

Required Velocity Calculation in the Presence Of Atmosphere Effect in C^* Matrix

A. Mohammadi^{1*}, E. Taheri², J. Roshanian³ and M. Bahrami⁴

1, 2 and 3. Laboratory MDO, Faculty of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology

4. Faculty of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology

*Estern Vafadar St., Tehranpars, Tehran, IRAN

mohammadi@ari.ac.ir

In this research a perturbation based guidance method is developed for non-Keplerian problem. Problem is linearized in the presence non-gravitational forces like aerodynamic, so it can improve the performance of C^ guidance for reentry problems. In this study developed method is used for a reentry guidance accuracy and performance. Results showed significant increases in accuracy compared to Keplerian approaches.*

Keywords:orbital boundry valuo problem, C^* guidance, guidance matrix, state transition matrix

1. M. Sc. (Corresponding Author)
2. M. Sc.
3. Associat Professor
4. Professor

محاسبه سرعت لازمه، حول مسیر نامی با احتساب اثر اتمیسفر در ماتریس C^*

آیدین محمدی^{۱*}، احسان طاهری^۲، جعفر روشنیان^۳ و محسن بهرامی^۴

۱، ۲ و ۳- آزمایشگاه MDO، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۴- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

*تهران، فلکه چهارم تهران پارس، خ وفادار شرقی

mohammadi@ari.ac.ir

در این پژوهش روش هدایت اغتشاشی بر پایه ماتریس انتقال حالت برای مسئله‌ای غیر کپلری که شامل نیروها و شتاب‌های غیر جاذبه‌ای قابل پیش‌بینی باشد توسعه یافته است. در این رویکرد خطی‌سازی‌ها و فرآیند تولید ماتریس‌های پایه با فرض حضور نیروی آیرودینامیک علاوه بر نیروی گرانش غیر کپلری انجام شده است و بر اساس این رویکرد عملکرد روش هدایت C^* را برای مسائل که نیرویی غیر از گرانش در آن دخیل است اصلاح شده است. در نهایت نیز هدایت C^* توسعه یافته برای هدایت ماموریت فرود یک محموله به روی یک سیاره توسعه یافته و از آن برای اصلاح مسیر مدول و افزایش دقت فرود بهره‌گیری شده است. نتایج نشان دهنده افزایش قابل توجه دقت نسبت به حل‌های غیر کپلری است.

واژه‌های کلیدی: ماتریس انتقال حالت، ماتریس هدایت، هدایت C^* ، مسئله مقدار مرزی فضایی

مقدمه

راهکارها حل مستقیم مسئله مقدار مرزی به کمک یکی از الگوریتم‌های رایج حل لمبرت است. این الگوریتم‌ها در مسائل کپلری دقت بالا و قابلیت اطمینان قابل توجهی دارند، اما این نقطه ضعف را نیز دارند که توانایی لحاظ کردن اثرات حرکت غیر کپلری را ندارند. روش‌های بهینه‌سازی و شوتینگ متده^۵ نیز قابلیت حل این مسئله را دارد، اما حجم بالای محاسبات این الگوریتم‌ها خود دلیلی است که می‌تواند طراح را بر آن دارد تا راهکار جایگزینی را برای آن‌ها جستجو کند. اما این راهکار جایگزین حل اغتشاشی مسئله بر مبنای خطی‌سازی و محاسبه ماتریس انتقال حالت است. این رویکرد، قابلیت در نظر گرفتن اثرات غیر کپلری را در اختیار طراح قرار می‌دهد و علاوه بر آن حجم محاسبات کامپیوتر پرواز را بسیار پایین می‌آورد. در مقابل این نکات مثبت، روش‌های اغتشاشی نسبت به الگوریتم‌های لمبرت استقلال عمل کمتری دارند، یعنی به دلیل

در مسائل مربوط به هدایت فضایی‌ها عمدتاً طراح با یک مسئله مقدار مرزی فضایی روبه‌رو است و باید بتواند راهکاری برای حل آن روی کامپیوتر پرواز ارائه دهد. قالب کلی از این قرار است: بر اساس اطلاعات ناوبری وسیله در شرایط خاصی از سرعت و موقعیت قرار دارد، حال سؤال این است که در این نقطه باید چه اصلاحی در سرعت وسیله اعمال شود تا به کمک آن فضاییما در زمان مشخصی از موقعیت مطلوبی عبور کند. حال موضوع انتخاب الگوریتمی که توانایی محاسبه این اصلاح سرعت را با توجه به توان کامپیوتر پرواز داشته باشد، چند راهکار را در مقابل طراح قرار می‌دهد. یکی از این

۱. کارشناس ارشد

۲. کارشناس ارشد

۳. دانشیار

۴. استاد

هدایت یک فضاپیما در حضور میدان گرانش چند جسمی توسعه یافته است. حال در این مقاله قصد بر وارد کردن اثر خطی شده اتمسفر و آیرودینامیک بازگشت به جو در محاسبات ماتریس انتقال حالت است. بر این اساس ابتدا، روش باتین در نگاه به مسئله از نظر گذرانده خواهد شد، سپس چگونگی وارد کردن اتمسفر به آن مورد بحث قرار می‌گیرد. کار با تعریف یک مسئله بازگشت به اتمسفر نمونه مورد ادامه می‌یابد و محاسبات مربوط به ماتریس‌های پایه در اطراف این مسیر نامی برای هر دو رویکرد انجام می‌گیرد. در بخش انتهایی نیز نتایج عملکرد دو الگوریتم در یک شبیه‌سازی تصادفی مقایسه می‌شوند.

ماتریس انتقال حالت و حل اغتشاشی

در این قسمت مفاهیم ماتریس انتقال حالت و کاربرد آن در توسعه روش هدایت اغتشاشی که در مرجع [۳] به تفصیل آمده، مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض کنید $r(t)$ ، $v(t)$ و $r_{ref}(t)$ ، $v_{ref}(t)$ به ترتیب موقعیت و سرعت جسم در مدار واقعی و موقعیت و سرعت جسم در مدار مرجع باشد. قابل ذکر است که الزامی در کپلری بودن مسیر نامی وجود ندارد. در این بخش، بر اساس منابع موجود به تحلیل روش مورد بحث در حضور اثرات اغتشاشی گرانش ناشی از اجرام سماوی دیگر با عدم کرویت زمین پرداخته خواهد شد و اثر اغتشاشی اتمسفر در بخش‌های آینده مورد بررسی قرار خواهد گرفت. فرض کنیم که در شرایط واقعی، مسیر واقعی از مسیر نامی انحراف دارد:

$$r(t) = r_{ref}(t) + \delta(t) \quad , \quad v(t) = v_{ref}(t) + \nu(t) \quad (1)$$

مسیر نامی و مسیر واقعی هر دو از معادلات حرکتی مشابهی تبعیت می‌کنند:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = g(r) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \frac{dr_{ref}}{dt} = v_{ref} \\ \frac{dv_{ref}}{dt} = g(r_{ref}) \end{cases} \quad (2)$$

در روابط فوق $g(r)$ تعیین‌کننده اندازه و جهت نیرو گرانش در موقعیت r است. این نیرو می‌تواند هر نوع اثر اغتشاشی گرانش را از جمله عدم کرویت زمین و اثر سیارات دیگر را در بر داشته باشد و از این لحاظ محدودیتی بر آن وجود ندارد. با توجه به تابعیت مطلق نیروی گرانش از موقعیت مکانی r ، می‌توان بسط تیلور این نیرو را در اطراف مسیر نامی r_{ref} به این شکل به دست آورد.

$$g(r) = g(r_{ref}) + G(r_{ref})\delta + O(\delta^2) \quad (3)$$

وابستگی به یک مسیر نامی، تنها در اطراف آن مسیر معتبر هستند و با فاصله گرفتن از مسیر نامی از دقت حل کاسته خواهد شد. با این وجود نکات مثبت و قابلیت‌های حل اغتشاشی چنان است که همواره موقعیت کاربردی خود را حفظ کرده و در حوزه‌های مختلف تحقیقاتی نیز پویا و مورد توجه باقی مانده است.

در ابتدای این راه و اولین کاربرد این راهکار در هدایت حلقه‌بسته وسایل فضایی، رویکرد باتین در خطی‌سازی مسئله و استفاده از ماتریس انتقال حالت کاربرد فراوان یافت و راهگشای حل در بسیاری از مسائل شد [۶-۱]. مأموریت آپولو به ماه، که خود بستر توسعه هدایت C^* بود، مسائل زیادی را برای حل توسط خطی‌سازی و ماتریس انتقال حالت عرضه داشت، داماریو و ایلپاوم نیز در این حوزه اثری از خود بر جای گذاشتند و مسئله تعیین مدار مینیمم ضربه را در حضور دو جسم جاذب نظیر ماه و زمین، به کمک ماتریس انتقال حالت حل کردند [۷].

از جمله مسائل دیگری که روش خطی‌سازی در حل آن توانمندی بالایی نشان می‌دهد، عبارت است از مأموریت‌هایی که در آن فضاپیما از میدان گرانش سیاره‌ای میانی برای ضربه گرفتن و تغییر مسیر به سمت سیاره هدف استفاده می‌کند. زیمر و اکامپو در دو مقاله پی‌درپی محاسبه مدار بهینه را به کمک ماتریس انتقال حالت مورد بررسی قرار دادند [۹ و ۸].

مسائل ملاقات مداری و حرکت نسبی نیز میدان عمل دیگری را بر روی رویکرد خطی‌سازی و استفاده از ماتریس انتقال حالت می‌گشاید. کارتر مقاله‌ای مروری بر کاربرد این رویکرد در هدایت حل مسئله ملاقات مداری دارد [۱۰]. یاماناکا و انکرسون از حل اغتشاشی و ماتریس انتقال حالت برای مسئله ملاقات مداری در یک مدار بیضوی استفاده کردند [۱۱] و جیم و آلفرند نیز از این متد برای حل مسئله ملاقات مداری را حول یک مدار غیردایروی مغشوش ارائه دادند [۱۲].

در اغلب آثار مورد اشاره در فوق، حالات در نظر گرفته شده برای توصیف سیستم، پارامترهای مداری یا مختصات در دستگاه‌های نسبی و دورانی هستند و رویکرد کلی در تمام این آثار تعیین ماتریس انتقال حالت به صورت تحلیلی است، به طوری که بتوان به شکل کلی از آن برای هدایت حلقه بسته سیستم استفاده کرد. در این‌گونه مطالعات عموماً نیروی‌هایی غیر از نیروی جاذبه جسم یا اجسام جاذب اصلی، به عنوان اغتشاش در نظر گرفته می‌شوند و برای ساده‌سازی و امکان دست‌یابی به حل تحلیلی از وارد کردن اثرات مذکور به فرآیند حل خودداری می‌کنند. تسودا و شیرس در مقاله‌ای به مسئله تخمین تحلیلی ماتریس انتقال حالت در حضور یک نیروی اغتشاشی پرداختند [۱۳].

رویکرد باتین در استفاده از ماتریس انتقال حالت بسیار ساده و به شکل عددی است که برای حل مسئله مقادیر مرزی مداری و

که در آن:

به راحتی می‌توان نشان داد که با در اختیار داشتن میزان انحرافات (بردار حالت x) از مسیر نامی در لحظه t_0 ، می‌توان این انحراف را در زمان t به این شکل به دست آورد:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) \quad (۱۲)$$

هدایت و ناوبری بر اساس ماتریس‌های انتقال حالت

حال وسیله فضایی‌ای را فرض کنید که در مداری بین دو نقطه پرتاب شده است و در این مسیر تحت اثر گرانش یک یا چند جرم سماوی قرار دارد. فرض کنید اگر در شرایط مطلوب فضایی مسیر $r_{ref}(t)$ و $v_{ref}(t)$ ببینید، در زمان مطلوب به نقطه هدف خود دسترسی پیدا خواهد کرد. می‌دانیم که به دلایل زیادی از جمله اثرات ناشناخته و خطاهای مدل نظیر تبدیلهای وارد بر فضاییما، مسیر واقعی به شکلی غیر از مسیر نامی، مثل $r(t)$ و $v(t)$ واقع می‌شود. به عنوان فرض اولیه باید انحرافات از مسیر نامی را کوچک در نظر گرفته تا خطی‌سازی به دقت حل لطمه وارد نکند.

در هر لحظه از زمان t بعد از t_0 ، موقعیت و سرعت وسیله تابعی از زمان به علاوه سرعت و موقعیت جسم در زمان t_0 است. به این ترتیب اگر بسط تیلور موقعیت فضاییما $(r(t, r(t_0), v(t_0)))$ حول مسیر نامی بسط داده شود، خواهیم داشت [۳]:

$$\begin{aligned} r(t, r(t_0), v(t_0)) &= r_{ref}(t) \\ &+ \left. \frac{\partial r(t)}{\partial r(t_0)} \right|_{ref} (r(t_0) - r_{ref}(t_0)) \\ &+ \left. \frac{\partial r(t)}{\partial v(t_0)} \right|_{ref} (v(t_0) - v_{ref}(t_0)) + \dots \end{aligned} \quad (۱۳)$$

و به همین شکل برای بسط تیلور سرعت داریم:

$$\begin{aligned} v(t, r(t_0), v(t_0)) &= v_{ref}(t) \\ &+ \left. \frac{\partial v(t)}{\partial r(t_0)} \right|_{ref} (r(t_0) - r_{ref}(t_0)) \\ &+ \left. \frac{\partial v(t)}{\partial v(t_0)} \right|_{ref} (v(t_0) - v_{ref}(t_0)) + \dots \end{aligned} \quad (۱۴)$$

این بسط‌ها را می‌توان به این صورت خلاصه کرد:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_{ref}(t) + \left. \frac{\partial r}{\partial r_0} \right|_{ref} \delta r_0 + \left. \frac{\partial r}{\partial v_0} \right|_{ref} \delta v_0 + \dots \\ v(t) &= v_{ref}(t) + \left. \frac{\partial v}{\partial r_0} \right|_{ref} \delta r_0 + \left. \frac{\partial v}{\partial v_0} \right|_{ref} \delta v_0 + \dots \end{aligned} \quad (۱۵)$$

$$G(r_{ref}) = \left. \frac{\partial g}{\partial r} \right|_{r=r_{ref}} \quad (۴)$$

ماتریس گرادیان گرانش حول مسیر نامی است. با قرار دادن روابط (۱) و (۳) در معادلات حرکت مسیر واقعی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{dr_{ref}}{dt} + \frac{d\delta}{dt} = v_{ref} + v \\ \frac{dv_{ref}}{dt} + \frac{dv}{dt} = g(r_{ref}) + G\delta \end{cases} \quad (۵)$$

با حذف ترم‌های مشابه از دو طرف معادلات و ناچیز در نظر گرفتن عبارات از مرتبه δ^2 معادلات حاکم بر رفتار انحرافات جسم از مسیر نامی به این شکل خواهند بود:

$$\frac{d\delta}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = G\delta \quad (۶)$$

در رابطه فوق با توجه به وابستگی G به یک مسیر نامی می‌توان آن را تابعی از زمان در نظر گرفت. به این ترتیب برای سادگی معادلات فوق، بردار انحرافی از مسیر نامی به شکلی x تعریف می‌شود:

$$x = \begin{bmatrix} \delta \\ v \end{bmatrix} \quad (۷)$$

بر این مبنا معادلات خطی ۶ را می‌توان به این شکل ساده‌سازی کرد:

$$\frac{dx}{dt} = F(t)x \quad (۸)$$

که در آن ماتریس 6×6 به این شکل است:

$$F(t) = \begin{bmatrix} O & I \\ G(t) & O \end{bmatrix} \quad (۹)$$

که در آن O و I به ترتیب ماتریس‌های واحد و صفر مرتبه سه هستند.

معادله مرتبه ۶ به دست آمده در مجموع ۶ جواب مستقل خطی به شکل $x_i(t)$ دارد، که این ۶ بردار پاسخ را می‌توان به عنوان ستون‌های یک ماتریس ۶ بعدی به نام Φ در نظر گرفت. حال اگر شرایط اولیه برای این ماتریس به شکلی تعریف شود که در زمان t_0 تمام درایه‌های ماتریس $x_i(t)$ مقدار صفر داشته باشند، غیر از درایه نام که مقدار ۱ دارد؛ بنابراین ماتریس تابعی از t_0 و t بوده و معادلات زیر را ارضاء می‌کند:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = F(t) \Phi(t, t_0) \quad (۱۰)$$

در حضور شرایط اولیه:

$$\Phi(t_0, t_0) = I \quad (۱۱)$$

که در آن I ماتریس ۶ بعدی یکه را نشان می‌دهد. ماتریس $\Phi(t, t_0)$ معمولاً به عنوان «ماتریس انتقال حالت» شناخته می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = V & R(t_0) = O \\ \frac{dV}{dt} = GR & V(t_0) = I \end{cases} \quad (24)$$

درایه‌های ماتریس‌های R و V بیانگر انحراف از مسیر و سرعت نامی نتیجه شده از انحراف اولیه در سرعت و موقعیت اولیه از مسیر مرجع در زمان پرتاب است. بعد از تعریف ماتریس $\Phi(t_0, t)$ ماتریس الحاقی آن را نیز می‌توان تعریف کرد. برای تعریف ماتریس‌های الحاقی زمان t_1 را بعد از زمان‌های t_0 و t در نظر گرفته می‌شود. ماتریس انتقال حالت، با در نظر گرفتن این زمان جدید به این شکل قابل تعریف است:

$$\Phi(t, t_1) = \begin{bmatrix} \tilde{R}^*(t) & R^*(t) \\ \tilde{V}^*(t) & V^*(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

با در نظر داشتن همان فرایند طی شده، روابط حاکم بر این ماتریس‌های الحاقی نیز به این شکل تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{R}^*}{dt} = \tilde{V}^* & \tilde{R}^*(t_1) = I \\ \frac{d\tilde{V}^*}{dt} = G\tilde{R}^* & \tilde{V}^*(t_1) = O \end{cases} \quad (26)$$

9

$$\begin{cases} \frac{dR^*}{dt} = V^* & R^*(t_1) = O \\ \frac{dV^*}{dt} = GR^* & V^*(t_1) = I \end{cases} \quad (27)$$

حل معادلات فوق در فاصله $t_0 \leq t \leq t_1$ با انتگرال‌گیری گام به عقب از زمان t_1 تا t_0 انجام می‌شود، در واقع این روابط همان روابط (۲۳) و (۲۴) هستند که از انتها به ابتدا حل می‌شوند. در این مورد نیز می‌توان ماتریس‌های C^* و \tilde{C}^* را به این ترتیب تعریف کرد:

$$C^* = V^* R^{*-1} \quad (28)$$

$$\tilde{C}^* = \tilde{V}^* \tilde{R}^{*-1} \quad \text{که در آن:}$$

$$\tilde{C}^* = \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{v_1 = \text{constant}} \quad (29)$$

$$C^* = \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r_1 = \text{constant}}$$

به این ترتیب به پرکاربردترین رابطه این حل اغتشاشی می‌رسیم:

$$\delta v(t) = C^* \delta r(t) \quad (30)$$

رابطه فوق، میزان انحراف از سرعت نامی در لحظه t را به ازای انحراف موقعیت از موقعیت نامی در این لحظه به گونه‌ای تعیین می‌کند

با صرف نظر کردن از انحرافات با مرتبه بالاتر معادلات فوق را می‌توان به شکل خطی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \delta r \\ \delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{\partial r}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial r_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{bmatrix}_{ref} \begin{bmatrix} \delta r_0 \\ \delta v_0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

با مقایسه رابطه به دست آمده با معادله (۱۲) تعریف ماتریس انتقال حالت $\Phi(t, t_0)$ روشن می‌شود:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{\partial r}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial r_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{bmatrix}_{ref} \quad (17)$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \delta r_0 \\ \delta v_0 \end{bmatrix} = \Phi(t_0, t) \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta v \end{bmatrix} \quad (18)$$

که در آن:

$$\Phi(t_0, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_0}{\partial r} & \frac{\partial r_0}{\partial v} \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} & \frac{\partial v_0}{\partial v} \end{bmatrix}_{ref} \quad (19)$$

با توجه به مطالب بیان شده پارتیشن‌های ماتریس انتقال حالت به این صورت باز تعریف می‌شوند:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \tilde{R}(t) & R(t) \\ \tilde{V}(t) & V(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

که در آن:

$$R = \frac{\partial r}{\partial v_0} \quad V = \frac{\partial v}{\partial v_0} \quad (21)$$

$$\tilde{R} = \frac{\partial r}{\partial r_0} \quad \tilde{V} = \frac{\partial v}{\partial r_0}$$

بر این مبنا می‌توان نوشت:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \begin{bmatrix} O & I \\ G(t) & O \end{bmatrix} \Phi(t, t_0) \quad (22)$$

$$\text{subjected to } \Phi(t_0, t_0) = I$$

به این ترتیب می‌توان ماتریس‌های پایه برای حل اغتشاشی را از دو دسته معادلات دیفرانسیل غیرتداخلی زیر به این ترتیب به دست آورد:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{R}}{dt} = \tilde{V} & \tilde{R}(t_0) = I \\ \frac{d\tilde{V}}{dt} = G\tilde{R} & \tilde{V}(t_0) = O \end{cases} \quad (23)$$

که در آن A_r ، A_v و A_α به ترتیب ژاکوبین های نیروی آیرودینامیک نسبت به تغییرات مکان، تغییرات سرعت و تغییرات زاویه حمله حول مسیر نامی هستند.

$$\begin{cases} A_r(r_{ref}, v_{ref}, \alpha_{ref}) = \frac{\partial a}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_{ref} \\ v=v_{ref} \\ \alpha=\alpha_{ref}}} \\ A_v(r_{ref}, v_{ref}, \alpha_{ref}) = \frac{\partial a}{\partial v} \Big|_{\substack{r=r_{ref} \\ v=v_{ref} \\ \alpha=\alpha_{ref}}} \\ A_\alpha(r_{ref}, v_{ref}, \alpha_{ref}) = \frac{\partial a}{\partial \alpha} \Big|_{\substack{r=r_{ref} \\ v=v_{ref} \\ \alpha=\alpha_{ref}}} \end{cases} \quad (33)$$

به این ترتیب با قراردادن رابطه (33) در (32) و حذف عبارات مرتبه بالاتر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = G\delta + A_r\delta + A_v v + A_\alpha d\alpha \end{cases} \quad (34)$$

نکته قابل تأملی که در رابطه (34) می توان دید، بحث خطی سازی رفتار زاویه حمله حول زاویه حمله مسیر نامی است. زاویه حمله خود پارامتر مستقلی است که می توان بدون متأثر ساختن مسیر نامی آن را کنترل کرد. بدین ترتیب اصولاً چاره ای جز صرف نظر از خطی سازی آن نداشته و تنها می توان رفتار آن را در حالتی که قطعیت بیشتری دارد، وارد محاسبات کرد. البته این شرایط ابدأ دور از واقعیت نیست، مثلاً، حالتی را فرض کنید که مدول بازگشت به جو پایداری پیش از ورود به اتمسفر طوری کنترل شود که با زاویه حمله نزدیک به صفر وارد اتمسفر شود، به این ترتیب به دلیل پایداری، مدول بعد از نوسانات کوچکی زاویه حمله صفر را تا پایان مسیر حفظ خواهد کرد و لذا با قطعیت بالایی می توان پارامتر $d\alpha$ را صفر در نظر گرفت.

با توجه به تمامی مطالب مطرح شده در نهایت می توان معادلات اغتشاشی را به این شکل بازنویسی کرد:

$$\frac{d\delta}{dt} = v \quad , \quad \frac{dv}{dt} = [G + A_r]\delta + A_v v \quad (35)$$

لذا با توجه به بردار حالت x تعریف شده در رابطه (7) می توان نوشت:

$$\frac{dx}{dt} = F(t)x \quad (36)$$

که این بار در آن ماتریس F برابر است با:

$$F(t) = \begin{bmatrix} O & I \\ G(t) + A_r(t) & A_v(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

که عبور وسیله را در زمان t_1 از نقطه مرجع تضمین کند. تفاوت ماتریس های انتقال $\Phi(t_0, t)$ و $\Phi(t, t_1)$ در کاربرد آن ها پنهان است، همان طور که دیده شد، ماتریس $\Phi(t_0, t)$ میزان انحراف سرعت و موقعیت را از مسیر مبنا در لحظه t به ازای انحراف در لحظه ابتدایی t_0 به دست می دهد. در حالی که ماتریس $\Phi(t, t_1)$ این امکان را ایجاد می کند که برای انحراف های مطلوب از سرعت و موقعیت در زمان پایانی t_1 میزان انحراف را در لحظه به دست آورد. بر مبنای همین تفاوت در کاربردها ماتریس $\Phi(t_0, t)$ را «ماتریس ناوبری» و ماتریس $\Phi(t, t_1)$ را «ماتریس هدایت» می نامند.

خطی سازی اثر اتمسفر

برای وارد کردن اثر اغتشاشی اتمسفر لازم است به ابتدای محاسبات مربوط به مسیر اغتشاشی بازگشته و این بار با لحاظ کردن اثر خطی اتمسفر، بار دیگر مسیر طی شده را تکرار کرد. همان طور که در رابطه (2) مشهود است، تنها اثر مؤثر بر مسیر نامی، نیروی گرانشی است که در حالت ایده آل خود تمامی اثرات غیرخطی، نظیر بیضویت زمین، را نیز در دل خود دارد. حال قصد داریم رویکرد واقعی تری اتخاذ کرده و اثر آیرودینامیک را نیز در آن لحاظ کنیم. بر این مبنای رابطه (2) را به این شکل بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = g(r) + a(r, v, \alpha) \\ \frac{dr_{ref}}{dt} = v_{ref} \\ \frac{dv_{ref}}{dt} = g(r_{ref}) + a(r_{ref}, v_{ref}, \alpha_{ref}) \end{cases} \quad (31)$$

در این رابطه نیروی آیرودینامیک $a(r, v, \alpha)$ است و تابعی از تاریخچه مکان، سرعت و زاویه حمله در فرآیند عبور از اتمسفر است. در ارتباط با گرانش می توان از همان رابطه (3) استفاده کرد و به همان شکل نیز می توان نیروی آیرودینامیک را بسط داد. لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a(r, v, \alpha) &= a(r_{ref}, v_{ref}, \alpha_{ref}) \\ &+ A_r(r_{ref}, v_{ref}, \alpha_{ref})\delta \\ &+ A_v(r_{ref}, v_{ref}, \alpha_{ref})v \\ &+ A_\alpha(r_{ref}, v_{ref}, \alpha_{ref})d\alpha \\ &+ O(\delta^2, v^2, d\alpha^2) \end{aligned} \quad (32)$$

پیوسته استفاده شده است. حدس اولیه برای زمان نشست را ۶۰۰ ثانیه فرض کرده و حل را انجام می‌دهیم. سرعت به‌دست آمده از این حل برای یک مسیر کپلری معتبر است؛ حال آنکه در این شبیه‌ساز، دو اثر غیر کپلری مهم، یعنی آیرودینامیک و جاذبه بیضوی وجود دارد.

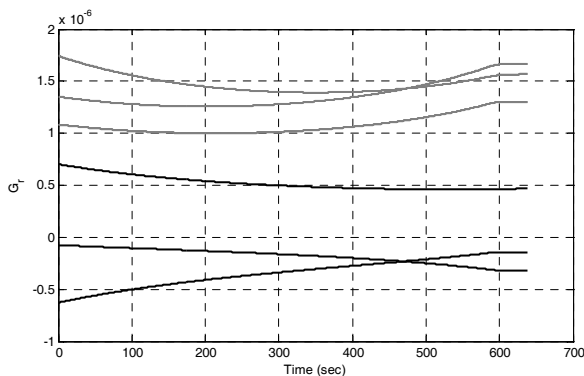
به‌این ترتیب با اجرای شبیه‌سازی کامل خطایی حاصل می‌شود. با در اختیار داشتن این خطا، نقطه جدیدی با نام هدف مجازی تعریف می‌شود که به اندازه خطای به‌دست آمده با نقطه واقعی فرود فاصله دارد، ولی در جهت مقابل، بار دیگر حل لمبرت را برای هدف مجازی جدید انجام داده و خطا را نسبت به هدف واقعی به‌دست می‌آوریم. با توجه به خطای جدید، باز هم هدف مجازی را اصلاح کرده و این فرآیند را تا جایی که خطای سیستم صفر شود انجام می‌دهیم.

انجام این فرآیند برای مسئله نمونه، هدف مجازی را در ۲۵ دقیقه و ۳۷/۷۲ ثانیه شرق و ۲۸/۶۷ ثانیه شمال موقعیت هدف واقعی قرار داد و خطای سیستم را به ۰/۰۷ متر رساند. فرض در نظر گرفته شده برای فرآیند فرود در زمان ۶۰۰ ثانیه به دلیل وجود اتمسفر به زمان ۶۳۷ ثانیه افزایش می‌یابد.

حال برای مسیر نامی به‌دست‌آمده، حل‌های اغتشاشی و ماتریس‌های پایه را با دو رویکرد مطرح شده در بالا محاسبه کرده و هدایت‌های C^* را برای دو حالت بدون در نظر گرفتن اتمسفر و با در نظر گرفتن اتمسفر توسعه می‌دهیم.

روش C^* بدون در نظر گرفتن اتمسفر

در این قسمت عملکرد الگوریتم C^* بدون در نظر گرفتن اتمسفر در محاسبات ماتریس انتقال حالت بررسی می‌شود. ابتدا ژاکوبین میدان گرانش نسبت به تغییرات مکانی در اطراف مسیر نامی محاسبه می‌شود.



شکل ۱- ژاکوبین میدان گرانش روی مسیر نامی

با توجه به رابطه (۳۷)، روابط مربوط به ماتریس‌های پایه ناوبری و هدایت به این ترتیب نوشته خواهند شد:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{R}}{dt} = \tilde{V} & \tilde{R}(t_0) = I \\ \frac{d\tilde{V}}{dt} = [G + A_r] \tilde{R} + A_v \tilde{V} & \tilde{V}(t_0) = O \\ \frac{dR}{dt} = V & R(t_0) = O \\ \frac{dV}{dt} = [G + A_r] R + A_v V & V(t_0) = I \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{R}^*}{dt} = \tilde{V}^* & \tilde{R}^*(t_1) = I \\ \frac{d\tilde{V}^*}{dt} = [G + A_r] \tilde{R}^* + A_v \tilde{V}^* & \tilde{V}^*(t_1) = O \\ \frac{dR^*}{dt} = V^* & R^*(t_1) = O \\ \frac{dV^*}{dt} = [G + A_r] R^* + A_v V^* & V^*(t_1) = I \end{cases} \quad (39)$$

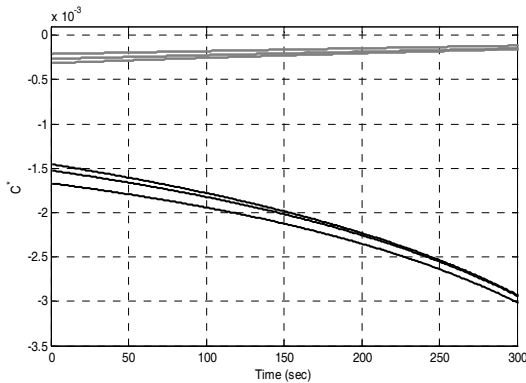
آنچه در این بخش به آن پرداخته شد؛ بررسی میانی تئوری ماتریس انتقال حالت و حل اغتشاشی است. در مبحث بعدی فرآیند تولید و محاسبه ماتریس‌های پایه ارائه خواهد شد.

محاسبه ماتریس‌های پایه برای یک مأموریت نمونه

در این قسمت، مأموریت فرود یک فضاپیما روی زمین شبیه‌سازی می‌شود و برای سهولت مدل‌سازی، سیاره مقصد با شرایطی مشابه با زمین تعریف می‌شود. به‌همین منظور، محموله‌ای را که در پرواز اتمسفری پایدار است از ارتفاع ۱۰۰ کیلومتری سطح زمین در طول شرقی ۵۸ درجه و ۶ دقیقه و ۲۱/۰۸ ثانیه جغرافیایی و عرض شمالی ۳۴ درجه و ۱۸ دقیقه و ۲۰/۹۸ ثانیه با سرعتی پرتاب می‌کنیم که در نقطه‌ای به طول شرقی ۴۷ درجه و ۸ دقیقه و ۴۰/۲۴ ثانیه و عرض شمالی ۳۱ درجه و ۴/۷۴ ثانیه بر روی زمین فرود آید. در شبیه‌ساز این مجموعه، اثر بیضویت زمین روی گرانش لحاظ شده است و مدل کاملی از آیرودینامیک بازگشت به جو محموله مورد بررسی، وارد شده است.

برای محاسبات اغتشاشی مسئله فوق، به طراحی یک مسیر نامی نیاز است، زیرا چنانکه دیده شد، محاسبات اغتشاشی ذاتاً در اطراف مسیر نامی تعریف می‌شوند. لذا ابتدا به کمک حل لمبرت، مسیر نامی را برای استفاده در بخش‌های بعدی استخراج می‌کنیم. برای حل لمبرت از الگوریتم باتین با رویکرد تخمین کسرهای

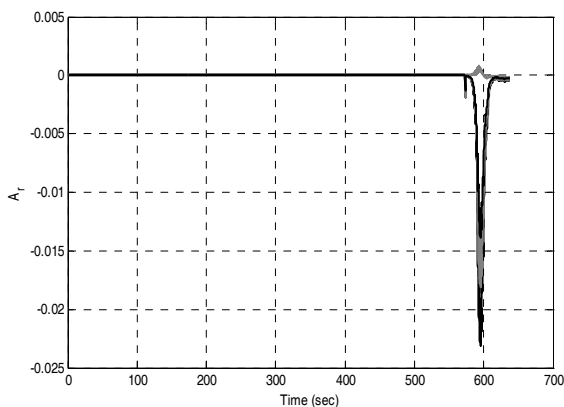
در شکل (۴) ماتریس C^* به طور کامل دیده می‌شود. همان‌طور که می‌توان مشاهده کرد؛ به دلیل صفر بودن ماتریس R^* در انتها، درایه‌های قطری این ماتریس در نزدیک انتهای مسیر به بی‌نهایت میل می‌کنند. از نظر عملی این اتفاق را می‌توان با بزرگ‌شدن اندازه ضربه اصلاحی در انتهای مسیر توجیه کرد. برای بهتر دیده شدن تقارن و رفتار این ماتریس در شکل (۶) بخش ۳۰۰ ثانیه ابتدای آن را نمایش می‌دهیم:



شکل ۵- ماتریس C^* بدون وارد کردن اثر اتمسفر (ابتدای مسیر)

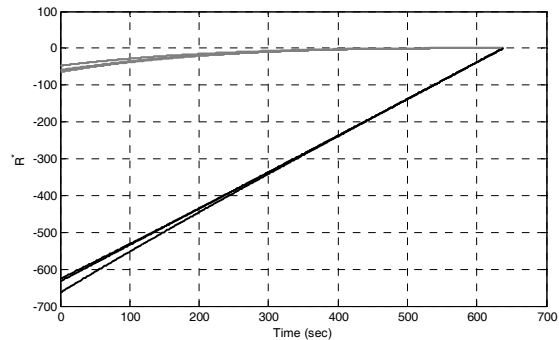
روش C^* با لحاظ کردن اثر اتمسفر از ابتدای مسیر نامی

در بخش قبل روش C^* را بدون لحاظ کردن اثر اتمسفر روی آن برای محاسبه سرعت لازم در ابتدای مسیر نامی استفاده و نتایج آن بررسی شد. حال همین روش را با وارد کردن اثر اتمسفر، که تئوری آن در فصل قبل ارائه شد، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این کار باید ابتدا ماتریس‌های ژاکوبین نیروی آیرودینامیک را در فاز بازگشت به اتمسفر، نسبت به تغییرات سرعت و مکان به دست آورد. نتایج را در شکل‌های (۶-۹) می‌توان مشاهده کرد:

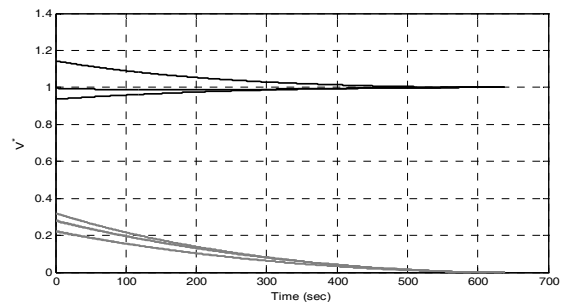


شکل ۶- ژاکوبین نیروی آیرودینامیک روی مسیر نامی نسبت به مکان (کل مسیر نامی)

طبق انتظار ژاکوبین، بردار گرانش زمین بیضوی، ماتریس متقارنی را تشکیل می‌دهد که در شکل (۱) دیده می‌شود. در این شکل، درایه‌های قطری سیاه رنگ و درایه‌های غیرقطری با رنگ خاکستری نمایش داده شده‌اند. در اینجا با استفاده از این ماتریس و معادلات دیفرانسیل ماتریس‌های پایه می‌توان ماتریس‌های V^* ، R^* و C^* را محاسبه کرد.

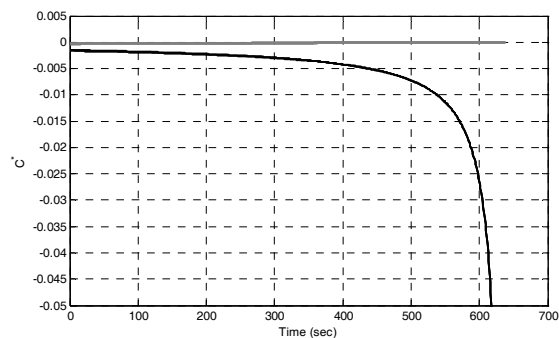


شکل ۲- ماتریس R^* بدون وارد کردن اثر اتمسفر

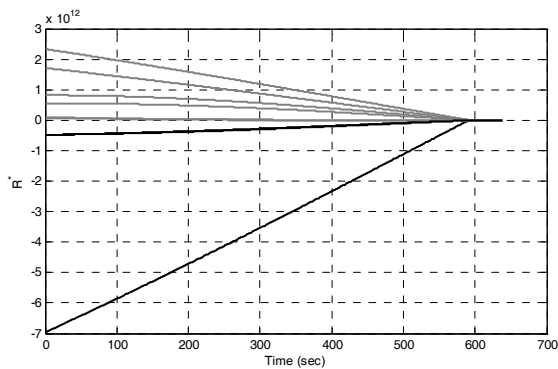


شکل ۳- ماتریس V^* بدون وارد نمودن اثر اتمسفر

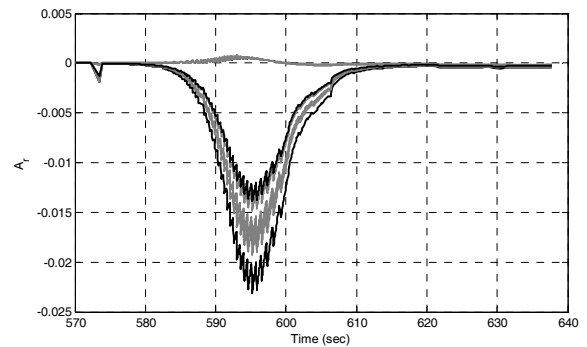
چنانکه در شکل‌های (۲) و (۳) نیز دیده می‌شود، ماتریس‌های R^* و V^* هر دو متقارن است و شرایط اولیه حل معادلات را دارد؛ به طوری که ماتریس V^* در نقطه پایانی قطری بوده و ماتریس R^* نیز در نقطه پایانی صفر است. بر اساس این دو ماتریس می‌توان ماتریس C^* را نیز به این شکل محاسبه کرد.



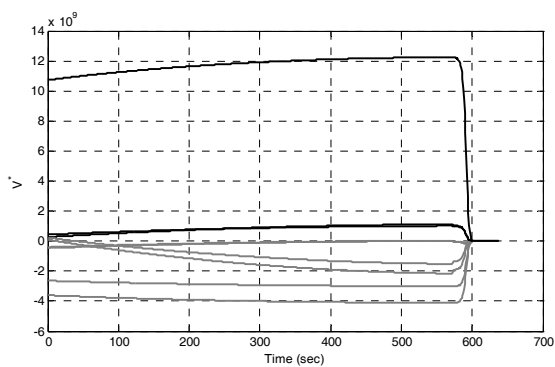
شکل ۴- ماتریس C^* بدون وارد کردن اثر اتمسفر (نمودار کامل)



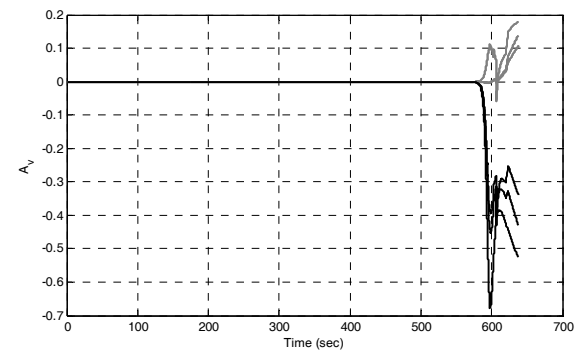
شکل ۱۰- ماتریس R^* با واردکردن اثر اتمسفر



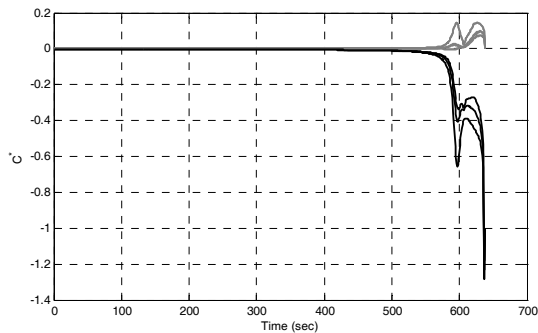
شکل ۷- ژاکوبین نیروی آیرودینامیک روی مسیر نامی نسبت به مکان (بخش اتمسفری مسیر نامی)



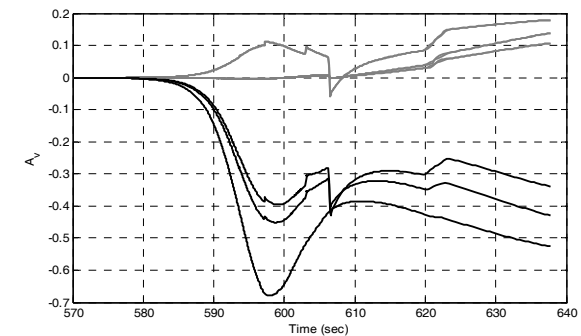
شکل ۱۱- ماتریس V^* با واردکردن اثر اتمسفر



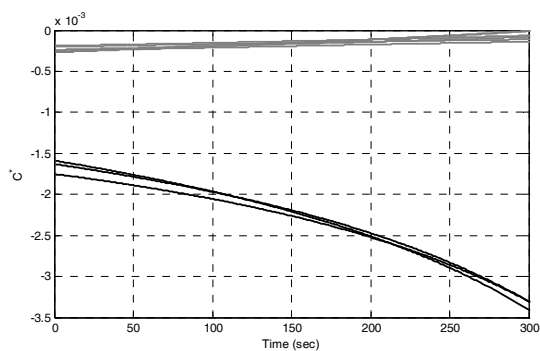
شکل ۸- ژاکوبین نیروی آیرودینامیک روی مسیر نامی نسبت به سرعت (کل مسیر نامی)



شکل ۱۲- ماتریس C^* با واردکردن اثر اتمسفر (نمودار کامل)

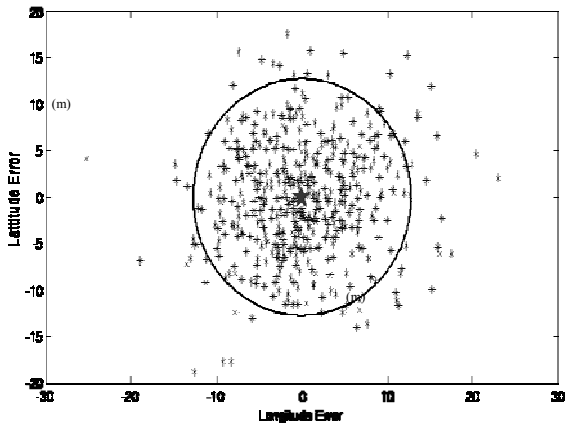


شکل ۹- ژاکوبین نیروی آیرودینامیک روی مسیر نامی نسبت به سرعت (بخش اتمسفری مسیر نامی)



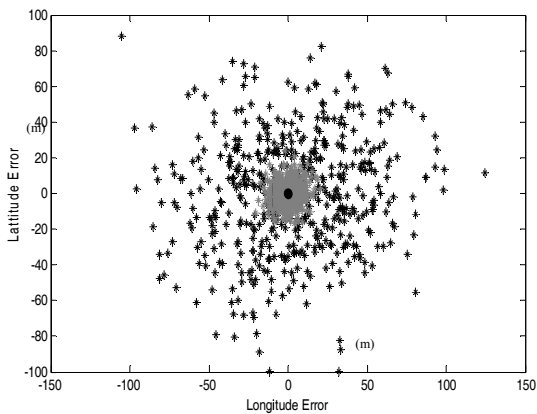
شکل ۱۳- ماتریس C^* با واردکردن اثر اتمسفر (ابتدای مسیر)

چنانکه در شکل‌های (۷) و (۹) دیده می‌شود، ماتریس‌های ژاکوبین A_r و A_v هر دو در بخش پرواز خارج از اتمسفر صفر هستند. برای وضوح بیشتر، این ماتریس‌ها را در بخش اتمسفری می‌توان در شکل‌های (۸) و (۱۰) مشاهده کرد. چنانکه در شکل (۸) دیده می‌شود، این ماتریس A_r متقارن نیست. در عوض ماتریس A_v متقارن است (شکل ۱۰). عدم تقارن ماتریس A_r در نهایت منجر به عدم تقارن ماتریس C^* خواهد شد. حال بر اساس روابط استخراج شده در فصل گذشته ماتریس‌های R^* ، V^* و C^* به دست می‌آیند:



شکل ۱۵- عملکرد هدایت C* با لحاظ اثر اتمسفر در شبیه‌سازی تصادفی در ابتدای مسیر نامی

همان‌طور که در شکل (۱۵) دیده می‌شود، وارد کردن اثر اتمسفر عملکرد هدایت C* را بهبود بخشیده، به طوری که میانگین خطا ۷/۷ متر و انحراف معیار آن ۴/۲ متر است و چنانکه از شکل نیز می‌توان تشخیص داد، عمده برخوردها در دایره‌ای به شعاع تقریبی ۱۵ متر واقع شده‌اند که نسبت به حالت اول که دایره خطا ۸۰ متر بود بهبود عملکرد مشهود است. در شکل (۱۶) برای مقایسه بهتر عملکرد دو الگوریتم در کنار یکدیگر نمایش داده شده است.



شکل ۱۶- مقایسه عملکرد دو رویکرد هدایت C*

در شکل (۱۶) ستاره‌های خاکستری رنگ محل فرود محموله‌هایی را نشان می‌دهد که در محاسبه سرعت لازمه آن‌ها اثر اتمسفر لحاظ شده است و ستاره‌های مشکی رنگ محل فرود محموله‌هایی را نمایندگی می‌کند که ماتریس C* آن‌ها فارغ از اثر اتمسفر محاسبه شده‌اند. شکل به خوبی نشان‌دهنده بهبود عملکرد الگوریتم به دلیل وارد کردن اثر اتمسفر در آن است.

مقایسه شکل‌های (۱۴) و (۱۵) نشان‌دهنده شباهت ساختاری و در عین حال تفاوت‌های ریز و مؤثر در رفتار ماتریس C* است که در نتیجه وارد کردن اثر اتمسفر به وجود آمده است.

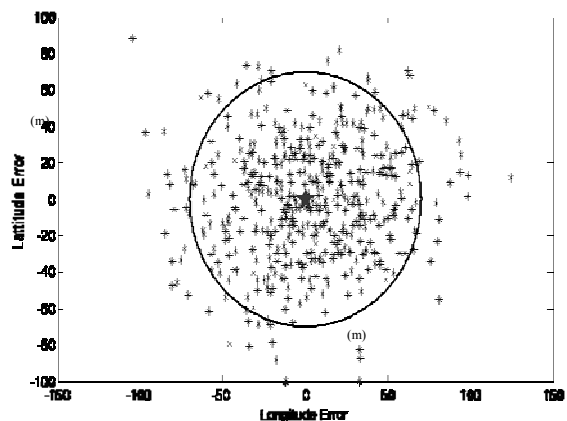
مقایسه عملکرد ماتریس‌های استخراج شده

حال با دراختیار داشتن ماتریس C* در کل زمان مسیر نامی می‌توان از آن برای تعیین سرعت لازمه در طول کل مسیر نامی استفاده کرد. در این قسمت عملکرد این حل در ابتدای این مسیر نامی بررسی می‌شود. بنابراین از شبیه‌سازی تصادفی مونت-کارلو استفاده کرده و سرعت لازمه مورد نظر را در نقاط تصادفی اطراف مسیر نامی استخراج می‌کنیم. برای مدل‌سازی رفتار تصادفی، شرایط اولیه مسیر را با قراردادن خطاهای تصادفی با توزیع نرمال به دست می‌آوریم.

$$\vec{X}_0 = \vec{X}_{Nominal} + (Normal\ Random\ Error) \quad (40)$$

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_{Nominal} + (Normal\ Random\ Error)$$

برای دسترسی به دقت دلخواه، انحراف معیار خطای ۱۰۰ متر برای مکان اولیه و ۱۰ متر بر ثانیه برای سرعت اولیه لحاظ شده است. به این ترتیب شبیه‌سازی مونت-کارلو با دایره هدف مشخص به دست می‌آید. حال با اجرای شبیه‌سازی از الگوریتم به دست آمده برای اصلاح مسیر استفاده می‌کنیم. نتایج عملکرد حل مورد بحث در شکل به نمایش درآمده است، به طوری که میانگین دقت ۴۴/۲۱ متر و انحراف معیار آن ۲۳/۲۶ متر است و بیشتر فرودها در دایره‌ای با شعاع ۸۰ متر انجام شده‌اند.



شکل ۱۴- عملکرد هدایت C* بدون اثر اتمسفر در شبیه‌سازی تصادفی

اکنون با استفاده از ماتریس به دست آمده، مسئله طرح شده در بخش‌های قبیل برای محاسبه سرعت لازمه در ابتدای مسیر نامی حل می‌شود. نتایج به دست آمده در شکل (۱۵) دیده می‌شود:

- [6] Tempelman, W. "Linear Guidance Laws for Space Missions", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 9, No. 4, 1986, pp. 495-502.
- [7] D'Amario, L. A. and Edelbaum, T. N., "Minimum Impulse Three-Body Trajectory", *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 4, 1974, pp. 455- 462.
- [8] Zimmer, S., Ocampo, C., "Use of Analytical Gradients to Calculate Optimal Gravity Assist Trajectories", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 28, No. 2, 2005, pp. 324-332.
- [9] Zimmer, S., Ocampo, C., "Analytical Gradients for Gravity Assist Trajectories Using Constant Specific Impulse Engines", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 28, No. 4, 2005, pp.753-760.
- [10] Carter, T. E., "State Transition Matrices for Terminal Rendezvous Studies: Brief Survey and New Example", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 21, No. 1, 1998, pp. 148-155.
- [11] Yamanaka, K., Ankersen, F., "New State Transition Matrix for Relative Motion on an Arbitrary Elliptical Orbit", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 1, 2002, pp. 60-66.
- [12] Gim, D. W., Alfriend, K. T., "State Transition Matrix of Relative Motion for the Perturbed Noncircular Reference Orbit", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 6, 2003, pp. 956-971.
- [13] Tsuda, Y., Scheeres, D. J., "State Transition Matrix Approximation Using a Generalized Averaging Method", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 32, No. 6, 2009, pp. 1781-1794.

نتیجه گیری

مطالعات انجام شده در حوزه یافتن راه‌های محاسبه سرعت لازمه، منجر به یافتن راه دقیق‌تری در محاسبه اغتشاشی سرعت لازمه یک مأموریت بازگشت به جو شد. در این رویکرد علاوه بر اثرات جاذبه‌ای که در روش هدایت C^* لحاظ می‌شود، اثرات خطی اتمسفر نیز وارد شد و بهبود چشمگیری در عملکرد این روش حاصل شد. این رویکرد می‌تواند در هدایت میان مسیری یک فضایی‌مای بازگشت به جو مؤثر باشد.

مراجع

- [1] Battin, R. H., "Space Guidance Evolution – A Personal Narrative", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 5, Issue 2, 1982, pp. 97-110.
- [2] Battin, R. H., *Astronautical Guidance*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [3] Battin, R. H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, New York, 1987.
- [4] Laning, J. H. and Battin, R. H., "Interplanetary Navigation System Study", NASA-N64-81342, 1960.
- [5] Battin, R. H., "A Comparison of Fixed and Variable Time of Arrival Navigation for Interplanetary Flight", NASA-N64-83905, 1960.