

# Modeling and Simulating the Earth's Magnetic Field Utilizing the 10<sup>th</sup> Generation of IGRF and Comparison the Linear and Nonlinear Transformation in order to Use in Satellite Attitude Control

M. Navabi<sup>1\*</sup> and Niloofar Nasiri<sup>2</sup>

1, 2. Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University

\*Daneshjoo Boulevard, Beheshti Ave., Tehran, IRAN

sciences.edu@gmail.com

*Since last decades utilizing satellites in low earth orbits have had increasing tendency. These satellites experience the earth magnetic field due to their low altitude to the earth. The Earth magnetic intensity can be used in order to control the attitude of spacecraft utilizing the interaction between the earth magnetic field and magnetic dipoles which are generated in the body of satellite. First of all, for using this phenomenon the magnitude and direction of the Earth magnetic field have to be obtained. There are various ways in order to simulate the earth magnetic field, that the most accurate one is utilizing the harmonic coefficients and mathematical model of the earth magnetic field. In this study, the earth magnetic field is modeled based on the 10<sup>th</sup> generation of the IGRF coefficients and the results are verified with the most valid reference. Due the Earth magnetic field is used in order to attitude control of a spacecraft, it is necessary to transform the results into the spacecraft Body frame. This transformation can be obtained utilizing linear and nonlinear transformation. In the next step, based on the comparison of the results of the spacecraft attitude dynamics utilizing linear and nonlinear transformation the validity margin of linear transformation is studied.*

**Keywords:** attitude control- Earth magnetic field- 10<sup>th</sup> generation of the IGRF coefficients- microsatellite- linear and nonlinear transformations

---

1. Assistant Professor (Corresponding Author)  
2. M.Sc.

# مدل سازی و شبیه سازی میدان مغناطیسی زمین بر اساس IGRF نسل دهم و مقایسه تبدیل خطی و غیر خطی به منظور کنترل وضعیت ماهواره

محمد نوابی<sup>۱\*</sup> و نیلوفر نصیری<sup>۲</sup>

۱) - دانشکده مهندسی فناوری های نوین، دانشگاه شهید بهشتی

\*تهران، ولنجک

Sciences.edu@gmail.com

در چند دهه گذشته استفاده از ماهواره ها در مدارهای ارتفاع پایین زمینی افزایش یافته است، این ماهواره ها به علت نزدیکی به زمین در معرض میدان مغناطیسی آن قرار دارند. از این رو می توان از میدان مغناطیسی زمین به عنوان منبعی برای کنترل وضعیت ماهواره استفاده نمود. در این حالت از اثر متقابل میدان مغناطیسی زمین و دوقطبی مغناطیسی درون ماهواره برای کنترل وضعیت آن استفاده می شود. برای دستیابی به این هدف باید مدل دقیقی از میدان مغناطیسی زمین در اختیار داشته باشیم. برای مدل سازی میدان مغناطیسی زمین روش های متفاوتی وجود دارد که دقیق ترین آن ها مدل سازی ریاضی میدان و استفاده از ضرائب هارمونیک است. در این مطالعه، مدل سازی میدان مغناطیسی زمین با استفاده از ضرائب IGRF نسل دهم انجام شده و نتایج با یکی از معتبرترین مراجع صحت گذاری شده است. مقایسه نتایج، نشان دهنده دقت مناسب مدل سازی می باشد. در مرحله بعد نتایج کنترل وضعیت ماهواره در دو حالت استفاده از تبدیل خطی و غیر خطی بدست آمده و براساس آن مرز اعتبار تبدیل خطی نشان داده می شود.

واژه های کلیدی: کنترل وضعیت، میدان مغناطیسی زمین، IGRF نسل دهم، میکروماهواره، تبدیل خطی و غیرخطی

## مقدمه

معادلات بنیادین حاکم بر وضعیت ماهواره، معادلات اولر است [۱]:

$$T = \dot{h}_t = \dot{h}_B + \omega \times h_B \quad (1)$$

در رابطه بالا، T مجموع گشتاورهای خارجی وارد شده بر ماهواره، h ممتم زاویه ای ماهواره و  $\omega$  سرعت زاویه ای آن است، زیر نویس I به معنی بیان شده در دستگاه اینرسی و B به معنی دستگاه بدنی ماهواره است.

گشتاورهای خارجی شامل گشتاورهای اغتشاشی و کنترلی هستند. منابع گشتاورها ممتم کل ماهواره را تغییر می دهند. منابع گشتاورهای اغتشاشی نیروی آپرودینامیکی ناشی از اتمسفر، تشعشعات خورشیدی، نیروی اغتشاشی جسم سوم، اثر ناهمگونی زمین و منابع دیگر هستند، این گشتاورها ماهواره را از وضعیت مطلوب منحرف می کنند. در مقابل، گشتاورهای کنترلی وظیفه نگهداری و برگرداندن ماهواره به وضعیت مطلوب را بر عهده دارند و توسط عملگرهای متفاوت مانند بوم های گرانشی، عملگرهای مغناطیسی، پنل های خورشیدی، ابزارهای تبادل ممتم و غیره اعمال می شوند.

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

میدان مغناطیسی زمین را می‌توان توسط گرادیان یک تابع پتانسیل اسکالر نوشت،  $B = -\nabla V$ ،  $v$  را می‌توان به شکل یک سری از هارمونیک‌های کروی نشان داد [۲].

$$V(r, lat, long) = a \sum_{n=1}^N \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos(m long) + h_n^m \sin(m long)] P_n^m(colat) \quad (5)$$

در رابطه (۵):

$V$ : تابع پتانسیل اسکالر

$a$ : شعاع استوایی زمین و برابر ۶۳۷۱.۲ کیلومتر

$r$ : شعاع زمین مرکز

$g_n^m$  و  $h_n^m$ : ضرایب گاوسی (نامگذاری شده به افتخار کارل گاوس)

$colat$ : متمم عرض جغرافیایی

$long$ : طول جغرافیایی

$P_n^m(colat)$ : توابع لژاندر متحد از درجه  $n$  و مرتبه  $m$

یک راه تعیین ضرایب گاوسی، انطباق یک تابع به روش حداقل مربعات به اطلاعات میدان مغناطیسی است. برای این کار باید اطلاعات شامل مقدار و جهت میدان مغناطیسی زمین روی نقاط متعددی از آن جمع‌آوری شود. اما این نمونه‌برداری در سطح زمین به شکل یکنواخت صورت نمی‌پذیرد. یکی از روش‌های مناسب تعیین این ضرایب استفاده از اطلاعات جمع‌آوری شده توسط ماهواره‌هایی مانند مگ‌ست-۱<sup>۴</sup> و اورستد<sup>۵</sup> است [۳]. رابطه (۵) با  $n=1$  دوقطبی<sup>۶</sup>، با  $n=2$  چهارقطبی<sup>۷</sup> و با  $n=3$  هشت‌قطبی<sup>۸</sup> نامیده می‌شود. هرچقدر از تعداد ضرایب بیشتری استفاده شود نتیجه دقیق‌تری به دست خواهد آمد. ضرایب IGRF نسل دهم تا درجه ۱۳<sup>۹</sup> بوده (N=13) و ۱۹۶ ضریب را شامل می‌شود.

در مدل هشت‌قطبی در سطح زمین، دقت در حدود چند ده نانوتسلا بوده و وقتی فاصله از مرکز زمین به  $4R_{\oplus}$  می‌رسد؛ آنگاه خطا به  $\frac{1}{3}$  تا  $\frac{1}{4}$  این مقدار کاهش پیدا می‌کند. با افزایش فاصله، مدل هارمونیک کروی کمتر نمایان‌گر میدان مغناطیسی بوده و بیشتر تأثیر گرفته از بادهای خورشیدی است. همین مسئله سبب می‌شود که این مدل تا ارتفاع  $6.6R_{\oplus}$  یا مدار سنکرون معتبر باشد. مدل چهارقطبی مدل دقیق بعدی است که در ارتفاع بالاتر از  $1.2R_{\oplus}$  حداکثر خطای آن ۲۰ درصد در مقدار و حدود ۱۰ درجه در جهت خواهد بود. خطای این مدل در سطح زمین افزایش می‌یابد

با جاگذاری ممان‌های اینرسی و سرعت‌های زاویه‌ای براساس زوایای وضعیت، معادلات دینامیک غیرخطی ماهواره در محور  $X$  به شکل رابطه (۲) خواهد بود.

$$\begin{aligned} T_{dx} + T_{dx} = & (\ddot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \\ & + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \omega_0) I_x - (\ddot{\theta} \cos \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ & + \dot{\psi} (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \phi \cos \psi \\ & - \dot{\psi} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ & \cos \psi \omega_0) I_{xy} - (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\psi} (-\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi \\ & - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi) - \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi - (\dot{\phi} \cos \phi \cos \psi \\ & + \dot{\psi} \sin \phi \sin \psi - \dot{\phi} \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi (\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \\ & + \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi \omega_0) I_{xz} + \dot{h}_{wx} + (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi - \\ & ((\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) \omega_0) * (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \\ & - \dot{\theta} \sin \phi - (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \omega_0) I_z \\ & - (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta - \cos \theta \sin \psi \omega_0) I_{xz} - (\dot{\theta} \cos \phi \\ & + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi - (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi \omega_0) I_{yz} \\ & - \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi - (-\sin \phi \cos \psi \sin \theta \sin \psi \omega_0) \\ & (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi - (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi \omega_0) I_y \\ & - (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta - \cos \theta \sin \psi \omega_0) I_{xy} - (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \\ & - \dot{\theta} \sin \phi - (-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \omega_0) I_{yz} \\ & + (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi - ((\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) \omega_0) h_{wz} \\ & - (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi - (-\sin \phi \cos \psi \cos \phi \sin \theta \sin \psi \omega_0) h_{wy} \end{aligned} \quad (2)$$

به دلیل پیچیدگی روابط غیرخطی از فرض زوایای کوچک اوپلر استفاده می‌کند و معادلات دینامیک خطی ماهواره در سه محور اصلی به شکل رابطه (۳) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} T_{dx} + T_{dx} = & I_x \ddot{\phi} + (I_y - I_z) \omega_0^2 \phi + (I_y - I_z - I_x) \omega_0 \dot{\psi} \\ & + \dot{h}_{wx} - h_{wz} \omega_0 - h_{wy} \dot{\psi} - h_{wy} \omega_0 \phi - I_{xy} \ddot{\theta} - I_{xz} \dot{\psi} \\ & - I_{xz} \omega_0^2 \psi + 2I_{yz} \omega_0 \dot{\theta} - 2I_{yz} \omega_0^2 \\ T_{dy} + T_{dy} = & I_y \ddot{\theta} + \dot{h}_{wy} - I_{xy} (\ddot{\phi} - 2\omega_0 \dot{\psi} - \omega_0^2 \phi) \\ & + I_{yz} (-\dot{\psi} - 2\omega_0 \dot{\phi} + \omega_0^2 \psi) + h_{wx} \dot{\psi} + h_{wx} \omega_0 \phi - h_{wz} \dot{\phi} + h_{wz} \psi \\ T_{dz} + T_{dz} = & I_z \ddot{\psi} + (I_z + I_x - I_y) \omega_0 \dot{\phi} + (I_y - I_z) \omega_0^2 \psi \\ & + \dot{h}_{wz} + h_{wx} \omega_0 + h_{wy} \dot{\phi} - h_{wy} \omega_0 \psi - I_{yz} \ddot{\theta} + I_{xz} \dot{\phi} - 2I_{xy} \omega_0 \dot{\theta} \\ & - I_{xz} \omega_0^2 \phi - 2I_{xz} \omega_0 \dot{\psi} + I_{xy} \omega_0^2 \end{aligned} \quad (3)$$

گشتاور کنترلی مغناطیسی از ضرب خارجی دوقطبی مغناطیسی و شدت میدان مغناطیسی زمین به دست می‌آید.

$$T_c = T_{mag} = m \times B \quad (4)$$

در رابطه (۴)،  $B$  شدت میدان مغناطیسی زمین در چارچوب بدنی و  $m$  دوقطبی مغناطیسی است.

## مدل‌سازی میدان مغناطیسی زمین

میدان مغناطیسی زمین در اصل یک دوقطبی مغناطیسی است. در این مطالعه، میدان مغناطیسی زمین توسط تابع پتانسیل کروی و با استفاده از ضرایب IGRF<sup>۳</sup> نسل دهم شبیه‌سازی می‌شود.

3. International Geomagnetic Reference Field (IGRF)

4. MAGSAT-1  
5. Orsted  
6. Dipole  
7. Quadruple  
8. Octupole

$$B_{\phi} = \frac{1}{\sin(\text{colat})} \sum_{n=1}^K \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n [-mg_n^m \sin(\text{mlong}) + mh_n^m \cos(\text{mlong})] P_n^m(\text{colat}) \quad (8)$$

### محاسبه ضریب شبه نرمالیزه اشمیت

می توان با استفاده از ضریبی به نام شبه نرمالیزه اشمیت، ضرایب  $g_n^m$  و  $h_n^m$  و  $P_n^m(\text{colat})$  را نرمالیزه و به این ترتیب حدود ۷ درصد در زمان محاسبات کامپیوتری صرفه جویی کرد. در حالت نرمالیزه شده، این ضرایب به شکل زیر خواهند بود:

$$g^{n,m} = S_{n,m} g_n^m, h^{n,m} = S_{n,m} h_n^m, P^{n,m} = S_{n,m} P_n^m \quad (9)$$

$S_{n,m}$ : ضریب شبه نرمالیزه اشمیت

$g_n^m$  و  $h_n^m$  را IGRF در اختیار قرار می دهد.  $S_{n,m}$  با رابطه (۱۰) محاسبه می شود:

$$S_{n,m} = \left[ \frac{(2 - \delta_m^0)(n-m)!}{(n+m)!} \right] \frac{(2n-1)!}{(n-m)!} \quad (10)$$

$$\delta_i^j = 1 \quad \text{if} \quad i = j$$

$$\delta_i^j = 0$$

همان طور که دیده می شود، رابطه (۱۰) مستقل از موقعیت است پس می توان آن را یک بار محاسبه و سپس آن را به ضرایب  $g_n^m$  و  $h_n^m$  اعمال کرد. رابطه بازگشتی برای  $S_{n,m}$  را می توان به شکل رابطه (۱۱) نوشت.

$$S_{0,0} = 1$$

$$S_{n,0} = S_{n-1,0} \left( \frac{2n-1}{n} \right) \quad (11)$$

$$S_{n,m} = S_{n,m-1} \sqrt{\frac{(n-m+1)(\delta_m^1+1)}{n+m}}$$

### محاسبه توابع لژاندر متحد و مشتق آن

برای به دست آوردن  $P_n^m$  از رابطه (۱۲) استفاده می شود:

$$\int_0^{\pi} [P_n^m(\theta)]^2 \sin(\theta) d\theta = \frac{2(2-\delta_m^0)}{2n+1} \quad (12)$$

رابطه (۱۲) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P_n^m(\theta) = \left\{ \left[ \frac{(2-\delta_m^0)(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \frac{(2n-1)!}{(n-m)!} \right\} \sin^m \theta \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \cos^{n-m} \theta - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-m-2} \theta \\ & + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-m-4} \theta - \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

رابطه بازگشتی مستقیم برای  $P_n^m$  با رابطه (۱۴) ارائه می شود که در این رابطه نیازی به استفاده از  $S_{n,m}$  نیست.

به گونه ای که مقدار و جهت آن در حدود ۴۰ درصد و ۲۰ درجه خطا خواهند داشت.

مدل دیپل<sup>۹</sup> مدلی با کمترین دقت است. برای ارتفاعات بالای  $3R_{\oplus}$  خطای این مدل تقریباً ۹ درصد در مقدار و ۷ درجه در جهت خواهد بود و میزان بی دقتی با نزدیک شدن به سطح زمین افزایش می یابد. از طرف دیگر این ساده ترین و کم دقت ترین مدل مزایایی هم دارد و آن سرعت پاسخگویی است. مدل دوقطبی برای طراحی های اولیه معتبر است، یعنی وقتی به تخمینی از مقدار قدرت دوقطبی نیاز است یا وقتی در ارتفاعات بالای  $3R_{\oplus}$  کار می شود. اما بعد از این مرحله باید از مدل هایی با دقت بالاتر استفاده شود.

### معرفی IGRF

IGRF یک سری بین المللی پذیرفته شده از مدل های هارمونیک کروی جهانی از میدان مغناطیسی زمین است. این ضرایب شامل یک سری (۱۲۰ تا سال ۱۹۹۵ و ۱۹۶ تا سال های ۲۰۰۰ به بعد) از ضرایب  $g_n^m$  و  $h_n^m$  به شکل توابعی از  $n$  و  $m$  برحسب نانوتسلا (nT) و همچنین مشتق درجه اول زمانی این ضرایب (sv)، ۸۰ ضریب، برحسب nT/year برای هر دوره زمانی است. اولین نسل IGRF در سال ۱۹۶۹ به دست آمد و به دلیل تغییر این مقادیر با زمان، IGRF از ۱۹۶۹ به روزرسانی می شود. از اطلاعات هر دوره برای ۵ سال بعد از آن استفاده می شود. این ضرایب توسط IAGA منتشر می شود. IGRF برای سال ۲۰۰۵ به بعد IGRF نسل دهم معروف بوده و از سال ۲۰۰۰ حداکثر درجه  $n$  از ۱۰ به ۱۳ افزایش پیدا کرده است، که این مسئله محاسبات را دقیق تر می کند.

تغییرات در میدان مغناطیسی زمین، که به نام تغییرات قرنی یا سکولار شناخته می شود، زمانی کشف شد که هنری گلیبرند<sup>۱۰</sup> در سال ۱۶۳۴، انحراف میدان مغناطیسی را در لندن، که خودش اندازه گیری کرده بود، با مقادیر به دست آمده توسط گانتز<sup>۱۱</sup> و بُرو<sup>۱۲</sup> و به ترتیب در ۱۲ و ۵۴ سال پیش از آن مقایسه کرد [۴].

بنابراین با محاسبه رابطه (۵) و سپس گرادیان آن، رابطه ای دقیق برای میدان مغناطیسی زمین به شکل زیر به دست می آید:

$$B_r = \sum_{n=1}^K \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos(\text{mlong}) + h_n^m \sin(\text{mlong})] P_n^m(\text{colat}) \quad (6)$$

$$B_{\theta} = - \sum_{n=1}^K \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos(\text{mlong}) + h_n^m \sin(\text{mlong})] \frac{\partial P_n^m(\text{colat})}{\partial \text{colat}} \quad (7)$$

9. Dipole
10. Henry Gellibrand
11. Gunter
12. Borough

در رابطه (۱۷)  $B_\phi, B_\theta, B_r$  و مؤلفه‌های شدت میدان در مختصات کروی،  $\delta$  و  $\theta_g$  انحراف مغناطیسی و زمان نجومی در گرینویچ هستند. در ادامه مؤلفه‌های شدت میدان به دستگاه مداری منتقل می‌شوند.

$$B^O = \begin{bmatrix} -suc\Omega - c\Omega cis\Omega & -sus\Omega + cuscic\Omega & cusi \\ -sis\Omega & sic\Omega & -ci \\ -cuc\Omega + sucis\Omega & -cus\Omega - sucic\Omega & -susi \end{bmatrix} B^{inertial} \quad (18)$$

در رابطه (۱۸)  $\Omega, u$  و  $i$  به ترتیب آنومالی حقیقی، right ascension of the ascending node و میل مداری بوده و  $s$  و  $c$  نشان دهنده سینوس و کسینوس هستند. مرحله نهایی، انتقال از دستگاه مداری به دستگاه بدنی فضاییماست.

$$B_{nonlinear}^B = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & c\psi c\phi s\theta + s\psi s\phi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} B^O \quad (19)$$

در رابطه بالا  $\phi$  و  $\psi$  و  $\theta$  زوایای وضعیت ماهواره هستند. رابطه (۱۹) شکل غیرخطی ماتریس انتقال را نشان می‌دهد. با خطی‌سازی، ماتریس تبدیل خطی به شکل رابطه (۲۰) به دست می‌آید:

$$B_{linear}^B = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} B^O \quad (20)$$

### تدوین کد کامپیوتری

با استفاده از الگوریتم و روابط بیان شده در قسمت‌های قبل، توسط نویسندگان مقاله، در محیط نرم‌افزاری متلب کد کامپیوتری به نام مگ‌کد<sup>۱۳</sup> تدوین شده است که در ادامه خروجی، ورودی و نتایج شبیه‌سازی کد معرفی می‌شود.

#### ورودی‌های برنامه

ارتفاع نقطه مورد نظر از سطح زمین، طول و عرض جغرافیایی و زوایای وضعیت ماهواره برای محاسبه میدان در چارچوب بدنی.

#### خروجی‌های برنامه

میدان مغناطیسی زمین برحسب نانوتسلا در مختصات کروی، NED، مرجع مداری و بدنی ماهواره.

#### بررسی صحت الگوریتم

برای تعیین میزان دقت شبیه‌سازی، نتایج به دست آمده براساس کد تهیه شده توسط نویسندگان در مختصات NED با نتایج یکی از معتبرترین مراجع بین‌المللی (سازمان نقشه‌برداری بریتانیا) مقایسه می‌شود [۵].

$$\begin{aligned} P^{0,0} &= 1 \\ P^{n,n} &= \sin \theta P^{n-1,n} \\ P^{n,m} &= \cos \theta P^{n-1,m} - K^{n,m} P^{n-2,m} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} K^{n,m} &= 0, n=1 \\ K^{n,m} &= \frac{(n-1)^2 - m^2}{(2n-1)(2n-3)}, n > 1 \end{aligned}$$

و مشتق آن به صورت (۱۵) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{0,0}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial P^{n,n}}{\partial \theta} &= \sin \theta \frac{\partial P^{n-1,n-1}}{\partial \theta} + \cos \theta P^{n-1,n-1} \\ \frac{\partial P^{n,m}}{\partial \theta} &= \cos \theta \frac{\partial P^{n-1,m}}{\partial \theta} - \sin \theta P^{n-1,m} - K^{n,m} P^{n-2,m} \frac{\partial P^{n-2,m}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (15)$$

### انتقال میدان مغناطیسی به مختصات NED

آنچه تا اینجا ارائه شد، میدان مغناطیسی را در مختصات کروی محاسبه می‌کند؛ بنابراین با استفاده از رابطه (۱۶) میدان در مختصات کروی به مختصات NED (شمال - شرق - پایین) منتقل می‌شود. از این مؤلفه‌ها برای مقایسه با نتایج سازمان نقشه‌برداری بریتانیا استفاده می‌شود.

$$B^{NED} = \begin{bmatrix} -B_\theta \cos \varepsilon - B_r \sin \varepsilon \\ B_\phi \\ B_\theta \sin \varepsilon - B_r \cos \varepsilon \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\varepsilon$  ترمی است که برای خنثی کردن اثرات پچی زمین به کار می‌رود و معمولاً آنقدر کوچک است که می‌توان آن را صفر فرض کرد.

### انتقال میدان مغناطیسی به مختصات بدنی ماهواره

نهایتاً برای استفاده مقدار میدان مغناطیسی، این میدان باید در مختصات بدنی ماهواره محاسبه شود تا بتوان از آن در رابطه  $T^B = m^B \times B^B$  به منظور تولید گشتاور مغناطیسی برای کنترل وضعیت ماهواره استفاده کرد. شایان ذکر است که  $B$  به دست آمده از الگوریتم بالا براساس نانوتسلاست و برای استفاده باید آن را به تسلا تبدیل کرد.

در مرحله اول میدان مغناطیسی در مختصات کروی به مختصات اینرسی زمین ثابت منتقل می‌شود.

$$B^{inertial} = \begin{bmatrix} (B_r \cos \delta + B_\theta \sin \delta) \cos \alpha - B_\phi \sin \alpha \\ (B_r \cos \delta + B_\theta \sin \delta) \sin \alpha + B_\phi \cos \alpha \\ B_r \sin \delta - B_\theta \cos \delta \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\delta = 90 - colat, \alpha = long + \theta_g$$

میدان در حالت انتقال خطی از حالت غیرخطی دیده می شود که مرز اعتبار حالت تقریبی را نشان می دهد. درصد خطای ارائه شده در جدول (۳) با رابطه (۲۱) محاسبه می شود:

$$error = \left| \frac{B_{nonlinear} - B_{linear}}{B_{nonlinear}} \right| \times 100 \quad (21)$$

براساس جدول (۳) می توان مشاهده کرد که برای زاویه وضعیت ۱۰ درجه درصد خطای متوسط کمتر از ۵ درصد است. این خطا در زاویه وضعیت ۲۰ درجه حدود ۵ درصد افزایش می یابد و در وضعیت ۲۵ درجه به بیش از ۲۵ درصد می رسد. نتایج نشان می دهد، تقریب انتقال خطی برای کاربردهای کنترل وضعیت دقیق بالاتر از ۱۰ درجه چندان مناسب نیست. بنابراین استفاده از انتقال خطی برای مانور زوایای بزرگ توصیه نمی شود. مرز اعتبار تبدیل خطی را می توان با توجه به میزان دقت مطلوب برای هر ماهواره خاص با استفاده از روند ارائه شده در این مقاله تعیین کرد.

**جدول ۳-** درصد خطای مولفه های شدت میدان مغناطیسی مختصات بدنی خطی نسبت به غیر خطی برحسب زاویه وضعیت ماهواره

زاویه وضعیت (درجه)	درصد خطای رول	درصد خطای پیچ	درصد خطای یاو
۰	۰	۰	۰
۵	۰/۳۲۶۵۱	۲/۵۱۵۴	۱/۲۲۲۴
۱۰	۱/۱۵۰۲	۷/۲۴۹۸	۳/۹۱۰۷
۱۵	۲/۴۴۷۴	۱۳/۵۰۶	۴/۶۹۷۷
۲۰	۴/۱۹۶	۲۱/۰۷۶	-۳/۸۱۱۴
۲۵	۶/۳۶۵۲	۲۹/۸۹۲	-۱۸/۵۴۸
۳۰	۸/۹۱۵۵	۳۹/۹۲	-۲۷/۴۴۵
۳۵	۱۱/۷۹۷	۵۱/۱۱۳	-۳۰/۰۶۲
۴۰	۱۴/۹۵۱	۶۳/۳۸۹	-۲۹/۶۲۱

## جمع بندی

استفاده از میدان مغناطیسی زمین برای کنترل وضعیت ماهواره، به ویژه برای ماهواره های در مدار ارتفاع پایین، یکی از روش های متداول و مقرون به صرفه است. بنابراین دقت مدل سازی شدت میدان مغناطیسی روی کارایی سیستم کنترلی تأثیر خواهد داشت. در این مقاله به استخراج دقیق ترین مدل میدان با استفاده از آخرین نتایج اندازه گیری ضرایب IGRF پرداخته شد. با استفاده از نتایج شبیه سازی و مقایسه آن با یکی از معتبرترین مراجع جهانی، نتایج الگوریتم محاسباتی ارائه شده صحه گذاری شد. در ادامه تغییرات شدت میدان مغناطیسی برای ماهواره های خاص شبیه سازی شد و سپس شبیه سازی تغییرات شدت میدان برحسب زوایای مختلف وضعیت ماهواره در سه محور رول، پیچ و یاو انجام شد. در این مرحله از دو انتقال تقریبی خطی و غیرخطی استفاده شد و با ارائه

نتایج برای لندن و طول و عرض جغرافیایی صفر به ترتیب در جدول های (۱) و (۲) ارائه شده اند.

**جدول ۱-** مقایسه شدت میدان مغناطیسی محاسبه شده با مگ کد و نتایج BGS برای لندن

لندن	نتایج BGS (NanoTesla)	نتایج کد نویسندگان (NanoTesla)	درصد خطا
$B_{North}$	۱۹۲۵۵	۱۹۲۷۷	۰/۱۱
$B_{Earth}$	-۷۹۳	-۷۹۹/۷	۰/۸۵
$B_{Down}$	۴۴۵۰۴	۴۴۲۱۷	۰/۶۴
$ B $	۴۸۴۹۷	۴۸۲۴۳	۰/۵۲

**جدول ۲-** مقایسه شدت میدان مغناطیسی محاسبه شده با مگ کد و نتایج BGS برای نقطه ای با طول و عرض جغرافیایی صفر

طول و عرض صفر جغرافیایی	نتایج BGS (NanoTesla)	نتایج کد نویسندگان (NanoTesla)	درصد خطا
$B_{North}$	۲۷۴۷۷	۲۷۵۷۷	۰/۳۶
$B_{Earth}$	-۳۲۳۵	-۳۲۳۴/۶	۰/۰۱
$B_{Down}$	-۱۵۰۵۸	-۱۵۱۳۷	۰/۵۲
$ B $	۳۱۴۹۹	۳۱۶۲۴	۰/۳۹

همان طور که در جدول های (۱) و (۲) دیده می شود، نتایج به دست آمده با کد تهیه شده، خطای کمتر از یک درصد دارند؛ بنابراین می توان از این برنامه با اطمینان کافی در کنترل وضعیت مغناطیسی یک ماهواره استفاده کرد.

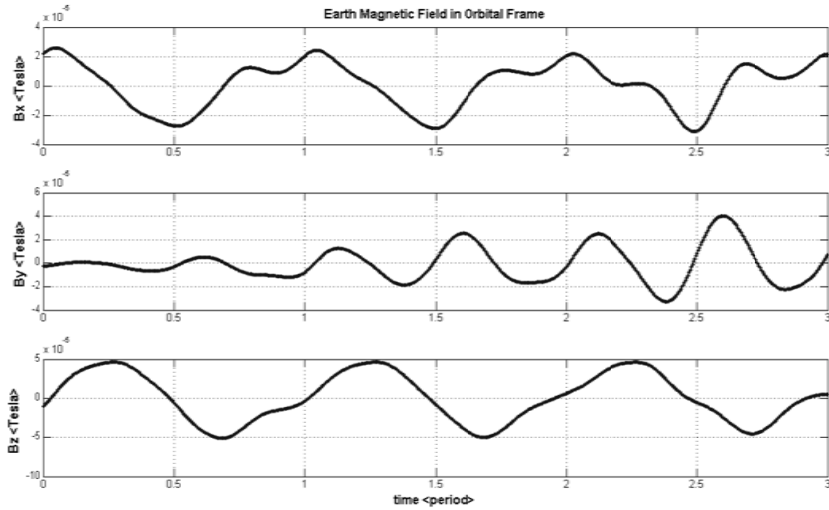
## شبیه سازی و نتیجه گیری

در این قسمت، میدان مغناطیسی زمین برای ماهواره ای مشخص شبیه سازی می شود. ماهواره در مداری قطبی، در ارتفاع ۵۰۰ کیلومتری از سطح زمین در نظر گرفته شده است.

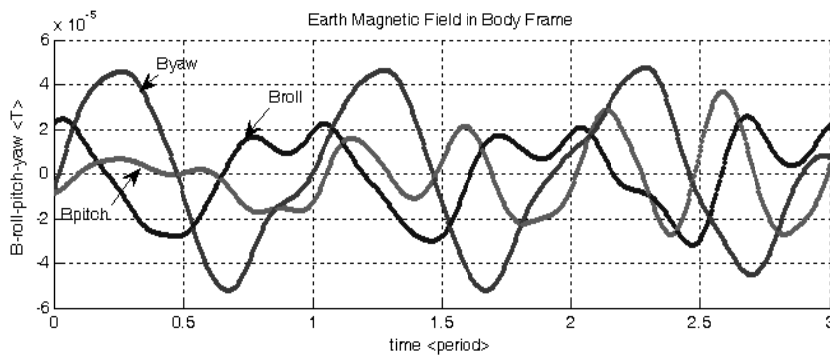
شکل (۱) میدان مغناطیسی در مختصات مداری را برای سه پرورد مداری نشان می دهد. شکل (۲) و (۳) به ترتیب نشان دهنده شدت میدان در مختصات بدنی ماهواره به دست آمده از انتقال های خطی و غیرخطی است. شکل (۴) میزان اختلاف شکل های (۲) و (۳) از یکدیگر را نشان می دهد. در شکل های (۵) و (۶) ماهواره در یک نقطه در مدار، ثابت در نظر گرفته شده و با افزایش زوایای وضعیت انحراف انتقال خطی از غیرخطی نمایش داده شده است. این انحراف برای سه محور اصلی فضاپیما در جدول (۳) آورده شده است. برای مثال در شکل (۵) برای محور رول انحراف میزان شدت

بنابراین برای مانورهای زاویه بزرگ ماهواره فقط استفاده از فرم غیرخطی انتقال پیشنهاد می‌شود. البته باید توجه داشت که تعریف زوایای کوچک یک تعریف ثابت نیست و در هر مأموریت با توجه به شرایط خاص آن و همچنین دقت مورد نیاز باید مورد توجه و بررسی قرار گیرد.

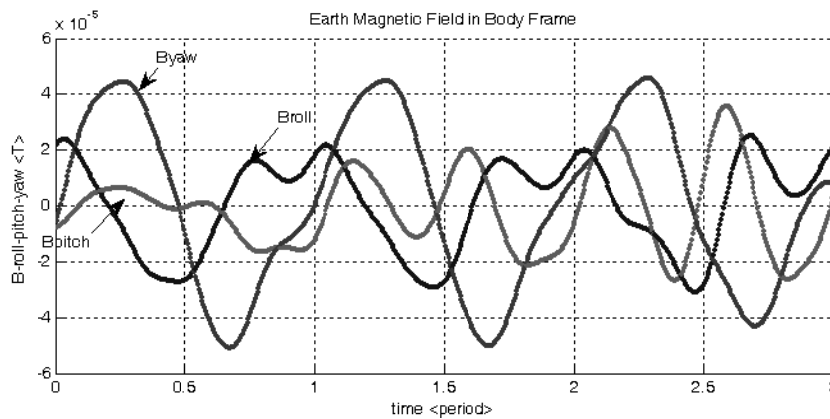
نمودارهای مقایسه‌ای برای دو حالت خطی و غیرخطی مرز اعتبار تقریب خطی برای این حالت خاص مشخص شد. برای تبیین بیشتر، جدول خطای مؤلفه‌های شدت میدان مغناطیسی مختصات بدنی خطی نسبت به غیرخطی برحسب زاویه وضعیت ماهواره داده شده است، مشاهده می‌شود که با افزایش زوایای وضعیت خطای خطی‌سازی سیر صعودی دارد.



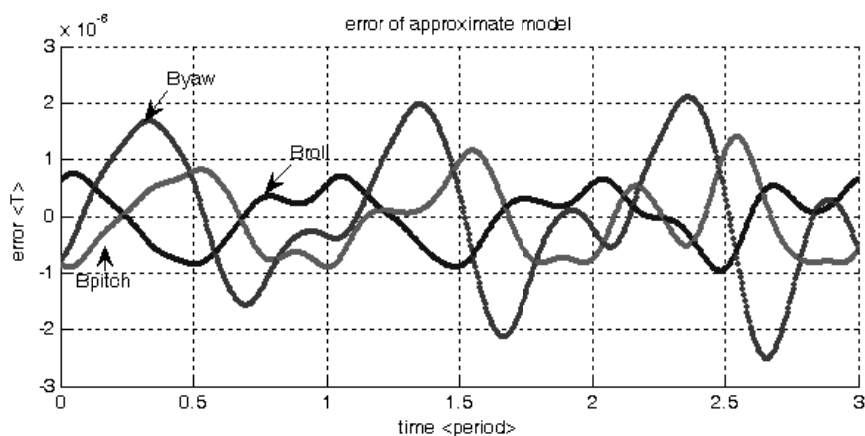
شکل ۱- میدان مغناطیسی در مختصات مداری برای مداری قطبی در ارتفاع ۵۰۰ کیلومتری



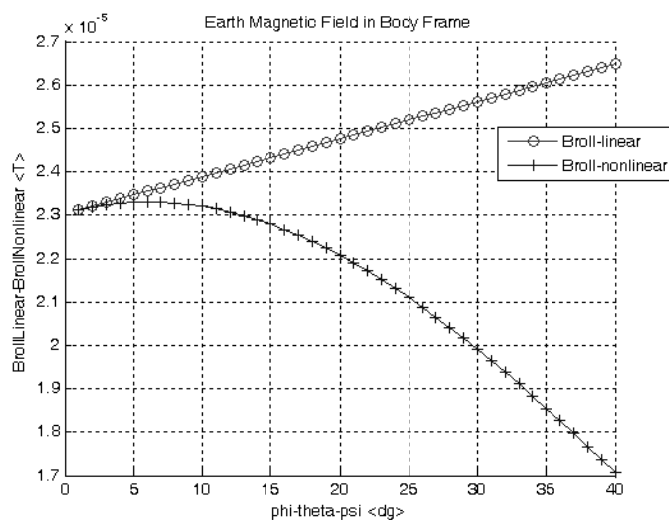
شکل ۲- میدان مغناطیسی در چارچوب بدنی برای وضعیت ۱۰ درجه با استفاده از ماتریس انتقال خطی



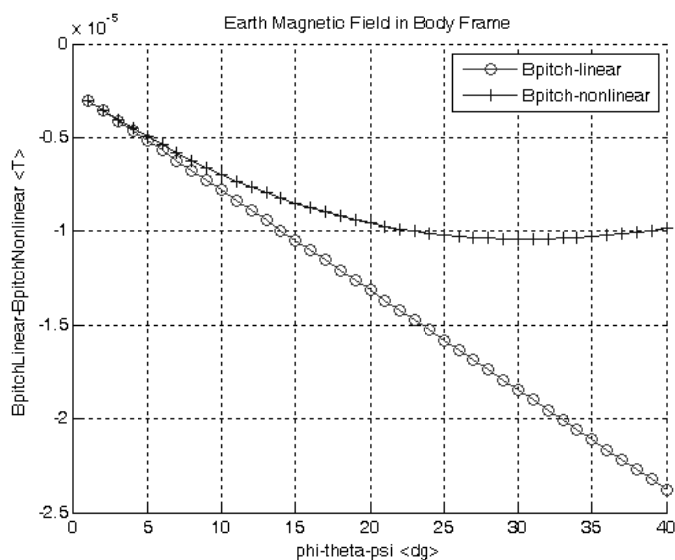
شکل ۳- میدان مغناطیسی در چارچوب بدنی برای وضعیت ۱۰ درجه با استفاده از ماتریس انتقال غیرخطی



شکل ۴- خطای استفاده از تبدیل خطی برای مؤلفه های شدت میدان در چارچوب بدنی، در وضعیت ۱۰ درجه



شکل ۵- انحراف مؤلفه شدت میدان مغناطیسی محور رول مختصات بدنی حاصل از انتقال خطی در مقایسه با انتقال غیرخطی



شکل ۶- انحراف مؤلفه شدت میدان مغناطیسی محور پیچ مختصات بدنی حاصل از انتقال خطی در مقایسه با غیرخطی



MAGSAT and Orsted Data”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Vol. 135, 2003, pp.77-91.

- [4] Macmillan, S. and Maus, S., “International Geomagnetic Reference Field-the Tenth Generation”, *Earth Planet Space*, Vol. 57, 2005, pp.1135-1140.
- [5] [on line], available, [http://www.geomag.bgs.ac.uk/gifs/wmm\\_calc.html](http://www.geomag.bgs.ac.uk/gifs/wmm_calc.html).

## مراجع

- [1] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control*, 2<sup>nd</sup> Edition, Cambridge University Press, 1997.
- [2] Wertz, J. R., *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Kluwer Academic Publishers, 1978.
- [3] Langlias, B., Manda, M. and Ulte-Guerard, P., “High-Resolution Magnetic Field Modeling: Application to