

Approximate Solution of Sensitivity Matrix with Final Velocity Constraint Using Linear Time-Varying Gravity Assumption

S. H. Jalali Naini¹

Department of Engineering, Tarbiat Modares University

Nasr Bridge, Tehran, Iran

shjalalinaini@modares.ac.ir

In this research, an approximate solution of the required velocity with final velocity constraint is derived using linear gravity assumption along the path of current position to the final position vectors. Moreover, an approximate solution for sensitivity matrix of the required velocity with respect to the position vector is obtained. The presented solutions are given for a predetermined final time. In this case, for the free final position, the analytical solution is rather more difficult than its fixed final position counterpart. Therefore, three approaches are utilized for approximation of the final position vector. Finally, the obtained solutions are compared to exact numerical one for the spherical-Earth model.

Keywords: required velocity, sensitivity matrix, implicit guidance

1. Assistant Professour

حل تقریبی ماتریس حساسیت با قید بردار سرعت برای شتاب جاذبه خطی با زمان

سید حمید جلالی نائینی^۱

دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده فنی و مهندسی

تهران، پل نصر، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده فنی و مهندسی

shjalalinaini@modares.ac.ir

در این تحقیق، حل تقریبی بردار سرعت لازم با قید بردار سرعت با فرض شتاب جاذبه خطی بین موقعیت فعلی و موقعیت نهایی ارائه شده است. در ادامه، حل تحلیلی ماتریس حساسیت بردار سرعت لازم نسبت به بردار موقعیت به دست می آید. حل های مذکور به ازای زمان نهایی از پیش تعیین حاصل شده است. آزاد بودن موقعیت نهایی در این مسئله، حل تحلیلی را نسبت به مسائل با قید بردار موقعیت نهایی، دشوارتر می کند. بنابراین، برای محاسبه بردار موقعیت نهایی از سه تقریب استفاده شده است. در نهایت، حل های به دست آمده با حل دقیق برای مدل زمین کروی مقایسه شده است.

واژه های کلیدی: سرعت لازم، ماتریس حساسیت، هدایت ضمنی

مقدمه

مفاهیم بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت در کاربردهای فضایی، مفاهیمی شناخته شده اند که بر حسب کاربرد به ترتیب در روش های هدایت صریح و ضمنی کاربرد دارند. بردار سرعت لازم، اصطلاحاً بردار سرعتی فرضی برای رسیدن فضاپیما به یک دسته شرایط نهایی در زمان نهایی (از پیش معلوم) است؛ در صورتی که موتور پیشران فضاپیما خاموش بوده، تنها تحت تأثیر شتاب جاذبه حرکت کند. بر حسب اینکه شرایط نهایی چه باشد، مسئله متفاوت می شود. مشتق جزئی بردار سرعت لازم نسبت به بردار موقعیت فضاپیما تحت عنوان ماتریس حساسیت تعریف می شود [۱-۶].

حل تحلیلی مسئله بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت برای نمونه های مختلفی از شرایط نهایی در مراجع [۲] و [۳] موجود است که به طور نمونه عبارتند از: بردار سرعت لازم برای رسیدن به بردار موقعیت نهایی و زاویه مسیر نهایی از پیش تعیین، بردار سرعت

لازم و ماتریس حساسیت برای رسیدن به مدار بیضی با قطر اطول و خروج از مرکز از پیش تعیین، بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت برای رسیدن به بردار موقعیت نهایی و قطر اطول از پیش تعیین، بردار سرعت لازم برای مسئله لامبرت (بردار موقعیت نهایی و زمان انتقال از پیش تعیین) و ماتریس حساسیت مربوطه. البته بر حسب این که شرایط نهایی چه باشد، ممکن است حل صریح وجود نداشته باشد. همچنین در تعریف بردار سرعت لازم باید توجه داشت که برای هر دسته شرایط نهایی، ممکن است بردار سرعت لازم قابل تعریف نباشد. به طور مثال، بردار سرعت لازم برای رسیدن فضاپیما به بردارهای موقعیت و سرعت نهایی در زمان از پیش معلوم، قابل تعریف نیست. بردار سرعت لازم برای رسیدن فضاپیما به یک بردار موقعیت نهایی، قابل تعریف است. حل مسئله بردار سرعت لازم با قید بردار موقعیت به ازای زمان نهایی از پیش معلوم برای مدل زمین کروی که به مسئله لامبرت مشهور است، منجر به حل صریح نمی شود. لذا بر حسب توان محاسباتی پردازشگر فضاپیما ممکن است از روش های تکرارپذیر، بازگشتی یا حل های تقریبی استفاده

۱. استادیار

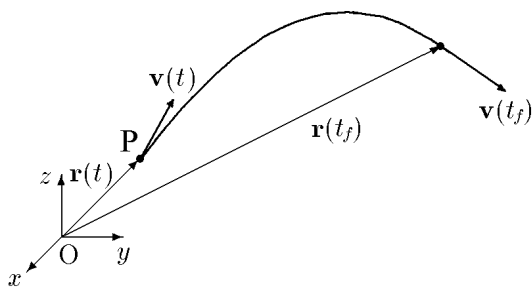
شتاب جاذبه بر مبنای دقت مورد نیاز انتخاب می‌شود. اما نکته‌ای که باید توجه داشت این است که انتخاب این مدل در حل تحلیلی، ممکن است منجر به حل مسئله نشود. لذا مدل جاذبه باید به گونه‌ای انتخاب شود که علاوه بر دقت مورد نیاز، منجر به حل تحلیلی مسئله نیز شود. برای این منظور، روش‌های مختلفی در منابع استفاده شده‌است؛ مانند تئوری اغتشاشات کوچک و تقریب شتاب جاذبه با تابعی از زمان. در روش دوم، برای یک مسیر نامی می‌توان یک تابع برداری بر حسب زمان برای شتاب جاذبه به دست آورد و سپس بردار شتاب جاذبه را حول آن خطی کرد. اگر مسیر نامی موجود یا قابل تعریف نباشد، ممکن است از بسط تیلور استفاده شود. بسط تیلور بر مبنای بردار موقعیت و سرعت وسیله پروازی صورت می‌پذیرد. استفاده از بسطی که بتواند بر مبنای نقطه اولیه و نهایی توسعه داده شود، می‌تواند برای تعداد جملات یکسان دقت بهتری ارائه کند. ساده‌ترین تقریب برای این مسئله، فرض شتاب جاذبه خطی بین موقعیت زمان حال و موقعیت نهایی است. البته در نهایت، دقت حل مسئله باید بررسی شود که این موضوع در بخش نتایج شبیه‌سازی انجام شده است. همچنین ممکن است روش‌هایی برای افزایش دقت حل به دست آمده، اعمال شود و روابط منتج را به نوعی کالیبره کند. لذا با این توصیف، با فرض شتاب جاذبه خطی بین موقعیت زمان حال و موقعیت نهایی می‌توان نوشت $(t \leq \xi \leq t_f)$:

$$\mathbf{g}(\xi) = \frac{t_f - \xi}{t_f - t} \mathbf{g}(t) + \frac{\xi - t}{t_f - t} \mathbf{g}(t_f) \quad (4)$$

که در آن، آرگومان‌ها به صورت $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}(t))$ خلاصه‌نویسی شده‌است. با جایگذاری رابطه (۴) در روابط (۲) و (۳) روابط سرعت و موقعیت نهایی حاصل می‌شود:

$$\mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}(t) + \left[\frac{\mathbf{g}(t) + \mathbf{g}(t_f)}{2} \right] t_{go} \quad (5)$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)t_{go} + \frac{1}{2} \left[\frac{2\mathbf{g}(t) + \mathbf{g}(t_f)}{3} \right] t_{go}^2 \quad (6)$$



شکل ۱- هندسه مسئله با قید بردار سرعت نهایی

شود. بنابر اهمیت موضوع، تاکنون روش‌های متعددی برای حل مسئله لامبرت ارائه شده‌است که بطور نمونه می‌توان به مراجع [۱۱-۷] اشاره کرد. اخیراً حل مسئله لامبرت حداقل انرژی [۱۲] و بیان مسئله به صورت کنترل بهینه [۱۳] نیز ارائه شده‌است.

در یک الگوریتم هدایت ممکن است از مجموعه‌ای از بردارهای سرعت لازم با شرایط پایانی متفاوت استفاده شود. الگوریتم هدایت در مرجع [۱۴] از دو بردار سرعت لازم و ماتریس‌های حساسیت مربوطه برای هدایت ضمنی استفاده می‌کند. بردار سرعت لازم اول بر مبنای قید بردار موقعیت نهایی و بردار سرعت دوم بر مبنای قید بردار سرعت نهایی است. در مرجع [۱۵] نیز معادله دیفرانسیل ماتریس حساسیت مذکور برای مسئله خطی حول مسیر مرجع به دست آمده‌است. در این تحقیق، حل تقریبی بردار سرعت لازم با قید بردار سرعت نهایی در زمان نهایی از پیش معلوم، مد نظر است. با فرض بردار شتاب جاذبه خطی بین موقعیت فضاییما در زمان فعلی تا موقعیت در زمان نهایی، می‌توان حل صریحی برای بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت آن به دست آورد. استفاده از این فرض برای حل مسئله لامبرت در منابع موجود است؛ اما حل تحلیلی برای بردار سرعت لازم با قید بردار سرعت نهایی به علت معلوم نبودن موقعیت نهایی، کمی دشوار می‌شود که موضوع تحقیق حاضر است. ذکر این نکته مفید است که برای محاسبه بردار سرعت لازم با قید بردار موقعیت نهایی، دو بردار موقعیت در زمان حال و زمان نهایی، مشخص است؛ اما برای محاسبه بردار سرعت با قید بردار سرعت نهایی، در هر لحظه موقعیت نهایی متفاوت می‌شود. به عبارت دیگر، بردار موقعیت نهایی برای این حالت، بردار موقعیتی است که در آن، سرعت نهایی فضاییما به سرعت نهایی مطلوب رسیده باشد.

بردار سرعت لازم

معادله حرکت وسیله پروازی را که به صورت جرم نقطه‌ای P مدل شده‌است به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

که در آن \mathbf{r} بردار موقعیت فضاییما و $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ بردار شتاب جاذبه نسبت به یک مختصات مرجع اینرسی $(Oxyz)$ است (شکل ۱). با دو بار انتگرال گیری از رابطه (۱) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}(t) + \int_t^{t_f} \mathbf{g}(\mathbf{r}(\xi)) d\xi \quad (2)$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)t_{go} + \int_t^{t_f} (t_f - \xi) \mathbf{g}(\mathbf{r}(\xi)) d\xi \quad (3)$$

که در آن \mathbf{v} بردار سرعت فضاییما و t_{go} زمان باقیمانده تا زمان نهایی t_f است $(t_{go} = t_f - t)$. در حل تحلیلی یا عددی، مدل

همچنین با جایگذاری برای شتاب جاذبه در رابطه اخیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{v}_v^* = \mathbf{v}^*(t_f) + \frac{\mu t_{go}}{r^3} \mathbf{r} \quad (11)$$

برای این حالت، دیگر نیازی به محاسبه بردار موقعیت نهایی نیست؛ چرا که بردار شتاب جاذبه در زمان نهایی برابر شتاب جاذبه در زمان t فرض شده است.

ب) تقریب شتاب جاذبه ثابت از زمان حاضر تا زمان نهایی برای محاسبه موقعیت نهایی

در صورتی که بردار شتاب جاذبه از زمان حاضر تا زمان نهایی ثابت فرض شود، بردار موقعیت نهایی با استفاده از رابطه (۳) به صورت زیر حاصل می‌آید:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)t_{go} + \frac{1}{2} \mathbf{g}(t)t_{go}^2 \quad (12)$$

در اینجا منظور، محاسبه بردار موقعیت نهایی فضاییما در زمان نهایی است؛ اگر در زمان حاضر بردار سرعت فضاییما برابر بردار سرعت لازم باشد. لذا به جای بردار سرعت در رابطه اخیر باید بردار سرعت لازم را قرار داد:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}_v^*(t)t_{go} + \frac{1}{2} \mathbf{g}(t)t_{go}^2 \quad (13)$$

برای این منظور، از رابطه بردار سرعت لازم (۱۰) به عنوان تقریب نخست استفاده می‌شود. با جایگذاری از رابطه (۱۰) در رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}^*(t_f)t_{go} - \frac{1}{2} \mathbf{g}(t)t_{go}^2 \quad (14)$$

با جایگذاری برای شتاب جاذبه برحسب بردار موقعیت در رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}^*(t_f)t_{go} + \frac{\mu \mathbf{r}(t)}{2r^3(t)} t_{go}^2 \quad (15)$$

بنابراین

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{v}^*(t_f)t_{go} + \left[1 + \frac{\mu t_{go}^2}{2r^3(t)} \right] \mathbf{r}(t) \quad (16)$$

در رابطه اخیر برای محاسبه بردار موقعیت نهایی از فرض شتاب جاذبه ثابت مابین زمان حاضر تا زمان نهایی استفاده شد. با جایگذاری رابطه (۱۶) و همچنین قدرمطلق آن در رابطه (۹)، بردار سرعت لازم به دست می‌آید.

در صورتی که در رابطه (۵) بجای بردار سرعت نهایی، بردار سرعت نهایی مطلوب، $\mathbf{v}^*(t_f)$ ، جایگذاری شود، سرعت فضاییما در زمان حاضر همان بردار سرعت لازم (\mathbf{v}_v^*) می‌شود:

$$\mathbf{v}_v^* = \mathbf{v}^*(t_f) - \left[\frac{\mathbf{g}(t) + \mathbf{g}(t_f)}{2} \right] t_{go} \quad (7)$$

به عبارت دیگر، بردار سرعت لازم \mathbf{v}_v^* ، بردار سرعتی است که موجب می‌شود فضاییما تنها تحت اثر شتاب جاذبه در زمان نهایی از پیش تعیین t_f به بردار سرعت نهایی مطلوب $\mathbf{v}^*(t_f)$ برسد. توجه شود که در هر لحظه به ازای بردار سرعت لازم متناظر با آن، یک بردار موقعیت نهایی به دست می‌آید. با توجه به اینکه عبارت داخل کروشه در رابطه (۷) میانگین شتاب جاذبه در دو نقطه زمان حال و زمان نهایی است، لذا میانگین وزنی این دو بردار، حالت تعمیم یافته-ای را به ذهن متبادر می‌کند. به عبارت دیگر، رابطه (۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{v}_v^* = \mathbf{v}^*(t_f) - \left[\frac{\mathbf{g}(t) + n\mathbf{g}(t_f)}{n+1} \right] t_{go} \quad (8)$$

که در آن n ضریب وزنی است و در نهایت n به گونه‌ای تعیین می‌شود تا دقت حل مسئله، افزایش یابد و به نوعی برای کالیبراسیون روابط بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت برای یک شرایط نهایی مشخص به کار می‌رود. در صورتی که $n = 1$ باشد، رابطه (۸) همان رابطه (۷) می‌شود. برای محاسبه $\mathbf{g}(t_f)$ نیاز به بردار موقعیت نهایی است که بعداً محاسبه می‌شود. در ادامه، با جایگذاری برای شتاب جاذبه از مدل زمین کروی، $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{r} / r^3$ در رابطه (۸) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{v}_v^* = \mathbf{v}^*(t_f) + \frac{\mu t_{go}}{n+1} \left[\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{n\mathbf{r}(t_f)}{r^3(t_f)} \right] \quad (9)$$

لازم به ذکر است که در اینجا از دستگاه مختصات اینرسی ECI استفاده شده است. برای محاسبه $\mathbf{g}(t_f)$ یا بردار سرعت لازم می‌توان از تقریب‌های مختلفی استفاده کرد. در ادامه، از سه تقریب مختلف برای این موضوع استفاده می‌شود:

الف) تقریب شتاب جاذبه ثابت از زمان حاضر تا زمان نهایی برای محاسبه سرعت لازم

در این حالت، بردار سرعت لازم از رابطه (۸) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathbf{v}_v^* = \mathbf{v}^*(t_f) - \mathbf{g}(t)t_{go} \quad (10)$$

اگر از طرفین رابطه (۲۳) قدرمطلق گرفته شود، معادله جبری درجه سومی بر حسب $r(t_f)$ حاصل می‌شود:

$$r^3(t_f) - br^2(t_f) - k_f \mu t_{go}^2 = 0 \quad (25)$$

که در آن $\mathbf{b} = |b|$. با حل معادله درجه سوم فوق، $r(t_f)$ حاصل می‌شود. با استفاده از روابط حل معادله جبری درجه سوم می‌توان نوشت:

$$r(t_f) = \frac{b}{3} + \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} \quad (26)$$

که در آن

$$R = \frac{1}{27} b^3 + \frac{k_f \mu t_{go}^2}{2} \quad (27)$$

$$D = \left(\frac{k_f \mu t_{go}^2}{2} \right)^2 + \frac{k_f \mu t_{go}^2}{27} b^3 \quad (28)$$

لازم به ذکر است که معادله مشخصه معادله جبری مذکور به ازای $t < t_f$ مثبت است ($D > 0$). بنابراین، معادله جبری (۲۵) یک جواب حقیقی و دو جواب مزدوج مختلط دارد و برای مسئله مذکور، تنها جواب حقیقی قابل قبول است. پس از محاسبه $r(t_f)$ ، باید نامساوی (۲۴) چک شود. سپس با استفاده از رابطه (۲۳) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t_f) = \left(1 - \frac{k_f \mu t_{go}^2}{r^3(t_f)} \right)^{-1} \mathbf{b} \quad (29)$$

رابطه اخیر با استفاده از رابطه (۲۵) به صورت زیر نوشته می‌شود که برای محاسبه بردار $\mathbf{r}(t_f)$ استفاده می‌شود:

$$\mathbf{r}(t_f) = r(t_f) \mathbf{b} / b \quad (30)$$

محاسبه ماتریس حساسیت

روابطی که تاکنون به دست آمد برای محاسبه بردار سرعت لازم با قید سرعت نهایی بود. حال، ماتریس حساسیت $Q_v = \partial \mathbf{v}_v^* / \partial \mathbf{r}$ محاسبه می‌شود. اگر از رابطه (۹) مشتق جزئی نسبت به بردار موقعیت گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_v^*}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu t_{go}}{n+1} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}(t_f)}{r^3(t_f)} \right) \right] \quad (31)$$

با استفاده از رابطه (۵۶) در بخش پیوست (الف)، روابط (۳۲) و (۳۳) حاصل می‌شود:

ج) تقریب شتاب جاذبه خطی با زمان برای محاسبه موقعیت نهایی

در اینجا از تقریب «شتاب جاذبه خطی با زمان بین بردار شتاب جاذبه برای دو موقعیت مربوط به زمان حال و زمان نهایی» استفاده می‌شود. برای این منظور و مشابه اعمال ضریب وزنی در رابطه (۸)، ابتدا رابطه (۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) t_{go} + \frac{1}{2} \left[\frac{m \mathbf{g}(t) + \mathbf{g}(t_f)}{m+1} \right] t_{go}^2 \quad (17)$$

که در آن $m = 2$ است. حال بجای بردار سرعت فضاییما در رابطه اخیر، بردار سرعت لازم از رابطه (۸) جایگزین می‌شود. نتیجه پس از ساده‌سازی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}^*(t_f) t_{go} - k \mathbf{g}(t) t_{go}^2 - k_f \mathbf{g}(t_f) t_{go}^2 \quad (18)$$

که در آن

$$k = \frac{2 + m - mn}{2(m+1)(n+1)} \quad (19)$$

$$k_f = \frac{2mn + n - 1}{2(m+1)(n+1)} \quad (20)$$

به ازای $n = 1$ و $m = 2$ ، مقادیر $k = 1/6$ و $k_f = 1/3$ به دست می‌آید. با جایگذاری برای شتاب جاذبه از مدل زمین کروی در رابطه (۱۸) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}^*(t_f) t_{go} + k \mu t_{go}^2 \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + k_f \mu t_{go}^2 \left[\frac{\mathbf{r}(t_f)}{r^3(t_f)} \right] \quad (21)$$

با تعریف بردار \mathbf{b} به صورت

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}^*(t_f) t_{go} + k \mu t_{go}^2 \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (22)$$

رابطه (۲۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left(1 - \frac{k_f \mu t_{go}^2}{r^3(t_f)} \right) \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{b} \quad (23)$$

با فرض برقراری نامساوی

$$\frac{k_f \mu t_{go}^2}{r^3(t_f)} < 1 \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه اخیر در رابطه (۳۵) ماتریس حساسیت بردار سرعت لازم نسبت به بردار موقعیت نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_v^*}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\mu t_{go}}{(n+1)r^3} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \\ &+ \frac{n\mu t_{go}}{(n+1)r^3(t_f)} [I - 3\mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T] \\ &+ \frac{n\mu^2 t_{go}^2}{2(n+1)r^3(t_f)r^3} [I - 3\mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T] [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \end{aligned} \quad (38)$$

ج) تقریب شتاب جاذبه خطی با زمان در محاسبه موقعیت نهایی

در این حالت باید مشتق جزئی رابطه (۲۱) نسبت به بردار موقعیت محاسبه شود:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} = I + k\mu t_{go}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + k_f \mu t_{go}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{\mathbf{r}(t_f)}{r^3(t_f)} \right] \quad (39)$$

با جایگذاری از روابط (۳۲) و (۳۳) در رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} &= I + \frac{k\mu t_{go}^2}{r^3} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \\ &+ \frac{k_f \mu t_{go}^2}{r^3(t_f)} [I - 3\mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T] \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (40)$$

حال از رابطه اخیر باید عبارت $\partial \mathbf{r}(t_f) / \partial \mathbf{r}$ را به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} &= \left[\left(1 - \frac{k_f \mu t_{go}^2}{r^3(t_f)} \right) I - \frac{3k_f \mu t_{go}^2}{r^3(t_f)} \mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T \right]^{-1} \\ &\left[\left(1 + \frac{k\mu t_{go}^2}{r^3} \right) I - \frac{3k\mu t_{go}^2}{r^3} \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \right] \end{aligned} \quad (41)$$

رابطه فوق با این فرض نوشته شده است که در محدوده مورد نظر، ماتریس معکوس ظاهر شده در آن، وجود داشته باشد. با استفاده از رابطه زیر برای معکوس ماتریس می‌توان رابطه (۴۱) را ساده کرد.

$$[\gamma I_{3 \times 3} + \beta \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T]^{-1} = \frac{1}{\gamma} I_{3 \times 3} - \frac{\beta}{\gamma(\gamma + \beta)} \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \quad (42)$$

که در آن ضرایب γ و β اسکالر هستند ($\gamma \neq 0, \gamma + \beta \neq 0$). بنابراین

$$\begin{aligned} [(1 - \alpha_f)I + 3\alpha_f \mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T]^{-1} &= \\ \frac{1}{1 - \alpha_f} \left[I - \frac{3\alpha_f}{1 + 2\alpha_f} \mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T \right] \end{aligned} \quad (43)$$

که در آن

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}(t_f)}{r^3(t_f)} \right) = \frac{1}{r^3(t_f)} [I - 3\mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T] \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} \quad (33)$$

که در آن I ماتریس همانی 3×3 است و

$$\mathbf{u}_{rf} = \frac{\mathbf{r}(t_f)}{r(t_f)}, \quad \mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (34)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_v^*}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\mu t_{go}}{(n+1)r^3} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \\ &+ \frac{n\mu t_{go}}{(n+1)r^3(t_f)} [I - 3\mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T] \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (35)$$

بر حسب این که از کدام تخمین برای $\mathbf{r}(t_f)$ استفاده شود، روابط تقریبی مختلفی به دست می‌آید که در ادامه به ازای سه تقریب به دست آمده، روابط ماتریس حساسیت استخراج می‌شود. لازم به ذکر است برای مسئله لامبرت به دلیل اینکه بردار موقعیت نهایی مشخص و ثابت است، ماتریس حساسیت بطور مستقیم به دست می‌آید (پیوست ب).

الف) تقریب شتاب جاذبه ثابت از زمان حاضر تا زمان نهایی برای محاسبه سرعت لازم

در صورتی که بردار شتاب جاذبه از زمان حال تا زمان نهایی ثابت فرض شود برای محاسبه بردار سرعت لازم از رابطه (۱۱) استفاده می‌شود. بنابراین مشتق جزئی بردار سرعت لازم نسبت به موقعیت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_v^*}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu t_{go}}{r^3} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \quad (36)$$

رابطه اخیر با استفاده از روش دیگری در مرجع [۱۵] به دست آمده است.

ب) تقریب شتاب جاذبه ثابت از زمان حاضر تا زمان نهایی برای محاسبه موقعیت نهایی

در این حالت، با مشتق جزئی از رابطه (۱۵) نسبت به بردار موقعیت می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} = I + \frac{\mu t_{go}^2}{2r^3} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \quad (37)$$

البته این حذف بدین معنا نیست که برای محاسبه سرعت لازم دیگر نیازی به محاسبه $r(t_f)$ نیست. با جایگذاری رابطه (۲۲) در رابطه اخیر و مرتب‌سازی عبارات آن می‌توان نوشت:

$$\mathbf{v}_v^* = \frac{n}{n+1} \left[\frac{\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}}{k_f t_{go}} \right] + \left[1 - \frac{n}{(n+1)k_f} \right] \mathbf{v}^*(t_f) + \frac{\mu t_{go}}{n+1} \left(1 - \frac{kn}{k_f} \right) \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (51)$$

به‌منظور محاسبه ماتریس حساسیت باید از رابطه فوق نسبت به بردار موقعیت، مشتق جزئی گرفت:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_v^*}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu t_{go}}{(n+1)r^3} \left(1 - \frac{kn}{k_f} \right) [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] - \frac{n}{(n+1)k_f t_{go}} I + \frac{n}{(n+1)k_f t_{go}} \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} \quad (52)$$

حال با استفاده از رابطه (۴۶) و جایگذاری برای $\partial \mathbf{r}(t_f) / \partial \mathbf{r}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_v^*}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu t_{go}}{(n+1)r^3} \left(1 - \frac{kn}{k_f} \right) [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] - \frac{n}{(n+1)k_f t_{go}} I + \frac{n}{(n+1)(1-\alpha_f)k_f t_{go}} \times \left[I - \frac{3\alpha_f}{1+2\alpha_f} \mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T \right] [(1+\alpha)I - 3\alpha \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \quad (53)$$

بنابراین ماتریس حساسیت را از روابط (۴۸) و (۵۳) می‌توان محاسبه کرد.

نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، دقت روابط تقریبی به‌دست آمده برای بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت با مقادیر حل عددی که با استفاده از معادلات غیرخطی شبیه‌سازی پرواز برای مدل جاذبه زمین کروی به‌دست آمده‌است، مقایسه می‌شود. در ابتدا، سرعت لازم برای فضاییما در بردار موقعیت اولیه $\mathbf{r}(0) = [0 \ 0 \ R_e]^T$ با قید بردار سرعت نهایی $\mathbf{v}^*(t_f) = [2000 \ 3000 \ 500]^T$ براساس سه رابطه تقریبی (۱۱)، (۱۶) و (۳۰) محاسبه و با حل دقیق (منتج از معادلات غیرخطی شبیه‌سازی پرواز با فرض مدل جاذبه زمین کروی) مقایسه می‌شود (R_e شعاع زمین است). برای این

$$\alpha = \frac{k_f \mu t_{go}^2}{r^3} \quad (44)$$

$$\alpha_f = \frac{k_f \mu t_{go}^2}{r^3(t_f)}, \quad \alpha_f \neq -\frac{1}{2}, 1 \quad (45)$$

بنابراین رابطه (۳۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{1-\alpha_f} \left[I - \frac{3\alpha_f}{1+2\alpha_f} \mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T \right] [(1+\alpha)I - 3\alpha \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \quad (46)$$

با جایگذاری رابطه اخیر در رابطه (۳۵)، رابطه ماتریس حساسیت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_v^*}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu t_{go}}{(n+1)r^3} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] + \frac{n\mu t_{go}}{(n+1)(1-\alpha_f)r^3(t_f)} [I - 3\mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T] \left[I - \frac{3\alpha_f}{1+2\alpha_f} \mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T \right] [(1+\alpha)I - 3\alpha \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \quad (47)$$

در نتیجه، رابطه ماتریس حساسیت به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_v^*}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu t_{go}}{(n+1)r^3} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] + \frac{n\mu t_{go}}{(n+1)(1-\alpha_f)r^3(t_f)} \times \left[I - \frac{3}{1+2\alpha_f} \mathbf{u}_{rf} \mathbf{u}_{rf}^T \right] [(1+\alpha)I - 3\alpha \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \quad (48)$$

روش دوم:

با استفاده از رابطه (۲۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{\mathbf{r}(t_f)}{r^3(t_f)} = \frac{\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{b}}{k_f \mu t_{go}^2} \quad (49)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۹) عبارت $r^3(t_f)$ از رابطه بردار سرعت لازم حذف می‌شود.

$$\mathbf{v}_v^* = \mathbf{v}^*(t_f) + \frac{\mu t_{go}}{n+1} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + \frac{n}{n+1} \left[\frac{\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{b}}{k_f t_{go}} \right] \quad (50)$$

جدول ۲- مقایسه دقت روابط تقریبی بردار سرعت لازم به ازای زمان نهایی ۱۵۰ ثانیه

روش محاسبه	مؤلفه‌های بردار سرعت لازم (m/s)
رابطه (۱۱)	(۲۰۰۰/۰ ۳۰۰۰/۰ ۱۹۸۰/۰)
روابط (۹) و (۱۶)	(۲۰۳۱/۱ ۳۰۴۷/۶ ۱۹۳۱/۴)
روابط (۹) و (۳۰)	(۲۰۳۲/۱ ۳۰۴۸/۲ ۱۹۳۲/۳)
مقدار دقیق	(۲۰۳۳/۰ ۳۰۴۹/۵ ۱۹۲۶/۲)

جدول ۳- مقایسه دقت روابط تقریبی بردار سرعت لازم به ازای زمان نهایی ۳۰۰ ثانیه

روش محاسبه	مؤلفه‌های بردار سرعت لازم (m/s)
رابطه (۱۱)	(۲۰۰۰/۰ ۳۰۰۰/۰ ۳۴۶۰/۰)
روابط (۹) و (۱۶)	(۲۱۰۳/۱ ۳۱۵۴/۶ ۳۱۷۴/۲)
روابط (۹) و (۳۰)	(۲۱۰۹/۰ ۳۱۶۳/۵ ۳۱۸۹/۱)
مقدار دقیق	(۲۱۱۸/۷ ۳۱۷۸/۱ ۳۱۴۲/۶)

حال فرض کنید که مسیر فضاییما مطابق مرجع [۱۵] در صفحه قائم به صورت زیر منظور شود:

$$x = R_e \cos(\pi/3) + 4.73t^2 \quad (54)$$

$$z = R_e \sin(\pi/3) + 8.87t^2 \quad (55)$$

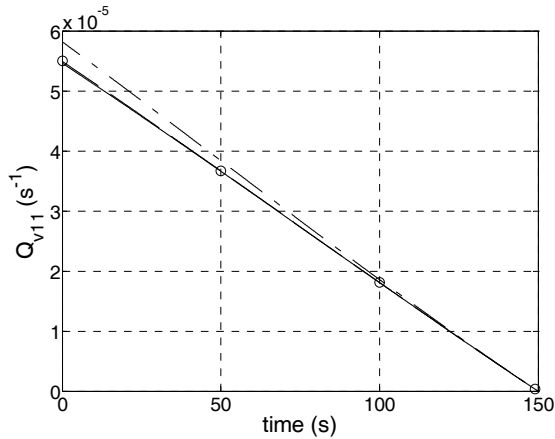
نمودار عناصر ماتریس حساسیت برای مسیر مذکور از سه روش تقریبی با روابط (۳۶)، (۳۸) و (۴۸) در شکل‌های (۲) و (۳) نمایش داده شده است. در این شکل‌ها، دایره توخالی نمایانگر حل عددی (حل دقیق) با استفاده از معادلات غیرخطی شبیه‌سازی پرواز برای مدل جاذبه زمین کروی است. نمودار مشخص شده با خط نقطه با استفاده از رابطه (۳۶) و نمودارهای خط چین و خط توپر به ترتیب نشان‌دهنده روابط (۳۸) و (۴۸) است. همان‌طور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود، نتایج حل‌های تقریبی (۳۸) و (۴۸) به ازای زمان نهایی ۱۵۰ ثانیه (تقریباً) مشابه است. نتایج حل‌های تقریبی و حل دقیق (حل عددی) به ازای زمان نهایی ۳۰۰ ثانیه در شکل (۳) نمایش داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت با افزایش زمان نهایی، دقت روابط تقریبی کاهش می‌یابد. همچنین تفاوت حل‌های تقریبی (۳۸) و (۴۸) نیز نمایان می‌شود. نکته حائز اهمیت این است که مقایسه روابط تقریبی (۳۸) و (۴۸) وابسته به شرایط مسئله است

منظور، مقادیر بردار سرعت لازم و مقادیر منتج از حل‌های تقریبی برای سه مقدار مختلف زمان نهایی شامل ۶۰، ۱۵۰ و ۳۰۰ ثانیه در جدول‌های (۱-۳) آمده است. در جدول (۱)، نتایج به ازای زمان نهایی ۶۰ ثانیه درج شده است که نشان می‌دهد مقادیر سرعت لازم حاصل از دو روش تقریبی بر مبنای روابط (۱۶) و (۳۰) دقت نسبی خوبی دارد؛ اما با مشاهده جدول‌های (۲) و (۳) می‌توان گفت که با افزایش زمان نهایی از دقت روش‌های مذکور کاسته می‌شود؛ به طوری که حل‌های تقریبی بردار سرعت لازم برای زمان نهایی ۳۰۰ ثانیه قابل قبول نیست. البته از حل‌های تقریبی مذکور می‌توان به عنوان حدس اول در روابط تکرارپذیر بردار سرعت لازم استفاده کرد که باعث تکرار کمتر حلقه محاسبات می‌شود. همان‌طور که از جدول‌های (۲) و (۳) مشخص است، دقت روش‌های تقریبی بر مبنای روابط (۱۶) و (۳۰) برای سه مولفه x ، y و z متفاوت است و ممکن است به شرایط اولیه و نهایی وابسته باشد و نمی‌توان اظهار نظر قطعی کرد؛ اما برای یک مسئله خاص، ممکن است محاسبه سرعت لازم برای دو مولفه x و y از روابط (۹) و (۳۰) و برای مولفه z از روابط (۹) و (۱۶) استفاده کرد. شایان ذکر است که لزوماً دقت نامطلوب برای بردار سرعت لازم به معنای دقت نامطلوب برای ماتریس حساسیت منتج از آن نیست؛ چرا که در محاسبه ماتریس حساسیت، میزان حساسیت به بردار موقعیت مهم است. البته با تنظیم ضرایب m و n می‌توان دقت روابط تقریبی را بهبود بخشید؛ اما با توجه به اینکه هدف از این تحقیق، حل تقریبی ماتریس حساسیت است، این موضوع برای ماتریس حساسیت بررسی شده است. در ادامه، دقت محاسبه روش‌های حل تقریبی ماتریس حساسیت بررسی می‌شود.

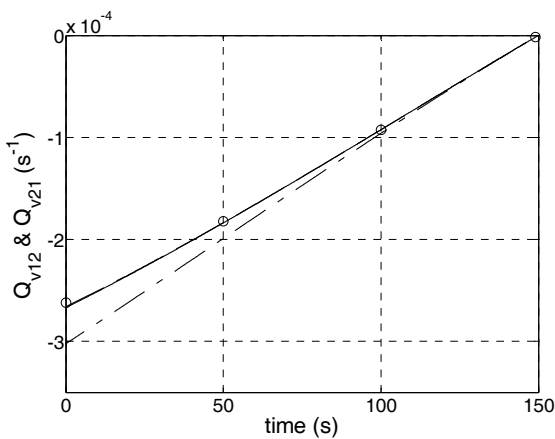
جدول ۱- مقایسه دقت روابط تقریبی بردار سرعت لازم به ازای زمان نهایی ۶۰ ثانیه

روش محاسبه	مؤلفه‌های بردار سرعت لازم (m/s)
رابطه (۱۱)	(۲۰۰۰/۰ ۳۰۰۰/۰ ۱۰۹۲/۰)
روابط (۹) و (۱۶)	(۲۰۰۵/۵ ۳۰۰۸/۲ ۱۰۸۷/۱)
روابط (۹) و (۳۰)	(۲۰۰۵/۵ ۳۰۰۸/۲ ۱۰۸۷/۱)
مقدار دقیق	(۲۰۰۵/۵ ۳۰۰۸/۳ ۱۰۸۶/۷)

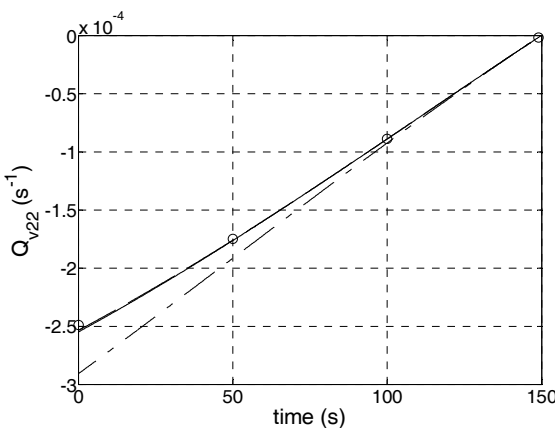
ضرایب چند جمله‌ای بر حسب زمان برای یک مسیر نامی مشخص مدل سازی شود.



(الف)



(ب)



(ج)

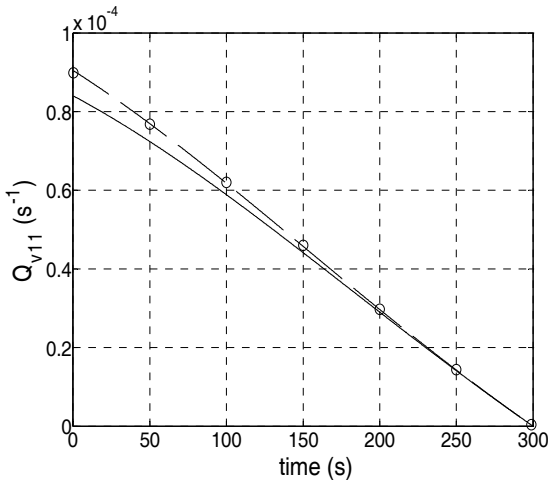
شکل ۲- عناصر ماتریس حساسیت به ازای زمان نهایی ۱۵۰ ثانیه برای سه روش تقریبی شامل رابطه (۳۶) به صورت خط نقطه، رابطه (۳۸) به صورت خط چین و رابطه (۴۸) بصورت خط توپر و حل دقیق به صورت دوایر توخالی.

و در بعضی شرایط و بر حسب اینکه کدام عنصر ماتریس حساسیت باشد، ممکن است تقریب بهتر، متفاوت باشد. نکته دوم این است که با تنظیم ضرایب n و m می توان دقت روابط تقریبی را برای مسئله‌ای خاص یا مسیر نامی مشخصی افزایش داد و به نوعی این روابط را کالیبره کرد. این موضوع در شکل (۴) تنها با تغییر n در رابطه (۴۸) نشان داده شده است. در این شکل، نمودارهای خط توپر به ازای $n = 1.7$ و نمودارهای خط چین به ازای $n = 1.1$ ترسیم شده است. همان طور که از شکل (۴) مشاهده می شود، انتخاب $n = 1.1$ برای عنصر Q_{v11} و انتخاب $n = 1.7$ برای عناصر Q_{v21} ، Q_{v12} و Q_{v22} منجر به دقت بهتری می شود. به عبارت دیگر، عنصر Q_{v11} با انتخاب $n = 1.1$ و عناصر Q_{v21} ، Q_{v12} و Q_{v22} با انتخاب $n = 1.7$ کالیبره شده است. همان طور که مشاهده شد، لزومی به انتخاب یکسان n (و یا m) برای عناصر مختلف ماتریس حساسیت نیست. در اینجا تنها کالیبراسیون با تنظیم ضریب n انجام شد. البته با استفاده از تنظیم دو ضریب n و m می توان به دقت بهتری برای زمان های نهایی بزرگ تر، دست پیدا کرد.

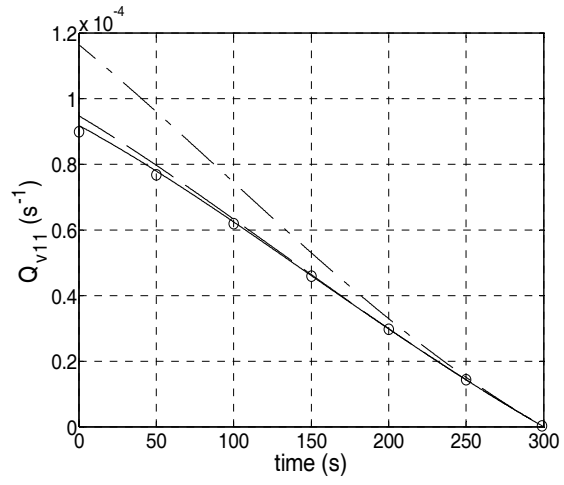
نتیجه گیری

در این مقاله، روابطی برای حل تقریبی بردار سرعت لازم با قید بردار سرعت نهایی با فرض «شتاب جاذبه خطی بین بردار موقعیت فعلی و بردار موقعیت نهایی» برای مدل زمین کروی ارائه شده است. از حل تقریبی بردار سرعت لازم می توان به عنوان حدس اول در روابط تکرارپذیر بردار سرعت لازم استفاده کرد که باعث تکرار کمتر حلقه محاسبات می شود. البته شایان ذکر است، ارائه حل تحلیلی تقریبی بردار سرعت لازم با قید بردار سرعت نهایی (در مدت زمان از پیش تعیین) با فرض شتاب جاذبه خطی به آن معنا نیست که حل تحلیلی دقیق تر یا کاملی برای بردار سرعت لازم یا ماتریس حساسیت برای مسئله مذکور قابل دستیابی نیست.

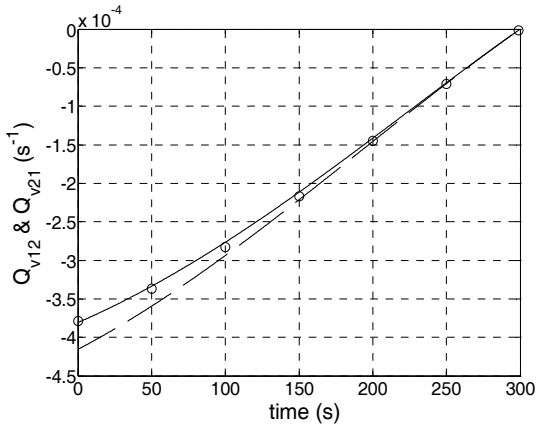
در ادامه، حل تحلیلی ماتریس حساسیت بردار سرعت لازم نسبت به بردار موقعیت نیز به دست آمد. حل های تقریبی مذکور به ازای زمان نهایی از پیش تعیین نتیجه شده است. آزاد بودن موقعیت نهایی در این مسئله، حل تحلیلی را نسبت به مسائل با قید بردار موقعیت نهایی، دشوارتر می کند. بنابراین، برای محاسبه بردار موقعیت نهایی از سه تقریب استفاده شده است. با افزایش زمان نهایی، دقت روابط تقریبی به دست آمده، کاهش می یابد. البته با تنظیم ضرایب ثابت ماتریس حساسیت یا با افزودن ضرایب متغیر با زمان، می توان دقت روابط تقریبی را برای مسئله ای خاص یا مسیر نامی مشخصی افزایش داد و به نوعی این روابط را کالیبره کرد. همچنین، خطای باقیمانده در ماتریس حساسیت می تواند توسط



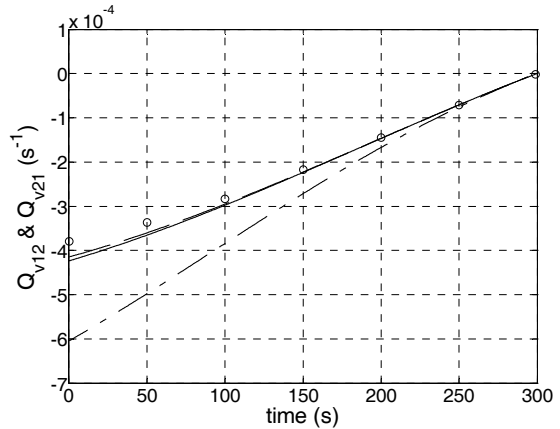
(الف)



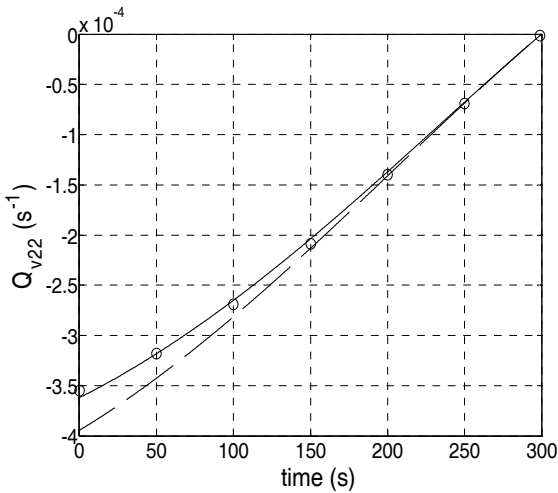
(الف)



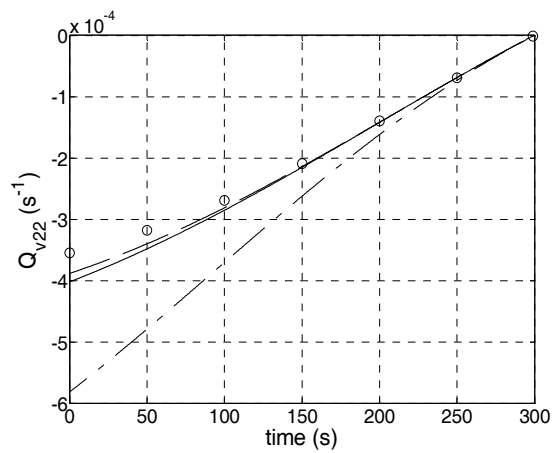
(ب)



(ب)



(ج)



(ج)

شکل ۴ - عناصر ماتریس حساسیت به ازای زمان نهایی ۳۰۰ ثانیه برای رابطه

(۴۸) به ازای $n = 1.7$ (بصورت خط توپر)، به ازای $n = 1.1$ (به صورت

خط چین) و حل دقیق به صورت دایره توخالی

شکل ۳ - عناصر ماتریس حساسیت به ازای زمان نهایی ۳۰۰ ثانیه برای سه

روش تقریبی شامل رابطه (۳۶) به صورت خط نقطه، رابطه (۳۸) به صورت خط چین

و رابطه (۴۸) به صورت خط توپر و حل دقیق به صورت دایره توخالی

پیوست الف- روابط مشتقات برداری

در این پیوست، اثبات رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{f}}{f^3} \right) = \frac{1}{f^3} [I - 3\mathbf{u}_f \mathbf{u}_f^T] \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \quad (56)$$

که در آن، \mathbf{f} تابعی برداری از بردار موقعیت فضاییما، $f = |\mathbf{f}|$ و $\mathbf{u}_f = \mathbf{f} / f$ است.

ابتدا مشتق جزئی نسبت به x محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{f}}{f^3} \right) &= \frac{1}{f^3} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) + \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{f^3} \right) \\ &= \frac{1}{f^3} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) - \frac{3\mathbf{f}}{f^4} \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{1}{f^3} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{3\mathbf{f}}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (57)$$

بنابراین، مشتق جزئی عبارت \mathbf{f} / f^3 نسبت به بردار موقعیت \mathbf{r} به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{f}}{f^3} \right) = \frac{1}{f^3} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{3\mathbf{f}}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \right] \quad (58)$$

که در آن مشتق جزئی یک تابع اسکالر نسبت به یک بردار، به صورت برداری نمایش داده می شود:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T \quad (59)$$

از طرف دیگر، می توان نشان داد که

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \mathbf{f} \quad (60)$$

با جایگذاری رابطه اخیر در رابطه (58) می توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{f}}{f^3} \right) = \frac{1}{f^3} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{3\mathbf{f}}{f^2} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \right] \quad (61)$$

رابطه فوق با تعریف بردار $\mathbf{u}_f = \mathbf{f} / f$ به صورت رابطه (56) نتیجه می شود.

پیوست ب- ماتریس حساسیت با قید بردار موقعیت نهایی

در این پیوست، با تقریب «شتاب جاذبه خطی با زمان بین بردارهای شتاب جاذبه برای دو موقعیت مربوط به زمان حال و زمان نهایی»، بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت برای مسئله لامبرت به دست می آید. بردار سرعت لازم برای رسیدن به بردار موقعیت نهایی \mathbf{r}_T

در زمان نهایی t_f که با \mathbf{v}_p^* نمایش داده شده است، با استفاده از رابطه (۱۷) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{v}_p^* = \frac{\mathbf{r}_T - \mathbf{r}(t)}{t_{go}} - \frac{1}{2} \left[\frac{m\mathbf{g}(t) + \mathbf{g}(t_f)}{m+1} \right] t_{go} \quad (62)$$

با جایگذاری برای بردار شتاب جاذبه با فرض مدل زمین کروی می توان نوشت:

$$\mathbf{v}_p^* = \frac{\mathbf{r}_T - \mathbf{r}(t)}{t_{go}} + \frac{\mu}{2(m+1)} \left[\frac{m\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} + \frac{\mathbf{r}_T}{r_T^3} \right] t_{go} \quad (63)$$

رابطه اخیر به ازای $m = 2$ با استفاده از روش دیگری در مرجع [۲] به دست آمده است. با توجه به این که بردار موقعیت نهایی در مسئله لامبرت معلوم و همچنین ثابت است، ماتریس حساسیت به طور مستقیم به دست می آید:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_p^*}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{t_{go}} I + \frac{m\mu t_{go}}{2(m+1)r^3(t)} [I - 3\mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T] \quad (64)$$

مراجع

- [1] Pitman, G. R., *Inertial Guidance*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1962.
- [2] Battin, R. H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, Revised Edition, AIAA Education Series, USA, 1999.
- [3] Martin, F. H., *Closed-Loop Near-Optimum Steering for a Class of Space Missions*, (B. Sc. Thesis), Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1965.
- [4] Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 4th ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, 2002.
- [5] Siouris, G. M., *Missile Guidance and Control Systems*, Springer Verlag, NY, 2004.
- [6] Battin, R. H., "Space Guidance Evolution- A Personal Narrative," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 2, 1982, pp. 97-110.
- [7] Battin, R. H., "Lambert's Problem Revisited," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 5, 1977, pp. 707-713.
- [8] Battin, R. H., "An Elegant Lambert Algorithm," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 6, 1984, pp. 662-670.
- [9] Nelson, S. L., and Zarchan, P., "Alternative Approach to the Solution of Lambert's Problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 4, 1992, pp. 1003-1009.
- [10] Izzo, D., "Lambert's Problem for Exponential Sinusoids," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 5, 2006, pp. 1242-1245.

- Equation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 3, 2010, pp. 1000-1008.
- [14] Jalali-Naini, S. H., “An Implicit Guidance Formulation for Velocity Constraint,” *The 9th Iranian Aerospace Society Conference*, Tehran, Feb. 2010.
- [15] Jalali-Naini, S. H., “Differential Equation of Sensitivity Matrix for Final Velocity Constraint,” *Journal of Aerospace Science and Technology*, Iranian Aerospace Society, Vol. 6, No. 2, 2009, pp. 55-61.
- [11] Zhang, G., Mortari, D., and Zhou, D., “Constrained Multiple-Revolution Lambert’s Problem,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 6, 2010, pp. 1779-1786.
- [12] Leeghim, H. and Jaroux, B. A., “Energy-Optimal Solution to the Lambert Problem,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 3, 2010, pp. 1008-1010.
- [13] Bando, M. and Yamakawa, H., “New Lambert Algorithm Using the Hamiltonian-Jacobi-Bellman