

# Optimal Impulsive Maneuver Between Elliptical Coplanar-Noncoaxial Orbits

M. Navabi<sup>1\*</sup> and M. Sanatifar<sup>2</sup>

1, 2. Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University

\* Daneshjo Boulevard, Beheshti Ave., Tehran, IRAN

sciences.edu@gmail.com

*Orbital transfer has a significant role in any space mission. This transfers generally categorized in impulsive and continuous maneuvers. An important challenge is fuel consumption in the maneuver. This problem is considered as a required  $\Delta v$  problem. Hence, minimization of  $\Delta v$  means minimization of fuel consumption orbital transfer. In simple cases, the problem has closed form solution for example transfer between coplanar circular orbits or transfer between coplanar coaxial elliptical orbits. The conventional methods cannot solve complex cases of initial and target orbits. In this paper the impulsive optimal transfer between two coplanar- noncoaxial elliptical orbits is considered. The numerical solution of optimality nonlinear equations is necessary to obtain the solutions of complex problems. According to nonlinearity of equations two issues arise, firstly numerical solution is sensitive to initial guess, secondly the local minimum solutions only may be find. In this paper some equations have been derived that using them behavior of required  $\Delta v$  function can be investigate based on various values of independent variables and can be find the boundary of global solution. In this way one can be determined a reasonable and proper initial guess for nonlinear solver. The proposed methodology is applied to an example and the results are provided. The results include the local and global solutions and they show a good ability of the proposed method.*

**Keywords:** consumption orbital transfer, minimization, noncoaxial elliptical

---

1. Assistant Professor (Corresponding Author)  
2. M.Sc. Student

# انتقال بهینه مداری ضربهای بین مدارهای بیضوی هم صفحه و غیر هم محور

محمد نوابی<sup>۱\*</sup> و محمد صنعتی فر<sup>۲</sup>

۱ و ۲- مهندسی فضایی، دانشکده مهندسی فناوری های نوین، دانشگاه شهید بهشتی

\*تهران، خ دکتر بهشتی، بلوار دانشجو

sciences.edu@gmail.com

انتقال ماهواره ها بین مدارها، در هر مأموریت فضایی جایگاه ویژه ای دارد. این انتقال ها از دیدگاه کلی به دو دسته انتقال ضربهای و پیوسته تقسیم بندی می شوند. مسئله مهم در هر انتقال، میزان سوخت مصرفی برای انجام انتقال است. این مسئله در انتقال ضربهای به صورت  $\Delta v$  (تغییرات سرعت مورد نیاز برای انتقال) مورد بررسی قرار می گیرد. در نتیجه می توان گفت، در هر انتقال ضربهای حداقل سازی  $\Delta v$  به معنی حداقل سازی مصرف سوخت مورد نیاز برای انتقال است. در حالت های ساده هندسی مدارها، مانند انتقال دایره به دایره، بیضی به بیضی های هم محور و نظایر آنها، انتقال پاسخ های بسته دارد ولی با پیچیده تر شدن هندسه مدارهای اولیه و هدف، روش های معمول قادر به حل مسئله نیستند. در این مقاله، مسئله انتقال بهینه مداری ضربهای بین مدارهای بیضوی غیر هم محور مورد مطالعه قرار می گیرد. به منظور حل مسائل مانور مداری با هندسه پیچیده تر، نیاز به حل عددی معادلات غیر خطی مستخرج از بهینه سازی است. با توجه به غیر خطی بودن معادلات، اولاً، حل عددی این معادلات به مقادیر حدس اولیه بسیار حساس است و روند همگرایی بسیار کند است و ثانیاً حل این معادلات تنها به پاسخ های مینیمم محلی منجر می شوند. در این مقاله، معادلاتی استخراج شده اند که با استفاده از این معادلات الگوریتم مؤثری برای حل معادلات، ارائه شده است که به کمک این الگوریتم رفتار تابع  $\Delta v$  مورد نیاز برای انتقال براساس مقادیر مختلف متغیرهای مستقل مورد بررسی قرار گرفته است که با استفاده از آن محدوده پاسخ کلی مسئله تعیین می گردد. همچنین با استفاده از محدوده پاسخ به دست آمده، مقادیر حدس اولیه برای توابع حل کننده در نظر گرفته شده که پاسخ نهایی با دقت مورد قبول و در زمان کم و با نرخ همگرایی بالا به دست می آید. الگوریتم پیشنهادی برای یک حل مثال عددی استفاده و نتایج ارائه شده است. نتایج شامل جواب های محلی و کلی است که نشان دهنده توانایی خوب روش پیشنهادی است.

واژه های کلیدی: انتقال مداری بهینه، مینیمم محلی، مانور ضربهای، بیضوی غیر هم محور

## مقدمه

مدار مأموریتی خود منتقل شود [۱]. همچنین مدار ماهواره ها باید به صورت دوره ای تصحیح شود، زیرا نیروهای اغتشاشی مختلفی به ماهواره وارد می شود که در نتیجه ماهواره را از مدار مأموریتی خود خارج می سازد. مدارهای عملیاتی ماهواره ها با توجه به مأموریت تعریف شده برای آن، می توانند از لحاظ شکل مدار، اندازه مدار، نوع مدار کاملاً متفاوت باشند که این مسئله پیچیدگی مسئله انتقال بین مدار را افزون می کند. انتقال به مدار مأموریتی، عموماً توسط

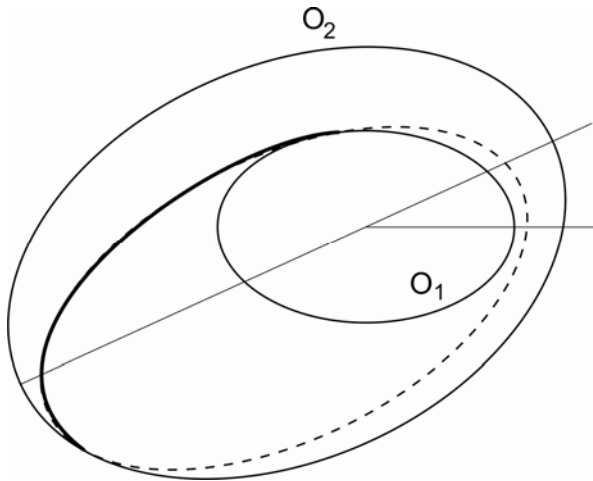
ماهواره ها در فضا، نیازمند انتقال مداری هستند زیرا پس از پرتاب معمولاً در مدار پارک قرار می گیرند و ماهواره باید از این مدار به

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)  
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

کنون دو جواب ارائه شده بود که در این مقاله ۶ جواب ممکن ارائه می‌شود.

### تعریف مسئله

می‌خواهیم از نقطه‌ای روی مدار  $O_1$  به نقطه‌ای روی مدار  $O_2$  برویم با این فرض که مجموع میزان ضربه مورد نیاز جهت رفتن از مدار  $O_1$  به مدار انتقالی و سپس از مدار انتقالی به مدار  $O_2$  کم‌ترین میزان ممکن باشد. شماتیک مسئله به صورت شکل (۱) است.



شکل ۱ - شماتیک از انتقال بهینه از مدار  $O_1$  به مدار  $O_2$

در اینجا هدف، ابتدا انتخاب مناسب این نقاط یعنی تروانومالی آن‌هاست. از آنجاکه پس از انتخاب این نقاط، مدارهای متفاوتی هستند که از این نقاط بگذرند و کانون اصلی آنها نیز مرکز جسم جذاب باشد، تعیین نیم‌شکم مداری یا نیم‌قطر اصلی مدار انتقالی نیز لازم است.

### معادلات پایه‌ای مسئله

در این قسمت با استفاده از فرض انتقال دوضربه‌ای معادلات پایه‌ای مسئله انتقال ارائه می‌شود. رابطه  $\Delta V$  کل به صورت زیر است.

$$\Delta V = v_1 + v_2 \quad (2)$$

در رابطه بالا،  $v_1$  همان میزان ضربه اول است و  $v_2$  مقدار ضربه دوم را نشان می‌دهد. فرض کنیم معادله حرکت در دستگاه قطبی به صورت زیر باشد:

$$u = a + b \cos(\theta - \omega) \quad (3)$$

که در آن  $a$  و  $b$  و  $\omega$  مقادیر ثابتی هستند که  $a$  و  $b$  بر حسب پارامترهای مداری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a = \frac{1}{\gamma} \quad ; \quad b = ae \quad (4)$$

موتورهای نصب شده روی ماهواره صورت می‌پذیرد و در نتیجه حداقل‌سازی مصرف سوخت مورد نیاز برای انتقال، همواره مورد توجه قرار می‌گیرد. با توجه به فناوری در دسترس و رایج که موتورهای راکتی هستند، بحث انتقال بین مداری با یک فرض نزدیک به واقعیت بررسی می‌شود. این فرض، تغییر لحظه‌ای سرعت است که در بحث‌های فضایی به خصوص طراحی‌های اولیه، عمدتاً مورد استفاده قرار می‌گیرد. در انتقال ضربه‌ای، میزان سوخت مصرفی با  $\Delta v$  مورد نیاز برای انتقال به صورت زیر در ارتباط است [۲].

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp}g_0}} \quad (1)$$

در رابطه بالا  $\Delta m$  میزان سوخت مصرفی برای انجام انتقال،  $m$  جرم فضاپیما قبل از روشن شدن موتور،  $g_0$  شتاب جاذبه در سطح دریا و  $I_{sp}$  ضربه ویژه و پیشران و  $\Delta v$  تغییرات سرعت حاصله توسط سیستم پیشران است.

انتقالات مداری ضربه‌ای می‌توانند براساس هندسه مدارهای اولیه و هدف، تعداد ضربات مورد استفاده، تغییر صفحه مداری یا ثابت بودن آن و ... تقسیم‌بندی شوند. در مراجع مختلف، عمدتاً به حالت‌های هندسی ساده برای مدارهای اولیه و هدف پرداخته شده است که به نظر می‌رسد این مسئله به دلیل اجتناب از پیچیدگی‌های خاص ریاضی و هندسی این گونه مسائل است [۳]. در ساده‌ترین حالت، مسئله انتقال بین مدارهای دایروی هم‌صفحه مطرح می‌شوند که اولین بار توسط هومن، مداری برای این انتقال طراحی گردید [۴ و ۵]. این مدار در نقاط حضیض و اوج به مدارهای اولیه و هدف مماس است و ماهواره روی این مدار از نقطه حضیض تا اوج یا بالعکس (بسته به اینکه شعاع مدار اولیه بیشتر است یا شعاع مدار هدف) حرکت می‌کند. این نوع مدار، به عنوان مدار انتقالی هومن شناخته می‌شود. به این انتقالات، که ماهواره از نقطه حضیض یا اوج به نقطه مقابل سفر کند، انتقالات هومن‌گونه گفته می‌شود. در حالت‌های پیچیده‌تر انتقال، مانند حالتی که مدارهای اولیه و هدف بیضی‌های غیرهم‌محور باشند، روش‌های معمول قادر به حل مسئله نیست [۶-۱۱].

در این مقاله، مسئله انتقال بهینه مداری ضربه‌ای بین مدارهای بیضوی غیرهم‌محور مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای حل مسائل مانور مداری با هندسه پیچیده‌تر نیاز به حل عددی معادلات غیرخطی مستخرج از بهینه‌سازی است. پس از استخراج معادلات بهینه‌سازی به استخراج معادلاتی پرداخته می‌شود که روند رسیدن به تمامی جواب‌های ممکن را امکان‌پذیر می‌کند که این معادلات در مقالات موجود ارائه نشده است. روش پیشنهادی به یک مثال عددی اعمال می‌شود و نتایج ارائه می‌شوند. برای این مثال عددی تا

همچنین برای مدارهای انتقالی و هدف نیز می‌توان نوشت:

$$b_2 \cos(\theta_2 - \omega_2) = u_2 - a_2 \quad (۹)$$

$$b \cos(\theta_2 - \omega) = u_2 - a \quad (۱۰)$$

از آنجا که مؤلفه سرعت در راستای عمود بر اعمال ضربه، در نقاط تلاقی قبل و پس از اعمال ضربه ثابت می‌ماند، بنابراین:

$$b_1 \sin(\theta_1 - \omega_1) = \left(u_1 - A_1 a_1^{\frac{1}{2}}\right) \tan \Phi_1 \quad (۱۱)$$

$$b \sin(\theta_1 - \omega) = \left(u_1 - A_1 a^{\frac{1}{2}}\right) \tan \Phi_1 \quad (۱۲)$$

$$b_2 \sin(\theta_2 - \omega_2) = \left(u_2 - A_2 a_2^{\frac{1}{2}}\right) \tan \Phi_2 \quad (۱۳)$$

$$b \sin(\theta_2 - \omega) = \left(u_2 - A_2 a^{\frac{1}{2}}\right) \tan \Phi_2 \quad (۱۴)$$

همچنین اگر از رابطه (۶) نسبت به سه متغیر مستقل معرفی شده مشتق گرفته و برابر صفر قرار داده شود، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{u_1+a}{A_1 a_1^{\frac{1}{2}}} + 1\right) \cos \Phi_1 = \left(\frac{u_2+a}{A_2 a_2^{\frac{1}{2}}} + 1\right) \cos \Phi_2 \quad (۱۵)$$

$$\left(\frac{u_1}{A_1} - A_1\right) \sin \Phi_1 = \left(\frac{u_2}{A_2} - A_2\right) \sin \Phi_2 \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} (u_1 - a) \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{A_1}\right) \cos \Phi_1 + (u_1 - A_1 a^{\frac{1}{2}}) \sin \Phi_1 \tan \Phi_1 = \\ (u_2 - a) \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{A_2}\right) \cos \Phi_2 + (u_2 - A_2 a^{\frac{1}{2}}) \sin \Phi_2 \tan \Phi_2 \end{aligned} \quad (۱۷)$$

معادلات (۱۷-۱۷) می‌توانند برای ۱۱ متغیر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  و  $a$  و  $u_1$  و  $u_2$  و  $b$  و  $\omega$  و  $A_1$  و  $\Phi_1$  و  $A_2$  و  $\Phi_2$  حل شوند. پس از حل این معادلات بر اساس این متغیرها، می‌توان گفت یکی از مینیمم‌های محلی پاسخ مسئله به‌دست آمده‌است.

برای حل این معادلات می‌توان از توابع حل‌کننده معادلات غیرخطی استفاده کرد. البته حدس ۱۱ مقدار اولیه برای ۱۱ متغیر معرفی شده، دشوار است و انتخاب نامناسب مقادیر حدس اولیه برای این متغیرها، روند همگرایی را با اختلال مواجه خواهد کرد.

### شبیه‌سازی و حل مثال نمونه

مثالی به‌صورت زیر در مرجع [۶]، با استفاده از یک روش پیچیده عددی حل شده و تنها ۲ پاسخ برای آن به‌دست آمده است. خصوصیات مدارهای اولیه و هدف و همچنین و پاسخ‌ها به‌صورت زیر هستند. خصوصیات مدار اولیه:

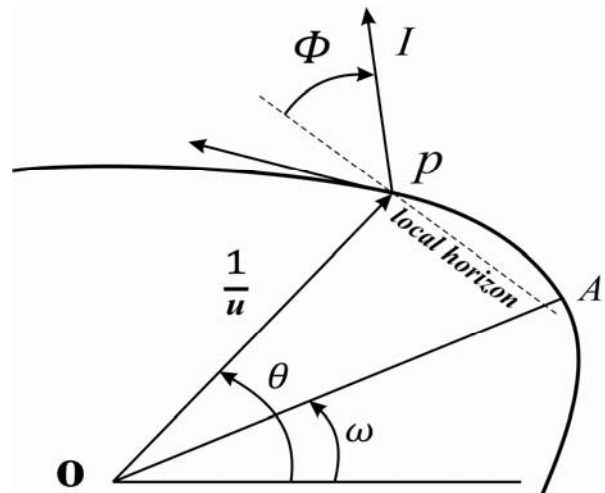
$$a_1 = 3, b_1 = 1, \omega_1 = 0$$

خصوصیات مدار ثانویه:

$$a_2 = 2, b_2 = 1, \omega_2 = 30 \text{ deg}$$

که در این روابط  $l$  نیم شکم مداری و  $e$  خروج از مرکز (اکسنتریسیته) مداری است.

$\omega$  نیز که آرگومان نقطه حضيض است، از خط مرجع مناسب اندازه‌گیری می‌شود. جهت اعمال ضربه نیز در نقطه  $\left(\frac{1}{u}, \theta\right)$  با زاویه  $\Phi$  بین  $0$  تا  $360$  محاسبه می‌شود [۶].



شکل ۲- تعریف زاویه  $\Phi$  و هندسه مداری

در مرجع [۷] اثبات شده است که اگر از یک مدار با مشخصات  $(a, b, \omega)$  به مدار دیگری با مشخصات  $(a', b', \omega')$  که با مدار اولی متقاطع است، در نقطه تقاطع انتقال مداری تک‌ضربه‌ای صورت پذیرد، تغییرات سرعت لازم برای این انتقال از رابطه (۵) به‌دست خواهد آمد.

$$v = \gamma^{1/2} u \left(a'^{-\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right) \sec \Phi \quad (۵)$$

که در آن  $\gamma u^2$  شتاب جاذبه به سمت مرکز جسم جذاب است.

### استخراج معادلات بهینگی

اگر مشخصات مدار اولیه  $(a_1, b_1, \omega_1)$  و مدار هدف  $(a_2, b_2, \omega_2)$  و مدار انتقالی  $(a, b, \omega)$  باشد، در این صورت تغییرات سرعت مورد نیاز برای مانور از رابطه زیر به‌دست خواهد آمد:

$$V = \gamma^{1/2} u_1 \left(a^{-\frac{1}{2}} - a_1^{-\frac{1}{2}}\right) \sec \Phi_1 + \gamma^{1/2} u_2 \left(a_2^{-\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right) \sec \Phi_2 \quad (۶)$$

از آنجا که دو مدار اولیه و انتقالی در نقطه تلاقی متقاطع هستند، فاصله آنها تا مرکز جسم جذاب با یکدیگر برابرند:

$$b_1 \cos(\theta_1 - \omega_1) = u_1 - a_1 \quad (۷)$$

$$b \cos(\theta_1 - \omega) = u_1 - a \quad (۸)$$

پاسخ اول:

$$a = 2.38929, \quad b = 1.37061, \quad \omega = 24.048 \text{ deg}$$

که پارامترهای انتقال به صورت زیر هستند:

$$\theta_1 = 61.245 \text{ deg}, \quad \theta_2 = 185.085 \text{ deg}$$

$$u_1 = 3.48106, \quad u_2 = 1.09306$$

$$\Phi_1 = 7.038 \text{ deg}, \quad \Phi_2 = 8.425 \text{ deg}$$

$$A_1 = -2.09028, \quad A_2 = -1.23814$$

که در این صورت مجموع مقدار تغییرات سرعت مورد نیاز برابر  $V = 0.31058\gamma^{1/2}$  به دست خواهد آمد.

پاسخ دوم:

$$a = 2.51336, \quad b = 0.53909, \quad \omega = 12.244 \text{ deg}$$

که پارامترهای انتقال به صورت زیر هستند:

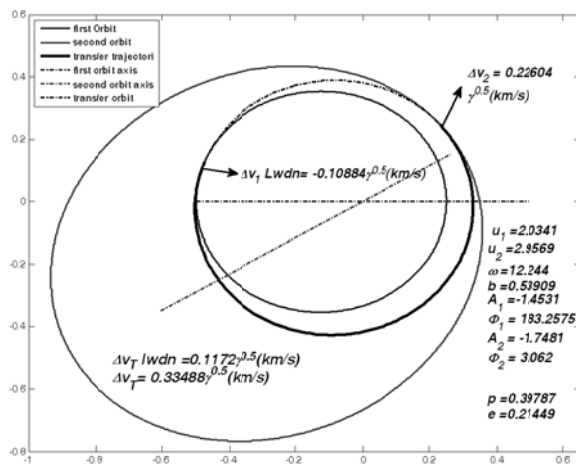
$$\theta_1 = 164.989 \text{ deg}, \quad \theta_2 = 46.883 \text{ deg}$$

$$u_1 = 2.03413, \quad u_2 = 2.95690$$

$$\Phi_1 = 3.257 \text{ deg}, \quad \Phi_2 = 3.062 \text{ deg}$$

$$A_1 = -1.45305, \quad A_2 = -1.74807$$

که در این صورت مقدار کل تغییرات سرعت مورد نیاز برابر  $V = 0.33488\gamma^{1/2}$  به دست خواهد آمد. در این مقاله این مثال با استفاده از توابع حل کننده معادلات غیرخطی، با توجه به اینکه مقادیر حدس اولیه برای این دو پاسخ وجود داشتند، مجدداً حل شده است و هندسه پاسخ اول در شکل (۳) و پاسخ دوم در شکل (۴) ارائه شده است.



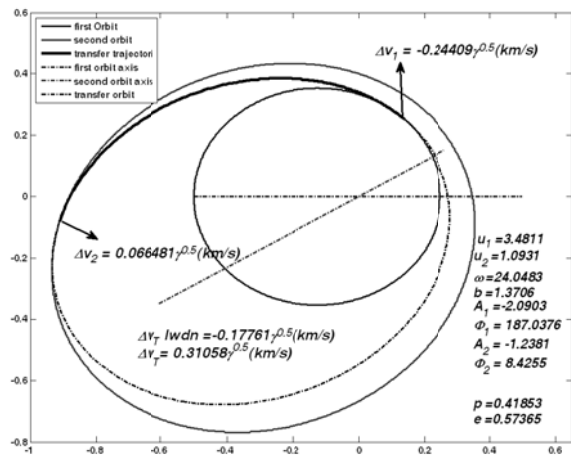
شکل ۴- هندسه پاسخ دوم به همراه پارامترهای مدار انتقالی و  $\Delta V$  لازم برای انتقال

### تحلیل روش حل قبلی و پیشنهاد الگوریتم حل مؤثر

در روند شبیه سازی این نکته مهم حاصل شد، در صورتی که به مقادیر اولیه  $\theta_1$  و  $\theta_2$  و  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  برای پاسخ های اول و دوم، ضریبی از  $\pi$  اضافه یا کم کنیم، پاسخ های دیگری حاصل خواهند شد اما مقدار سرعت از رابطه (۶) منفی به دست خواهد آمد. در [۶] و [۸]، در مورد مقادیر  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  نیز گفته شده است که باید در ربع هایی انتخاب شوند که مقدار به دست آمده برای ضربه لازم از رابطه (۶) را منفی نکنند. اما به نظر می رسد به دست آمدن مقدار منفی از رابطه (۵) یا (۶) برای هر ترم، نشان دهنده این است که جهت اعمال ضربه در خلاف جهت حرکت مداری است، بدین معنی که زاویه تراستر با افق محلی، بیشتر از  $90^\circ$  درجه و کمتر از  $270^\circ$  درجه بوده است، زیرا اگرچه معادلات (۵) یا (۶) به صورت برداری نوشته نشده اند اما با توجه به اینکه مقدار زاویه  $\Phi$  همان طور که در شکل (۲) نیز مشاهده شد، نسبت به جهت حرکت در مدار تعریف شده است بنابراین می تواند مقادیر منفی برای  $\Delta V$  ارائه دهد. لذا با استفاده از رابطه زیر مجدداً مقدار سرعت برای این پاسخ ها به دست آورده شدند.

$$\Delta v = (v_1^2 + v_{t1}^2 - 2v_1v_{t1}\cos(\gamma_1 - \gamma_{t1}))^{0.5} + (v_2^2 + v_{t2}^2 - 2v_2v_{t2}\cos(\gamma_2 - \gamma_{t2}))^{0.5} \quad (18)$$

که در رابطه بالا،  $v_1$  مقدار سرعت و  $\gamma_1$  مقدار زاویه مسیر پرواز روی مدار اولیه در نقطه تلاقی با مدار انتقالی و  $v_{t1}$  مقدار سرعت و  $\gamma_{t1}$  مقدار زاویه مسیر پرواز روی مدار انتقالی در نقطه تلاقی با مدار اولیه و همچنین  $v_2$  مقدار سرعت و  $\gamma_2$  زاویه مسیر پرواز روی مدار هدف در نقطه تلاقی با مدار انتقالی و  $v_{t2}$  مقدار سرعت و  $\gamma_{t2}$  زاویه مسیر پرواز روی مدار انتقالی در نقطه تلاقی با مدار هدف است. در این مقاله، بر اساس رابطه فوق معادلاتی استخراج می شوند که این



شکل ۳- هندسه پاسخ اول به همراه پارامترهای مدار انتقالی و  $\Delta V$  لازم برای انتقال

یک پاسخ مسئله نیازمند مقادیر حدس اولیه مناسب است، در ادامه الگوریتمی معرفی شده است که علاوه بر اینکه مقادیر مناسبی از حدس اولیه برای به‌دست‌آوردن پاسخ را ارائه می‌کند، می‌توان با استفاده از آن تخمین مناسبی از پاسخ کلی مسئله داشت.

### معادلات و روش پیشنهادی

از معادلات (۱۷-۱۷) روابطی استخراج شده‌اند که  $u_1$  و  $u_2$  و  $b$  و  $\omega$  و  $A_1$  و  $\Phi_1$  و  $A_2$  و  $\Phi_2$  را بر اساس ۳ متغیر مستقل  $\theta_1$  و  $\theta_2$  و  $a$  به‌صورت صریح معرفی می‌کنند. این روابط به‌صورت زیر هستند.

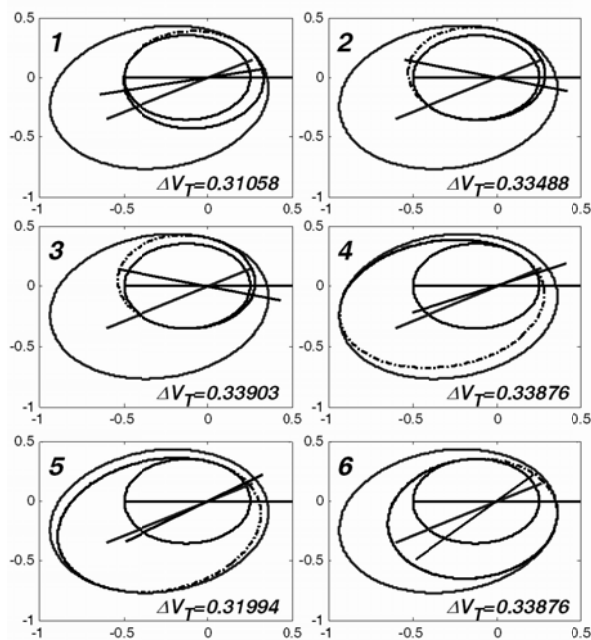
$$u_1 = b_1 \cos(\theta_1 - \omega_1) + a_1 \quad (27)$$

$$u_2 = b_2 \cos(\theta_2 - \omega_2) + a_2 \quad (28)$$

$$\tan \omega = \frac{(u_1 - a) \cos \theta_2 - (u_2 - a) \cos \theta_1}{(u_2 - a) \sin \theta_1 - (u_1 - a) \sin \theta_2} \quad (29)$$

$$b = \frac{u_1 - a}{\cos(\theta_1 - \omega)} \text{ or } \frac{u_2 - a}{\cos(\theta_2 - \omega)} \quad (30)$$

$$A_1 = \frac{[b_1 \sin(\theta_1 - \omega_1) - b \sin(\theta_1 - \omega)] u_1}{b_1 \sin(\theta_1 - \omega_1) a_1^{\frac{1}{2}} - b \sin(\theta_1 - \omega) a_1^{\frac{1}{2}}} \quad (31)$$



شکل ۵- هندسه ۶ پاسخ به‌دست‌آمده به همراه  $\Delta V$  لازم برای انتقال

$$\tan \Phi_1 = \frac{b_1 \sin(\theta_1 - \omega_1)}{(u_1 - A_1 a_1^{\frac{1}{2}})} \text{ or } \frac{b \sin(\theta_1 - \omega)}{(u_1 - A_1 a_1^{\frac{1}{2}})} \quad (32)$$

$$A_2 = \frac{[b_2 \sin(\theta_2 - \omega_2) - b \sin(\theta_2 - \omega)] u_2}{b_2 \sin(\theta_2 - \omega_2) a_2^{\frac{1}{2}} - b \sin(\theta_2 - \omega) a_2^{\frac{1}{2}}} \quad (33)$$

$$\tan \Phi_2 = \frac{b_2 \sin(\theta_2 - \omega_2)}{(u_2 - A_2 a_2^{\frac{1}{2}})} \text{ or } \frac{b \sin(\theta_2 - \omega)}{(u_2 - A_2 a_2^{\frac{1}{2}})} \quad (34)$$

مقادیر را به صورت صریح ارائه می‌دهند و معادلات پایه‌ای روش پیشنهادی را تشکیل می‌دهند:

$$v_1 = \sqrt{2(u_1 - \frac{1}{2a_1})} \quad (19)$$

$$v_2 = \sqrt{2(u_2 - \frac{1}{2a_2})} \quad (20)$$

$$v_{t1} = \sqrt{2(u_1 - \frac{1}{2a})} \quad (21)$$

$$v_{t2} = \sqrt{2(u_2 - \frac{1}{2a})} \quad (22)$$

$$\gamma_1 = \text{atan} \left( \frac{e_1 \sin(\theta_1 - \omega_1)}{1 + e_1 \cos(\theta_1 - \omega_1)} \right) \quad (23)$$

$$\gamma_1 = \text{atan} \left( \frac{e_2 \sin(\theta_2 - \omega_2)}{1 + e_2 \cos(\theta_2 - \omega_2)} \right) \quad (24)$$

$$\gamma_{t1} = \text{atan} \left( \frac{e \sin(\theta_1 - \omega)}{1 + e \cos(\theta_1 - \omega)} \right) \quad (25)$$

$$\gamma_{t2} = \text{atan} \left( \frac{e \sin(\theta_2 - \omega)}{1 + e \cos(\theta_2 - \omega)} \right) \quad (26)$$

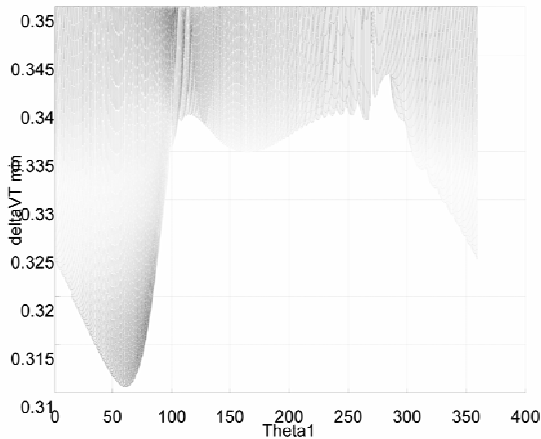
همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر زاویه مسیر پرواز نیز از تابع  $\tan^{-1}$  به‌دست خواهند آمد. با توجه به تعریف زاویه مسیر پرواز می‌توان گفت حدود تغییرات این پارامتر بین  $-90^\circ$  تا  $+90^\circ$  درجه است. به‌عبارت دیگر، زاویه مسیر پرواز نمی‌تواند بیشتر از  $90^\circ$  درجه یا کمتر از  $-90^\circ$  درجه باشد. لذا با استفاده از تابع  $\tan^{-1}$  مقدار دقیق زاویه مسیر پرواز محاسبه خواهد شد.

با استفاده از رابطه (۱۸) و حدس مقادیر اولیه به شیوه‌ای که توضیح داده شد، ۴ پاسخ دیگر نیز به‌دست آمدند. خلاصه مقادیر ۶ پاسخ به‌صورت جدول (۱) است.

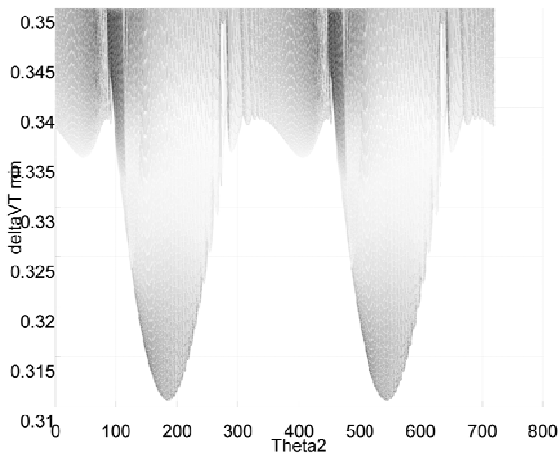
جدول ۱- مقادیر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  و  $a$  برای ۶ پاسخ به‌دست آمده

$a$	$\theta_2 (^\circ)$	$\theta_1 (^\circ)$	$\Delta v \times \gamma^{0.5}$	پاسخ
۲/۳۸۹۲۹	۱۸۵/۰۸۵	۶۱/۲۴۵	۰/۳۱۰۵۸	۱
۲/۵۱۳۳۶	۴۰۶/۸۸۳	۱۶۴/۹۸۹	۰/۳۳۴۸۸	۲
۲/۷۱۵۲۰	۴۳۹/۵۶۱	۲۳۵/۰۹۷	۰/۳۳۹۰۳	۳
۲/۷۳۱۲۰	۴۴۴/۹۵۰	۲۴۴/۸۰۳	۰/۳۳۸۷۶	۴
۲/۲۸۱۳۰	۲۳۶/۶۴۳	۸۰/۶۰۱	۰/۳۱۹۹۴	۵
۲/۲۶۸۴۶	۳۳۵/۰۴۹	۱۱۵/۱۹۶	۰/۳۳۸۷۶	۶

هندسه مدار انتقالی و همچنین مدارهای اولیه و هدف برای این پاسخ‌ها در شکل (۵) نشان داده شده است. این پاسخ‌ها، با توجه به داشتن حداقل یک پاسخ مسئله می‌توانند بطور مشابه برای مسائل دیگر انتقالی بهینه هم‌صفحه به‌دست آیند. بنابراین، داشتن یک پاسخ مسئله، در صورتی که بخواهیم به‌طور مستقیم از توابع حل‌کننده استفاده نماییم، ضروری است. از آنجا که به‌دست آوردن

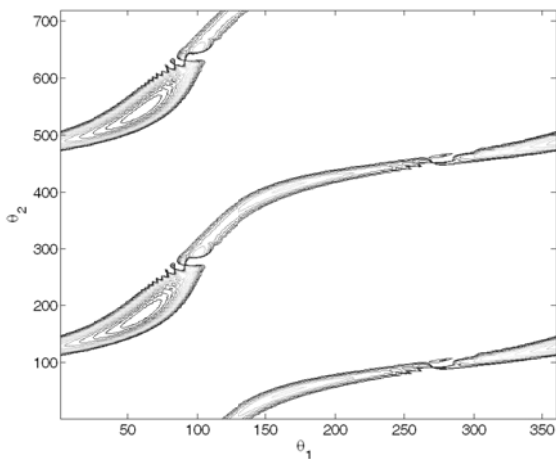


شکل ۷- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  بر اساس مقادیر  $\theta_1$



شکل ۸- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  بر اساس مقادیر  $\theta_2$

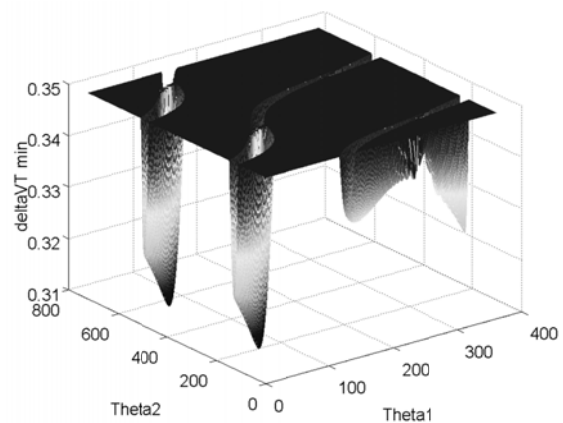
همچنین کانتورهای حداقل  $\Delta V$  برای مقادیر مختلف  $\theta_1$  و  $\theta_2$  در شکل (۹) نشان داده شده است.



شکل ۹- کانتورهای رفتار حداقل  $\Delta V$  بر اساس مقادیر مختلف  $\theta_1$  و  $\theta_2$

معادلات (۲۷-۳۴) روابط صریحی بر اساس ۳ متغیر مستقل  $\theta_1$  و  $\theta_2$  و  $a$  هستند که می‌توانند به ترتیب برای هر مقدار از این سه متغیر مستقل به مقدار  $\Delta V$  منتهی شوند. مقادیر  $\omega$  و  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  از تابع  $\tan^{-1}$  به دست می‌آیند که این تابع، دو مقدار برای آنها ارائه می‌دهد و تنها یکی از این مقادیر، پاسخ مورد نیاز است. در مورد  $\omega$  می‌توان به راحتی مقدار مناسب را انتخاب کرد، زیرا در صورتی که  $\omega$  در ربع مناسب انتخاب نشود، مقدار  $b/r$  که نمایانگر خروج از مرکز مدار انتقالی است منفی خواهد کرد و این مسئله کاملاً طبیعی است؛ زیرا مقدار آرگومان نقطه حسیض و خروج از مرکز با یکدیگر در ارتباط هستند. بدین صورت که اگر خروج از مرکز مداری منفی باشد، یعنی آرگومان نقطه حسیض باید به اندازه  $180^\circ$  درجه بچرخد و بالعکس. از آنجاکه استفاده از مقادیر منفی خروج از مرکز رایج نیست، می‌توان در صورت منفی به دست آمدن خروج از مرکز، مقدار  $\omega$  را که در اینجا از تابع  $\tan^{-1}$  به دست می‌آید در ربع مقابل انتخاب کرد.

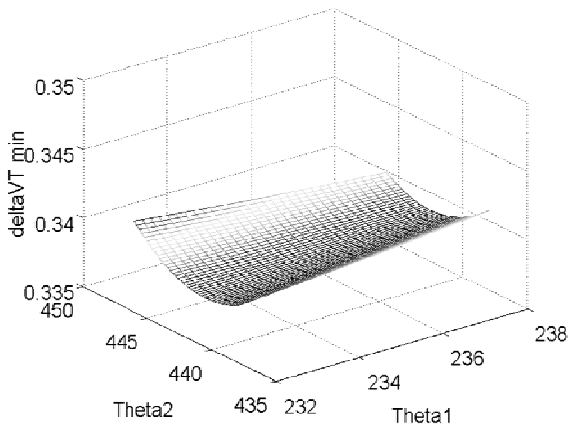
از پاسخ‌های به دست آمده در جدول (۱) مشاهده می‌شود مقدار  $\theta_1$  می‌تواند بین  $0^\circ$  تا  $360^\circ$  درجه و مقدار  $\theta_2$  بین  $0^\circ$  تا  $720^\circ$  درجه باشد. به ازای هر مقدار  $\theta_1$  و  $\theta_2$  تنها یک مقدار  $a$  وجود دارد که حداقل مقدار ضربه مورد نیاز برای انتقال را ارائه کند. این مقدار  $a$  معمولاً بین مقادیر  $a$  برای مدارهای اولیه و هدف است. در مثال مطرح شده، مقدار  $a$  بین مقادیر ۲ تا ۳ است. در ادامه مقدار  $\Delta V$  از رابطه (۱۸) پس از حل روابط صریح (۲۷-۳۴) برای متغیرهای  $u_1$  و  $u_2$  و  $b$  و  $\omega$  و  $A_1$  و  $\Phi_1$  و  $A_2$  و  $\Phi_2$  و همچنین روابط صریح (۲۶-۱۹) برای مقادیر  $v_1$  و  $\gamma_1$  و  $v_{t1}$  و  $\gamma_{t1}$  و  $v_2$  و  $\gamma_2$  و  $v_{t2}$  و  $\gamma_{t2}$  به ازای هر مقدار  $\theta_1$  بین  $0^\circ$  تا  $360^\circ$  و  $\theta_2$  بین  $0^\circ$  تا  $720^\circ$  با استپ‌های  $1^\circ$  درجه و همچنین هر مقدار  $a$  بین مقدار ۲ تا ۳ با گام‌های  $0.1/0$  در نظر گرفته شده‌اند به دست آمده‌است. همان‌طور که اشاره شد، برای هر مقدار  $\theta_1$  و  $\theta_2$  تنها یک مقدار  $a$  وجود دارد که مقدار  $\Delta V$  را حداقل می‌کند. این مقدار در شکل (۶) بر حسب مقادیر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  ترسیم شده‌است.



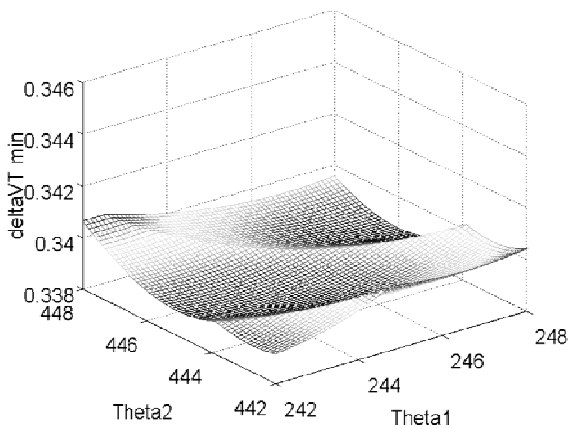
شکل ۶- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  بر اساس مقادیر  $\theta_1$  و  $\theta_2$

بنابراین با داشتن رفتار تابع حداقل  $\Delta V$  به راحتی می‌توان اولاً موقعیت پاسخ کلی را نسبت به دیگر مینیمم‌های محلی با اطمینان کامل مشخص کرد که در این مثال حدود ۶۰ درجه برای  $\theta_1$  و حدود ۱۸۵ درجه برای  $\theta_2$  است و ثانیاً برای توابع حل‌کننده معادلات غیرخطی مقادیر حدس اولیه مناسب را به دست آورد. در ادامه با کوچک‌تر کردن گام‌ها می‌توان رفتار تابع حداقل سرعت را در حوالی مینیمم‌های محلی مشاهده کرد.

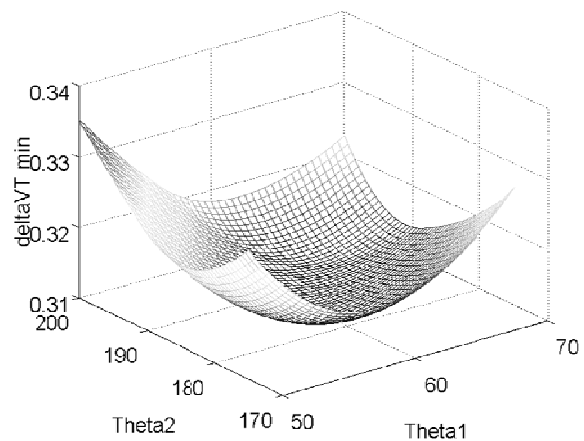
منظور از حداقل تابع  $\Delta V$  آن مقدار  $\Delta V$  است که در یک مقدار  $\theta_1$  و  $\theta_2$  نسبت به دیگر مقادیر  $\Delta V$  که از تغییر مقدار  $a$  به دست آمده است، کمتر باشد. رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  در همسایگی پاسخ‌ها در شکل‌های (۱۰) تا (۱۵) نشان داده شده است.



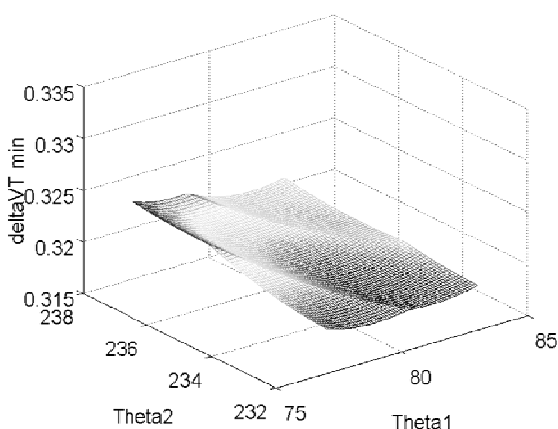
شکل ۱۲- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  در همسایگی پاسخ سوم



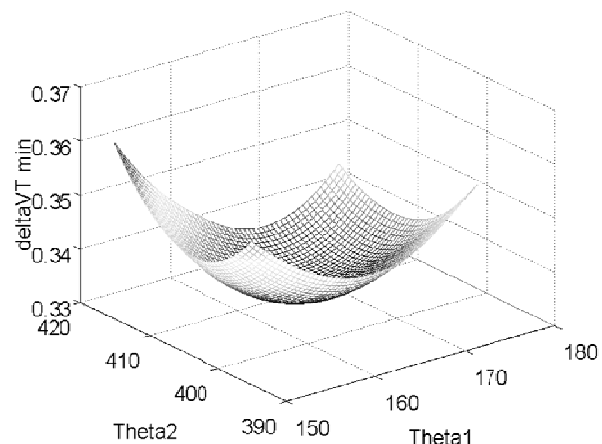
شکل ۱۳- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  در همسایگی پاسخ چهارم



شکل ۱۰- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  در همسایگی پاسخ اول



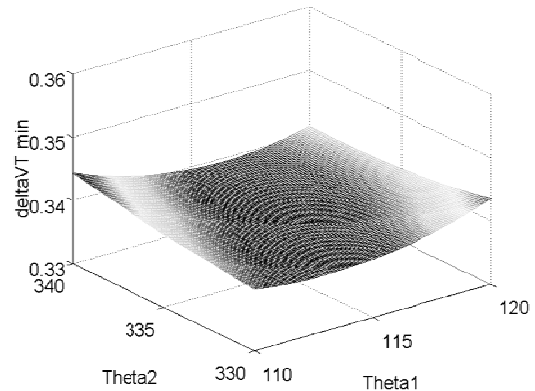
شکل ۱۴- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  در همسایگی پاسخ پنجم



شکل ۱۱- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  در همسایگی پاسخ دوم



محدوده پاسخ به‌دست آورده شده‌است، برای مقادیر حدس اولیه توابع حل‌کننده معادلات غیرخطی استفاده شود تا علاوه بر اینکه سرعت همگرایی افزایش می‌یابد، در خصوص موقعیت پاسخ کلی مسئله مطمئن‌تر بود. بدین منظور در این مقاله، معادلاتی استخراج شد که با استفاده از آنها در ابتدا تابع ضربه نسبت به متغیر مستقل نصف محور اصلی حداقل شد و سپس این حداقل نسبت به مقادیر مختلف دو متغیر مستقل دیگر بررسی گردید. روند پیشنهادی برای مثال عددی پیاده‌سازی شد و نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده توان مناسب روش، برای به‌دست‌آوردن جواب‌های ممکن مسئله مانور مداری بهینه انتقال هم‌صفحه و غیرهم‌محور است.



شکل ۱۵- رفتار حداقل تابع  $\Delta V$  در همسایگی پاسخ ششم

## مراجع

- [1] Chobotov, V. A., *Orbital Mechanics*, Second Edition, Ohio, AIAA Publication, 1996.
- [2] Curtis, H., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Elsevier Aerospace Engineering Series, 2005.
- [3] Larson, J. and Wertz, J. R., *Space Mission Analysis and Design*, Wiley and Sons Ltd., 1992.
- [4] Hohmann, W., *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*, Oldenburg, Munich and Berlin, 1925.
- [5] Hohmann, W., Fahrtrouten, F., *Landungsmöglichkeiten Kunstlicher Raumflugkörper, in Die Möglichkeit der Weltraumfahrt*, Willy Ley, Editor, Hachmeister and Thal, Leipzig, 1928.
- [6] Lawden, Derek F. "Optimal Transfer Between Coplanar Elliptical Orbits." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 3, pp. 788-791, 1992.
- [7] Leitmann, G., *Optimization Techniques, with Application to Aerospace Systems*, New York, Academic Press, 1962.
- [8] Lawden, D. F., "Rocket Trajectory Optimization - 1950-1963", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No. 4, pp. 705-711, 1991.
- [9] F. W. Gobetz and J. R. Doll. "A Survey of Impulsive Trajectories," *AIAA Journal*, Vol. 7, No.5, pp. 801-834, 1969.

تعداد مینیمم‌های محلی می‌تواند زیاد باشد و استفاده از توابع حل‌کننده، با این فرض که مقادیر حدس اولیه متغیرها به‌درستی انتخاب شوند، تنها به مینیمم‌های محلی منجر می‌شوند و همچنان نمی‌توان با اطمینان راجع به پاسخ کلی مسئله نظر داد ولی با استفاده از معادلات و روند پیاده‌سازی آنها که در این مقاله ارائه شد می‌توان بر اساس دقت مطلوب جواب‌های ممکن و تحلیل مناسبی از رفتار جواب‌ها را به‌دست آورد و جواب کلی را نیز استخراج کرد.

## جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مسئله انتقال بهینه مداری ضربه‌ای برای هندسه‌های ساده می‌تواند پاسخ‌هایی به‌صورت بسته داشته باشد و به‌راحتی از روابط تحلیلی به‌دست آید اما برای حل مسئله انتقال بهینه بین مدارهای ضربه‌ای در هندسه‌های پیچیده‌تر مداری مانند حالتی که انتقال بین مدارهای بیضوی غیرهم‌محور مد نظر باشد، احتیاج به حل معادلات غیرخطی بهینه‌سازی است. این معادلات غیرخطی به شرایط اولیه حساس بوده‌است و با استفاده از توابع حل‌کننده معادلات غیرخطی، تنها پاسخ‌های مینیمم محلی حاصل خواهند شد. از طرفی تعداد این مینیمم‌های محلی برای مسئله انتقال بهینه می‌تواند زیاد باشد و از طرف دیگر با داشتن تعدادی از مینیمم‌های محلی نمی‌توان با اطمینان در خصوص پاسخ کلی مسئله، نظر داد. لذا لازم است تا از طریق محدودده پاسخ‌های مسئله را به‌دست آورد و سپس از این