداری بیشتر این قانون است. همچنین فاصلهٔ ازدست دهی قانون جدید نیز نسبت به هدایت تناسبی کمتر شده است.




**شکل ۵**- شتاب رهگیر در قانون هدایت جدید به ازای $\alpha = 0.5$ و مقادیر مختلف $K_2$




**شکل ۶**- شتاب رهگیر و فرمان شتاب در قانون هدایت جدید به ازای $\alpha = 0.5$، $K_1 = 8$ و $K_2 = -3$

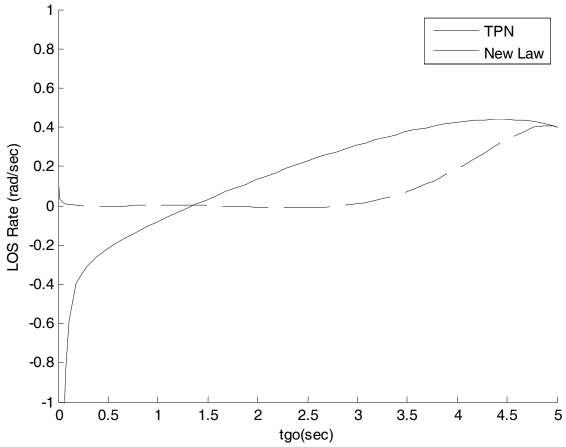



**شکل ۷**- خطای ازدست‌دهی صفر به ازای $\alpha = 0.5$ در قانون هدایت جدید ( $K_1 = 12, K_2 = -1$ ) و قانون هدایت تناسبی ( $N = 3$ )

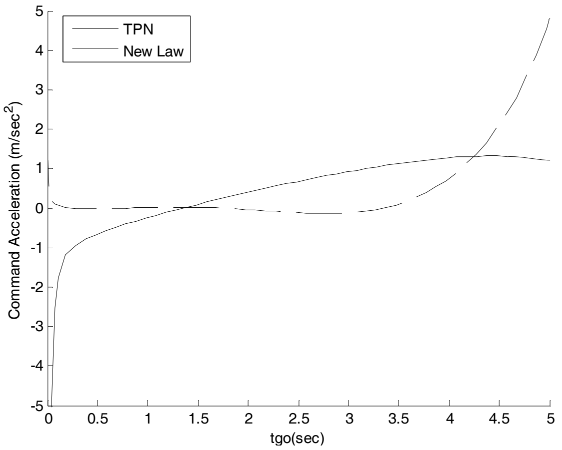
در شکل (۸)، نرخ چرخش خط دید برای مقادیر ذکر شده در بالا برای قانون هدایت جدید و قانون هدایت تناسبی رسم شده است. همان‌طورکه از شکل مشخص است، نرخ چرخش خط دید در قانون هدایت جدید به سمت صفر میل کرده و در لحظات پایانی پرواز نیز محدود است. ولیکن در هدایت تناسبی، نرخ چرخش خط دید در لحظات پایانی پرواز نامحدود شده و این مسئله باعث بروز ناپایداری در لحظات پایانی و فاصلهٔ ازدست‌دهی غیرصفر می‌شود. همچنین قانون هدایت جدید باعث قرارگرفتن رهگیر به‌صورت سریع بر روی خط دید می‌شود بنابراین نرخ چرخش خط دید سریع‌تر از قانون هدایت تناسبی صفر شده است.

در شکل (۹)، فرمان شتاب ناشی از هر دو قانون هدایت نشان داده شده است. در قانون هدایت تناسبی، فرمان شتاب در لحظات انتهایی پرواز  به سرعت افزایش می‌یابد که در این سناریو به ۴۰- متر بر مجذور ثانیه در لحظهٔ پایانی می‌رسد. ولیکن در قانون هدایت جدید، بیشترین دامنهٔ فرمان شتاب در حدود ۵ متر بر مجذور ثانیه است.

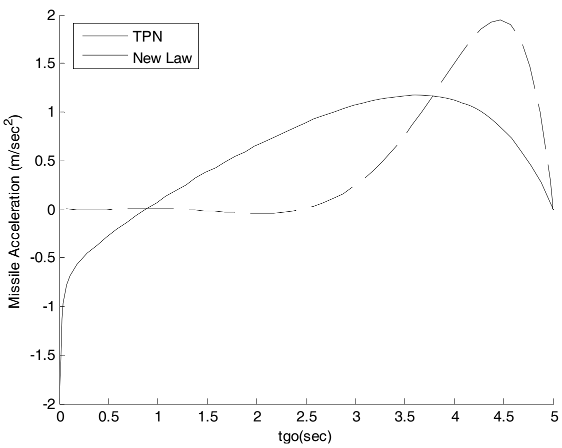
در شکل (۱۰) شتاب اعمالی به رهگیر در هر دو قانون هدایت نشان داده شده است. در قانون جدید، پس از شروع هدایت، شتاب بیشتری نسبت به هدایت تناسبی به رهگیر اعمال می‌شود و در بقیهٔ طول مسیر، شتاب رهگیر تقریباً برابر صفر است و رهگیر بر روی مسیر برخورد قرارگرفته است. این بدان معناست که استراتژی قانون جدید آن است که در ابتدای شروع هدایت، سعی دارد رهگیر را بر روی مسیر برخورد قراردهد. ولیکن در هدایت تناسبی، شتاب رهگیر در لحظات پایانی زیاد می‌شود و با توجه به اینکه در حالت واقعی سرعت رهگیر در ابتدای اعمال قانون هدایت در فاز آشیانه‌یابی بیشتر از لحظات پایانی آن است، لذا ممکن است رهگیر قادر به اعمال این شتاب با استفاده از نیروهای آیرودینامیکی در انتهای زمان پرواز نباشد.




**شکل ۸**- نرخ چرخش خط دید به ازای $\alpha = 0.5$ در قانون هدایت جدید ( $K_1 = 12, K_2 = -1$ ) و قانون هدایت تناسبی ( $N = 3$ )




**شکل ۹**- فرمان شتاب در قانون هدایت جدید و هدایت تناسبی




**شکل ۱۰**- شتاب رهگیر در قانون هدایت جدید و هدایت تناسبی

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک قانون هدایت با استفاده از تئوری پایداری زمان کوتاه و با درنظرگرفتن دینامیک مرتبهٔ اول رهگیر طراحی شده است. قانون ارائه شده، علاوه بر استفاده از نرخ چرخش خط دید از شتاب رهگیر نیز برای تولید فرمان شتاب استفاده می‌کند. محدودهٔ پایداری بر اساس زمان باقیمانده تا برخورد برای دینامیک درجهٔ اول رهگیر به‌دست آمده و شرط پایداری به ازای بهره‌های مختلف حلقهٔ هدایت مورد تحلیل قرارگرفته است. شرط پایداری قانون هدایت ارائه شده در مقایسه با هدایت تناسبی ناحیهٔ پایداری بیشتری دارد و به ازای شرایط مساوی ناپایداری، عملکرد بهتری را از خود نشان می‌دهد.

## مراجع


[1] Zarchan, P., "Tactical and Strategic Missile Guidance," *AIAA Series*, 4th Edition, Vol. 199, 2002, p. 743.

[2] Shneydor, N. A., *Missile Guidance and Pursuit; Kinematics, Dynamics and Control*, Horwood Series in Engineering Science, 1998.

[3] Yanushevsky, R., *Modern Missile Guidance*, CRC Press, Tailor & Francis Group, 2008.

[4] Guelman, M., "A Qualitative Study of Proportional Navigation," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES7, No. 4, 1971, pp. 637-643.

[5] Guelman, M., "The Stability of Proportional Navigation Systems", *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1990, pp. 586-590.

[6] Gurfil, P., Jodorkovsky, M., and Guelman, M., "Finite Time Stability Approach to Proportional Navigation Systems Analysis", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 853-861.

[7] Kim, J. J. and Lyou, J., "Absolut Stability Margin in Missile Guidance Loop", *SICE-ICASE International Joint Conference,* Korea, 2006, pp. 851-855.

[8] Rew, D. Y., Tahk, M. J., and Cho, H., "Short Time Stability of Proportional Navigation Guidance Loop", *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 32, No. 4, 1996, pp. 1107-1115.

[9] Yanushevsky, R. and Boord, W., "Lyapunov Approach to Guidance Laws Design", *Nonlinear Analysis*, 2005, pp. 743-749.

[10] Yanushevsky, R. and Boord, W., "New Approach to Guidance Law Design", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 28, No.1, 2005, pp. 162-166.

[11] Lechevin, N. and Rabbath, C. A., "Lyapunov-Based Nonlinear Missile Guidance", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 27, No.6, 2005, pp. 1096-1102.

[12] Yanushevsky, R., "Concerning Lyapunov-Based Guidance", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 29, No.2, 2006, pp. 509-511.

[13] Pardeep, S. and Shrivastava, S. K., "Stability of Dynamic Systems: an Overview," *Journal of Guidance, Control and Dynamics,* Vol. 13, No.3, 1990, pp. 385-393.

[14] Zhou, D. and Sun, S., "Guidance Laws with Finite Time Convergence", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 6, 2009, pp. 1838-1846.

[15] Amato, F., Ariola, M. and Cosentino, C., "Finite-Time Stability of Linear Time-Varying Systems: Analysis and Controller Design", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 55, No. 4, 2010, pp. 1003-1008.