

# Modeling Halo Orbits and the Associated Manifolds in the Restricted Three Body Problem

**M. Jafari Nadoushan<sup>1\*</sup> and S. H. Pourtakdoust<sup>2</sup>**

1. Department of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology

2. Center for Research and Development in Space Science and Technology, Sharif University of Technology

\*Azadi Ave., Tehran, IRAN

**mehdi88@gmail.com**

*Development of halo orbits and their associated invariant manifolds are investigated. Halo orbits play a fundamental role in complex space mission designs. In essence, halo orbits are periodic solutions of the restricted three body problem (R3BP) determined under specific initial conditions. In this paper, the symmetric property of the nonlinear R3BP governing differential equations is utilized in order to obtain the desired initial conditions. In this regard the differential correction technique and the state transition matrix are used to generate the halo orbits. The differential correction technique, based on the Newton method, is an effective tool for solving two point boundary value problems. In addition to generate the stable and unstable manifolds, the initial conditions are perturbed in the direction of Eigenvectors and the equations of motion are integrated for an arbitrary time interval.*

**Keywords:** restricted three body problem, halo orbits, stable and unstable manifolds, differential correction technique

---

1. M.Sc. Student

2. Professor (Corresponding Author)

# مدل سازی مدارهای هاله‌ای و منیفلدهای پایدار و ناپایدار در مسئله سه جسم محدود

مهدي جعفري ندوشن<sup>۱\*</sup> و سيد حسين پور تاكدوست<sup>۲</sup>

۱- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- پژوهشکده توسعه علوم و فناوری فضایی، دانشگاه صنعتی شریف

\*تهرانپارس، وفادار شرقی

mehdi88@gmail.com

در این مقاله، تولید مدارهای هاله‌ای و منیفلدهای پایدار و ناپایدار آن در مسئله سه جسم محدود دایروی مورد توجه قرار گرفته است. مدارهای هاله‌ای در طراحی مأموریت‌های فضایی پیچیده نقش اساسی دارند. مدارهای هاله‌ای در واقع حل تناوبی مسئله سه جسم محدود دایروی هستند که با اعمال شرایط اولیه خاص حاصل می‌شوند. در این مقاله از خاصیت تقارن معادلات مسئله سه جسم محدود دایروی که معادلات دیفرانسیل عادی غیرخطی مرتبه دوم هستند، بهره گرفته شده است تا این شرایط اولیه مطلوب به دست آید و حل آسان شود. برای حل تناوبی مسئله از روش تصحیح دیفرانسیلی و ماتریس انتقال حالت استفاده شده است. روش تصحیح دیفرانسیلی، روشی کارا و مبتنی بر روش نیوتن است که در حل مسائل با شرایط مرزی استفاده می‌شود. به منظور تولید منیفلدهای پایدار و ناپایدار در حل تناوبی در راستای بردارهای ویژه اختلال ایجاد کرده است و با تحویل شرط اولیه مناسب، از معادلات انتگرال گیری می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** مسئله سه جسم محدود دایروی، مدار هاله‌ای، منیفلدهای پایدار و ناپایدار، خاصیت تقارن، روش تصحیح دیفرانسیلی

## مقدمه

محاسبه و تحلیل مداری بر اساس مسئله دو جسم برای برخی از مأموریت‌های دقیق مثل به کارگیری و قراردعی تلسکوپ‌های فضایی، نتایج دقیقی به دست نمی‌دهد. در این گونه موارد برای دستیابی به اطلاعات و نتایج قابل اعتمادتر، بهتر است که فضاپیما (جسم ثانویه) تحت اثر میدان گرانشی هم‌زمان دو جرم سماوی (اجسام اولیه) در نظر گرفته شود و در این صورت دینامیک حرکت بررسی شود. متأسفانه مسئله سه جسم در حالت کلی جواب تحلیلی

ندارد و به راحتی نمی‌توان از آن برای طراحی مسیرهای فضایی استفاده کرد. ولی خوشبختانه در خصوص مسئله سه جسم محدود، تحقیقات زیادی انجام شده است و قابلیت به کارگیری از خواص آن در طراحی مسیرها و مأموریت‌های بین سیاره‌ای وجود دارد. مسئله سه جسم محدود دایروی قدمی در این راستاست که اجازه می‌دهد دینامیک حرکت یک فضاپیما تحت اثر گرانش دو جسم سماوی بررسی و مدل سازی شود. شروع طراحی مأموریت‌های فضایی با مسئله سه جسم، آرایش‌های گوناگونی از مدارهای ممکن را به دست می‌دهد که برای دستیابی به اهداف مطلوب مفید واقع می‌شوند. نقاط لاگرانژی که نقاط تعادلی در مسئله سه جسم هستند، به عنوان پایگاه‌هایی برای مأموریت‌های فضایی یا اصولاً هدف برخی مأموریت‌های فضایی مد نظر هستند. مدارهای لیپانوف، هاله‌ای و لیساجوس نیز از سایر پدیده‌های حاصل از مسئله سه

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد

۲. استاد (نویسنده مخاطب)

داد. بعداً دستیار نیوتن، لئونارد اویلر، اولین ساده‌سازی را بر روی مسئله سه جسم انجام داد و مسئله سه جسم محدود را معرفی کرد. اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم میلادی، ژولیوس هنری پوانکاره انتگرال‌ناپذیری مسئله سه جسم را اثبات کرد که در نهایت کار وی اساس تئوری سیستم‌های دینامیکی مدرن قرار گرفت. یکی از کارهای بسیار مهم پوانکاره، اثبات وجود مدارهای تناوبی در مسئله سه جسم بود. وی اثبات کرد که بی‌نهایت مدار تناوبی گوناگون موجود است [۶]. در سال ۱۹۲۰ مولتون [۷] «مدارهای تناوبی» را منتشر کرد، که مجموعه مطالعات بیش از پنجاه نویسنده در مورد حل تقریبی حرکت‌های تناوبی در نزدیکی پنج نقطه تعادلی بود.

اصطلاح مدار هاله‌ای را اولین بار، فارکوهار در ابتدای دهه ۱۹۷۰ میلادی مطرح کرد. فارکوهار و کامل [۸] در سال ۱۹۷۳ با استفاده از روش لین‌استید-پوانکاره به تقریب مرتبه سوم برای حرکت شبه‌تناوبی حول نقطه تعادلی سیستم زمین-ماه دست یافتند. چند سال بعد ریچاردسون و کری [۹] تقریب مرتبه چهارم را برای سیستم خورشید-زمین گسترش دادند. در سال ۱۹۸۴ با استفاده از روش تنظیم سه بعدی، هاول و بریکول [۱۰] تقریبی را برای مدارهای هاله‌ای به‌دست آوردند. در سال ۲۰۰۳، ویچ من، دودل و پافروشوا [۱۱] به نتایج عددی برای ارتباط بین مدارهای محوری، هاله‌ای و لیاپانوف با استفاده از نرم‌افزار آتو<sup>v</sup> دست یافته‌اند.

## معادلات حرکت مسئله سه جسم محدود

### دایروی

حرکت فضاپیما تحت میدان گرانشی دو جسم وزین، که حرکت کپلری در مدار دایروی دارند، به مسئله سه جسم محدود دایروی معروف است. با استفاده از روش‌های مختلف مرسوم و در دستگاه مختصات‌های گوناگون می‌توان معادلات حاکم بر این مسئله را استخراج کرد. با این وجود برای بررسی مسئله، کار در دستگاه چرخان را انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب که مبدأ دستگاه چرخان را در مرکز جرم اجسام اولیه چنان در نظر می‌گیریم که بردار موقعیت اجسام اولیه فقط مؤلفه  $x$  باشد. بدین ترتیب اجسام اولیه با مختصات  $(x_1, 0, 0)$  و  $(x_2, 0, 0)$  روی محور  $x$  ها ثابت می‌مانند. ثابت‌بودن موقعیت اجسام اولیه برای تحلیل دینامیکی مفید خواهد بود. چرا که معادلات غیرخودگردان به خودگردان تبدیل می‌شوند و این موضوع به نقاط ثابت منجر می‌شود. البته می‌توان معادلات را در دستگاه اینرسی هم به‌دست آورد و سپس با استفاده از ماتریس تبدیل

جسم هستند. مدارهای لیاپانوف، مدارهای تناوبی دو بعدی هستند که در صفحه حرکت اجسام ثانویه شکل می‌گیرند. مدارهای هاله‌ای، مدارهای تناوبی سه بعدی هستند که فرکانس حرکت در صفحه با فرکانس حرکت خارج از صفحه برابر است و مدارهای لیساجوس، مدارهای شبه تناوبی سه بعدی هستند که فرکانس حرکت در صفحه با فرکانس حرکت خارج از صفحه برابر نیست. وجود منیفلدهای پایدار و ناپایدار برای هر یک از این مدارها، موجب کاهش انرژی لازم برای انتقال فضاپیما به آن‌ها می‌شود [۱]. در این مقاله، تولید مدارهای هاله‌ای و منیفلدهای پایدار و ناپایدار مدنظر است.

مدارهای هاله‌ای چه در مأموریت‌های گذشته و چه در مأموریت‌های آینده نقش بسزایی ایفا می‌کنند [۲]. در ۳۰ سال گذشته انفجاری در قابلیت‌های طراحی و مدیریت مأموریت‌ها به نقاط لاگرانژی رخ داده است. نقطه آغازین این انفجار مأموریت کاوشگر بین‌المللی خورشید-زمین بود. فضاپیما آی‌اس‌ای-۳<sup>۳</sup> در ۱۲ آگوست ۱۹۷۸ به منظور مطالعه بر هم کنش زمین و خورشید پرتاب شد. بعد از انتقال مستقیم آی‌اس‌ای-۳ به حول نقطه لاگرانژی  $L_1$  خورشید-زمین، وارد مدار تقریباً تناوبی هاله‌ای شد تا بادهای خورشیدی را یک ساعت قبل از برخورد به کره مغناطیسی زمین مورد کاوش و دیده‌بانی قرار دهد. بعد از چندین گردش در مدار هاله‌ای  $L_1$ ، فضاپیما به سمت نقطه  $L_2$  به‌منظور جستجوی دم مغناطیسی زمین روانه شد. بعد از آن با انجام مانور کمک گرانشی مضاعف، فضاپیما به کاوشگر بین‌المللی دنباله‌دار<sup>۴</sup> تغییر نام داد و با ستاره دنباله‌دار گیاکوبینی-زینر ملاقات کرد [۳].

یکی دیگر از مأموریت‌ها که دستاوردهای مهمی را نیز در پی داشت، مأموریت جنسیس<sup>۵</sup> بود که در سال ۲۰۰۱ پرتاب شد و طی آن فضاپیما به نقطه  $L_1$  سیستم خورشید-زمین فرستاده شد و در مدار لیساجوس قرار گرفت [۴]. جنسیس، اولین مأموریت طراحی شده بر اساس تئوری سیستم‌های دینامیکی مدرن است. مسیر بهینه حرکت جنسیس با استفاده از منیفلدهای پایدار مدار لیساجوس نامی حاصل شده است. مأموریت گایا<sup>۶</sup>، مأموریتی است که برای سال ۲۰۱۲ در نظر گرفته شده است. در طی این مأموریت فضاپیما در مدار لیساجوس حول نقطه  $L_2$  سیستم خورشید-زمین قرار خواهد گرفت. انتخاب مدار حاصل مصالحه بین مخابرات، عملکرد، هزینه، محیط حرارتی و راکت‌های موجود است [۵].

مسئله سه جسم سابقه طولانی دارد. نیوتن در سال ۱۶۸۷، تحلیل دینامیکی مسئله سه جسم را در کتاب «پرنسپیا» گسترش

3. ISEE-3

4. ICE

5. Genesis

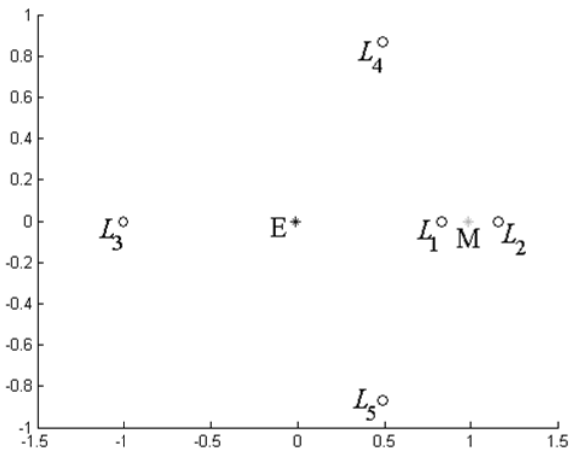
۶ در افسانه‌های یونانی به الهه زمین که با اورانوس ازدواج کرد، گفته می‌شود (GAIA).

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (4)$$

و تغییر متغیر مناسب می‌توانیم معادلات حرکت را به شکل میدان برداری تعریف کنیم:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x + 2\dot{y} + D_x U \\ y - 2\dot{x} + D_y U \\ D_z U \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}) \quad (5)$$

که در آن  $w, v, u$  مؤلفه‌های بردار سرعت جسم ثانویه است و  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$  بردار حالت و  $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  میدان برداری است. دستگاه معادلات فوق، پنج نقطه تعادلی دارد. این نقاط تعادل در واقع ریشه‌های معادله  $f(\mathbf{x}) = 0$  خواهند بود. این نقاط را که اوپلر و لاگرانژ کشف کرده اند به دو دسته همراستا و مثلثی تقسیم می‌شوند. در دسته اول سه نقطه قرار دارد که با  $L_3, L_2, L_1$  نشان داده می‌شوند و در دسته دوم دو نقطه وجود دارد که با  $L_5, L_4$  نشان داده می‌شود (شکل ۲). این نقاط به نقاط لاگرانژی معروف هستند [۱۲].



شکل ۲- نقاط لاگرانژی سیستم زمین- ماه

ماتریس  $\Phi(t, t_0)$  مشتق فلوئی تولیدی،  $\phi(t, \mathbf{x})$  توسط معادله دیفرانسیل حرکت است که ماتریس انتقال حالت یا منورومی نامیده می‌شود و به صورت موضعی، بهترین تقریب خطی برای فلو است. فلو دارای خصوصیات زیر است:

1.  $\phi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$
2.  $\phi(t + s, \mathbf{x}) = \phi(t, \phi(s, \mathbf{x}))$
3.  $\left. \frac{d}{dt} \phi(t + s, \mathbf{x}) \right|_{t=\tau} = f(\phi(\tau, \mathbf{x}))$

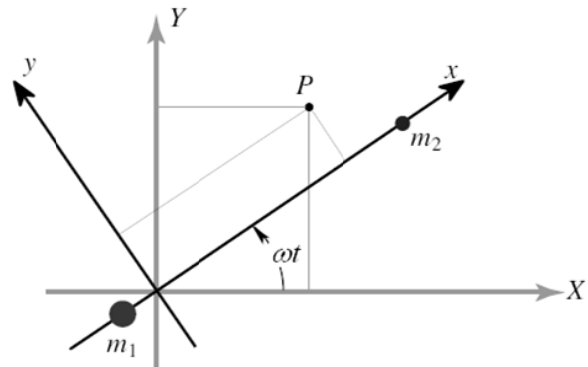
متعامد با آرگومان حاصل ضرب سرعت زاویه‌ای اجسام اولیه، حول مرکز جرمشان در زمان،  $\omega t$ ، معادلات را در دستگاه چرخان بیان کرد (شکل ۱). توصیف این حرکت در دستگاه چرخان، به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 x + 2\omega \dot{y} - G \left( \frac{m_1}{r_1^3} (x + x_1) + \frac{m_2}{r_2^3} (x - x_2) \right) \\ \omega^2 y - 2\omega \dot{x} - G \left( \frac{m_1}{r_1^3} y + \frac{m_2}{r_2^3} y \right) \\ -G \left( \frac{m_1}{r_1^3} z + \frac{m_2}{r_2^3} z \right) \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در معادله فوق تعاریف زیر را داریم:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x + x_1)^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (2)$$

$\omega$  سرعت زاویه‌ای اجسام اولیه حول مرکز جرمشان و  $z, y, x$  مؤلفه‌های بردار موقعیت جسم ثانویه هستند و  $m_1$  و  $m_2$  جرم اجسام اولیه هستند. سیستم دینامیکی که با دستگاه معادلات فوق تعریف شد، مسئله سه جسم محدود دایروی با واحدهای فیزیکی نامیده می‌شود.



شکل ۱- دستگاه مختصات اینرسی و چرخان

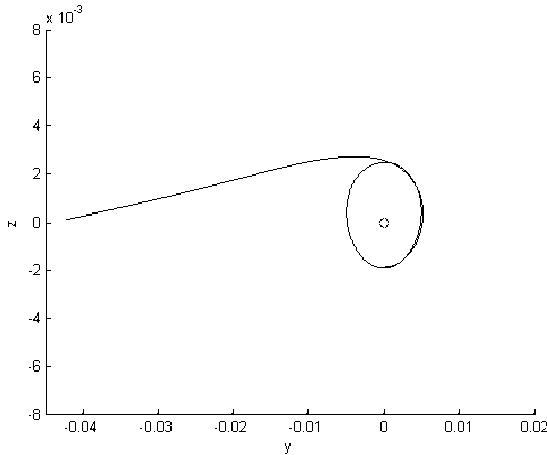
به منظور راحتی کار با تعاریف فاصله بین اجسام اولیه به عنوان فاصله واحد و مجموع جرم اجسام اولیه به عنوان جرم واحد و سرعت زاویه واحد بی بعد شده، معادلات را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2\dot{y} - \frac{1-\mu}{r_1^3} [x + \mu] + \frac{1-\mu}{r_2^3} [x - (1 - \mu)] \\ y - 2\dot{x} - \frac{1-\mu}{r_1^3} y - \frac{1-\mu}{r_2^3} y \\ -\frac{1-\mu}{r_1^3} z - \frac{1-\mu}{r_2^3} z \end{bmatrix} \quad (3)$$

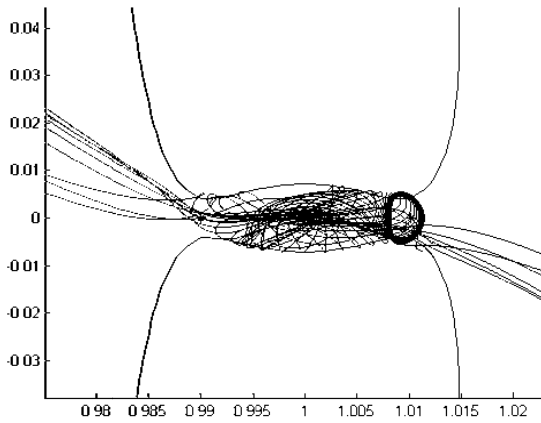
که در آن  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  است. با تعریف تابع پتانسیل به صورت:



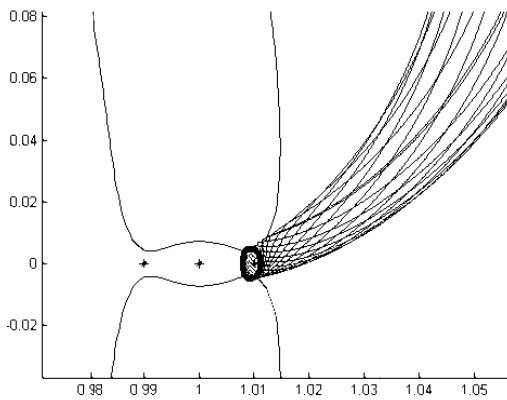
که در همسایگی این نقطه قرار می‌گیرد، می‌تواند داده‌های مفیدی را از بادهای خورشیدی، پیش از آن‌که به مگنتوسفر زمین برخورد کنند در اختیار قرار دهد. از دیگر کاربری‌های مدارهای هاله‌ای می‌توان به قرارگیری فضاپیما در اطراف نقطه  $L_2$  سیستم زمین- ماه به‌عنوان ایستگاه ارتباط مخابراتی اشاره کرد.



شکل ۳- تصویر مدار هاله‌ای در صفحه  $yz$  حول نقطه  $L_2$



شکل ۴- تصویر از نزدیک منیفلد ناپایدار مدار هاله‌ای حول  $L_2$



شکل ۵- تصویر از نزدیک منیفلد پایدار مدار هاله‌ای حول  $L_2$

عنوان نقطه آغازین، نقطه پایانی و مدت زمان عبور از  $x_0$  به  $x_f$  فرض کنید، برای محاسبه ماتریس منودرمی یک مدار متقارن تنها بر اساس اطلاعات نیم مدار که با  $\phi(x_0, [0, T])$  پیوند دارد از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\Phi(0, T) = A J \Phi(0, \tau)^T J^{-1} A \Phi(0, \tau) \quad (11)$$

که در آن  $T = 2\tau$  است.

### منیفلدهای پایدار و ناپایدار

از آنجا که دینامیک حرکت حول نقاط لاگرانژی هم‌راستا رفتار مرکز- مرکز-زینی دارد [۱۲]، ماتریس منودرمی بردارهای ویژه‌ای دارد که پایه‌ای برای فضای ویژه پایدار و ناپایدار هستند. با بررسی همسایگی به‌اندازه کافی کوچک، مدار هاله‌ای منیفلدهای پایدار و ناپایدار موضعی قابل شناسایی هستند. منیفلدهای پایدار و ناپایدار در نزدیکی مدار هاله‌ای به ترتیب بر فضای ویژه پایدار و ناپایدار مماس هستند [۱۳].  $x_k^*$  را به عنوان  $k$ امین نقطه روی مدار هاله‌ای در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از آن، فضای مماسی بر منیفلد پایدار و ناپایدار را به‌دست می‌آوریم. این نقطه را در راستای بردارهای ویژه پایدار و ناپایدار با تولرانس به‌اندازه کافی کوچک  $\varepsilon$  دچار اختلال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_{u_k}^*(0) &= x_k^* \pm \varepsilon \xi_{u_k} \\ x_{s_k}^*(0) &= x_k^* \pm \varepsilon \xi_{s_k} \end{aligned} \quad (12)$$

نقاطی هستند که به منیفلدهای ناپایدار و پایدار بسیار نزدیک هستند. در عبارت فوق  $\xi_{u_k}$  و  $\xi_{s_k}$  به ترتیب بردارهای ویژه پایدار و ناپایدار ماتریس منودرمی هستند. با انتگرال‌گیری از شرایط اولیه فوق در بازه زمانی دلخواه، منیفلدهای پایدار و ناپایدار حاصل می‌شوند. با تغییر  $k$  و  $t$  تقریب خوبی از منیفلدها به‌دست می‌آوریم.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله نحوه مدل‌سازی و استخراج مدارهای هاله‌ای و منیفلدهای پایدار و ناپایدار آن در مسئله سه جسم محدود دایروی مورد بررسی قرار گرفته است. این فرایند برای سیستم خورشید- زمین در نزدیکی نقطه لاگرانژی  $L_2$  به‌کار گرفته شده است و نتایج آن در شکل‌های (۳) تا (۵) نشان داده شده‌اند. مدارهای هاله‌ای دارای ارزش‌های کاربردی متعدد است که در تعدادی از مأموریت‌های فضایی از آنها استفاده شده است. برای مثال مدار هاله‌ای حول نقطه  $L_1$  سیستم خورشید-زمین موقعیت ایده‌آلی برای نظارت و کنترل پیوسته محیط‌های بین سیاره‌ای است. فضاپیمایی

*Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 7, No. 4, 1973, pp. 458-473.

- [9] Richardson D. and Cary, N., "A Uniformly Valid Solution for Motion about the Interior Libration Point of the Perturbed Elliptic-Restricted Problem." *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*, Paper No. AAS 75-021, Nassau, Bahamas, July 28-30, 1975.
- [10] Howell K. and Breakwell, J. "Almost Rectilinear Halo Orbits.", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 32, No. 1, January 1984, pp. 29-52.
- [11] Dichmann, D., Doedel, E. and Paffenroth, R., *The Computation of Periodic Solutions of the 3-Body Problem Using the Numerical Continuation Software AUTO*, Libration Point Orbits and Applications, Hong Kong, World Scientific, 2003.
- [12] Szebehely, V., *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*, New York: Academic Press, 1967.
- [13] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 3rd Edition, 2001.
- [14] B. T., Barden, Using Stable Manifolds to Generate Transfers in the Circular Restricted Problem of Three Bodies, M. Sc. Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, West Lafayette, Indiana, December 1994.
- [1] Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E. and Ross, S. D., *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design, Engineering Science and Mechanics*, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1999.
- [2] Zazzera, F., Topputo, F., Massari, M., *Assessment of Mission Design Including Utilization of Libration Points and Weak Stability Boundaries*, Technical Report AO 4532 03/4130, Milan, Italy, 2004.
- [3] [on line]: Available, <http://stardust.jpl.nasa.gov/comets/ice.html>
- [4] [on line]: Available, <http://genesismission.jpl.nasa.gov/>
- [5] [on line]: Available, <http://www.rssd.esa.int/gaia/>
- [6] H. Poincare, *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste, Vol. 1, 1892, New Methods of Celestial Mechanics (English Translation), Vol. 13, History of Modern Physics and Astronomy*, Editor and Introduced by Daniel L. Goroff, American Institute of Physics, 1993.
- [7] F. Moulton (*in collaboration with D. Buchanan, T. Buck, F. Griffin, W. Longley, and W. MacMillan*), "Periodic Orbits", Carnegie Institute of Washington, Washington D.C., 1920.
- [8] Farquhar, R. W. and Kamel, A. "Quasi-Periodic Orbits about the Translunar Libration Point," *Celestial*

## مراجع