

# Development of Reaction Wheel Disturbances General Model and Validation with Experimental Data

A. R. Aghalari<sup>1\*</sup> and M. Iranzad<sup>2</sup>

1. University of Complex Aerospace, Malek e Ashtar University of Technology
2. Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology

\*Tehran-Karaj Highway 26 Km, Alborz, IRAN

Ali-Aghalari@aut.ac.ir

*Precision spacecrafts require high levels of pointing stability. Small levels of vibration can cause a significant reduction in image quality. There are many possible disturbance sources on spacecraft (mechanical systems or sensors), but the reaction wheel assembly (RWA) is anticipated to be the largest. Therefore, accurate models of reaction wheel disturbances are necessary to predict their effect on the spacecraft performance and develop methods to control the undesired vibration. In this paper, two types of reaction wheel disturbance models is presented. The first is a steady-state empirical model that was originally created based on a prototype RWA hard-mounted test data. The model assumes that the disturbances consist of discrete harmonics of the wheel speed with amplitudes proportional to the wheel speed squared. Experimental data obtained from RWA designed and manufactured by Aghalari and et al. are used to illustrate the empirical modeling process and provide model validation. The model captures the harmonic disturbances of the wheel quite well, but does not include interactions between the harmonics and the structural modes of the wheel which result in large disturbance amplifications at some wheel speeds. Therefore the second model, a nonlinear analytical model, is created using energy methods to capture the internal flexibilities and fundamental harmonic of an unbalanced wheel. Then the analytical model has been extended to capture all the wheel harmonics as well as the disturbance amplifications that occur due to excitation of the structural wheel modes by the harmonics. Finally experimental data obtained from hard-mounted test of RWA is used to determine the model parameters for both types of models and a comparison between the models and data is presented.*

**Keywords:** Reaction wheel, Disturbances, Static imbalance, Dynamic imbalance, Flywheel

---

1. Researcher (Corresponding Author)  
2. M. Sc.

# مدل سازی کامل اغتشاشات چرخ عکس‌العملی و پیاده‌سازی روی یک نمونه آزمایشگاهی

علیرضا آقالاری<sup>۱\*</sup> و مرتضی ایرانزاد<sup>۲</sup>

۱- مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر

۲- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

\* کیلومتر ۲۶ اتوبان تهران - کرج

Ali\_Aghalari@aut.ac.ir

میزان کارایی ماهواره‌های تصویربرداری جهت انجام مأموریت بستگی زیادی به میزان ثبات ماهواره در وضعیت موردنظر دارد. ارتعاشات بسیار کوچک می‌تواند تأثیر منفی در کیفیت تصاویر داشته باشد. این ارتعاشات ممکن است به وسیله سیستم‌های مکانیکی و حسگرهایی که در ماهواره نصب شده‌اند ایجاد شود. اما مهم‌ترین عامل تولید، چرخ‌های عکس‌العملی هستند. بنابراین مدل‌سازی دقیق اغتشاشات چرخ‌های عکس‌العملی برای پیش‌بینی تأثیر آنها بر روی سازه ماهواره و در نتیجه کارایی ماهواره و نیز ایجاد روش‌هایی برای کنترل ارتعاشات ناخواسته امری ضروری است. در مقاله حاضر دو نوع مدل برای پیش‌بینی اغتشاشات چرخ عکس‌العملی ارائه می‌شود. اولین مدل، یک مدل تجربی است که بر اساس داده‌های حاصل از تست گیردار چرخ عکس‌العملی آزمایشگاهی طراحی و ساخته شده توسط نگارنده و همکاران استوار است. داده‌های تست متشکل از نیروها و گشتاورهای اغتشاشی هستند که با استفاده از یک حسگر نیروی شش محوره در سرعت‌های چرخشی یکنواخت مختلف اندازه‌گیری شده‌اند. در این مدل فرض بر آن است که اغتشاشات شامل هارمونی‌های مجزا از سرعت دورانی چرخ عکس‌العملی است که در آن دامنه هر هارمونی با مربع سرعت دوران چرخ متناسب است. این مدل قادر به پیش‌بینی اثر مودهای سازه‌ای چرخ عکس‌العملی نیست. برای این منظور یک مدل غیرخطی که براساس روش انرژی برای پیش‌بینی نیروها و گشتاورهای اغتشاشی (شش درجه آزادی) در هارمونی‌های اصلی چرخ عکس‌العملی ایجاد شده است، ارائه می‌گردد. سپس جهت لحاظ نمودن هارمونی‌های دیگر، مدل تحلیلی مذکور با مدل اول ترکیب شده و مدل بسط‌یافته ایجاد می‌شود. در نهایت به منظور بررسی و اعتبارسنجی مدل‌ها، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از دو مدل و داده‌های تست انجام می‌شود.

کلمات کلیدی: چرخ عکس‌العملی، اغتشاشات، نابالانسی استاتیکی، نابالانسی دینامیکی، چرخ‌طیار

## علائم و اختصارات

$n$	تعداد هارمونی‌های مدل
$C_i$	ضریب دامنه هارمونی $i$ ام $(Nm/(Hz)^2) N/(Hz)^2$
$\Omega$	سرعت چرخ طیار (هرتز)
$i$	$i$ امین عدد هارمونی
$\alpha$	اختلاف فاز تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0, 2\pi]$
$N_\sigma$	ضریبی برای تصحیح DT
$\mu_{noise}$	میانگین نویز

$m(t)$

نیرو یا گشتاور (نیوتن یا نیوتن - متر)

۱. پژوهشگر (نویسنده مخاطب)

۲. کارشناسی ارشد

وک<sup>۳</sup> اغتشاشات چرخ عکس‌العملی ایتهاکو<sup>۴</sup> نوع E [۳]، سوک<sup>۵</sup> و همکارانش نیز اغتشاشات چرخ عکس‌العملی HAU [۴] را اندازه‌گیری کرده و مورد پردازش قرار دادند. آنها در کارهایشان برای اندازه‌گیری اغتشاشات از میز اندازه‌گیری نیرو/ گشتاور کیستلر<sup>۶</sup> استفاده کردند. الیاس<sup>۷</sup> در کارش به تأثیر اغتشاشات چرخ عکس‌العملی روی سازه ماهواره به عنوان یک جسم انعطاف‌پذیر پرداخته است [۵]. مسترسون<sup>۸</sup> اغتشاشات چرخ‌های عکس‌العملی را مدل‌سازی کرده و بر روی چرخ‌های عکس‌العملی ایتهاکو نوع B و E پیاده‌سازی کرده است [۶]. مدل وی دارای پنج درجه آزادی است و قادر به شناسایی اغتشاشات (نیرو و گشتاور) در راستای چرخش طیار نیست. آقلااری و همکاران نیز با مدل‌سازی اغتشاشات چرخ عکس‌العملی به بررسی این موضوع پرداختند [۷].

در این مقاله، اغتشاشات چرخ عکس‌العملی به‌طور کامل مدل‌سازی شده (به‌صورت تجربی و تحلیلی و با اضافه‌کردن اغتشاشات راستای Z در مدل) و بر یک نمونه آزمایشگاهی [۸] پیاده‌سازی می‌شود. مدل تحلیلی دارای شش درجه آزادی است و قادر به شناسایی نیروها و گشتاورهای اغتشاشی در راستای سه محور مختصات است. با طراحی و ساخت بستر اندازه‌گیری اغتشاشات چرخ عکس‌العملی، اغتشاشات اندازه‌گیری شده و براساس داده‌های تست، مدل‌های تحلیلی و تجربی برای اغتشاشات ارائه می‌شود. در نهایت با مقایسه مدل‌های ارائه شده با همدیگر و نیز با داده‌های تست، مدل‌ها اعتبارسنجی می‌شوند.

## مدل تجربی

در این مدل فرض بر آن است که اغتشاشات شامل هارمونی‌های مجزا از سرعت دورانی چرخ عکس‌العملی می‌باشد که در آن دامنه هر هارمونی با مربع سرعت دوران چرخ متناسب است [۶].

$$m(t) = \sum_{i=1}^n C_i \Omega^2 \sin(2\pi h_i \Omega t + \alpha_i) \quad (1)$$

در مدل تجربی، داده‌های تست برای یافتن پارامترها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در شکل (۱) نمودار کلی ارائه شده است.

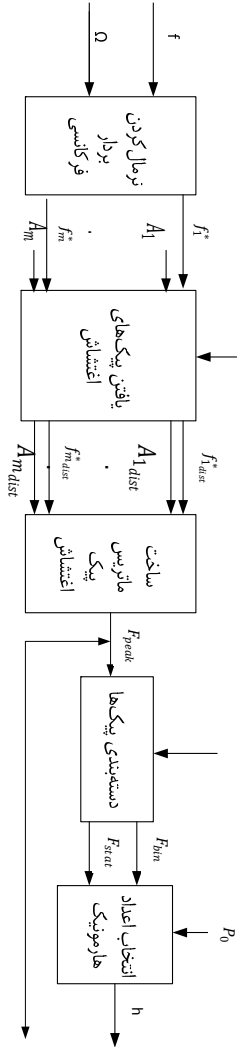
$\sigma_{noise}$	انحراف معیار نویز درصد احتمال
$N_{bin_k}$	تعداد فرکانس موجود در هر دسته
$N_{poss_k}$	حداکثر تعداد فرکانس بی‌بعد ممکن برای یک دسته
$F_x$	نیروی اغتشاشی در راستای X
$F_z$	نیروی اغتشاشی در راستای Z
$F_r$	نیروی اغتشاشی شعاعی
$T_x$	گشتاور اغتشاشی در راستای X
$T_z$	گشتاور اغتشاشی در راستای Z
$M_{tot}$	وزن چرخ طیار، جرم نابالانسیهای استاتیکی و دینامیکی
$M_s$	وزن نابالانسی استاتیکی
$M_d$	وزن نابالانسی دینامیکی
$R$	شعاع چرخ طیار
$r_s$	فاصله جرم نابالانسی استاتیکی از مرکز چرخش چرخ طیار
$R_d$	فاصله جرم نابالانسی دینامیکی از مرکز چرخش چرخ طیار
$Irr$ و $I_{zz}$	ممان اینرسی‌های جرمی چرخ طیار در راستای شعاعی و Z
$h$	فاصله جرم نابالانسی دینامیکی تا محور Y
$k$	سختی فنر
$k\theta$	سختی پیچشی فنر
$c$	میرایی دمپر
$dc$	فاصله دمپر تا محور Y
$kd$	فاصله فنر تا محور Y
$\omega$	مودهای انتقالی و دورانی شعاعی مدل
$\psi, \varphi, \theta$	میزان چرخش مدل به ترتیب در راستاهای X, Y و Z

## مقدمه

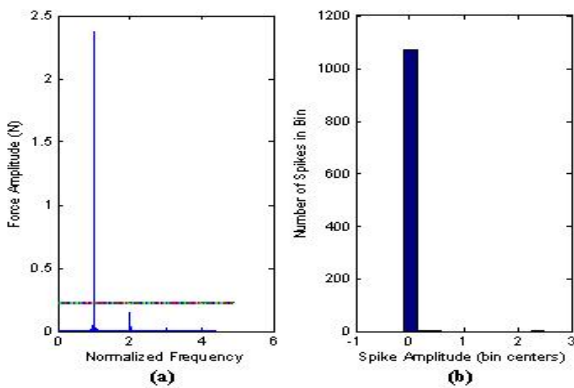
چرخ‌های عکس‌العملی یکی از عملگرهای کنترل وضعیت فعال در ماهواره‌هاست و اغلب برای انجام مانورهای چرخشی دقیق مورد استفاده قرار می‌گیرند. این عملگر معمولاً از یک موتور الکتریکی، بردهای الکتریکی و کنترلی، چرخ طیار و محفظه تشکیل می‌شود [۱]. در یک چرخ عکس‌العملی، منابع ایجاد اغتشاش چهار عامل زیر هستند: (۱) نابالانسی چرخ طیار (۲) اغتشاشات یاتاقان (۳) اغتشاشات موتور الکتریکی (۴) خطاهای راه‌اندازی موتور الکتریکی [۲]. معمولاً نابالانسی‌های چرخ طیار مهم‌ترین عامل تولید اغتشاش هستند که باعث ایجاد نیروها و گشتاورهای اغتشاشی شده و در فرکانس‌های چرخشی آن رخ می‌دهند. اغتشاشات یکی از خصوصیات ذاتی و منحصر به فرد چرخ‌های عکس‌العملی هستند.

3. Weck  
4. ITHACO  
5. Suk  
6. Kistler Force/ Torque Table  
7. Elias  
8. Masterson

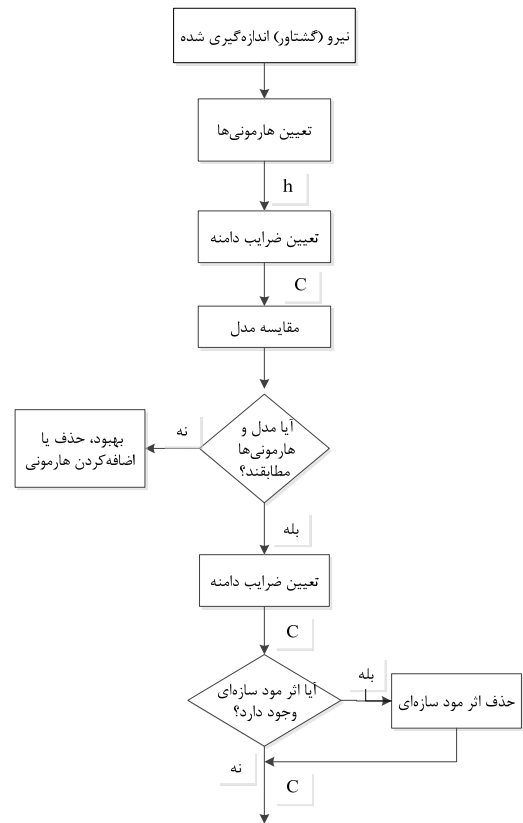
آن به صورت خطی افقی نمایش داده شده است. شکل (۳b) نشان‌دهنده دسته‌بندی نقاط بیشینه نسبی در طیف فرکانسی دامنه است.



شکل ۲- نمودار تعیین اعداد هارمونی در مدل تجربی



شکل ۳- تعیین قله‌های اغتشاش داده‌های تست  $F_z$ ، سرعت ۳۴۰۰ دور در دقیقه



شکل ۱- نمودار تعیین پارامترهای مدل تجربی

### تعیین اعداد هارمونی

در شکل (۲) نمودار تعیین اعداد هارمونی ارائه شده است. بردار فرکانس نسبت به سرعت‌های مختلف دوران نرمال می‌شود و همراه با بردار دامنه برای یافتن پیک‌های اغتشاشی مورد استفاده قرار می‌گیرد. پیک‌های اغتشاشی برای هر سرعت دوران، با توجه به طیف فرکانسی دامنه به دست می‌آیند. بعد از یافتن تمام نقاط بیشینه نسبی در طیف فرکانسی دامنه، این نقاط بر حسب اندازه دامنه دسته‌بندی می‌شوند. از آنجاکه اکثر نقاط بیشینه مربوط به نویز هستند، پس دسته‌ای که بیشترین تعداد را در خود گنجانده به عنوان دسته نویز شناخته می‌شود. برای حذف نویز یک حد مرزی DT مشخص می‌شود. رابطه (۲) این حد مرزی را بر حسب میانگین نویز  $\mu_{noise}$  و انحراف معیار نویز  $\sigma_{noise}$  بیان می‌کند.

$$DT = \mu_{noise} + N_{\sigma} \sigma_{noise} \quad (2)$$

که  $N_{\sigma}$  ضریبی برای تصحیح DT است. مقادیر بیشینه نسبی از طیف دامنه که از DT کمتر باشند به عنوان نویز شناخته شده و از محاسبات حذف می‌شوند. طیف فرکانسی دامنه برای نیروی  $F_z$  در سرعت ۳۴۰۰ دور در دقیقه در شکل (۳a) ارائه شده و حد DT در

دو شرط برای مشاهده و یافتن پیک متناظر با اعداد هارمونی در بین دامنه نیرو یا گشتاور باید بررسی شود. (۱) فرکانس حاصل از ضرب عدد هارمونی و سرعت دوران باید در بازه فرکانسی مطلوب قرار گیرد. (۲) فرکانس بی بعد شده متناظر با آن دامنه در همسایگی کوچکی از عدد هارمونی قرار گیرد. در صورتی که دو شرط فوق با هم برقرار باشند،  $h_i$  در آن سرعت و طیف دامنه متناظر با آن قابل مشاهده است، در غیر این صورت  $h_i$  در آن طیف مشاهده نخواهد شد و در محاسبات مقدار متناظر با دامنه و سرعت برابر با صفر قرار داده می شود. بعد از یافتن دامنه اغتشاشات در همه سرعت های دوران برای یک عدد هارمونی، ضریب دامنه متناظر با آن تعیین می شود. برای محاسبه ضرایب دامنه از روش تقریب حداقل مربعات استفاده شده است. خطای بین داده های اندازه گیری شده  $d_{ij}$  و نتایج مدل  $K\Omega_j^2$  برای ضریب دامنه آمین هارمونی در سرعت  $\lambda_m$  از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$e_{ij} = d_{ij} - K\Omega_j^2 \quad (4)$$

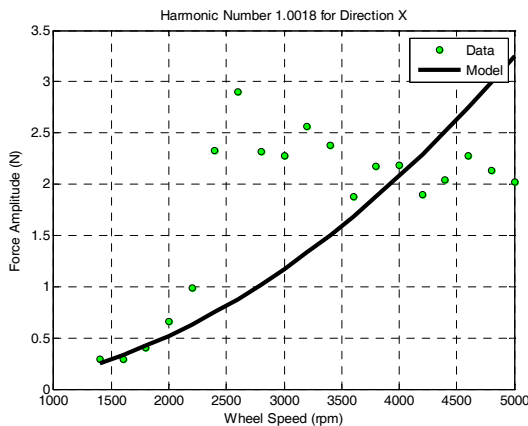
که در آن  $K$  یک عدد مجهول است. مجموع مربع خطا برای سرعت چرخشی  $\lambda_m$  از رابطه (۵) محاسبه می گردد.

$$\sum_{j=1}^m e_{ij}^2 = \sum_{j=1}^m d_{ij}^2 - 2K \sum_{j=1}^m \Omega_j^2 d_{ij} + K^2 \sum_{j=1}^m \Omega_j^4 \quad (5)$$

برای کمینه کردن میزان مجموع مربع خطا، مشتق آن نسبت به  $K$  برابر با صفر قرار داده شده و رابطه (۶) برای  $C_i$  به دست می آید.

$$C_i = \frac{\sum_{j=1}^m d_{ij} \Omega_j^2}{\sum_{j=1}^m \Omega_j^4} \quad (6)$$

نمودارهای دامنه- سرعت در هر هارمونی، نشان دهنده کیفیت همخوانی بین داده های تست و نیروی اغتشاش به دست آمده از  $C_i$  در آن هارمونی است. نمودار سرعت- دامنه برای هارمونی اول نیروی  $F_x$  قبل از حذف اثر مودهای سازه ای در شکل (۵) ارائه شده است.



شکل ۵- نمودار دامنه نیرو - سرعت چرخش در هارمونی اول داده های  $F_x$

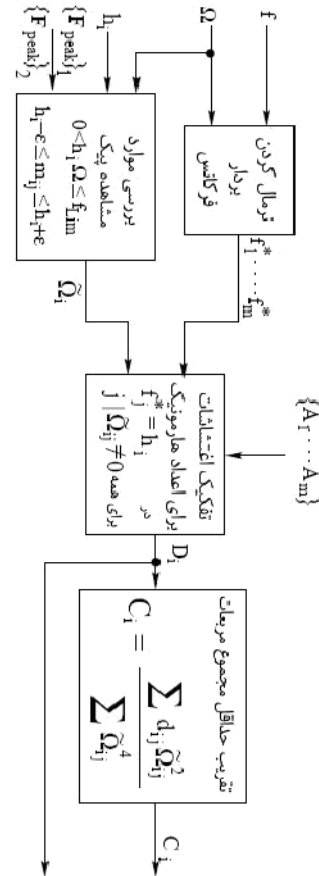
در بعضی مواقع در سرعت های پایین مقدار دامنه اغتشاشات به قدری کوچک است که با دامنه نویز تقریباً از یک مرتبه هستند. این پدیده باعث می شود که در اعداد هارمونی به دست آمده، جواب های غیر قابل قبولی مشاهده شود. برای رفع این مشکل، تدبیری اتخاذ شده است تا پس از مشاهده نمودارها، امکان حذف داده های مربوط به تعدادی از سرعت های پایین میسر شود. قله های اغتشاشی سرعت های مختلف پس از شناسایی، در یک دسته و فرکانس های بی بعد شده متناظر نیز در دسته ای دیگر قرار می گیرند. برای هر دسته، درصد احتمال  $P_o$  به صورت زیر محاسبه می شود.

$$P_o = \frac{N_{bin_k}}{N_{poss_k}} \times 100 \quad (3)$$

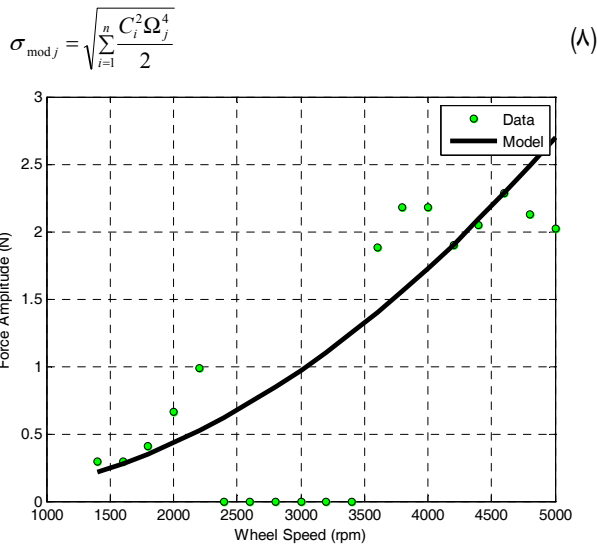
اگر  $P_o$  از یک حد مطلوبی بیشتر باشد، میانگین آن دسته به عنوان عدد هارمونی شناخته می شود.

### محاسبه ضرایب دامنه

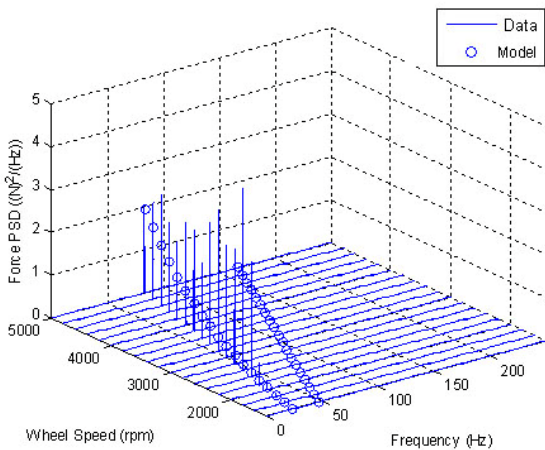
در شکل (۴) نمودار محاسبه ضرایب دامنه ارائه شده است. این دیاگرام نشان می دهد که چگونه با استفاده از نتایج به دست آمده از بخش قبلی و اطلاعات تست، ضرایب دامنه محاسبه می شود.



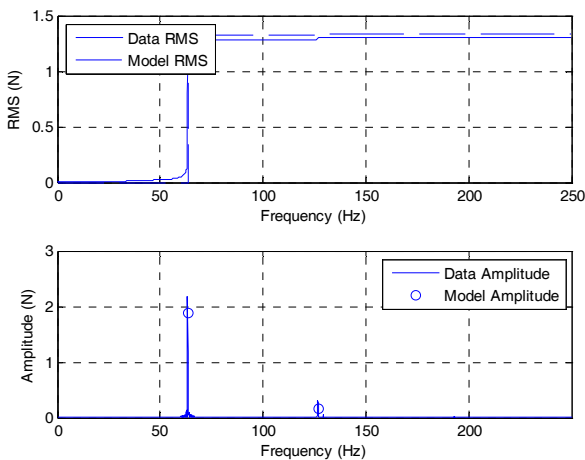
شکل ۴- فلوجارت محاسبه ضرایب دامنه در مدل تجربی



شکل ۶- نمودار دامنه نیرو- سرعت چرخش در هارمونی اول داده‌های  $F_x$  پس از حذف اثر مودهای سازهای



شکل ۷- نمودار چگالی طیف توانی برای مقایسه داده‌های تست  $F_x$  و نتایج مدل  $F_r$



شکل ۸- نمودار ریشه میانگین مربع تجمعی و طیف دامنه برای  $F_r$  در سرعت چرخشی ۳۸۰۰ دور در دقیقه

برای یافتن اعداد هارمونی در جهت شعاعی، از اعداد هارمونی یافته شده برای جهات  $x$  و  $y$  استفاده می‌شود. اگر اعداد هارمونی دو راستا در یک بازه تلورانس ( $\mathcal{E}$ ) قرار بگیرند، میانگین آنها برای جهت شعاعی در نظر گرفته می‌شود. اما اگر عدد هارمونی یکی از راستاها در بازه تلورانس قرار گرفت، همان عدد به عنوان عدد هارمونی راستای شعاعی مد نظر قرار می‌گیرد. برای محاسبه ضرایب دامنه مربوطه در هر دو راستای  $x$  و  $y$ ، دامنه‌های مربوط به هارمونی مورد نظر و سرعت‌های متناظر با آنها یافته شده و با استفاده از رابطه (۶) ضرایب دامنه مجهول در راستای شعاعی محاسبه می‌گردد.

جدول ۱- اعداد هارمونی و ضرایب دامنه برای راستای  $x$ ،  $y$  و شعاعی

جهت مدل	عدد هارمونی	ضریب قبل از حذف
$x$	1.0018	1.2994e-7
$x$	2.0021	1.1614e-8
$y$	1.0017	6.6539e-8
$r$	1.0017	9.8238e-8
$r$	2.0021	9.6844e-9

در جدول (۱) اعداد هارمونی برای داده‌های نیرو در راستای  $x$  و  $y$  ارائه شده است. بر اساس مطالب بالا، عدد هارمونی اول در راستای شعاعی، میانگین اعداد هارمونی در راستای  $x$  و  $y$  بوده و عدد هارمونی دوم راستای شعاعی، همان عدد هارمونی دوم راستای  $x$  است.

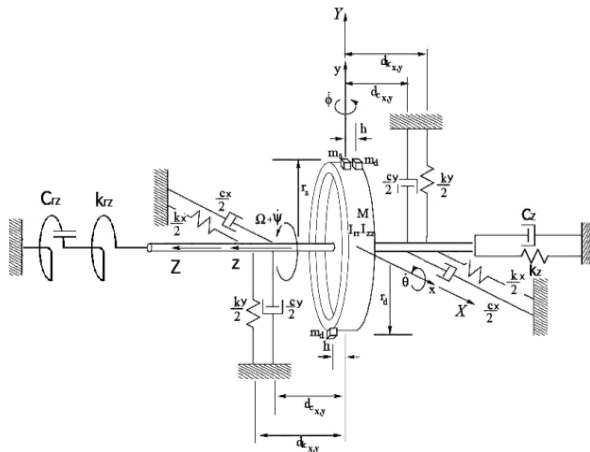
### حذف اثر مودهای سازهای چرخ عکس‌العملی

جایجایی زیاد در فرکانسی نزدیک به فرکانس طبیعی سازه، مود سازهای نام دارد. هدف از ارائه مدل تجربی، بیان رابطه بین دامنه نیروهای (یا گشتاورهای) اندازه‌گیری شده از سازه بر اثر دوران و سرعت دوران است. وجود اثر مود سازهای در داده تجربی می‌تواند خطای قابل توجهی را در پارامترهای مدل تجربی ایجاد کند. طوریکه مقدار بیشتری برای ضرایب دامنه محاسبه شده و در نتیجه مقادیر دامنه محاسبه شده برای مدل نیز بیشتر می‌گردد. همان‌طور که در شکل (۶) نشان داده شده است، با حذف اثر مود سازهای، هم‌خوانی بهتری بین داده‌ها و مدل ایجاد می‌شود.

به‌منظور بررسی نتایج مدل و داده‌های تست از نمودار چگالی طیف توانی، نمودارهای طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی استفاده می‌شود. چگالی طیف توانی مدل تجربی برای چرخ عکس‌العملی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۹ و ۵].

$$S_{\text{mod } j}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i^2 \Omega_j^4}{2} \delta(\omega - h_i \Omega_j) \quad (9)$$

مقدار ریشه میانگین مربع داده‌های تست با ریشه دوم مساحت زیر منحنی چگالی طیف توانی برابر بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۹ و ۵].



شکل ۱۰- شماتیک مدل فیزیکی مجموعه چرخ عکس‌العملی

### چرخ طیار با نابالانسی‌های استاتیکی و دینامیکی

نابالانسی استاتیکی به دلیل عدم تطابق مرکز جرم چرخ طیار و محور چرخش آن حاصل می‌شود. این کار را می‌توان به سادگی و با افزودن یک جرم کوچک  $m_s$  در شعاع  $r_s$  بر روی چرخ طیار انجام داد. نابالانسی دینامیکی نیز به دلیل اختلاف زاویه‌ای محور اینرسی اصلی چرخ طیار با محور چرخش آن به وجود می‌آید. این کار با افزودن دو جرم کوچک  $m_d$  که از نظر شعاعی در مقابل هم و در دو سر مخالف قرار دارد (در شعاع  $r_s$  و با زاویه  $180^\circ$  درجه نسبت به یکدیگر) و انحراف محوری آنها از هم به اندازه  $h$  است، مدل‌سازی می‌شود.

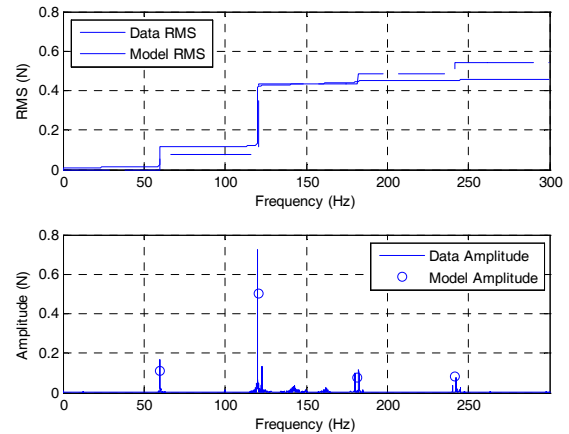
پس از محاسبه انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار خارجی کل انجام شده بر سیستم، انجام ساده‌سازی و خطی‌سازی برای جابه‌جایی‌های نزدیک صفر، معادلات حرکت انتقالی و دورانی برای سیستم به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} M_t & 0 & 0 \\ 0 & M_t & 0 \\ 0 & 0 & M_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -U_{ms} \Omega^2 \sin(\Omega t) \\ U_{ms} \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ A \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} I_\theta & \frac{1}{2} \tilde{I} \sin(2\Omega t) & 0 \\ \frac{1}{2} \tilde{I} \sin(2\Omega t) & I_\phi & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{c_\theta}{\Omega} - \tilde{I} \sin(2\Omega t) & I_{zz} + 2\tilde{I} \cos^2(2\Omega t) & 0 \\ \Omega - I_{zz} - 2\tilde{I} \sin^2(2\Omega t) & \frac{c_\phi}{\Omega} + \tilde{I} \sin(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_\theta & 0 & 0 \\ 0 & k_\phi & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{md} \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ U_{md} \Omega^2 \sin(\Omega t) \\ B \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{Bmatrix}$$



شکل ۹- نمودار ریشه میانگین مربع تجمعی و طیف دامنه برای Fz در سرعت چرخشی ۳۸۰۰ دور در دقیقه

در نمودارهای شکل‌های (۸) و (۹) بهتر می‌توان دامنه‌های مربوط را مقایسه کرد. هر افزایش ناگهانی در نمودار ریشه میانگین مربع تجمعی، همراه با وقوع یک قله در بازه طیف دامنه است.

### مدل تحلیلی

مدل تجربی به دلیل حذف اثر مدهای سازه‌ای قادر به مدل‌سازی آن نیست. برای مدل‌سازی این اثر در چرخ عکس‌العملی مدل تحلیلی ارائه می‌شود که تنها قادر به مدل کردن اغتشاشات ایجاد شده در فرکانس‌های چرخشی چرخ طیار است. در این مدل چرخ عکس‌العملی به صورت یک چرخ طیار چرخان بالانس شده در نظر گرفته می‌شود. با اضافه کردن نامیزانی استاتیکی و دینامیکی به صورت یک جرم متمرکز، سفتی و میرایی در شافت و یاتاقان‌ها به صورت فنر و دمپر خطی، مدهای سازه‌ای مدل شده و با استفاده از روش انرژی معادلات حرکت به دست می‌آیند. این مدل دارای شش درجه آزادی می‌باشد که در شکل (۱۰) نمایش داده شده است. برای محاسبه معادلات کلی حرکت دو حالت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### چرخ طیار بالانس شده

با استفاده از روش انرژی و انجام ساده‌سازی‌های لازم، معادلات حرکت به دست آمده و با حل آنها، مدهای انتقالی و دورانی شعاعی به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\omega^2 = \frac{k}{M_t} \quad (9)$$

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\dot{\psi} I_{zz}}{2I_{rr}} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\psi} I_{zz}}{2I_{rr}}\right)^2 + \frac{k_\theta}{I_{rr}}} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} M_r & 0 & 0 \\ 0 & M_r & 0 \\ 0 & 0 & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n C_{rad_i} \Omega^2 \sin(h_{rad_i} \Omega t) \\ \sum_{i=1}^n C_{rad_i} \Omega^2 \cos(h_{rad_i} \Omega t) \\ \sum_{i=1}^n C_{ax_i} \Omega^2 \sin(h_{ax_i} \Omega t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} I_\theta & \frac{1}{2} \tilde{I} \sin(2\Omega t) & 0 \\ \frac{1}{2} \tilde{I} \sin(2\Omega t) & I_\phi & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_\theta}{\Omega} - \tilde{I} \sin(2\Omega t) & I_{zz} + 2\tilde{I} \cos(2\Omega t) & 0 \\ -I_{zz} - 2\tilde{I} \sin^2(2\Omega t) & \frac{c_\phi}{\Omega} + \tilde{I} \sin(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & c_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\theta & 0 & 0 \\ 0 & k_\phi & 0 \\ 0 & 0 & k_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n C_{tor_i} \Omega^2 \cos(h_{tor_i} \Omega t) \\ \sum_{i=1}^n C_{tor_i} \Omega^2 \sin(h_{tor_i} \Omega t) \\ \sum_{i=1}^m C_{ax_i} \Omega^2 \sin(h_{ax_i} \Omega t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

که در آن  $h_i$  و  $C_i$  اعداد هارمونی و ضرایب دامنه به‌دست آمده از مدل تجربی برای هر راستا هستند.

در معادلات حرکت (۱۴ و ۱۵)، برخی از پارامترها با توجه به داده‌های فیزیکی و ابعاد هندسی چرخ‌طیار تعیین می‌شوند اما برخی دیگر از پارامترها از بررسی داده‌های تست محاسبه می‌شوند.

با مقایسه دامنه نیروی هم‌فرکانس با دوران چرخ عکس‌العملی ( $h=1$ ) در رابطه‌های (۱۱) و (۱۴) و نیز دامنه گشتاور هم‌فرکانس با دوران چرخ عکس‌العملی ( $h=1$ ) در رابطه‌های (۱۲) و (۱۵) می‌توان مقدار  $U_{ms}$  و  $U_{md}$  را به‌صورت روابط زیر محاسبه کرد:

$$U_{ms} = m_s r_s^2 = C_{rad_i} \quad (16)$$

$$U_{md} = 2m_d h r_d^2 = C_{tor_i} \quad (17)$$

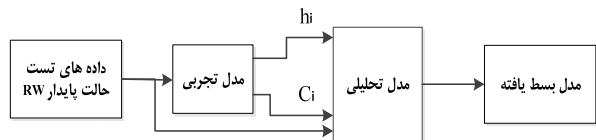
از آنجاکه هرگاه هارمونی اغتشاشی در فرکانسی برابر با فرکانس طبیعی سازه قرار بگیرد، یک افزایش ناگهانی در دامنه اغتشاش روی می‌دهد، می‌توان با جستجوی این افزایش‌ها در دامنه اغتشاش، مقدار فرکانس طبیعی را تعیین کرد. فرکانس میانگین نقاطی که در بیشترین تراکم قرار داشته باشند به عنوان فرکانس طبیعی مود انتقالی در نظر گرفته می‌شود.

که در معادلات حرکت بالا:

$$\begin{aligned} M_{tot} &= M + m_s + m_d, \quad I_\theta = I_{rr} + 2m_d h^2 + \tilde{I} \cos^2(\psi t) \\ I_\phi &= I_{rr} + 2m_d h^2 + \tilde{I} \sin^2(\psi t), \quad \tilde{I} = 2m_d r_d^2 + m_s r_s^2 \\ K_\theta &= K d_k^2, \quad C_\theta = C d_c^2, \quad I_{rr} = \frac{1}{2} MR^2, \quad I_{zz} = \frac{1}{4} MR^2 \end{aligned} \quad (13)$$

### مدل تحلیلی بسط یافته

همان‌طور که گفته شد، مدل تحلیلی تنها قادر است تا نیروها و گشتاورهایی را مدل کند که فرکانسی برابر با فرکانس دوران چرخ عکس‌العملی داشته باشند. اما در حالت کلی نیروها و گشتاورهای اغتشاشی امکان وقوع در فرکانس‌هایی برابر با ضرایب مختلف از فرکانس دوران چرخ را دارند. این مسئله در رابطه (۱) در مدل تجربی در نظر گرفته شده است ولی مدل تحلیلی به تنهایی قادر به مدل کردن اغتشاشات هارمون‌های بالاتر نیست. از این رو از پارامترهای به‌دست آمده از مدل تجربی استفاده می‌شود تا یک مدل تحلیلی بسط‌یافته ایجاد شود که در آن همه هارمونی‌های اغتشاشات به‌صورت تحلیلی مد نظر قرار گیرند. شکل (۱۱) به صورت شماتیک ارتباط بین مدل تجربی و مدل تحلیلی را برای ایجاد مدل تحلیلی بسط یافته نشان می‌دهد.



شکل ۱۱- ارتباط مدل تجربی و مدل تحلیلی برای ایجاد مدل بسط یافته

اغتشاشاتی که در فرکانس‌هایی به غیر از فرکانس دوران چرخ طیار روی می‌دهند معمولاً منشأی به غیر از نامیزانی چرخ طیار دارند. این منشأ می‌تواند اغتشاشات موتور، خرابی یاتاقان‌ها یا دینامیک روغن کاری باشد [۱۰]. در نظر گرفتن رفتار دینامیکی همه اجزای مجموعه چرخ عکس‌العملی، به یک مدل پیچیده نیاز دارد. بنابراین برای سادگی از پارامترهای مدل تجربی استفاده می‌شود تا فرکانس و دامنه سایر اغتشاشات هارمونیک (بدون مدل‌سازی منشأ فیزیکی آنها) نیز در مدل تحلیلی وارد شود. معادلات حرکت مدل بسط یافته، با اضافه کردن سایر اغتشاشات به‌صورت توابع نیروی هارمونیک در فرکانس‌های  $h_i \Omega$  و با دامنه  $C_i \Omega^2$  در سمت راست معادله به‌دست می‌آید. معادلات حرکت انتقالی و دورانی با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲) به‌صورت روابط (۱۴) و (۱۵) محاسبه می‌شود.

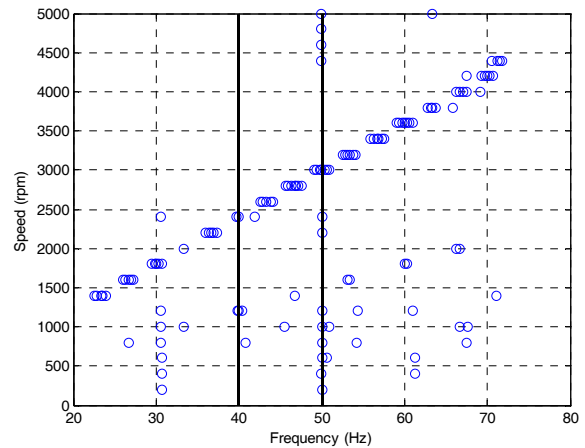


متفاوتی برای فرکانس طبیعی وجود خواهد داشت. برای این منظور با توجه به تابع فرکانس طبیعی از سرعت دوران و نیز حدس اولیه، در همه سرعت‌های دوران چرخ عکس‌العملی بازه‌ای برای یافتن بیشینه‌های دامنه در نظر گرفته شده و سپس با برآزش تابع فرکانس طبیعی بر حسب سرعت، مقدار تصحیح شده فرکانس طبیعی در سرعت دوران صفر (فرکانس طبیعی مودهای دورانی) محاسبه می‌شود. با یافتن فرکانس‌های طبیعی و با استفاده از روابط (۹) و (۱۰) می‌توان  $k_\theta$ ،  $k_\phi$  و  $d_k$  را محاسبه کرد. اما این روش برای محاسبه سفتی‌ها از آنجا که می‌تواند با افزایش دامنه‌ها بر اثر اعداد هارمونی همراه شود، مقدار خطایی گریزناپذیر در خود دارد. خطای مذکور را می‌توان با مقایسه نتایج مدل بسط یافته و نتایج اندازه‌گیری رفع کرد. بدین صورت مقادیری که در آن بیشترین هم‌خوانی بین نتایج مدل بسط یافته و تست روی می‌دهد به عنوان مقادیر پارامتر سفتی در نظر گرفته شده و مقادیر اولیه تصحیح می‌شوند.

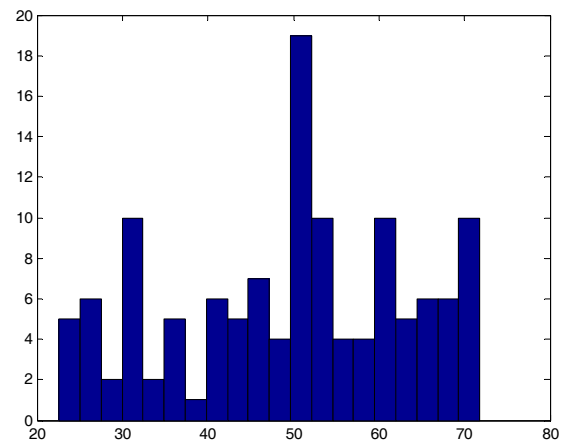
برای به دست آوردن پارامترهای میرایی سیستم، ابتدا یک مقدار برای میرایی حدس زده شده و نتایج مدل تحلیلی و داده‌های تست مقایسه می‌شوند. سپس پارامترهای میرایی آنقدر تغییر می‌کند تا همپوشانی مناسبی بین نتایج مدل و داده‌های تست برقرار شود. با یافتن پارامترهای میرایی می‌توان  $d_c$  را محاسبه کرد. پارامترهای محاسبه شده برای مدل تحلیلی بسط یافته چرخ عکس‌العملی آزمایشگاهی در [۱۱] ارائه شده است.

### بستر تست

بستر تست برای اندازه‌گیری اغتشاشات متشکل از میز صلب، صفحه پایه تراز، حسگر نیرو/ گشتاور سنج شش محوره، پایه‌های اتصال حسگر و صفحه واسط است. حسگر شش محوره، ساخت شرکت ATI بوده (۴۵ مینی) و قادر به اندازه‌گیری نیرو و گشتاور در سه جهت  $x$ ،  $y$  و  $z$  است [۱۲]. به منظور اتصال حسگر به صفحه واسط و نیز به صفحه تراز، دو پایه برای آن طراحی و ساخته شد. پایه اتصال بالایی باید در عین داشتن استحکام لازم، وزن کمی داشته باشد تا نیروی زاید بیش از حد بر حسگر وارد نشود. صفحه تراز مکانی است که مجموعه چرخ عکس‌العملی، صفحه واسط و حسگر روی آن نصب شده و مجموعه کلاً روی میز صلب نصب می‌شوند. با تعبیه سه پیچ تراز، این صفحه قابلیت تراز شدن در روی میز را دارد. به منظور کاهش نویز و نیز ارضاکردن شرایط اتصال گیردار مجموعه، میز نصب باید کاملاً صلب باشد. چرخ عکس‌العملی از طریق صفحه واسط بر روی حسگر سوار می‌شود (شکل ۱۵).

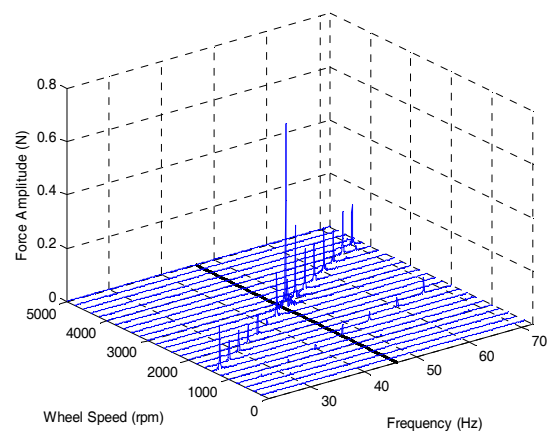


شکل ۱۲- نحوه قرارگیری نقاط با دامنه بیشینه برای داده‌های نیروی  $F_z$



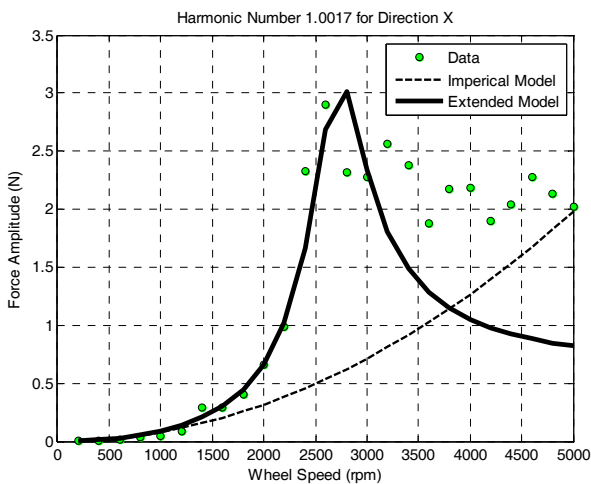
شکل ۱۳- نمودار ستونی توزیع نقاط بیشینه دامنه در فرکانس‌های مختلف

برای نیروی  $F_z$

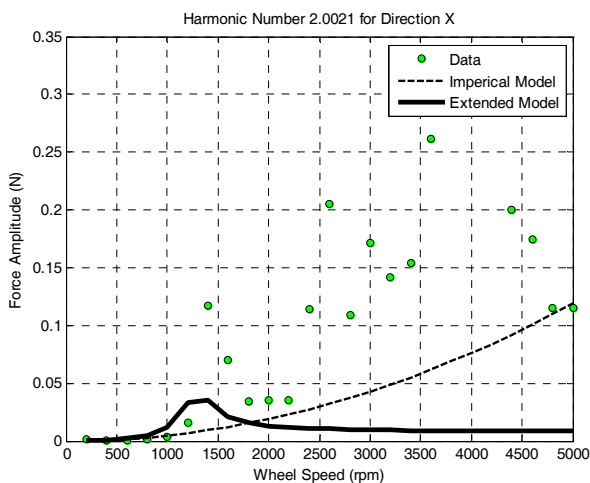


شکل ۱۴- نمایش فرکانس طبیعی مود انتقالی شعاعی سازه‌ای در نمودار آبهاری  $F_z$

روش استفاده شده برای یافتن فرکانس طبیعی مودهای انتقالی نمی‌تواند برای یافتن فرکانس طبیعی مودهای دورانی شعاعی به کار رود، زیرا برای هر سرعت دوران چرخ طیار مقدار



شکل ۱۶- نمودار مربوط به دامنه نیروی شعاعی  $F_x$  برحسب سرعت دوران برای عدد هارمونی ۱/۰۰۱۷

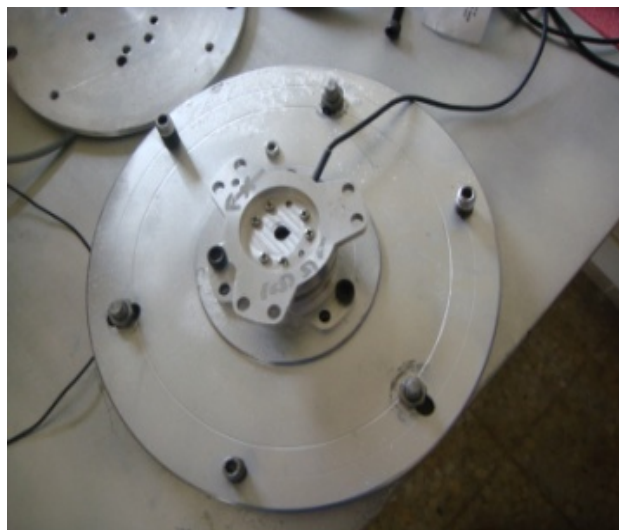


شکل ۱۷- نمودار مربوط به دامنه نیروی شعاعی  $F_x$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی ۲/۰۰۲۱

شکل (۱۸) نمودار آبشاری چگالی طیف توانی را برای نیروی  $F_x$  نشان می‌دهد. خطوط نمایانگر داده‌های تست و دایره‌ها مقادیر برآورد شده توسط مدل بسط‌یافته را نشان می‌دهند. در این نمودار اعداد هارمونی که توسط مدل تجربی به مدل بسط یافته منتقل شده‌اند به خوبی در نمودار مشهود هستند. در مورد اندازه چگالی طیف توانی نیز می‌توان گفت که برای هارمونی یک به خوبی قابل مشاهده است و هارمونی دیگر به علت کم بودن نسبتاً قابل مشاهده نیست.

شکل‌های (۱۹) و (۲۰) طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی را برای دو سرعت دوران ۳۰۰۰ دور در دقیقه و ۴۲۰۰ دور در دقیقه نشان می‌دهند.

اندازه‌گیری اغتشاشات به وسیله حسگری که قابلیت اندازه‌گیری نیرو و گشتاور را در راستای سه محور مختصاتی با نرخ ۱۰ کیلوهرتز دارد انجام می‌شود. اندازه‌گیری در سرعت‌های چرخشی ثابت و مجزا و در حالت یکنواخت صورت می‌گیرد بدین صورت که پس از شروع به کار چرخ عکس‌العملی و کنترل سرعت چرخ‌طیار در یک سرعت خاص، اندازه‌گیری اغتشاشات شروع می‌شود. این عمل در این پروژه با پله‌های ۲۰۰ دور در دقیقه و در بازه ۵۰۰۰-۰ دور در دقیقه انجام شده است. داده‌های هر سرعت در فایل‌های جداگانه ذخیره می‌شوند.



شکل ۱۵- بستر تست ساخته شده برای اندازه‌گیری اغتشاشات عملگر

## نتایج عددی

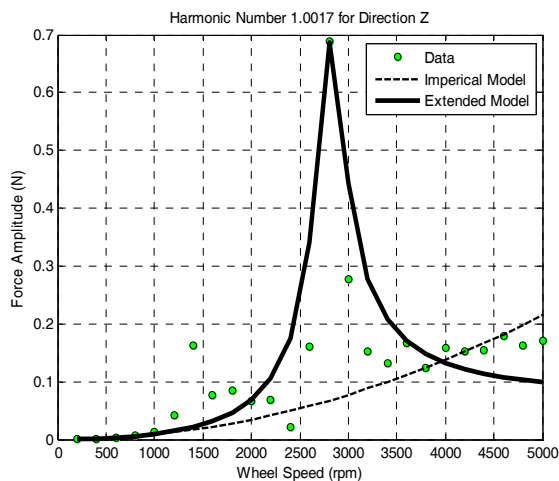
در این قسمت نتایج عددی مربوط به دو مدل تجربی و تحلیلی بسط‌یافته و نیز نتایج تست برای نیروها و گشتاورهای اغتشاشی ارائه شده و با همدیگر مقایسه می‌شوند.

در شکل (۱۶) نمودار مربوط به دامنه نیروی شعاعی  $F_x$  برحسب سرعت دوران برای عدد هارمونی ۱/۰۰۱۷ و شکل (۱۷) برای عدد هارمونی ۲/۰۰۲۱ ارائه شده است.

همان‌طور که در نمودار شکل (۱۶) مشاهده می‌شود مدل بسط‌یافته توانسته است به خوبی اثر مود سازه‌ای را مدل کند. اختلاف زیادی بین داده‌های اندازه‌گیری شده تست و مدل بسط یافته در سرعت‌های بالا مشاهده می‌شود. این اختلاف می‌تواند ناشی از مشکلات تست باشد زیرا که داده‌ها در این قسمت روند مناسبی را دنبال نمی‌کنند. در شکل (۱۷) مشاهده می‌شود که مدل‌های تجربی و تحلیلی بسط‌یافته نتوانسته‌اند به خوبی با نتایج تست در عدد هارمونی ۲/۰۰۲۱ تطابق داشته باشند.

با توجه به شکل (۱۹) مدل بسط یافته توانسته است برای سرعت ۳۰۰۰ دور در دقیقه مقدار نزدیک‌تری به نتایج تست را نسبت به مقادیر مدل تجربی داشته باشد در حالی که در شکل (۲۰) برای سرعت ۴۲۰۰ دور در دقیقه مدل تجربی به نتایج تست نزدیک‌تر است. این مسئله می‌تواند ناشی از این باشد که نتایج تست در سرعت بالا روند مناسبی ندارد و عواملی دیگر بر پاسخ تأثیر گذاشته‌اند.

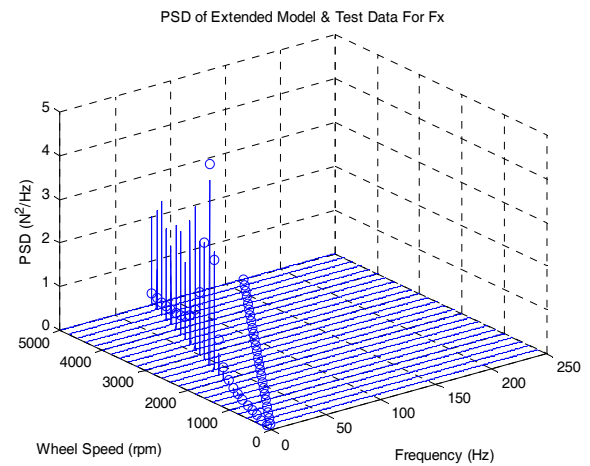
در شکل‌های (۲۱) تا (۲۵) نمودارهای مربوط به دامنه نیروی محوری  $F_z$  بر حسب سرعت دوران برای پنج عدد هارمونی ارائه شده است. با توجه به نمودار هارمونی اول در شکل (۲۱) مشاهده می‌شود که مدل بسط یافته توانسته است به خوبی اثر مود سازه‌ای را مدل کند. در اینجا نیز اختلافی بین داده‌های اندازه‌گیری شده تست و مدل بسط یافته در برخی سرعت‌ها مشاهده می‌شود که می‌تواند ناشی از مشکلات تست باشد.



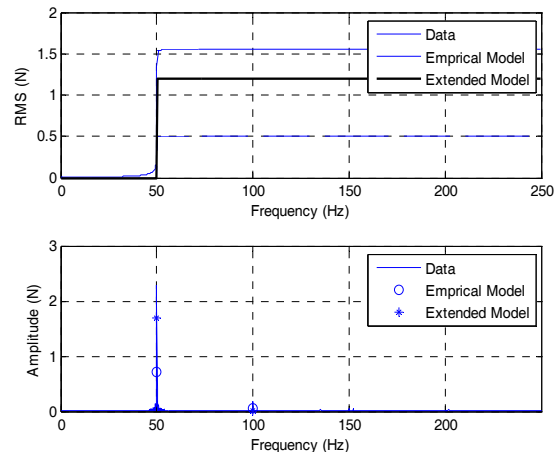
شکل ۲۱- مربوط به دامنه نیروی محوری  $F_z$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی ۱/۰۰۱۷

با توجه به شکل‌های (۲۲) تا (۲۵) مشاهده می‌شود که مدل تحلیلی بسط یافته نتوانسته است هارمونی‌های بالا را به خوبی مدل کند. مدل تجربی نتایج بهتری را در این اعداد هارمونی نشان می‌دهد. شکل (۲۶) نیز تابع چگالی طیفی (چگالی طیف توانی) داده‌های اندازه‌گیری شده و مدل بسط یافته برای نیروی  $F_z$  نشان می‌دهد.

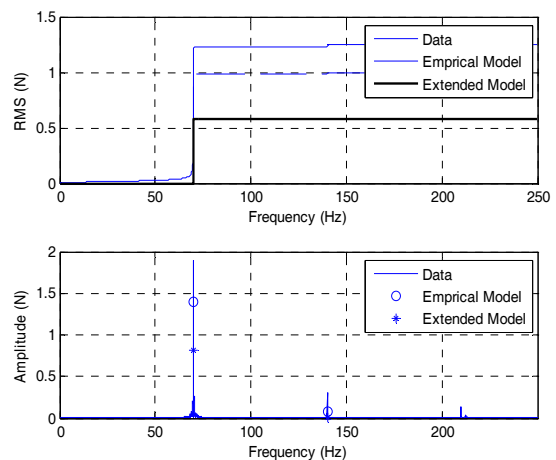
شکل‌های (۲۷) و (۲۸) نمودار طیف دامنه و RMS تجمی را به ترتیب برای سرعت‌های ۲۸۰۰ دور در دقیقه و ۱۸۰۰ دور در دقیقه برای نیروی  $F_z$  را نشان می‌دهند. در سرعت ۲۸۰۰ دور در دقیقه مدل بسط یافته به نتایج تست نزدیک‌تر بوده و برآورد بهتری را نسبت به مدل تجربی دارد ولی در سرعت ۱۸۰۰ دور در دقیقه مدل تجربی برآورد بهتری را نشان می‌دهد. روند نامناسب نتایج تست می‌تواند عامل این اختلاف باشد.



شکل ۱۸- تابع چگالی طیفی (چگالی طیف توانی) داده‌های اندازه‌گیری شده و مدل بسط یافته برای نیروی  $F_x$

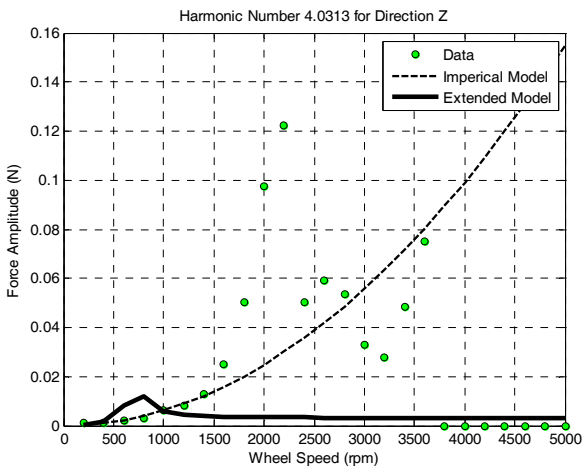


شکل ۱۹- نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمی برای نیروی  $F_x$  در سرعت دوران ۳۰۰۰ دور در دقیقه

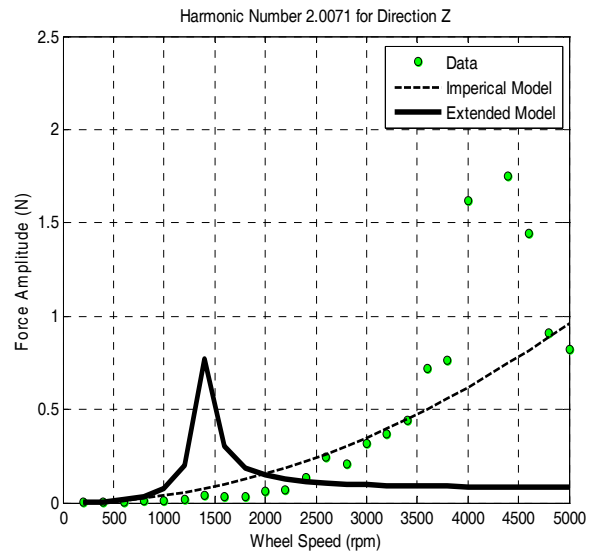


شکل ۲۰- نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمی برای نیروی  $F_x$  در سرعت دوران ۴۲۰۰ دور در دقیقه

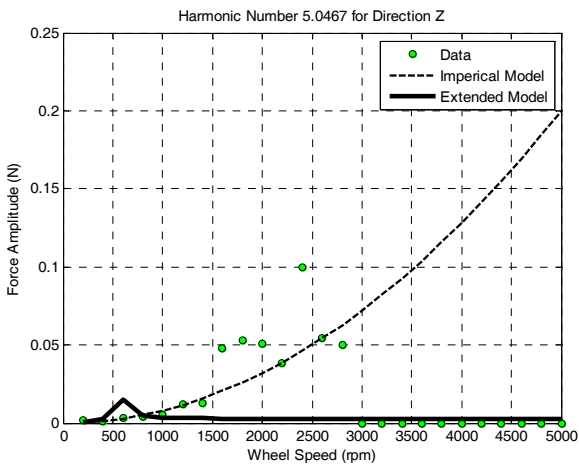
شکل (۲۹) نمودار مربوط به دامنه گشتاور  $T_x$  بر حسب سرعت دوران را برای عدد هارمونی  $1/0.018$  و شکل (۳۰) برای عدد هارمونی  $2/0.036$  نشان می‌دهد.



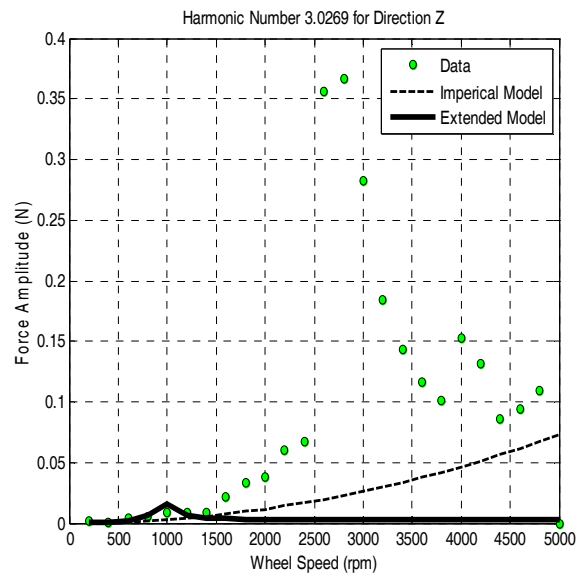
شکل ۲۴ - نمودار مربوط به دامنه نیروی محوری  $F_z$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی  $4/0.313$



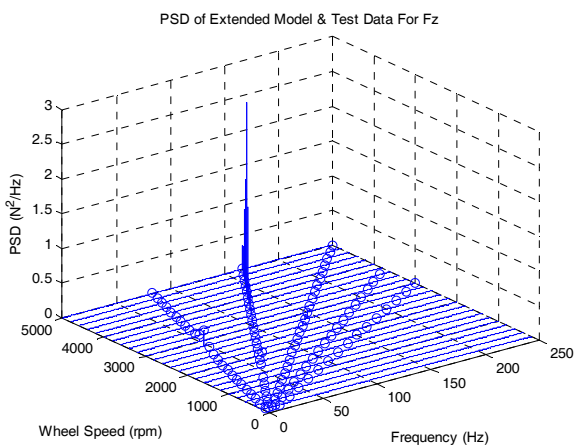
شکل ۲۲ - نمودار مربوط به دامنه نیروی محوری  $F_z$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی  $2/0.071$



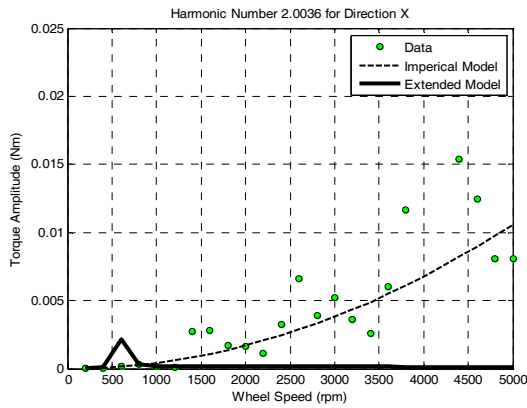
شکل ۲۵ - مربوط به دامنه نیروی محوری  $F_z$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی  $5/0.467$



شکل ۲۳ - مربوط به دامنه نیروی محوری  $F_z$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی  $3/0.269$



شکل ۲۶ - تابع چگالی طیفی (چگالی طیف توانی) داده‌های اندازه‌گیری شده و مدل بسط‌یافته برای نیروی  $F_z$

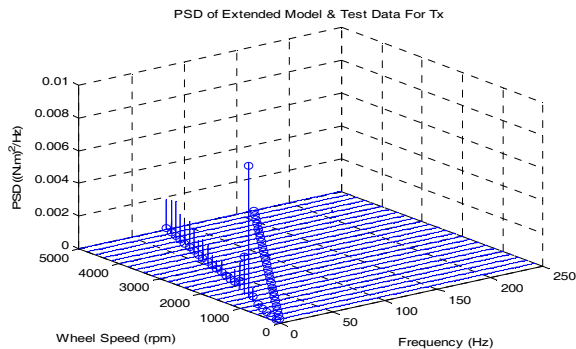


شکل ۳۰- نمودار مربوط به دامنه گشتاور  $T_x$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی ۲/۰۰۳۶

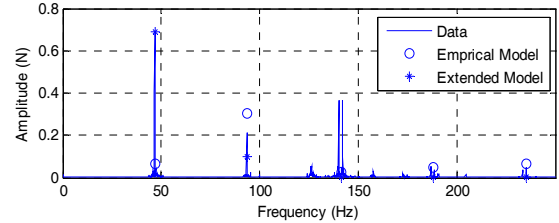
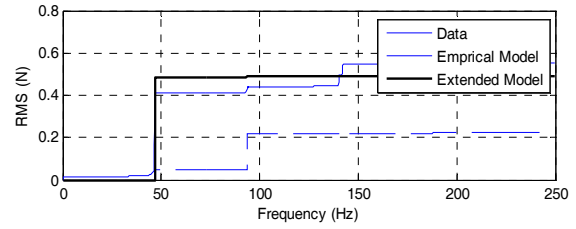
شکل (۳۱) نمودار آبشاری چگالی طیف توانی را برای نیروی  $F_z$  نشان می‌دهد. خطوط نمایانگر داده‌های تست و دایره‌ها مقادیر برآورد شده توسط مدل بسط یافته را نشان می‌دهند.

در نمودار شکل (۳۱) اعداد هارمونی که از مدل تجربی اخذ شده‌اند به خوبی نمایش داده شده‌اند ولی مقادیر چگالی طیف توانی مدل بسط یافته به مقادیر تست نزدیک نیست. شکل‌های (۲۷) و (۲۸) نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی را به ترتیب برای سرعت‌های ۲۸۰۰ دور در دقیقه و ۱۸۰۰ دور در دقیقه را برای نیروی  $F_z$  نشان می‌دهند. در سرعت ۲۸۰۰ دور در دقیقه مدل بسط یافته به نتایج تست نزدیک‌تر بوده و برآورد بهتری را نسبت به مدل تجربی دارد ولی در سرعت ۱۸۰۰ دور در دقیقه مدل تجربی برآورد بهتری را نشان می‌دهد. روند نامناسب نتایج تست می‌تواند عامل این اختلاف باشد.

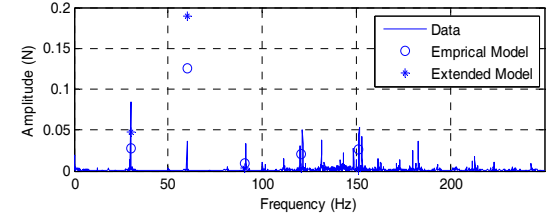
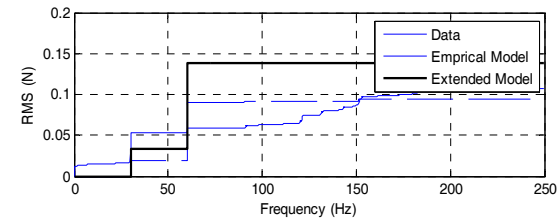
باتوجه به نمودار هارمونی ۱/۰۰۱۸ مشاهده می‌شود که مدل بسط یافته توانسته است به خوبی اثر مود سازه‌ای را مدل کند. در اینجا نیز اختلافی بین داده‌های اندازه‌گیری شده تست و مدل بسط یافته در سرعت‌های بالا مشاهده می‌شود. این اختلاف می‌تواند ناشی از مشکلات تست باشد. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که عواملی بر نتایج تست مؤثر بوده‌اند که در مدل تحلیلی بسط یافته در نظر گرفته نشده‌اند.



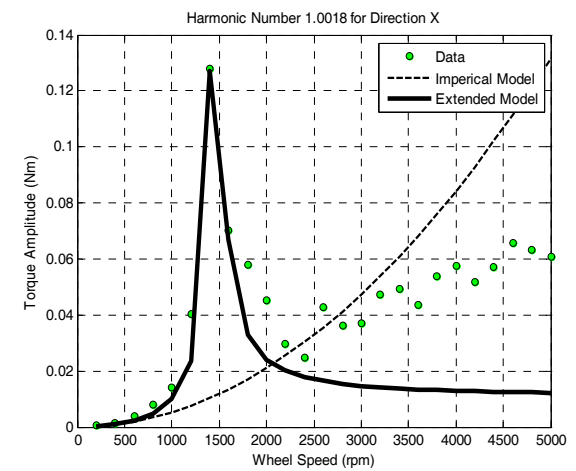
شکل ۳۱- تابع چگالی طیفی (چگالی طیف توانی) داده‌های اندازه‌گیری شده و مدل بسط یافته برای گشتاور  $T_x$



شکل ۲۷- نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی برای نیروی  $F_z$  در سرعت دوران ۲۸۰۰ دور در دقیقه



شکل ۲۸- نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی برای نیروی  $F_z$  در سرعت دوران ۱۸۰۰ دور در دقیقه



شکل ۲۹- نمودار مربوط به دامنه گشتاور  $T_x$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی ۱/۰۰۱۸

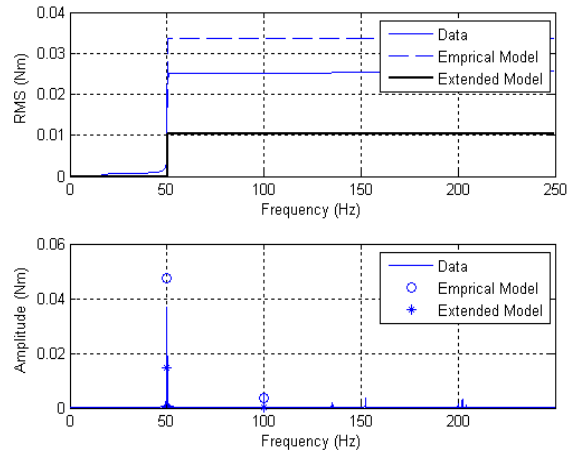
شکل‌های (۳۲) و (۳۳) نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی را به ترتیب برای سرعت‌های ۳۰۰۰ دور در دقیقه و ۱۸۰۰ دور در دقیقه را برای نیروی گشتاور  $T_x$  را نشان می‌دهند.

در سرعت ۱۸۰۰ دور در دقیقه مدل بسط‌یافته توانسته است تخمین مناسبی را از داده‌های اندازه‌گیری شده داشته باشد ولی تخمین مدل تجربی در سرعت ۳۰۰۰ دور در دقیقه بهتر است. با توجه به روند داده‌های تست و اختلاف با مدل‌های تجربی و تحلیلی بسط‌یافته در سرعت‌های مختلف این نتایج قابل پیش‌بینی است.

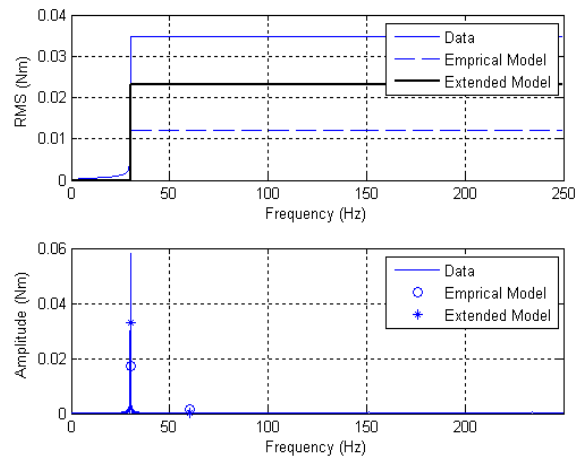
شکل‌های (۳۴) تا (۳۶) نمودار مربوط به دامنه گشتاور  $T_z$  را برحسب سرعت دوران برای سه عدد هارمونی نشان می‌دهد.

باتوجه به نمودار هارمونی  $1/0.43$  مشاهده می‌شود که مدل بسط‌یافته توانسته است به خوبی اثر مود سازه‌ای را مدل کند.

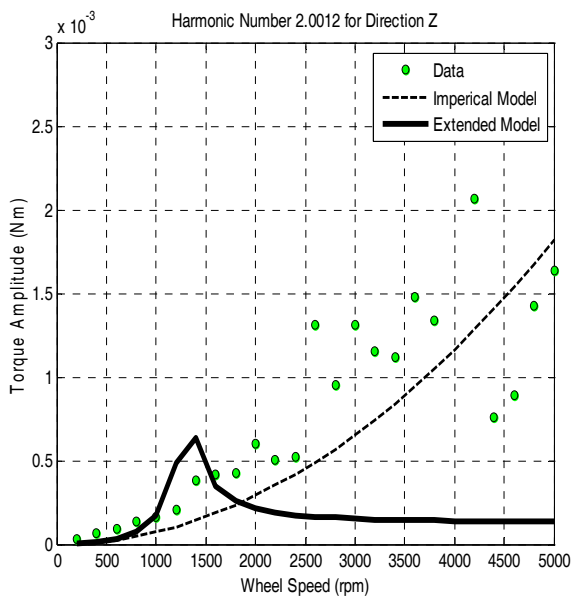
شکل (۳۷) نمودار آبخاری چگالی طیف توانی را برای گشتاور  $T_z$  نشان می‌دهد. خطوط نمایانگر داده‌های تست و دایره‌ها مقادیر برآورد شده توسط مدل بسط‌یافته را نشان می‌دهند. اعداد هارمونی که از مدل تجربی اخذ شده‌اند به خوبی در این نمودار نشان داده شده‌اند ولی مقادیر چگالی طیف توانی مدل بسط‌یافته در برخی نقاط با داده‌های اندازه‌گیری شده اختلاف دارند.



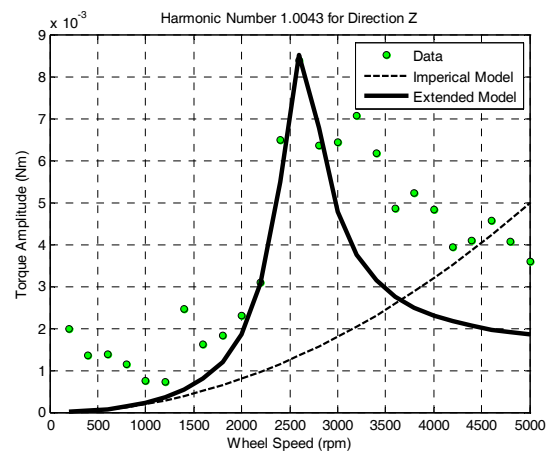
شکل ۳۲- نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی برای گشتاور  $T_x$  در سرعت دوران در دقیقه ۳۰۰۰



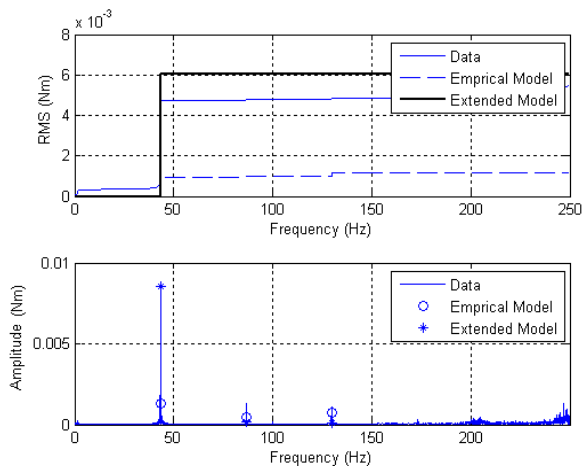
شکل ۳۳- نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی برای گشتاور  $T_x$  در سرعت دوران ۱۸۰۰ دور در دقیقه



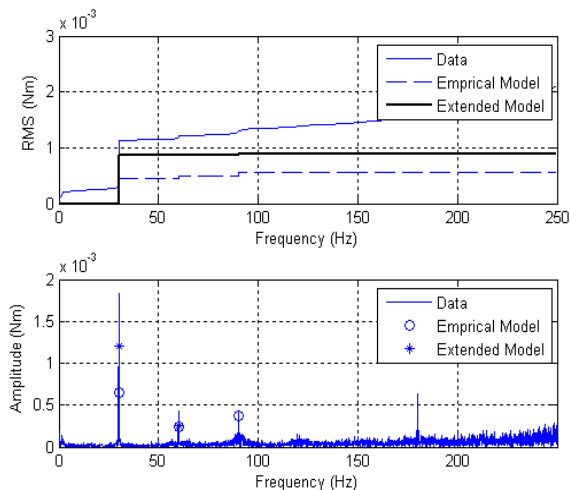
شکل ۳۵- نمودار مربوط به دامنه گشتاور  $T_z$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی  $2/0.12$



شکل ۳۴- نمودار مربوط به دامنه گشتاور  $T_z$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی  $1/0.43$



شکل ۳۸- نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی برای گشتاور  $T_z$  در سرعت دوران ۲۶۰۰ دور در دقیقه

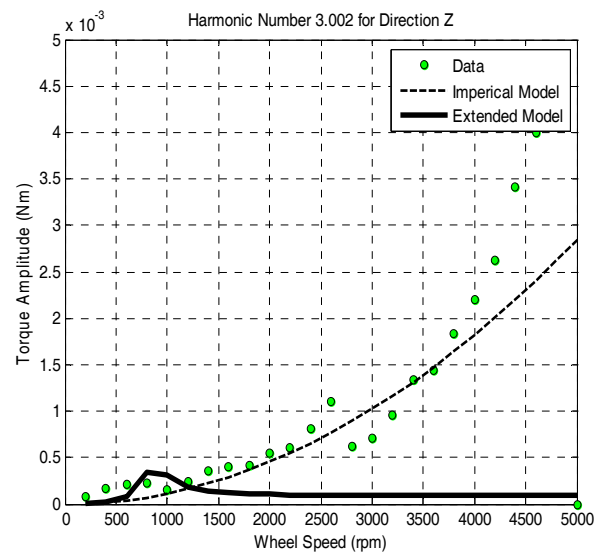


شکل ۳۹- نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی برای گشتاور  $T_z$  در سرعت دوران ۱۸۰۰ دور در دقیقه

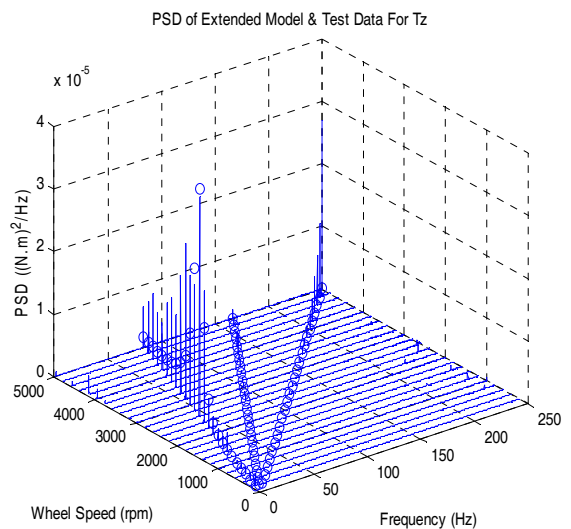
در مجموع می‌توان گفت که مدل تحلیلی بسط یافته هارمونی‌های اصلی را به خوبی مدل می‌کند ولی رفتار هارمونی‌های بالاتر را نمی‌تواند به صورت دقیق پیش‌بینی کند. مشکلات عملی در تست باعث شده است که داده‌های اندازه‌گیری در دو راستای شعاعی در بسیاری از سرعت‌های بالا روند مناسبی را نداشته باشند.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، اغتشاشات ناشی از نابالانسی‌های چرخ عکس‌العملی در راستای هر سه محور مدل‌سازی شده و سپس اغتشاشات پیش‌بینی شده توسط مدل‌ها با اغتشاشات اندازه‌گیری شده یک عملگر نمونه آزمایشگاهی مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. برای



شکل ۳۶- نمودار مربوط به دامنه گشتاور  $T_z$  بر حسب سرعت دوران برای عدد هارمونی ۳/۰۰۲



شکل ۳۷- تابع چگالی طیفی (چگالی طیف توانی) داده‌های اندازه‌گیری شده و مدل بسط یافته برای گشتاور  $T_z$

شکل‌های (۳۸) و (۳۹) نمودار طیف دامنه و ریشه میانگین مربع تجمعی را برای گشتاور  $T_z$  به ترتیب در سرعت‌های دوران ۲۶۰۰ دور در دقیقه و ۱۸۰۰ دور در دقیقه نشان می‌دهند. در سرعت ۲۶۰۰ دور در دقیقه مدل بسط یافته تخمین بهتری از داده‌های تست نسبت به مدل تجربی دارد. در سرعت ۱۸۰۰ دور در دقیقه هر دو مدل تجربی و بسط یافته تقریباً به هم نزدیک هستند ولی باز مدل بسط یافته به نتایج تست نزدیک‌تر است. در این راستا مدل تحلیلی توانسته تقریب خوبی را برای مقادیر و روند تغییرات داده‌های تست ارائه کند.

- Astronautical Society Guidance and Control Conference*, February, AAS paper, 1998, pp. 98-063.
- [2] Bailke, B., "A Compilation of Reaction Wheel Induced Spacecraft Disturbances," *20<sup>th</sup> Annual American Astronautical Society Guidance and Control Conference*, February, AAS paper, 1997, pp. 97-038.
- [3] de Weck, O., "Reaction Wheel Disturbance Analysis," *MIT SSL Memo*, October 1998.
- [4] Hwa-Suk, O., Jae-Wook, K., LEE, H., Myung-Ryong, N., and Dong-Jo, P., "Torque and Force Measurement of a Prototype HAU Reaction wheel and the Effect of Disturbance on the Attitude Stability of Spacecraft," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 6, 2001, pp. 743-751.
- [5] Elias, L. M., A Structurally Coupled Disturbance Analysis Method Using Dynamic Mass Measurement Techniques, with Application to Spacecraft Reaction Wheel Systems, (M. Sc. Thesis), MIT, March 2001.
- [6] Masterson, R. A., Miller, D. W., and Grogan, R. L., "Development of Empirical and Analytical Reaction Wheel Disturbances Models," *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 1999.
- [7] Aghalari, A., Iranzad, M. and Mahdiabadi, M., "Measuring and Simulation of A Prototype Reaction Wheel Disturbances", *18<sup>th</sup> International Conference of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology*, Tehran, Iran, 1389, (In Persian).
- [8] Aghalari, A., Mahdiabadi, M. and Dehghan, S.M., "Designing, Testing and Evaluation of a Prototype Reaction Wheel for Microsatellite," *8<sup>th</sup> International Conference of Aerospace Engineering, Maleke-Ashtar University*, Isfahan, Iran, 1387, (In Persian).
- [9] Wirsching, P. H., Paez, T. L., and Ortiz, H., *Random Vibration: Theory and Practice*, John Wiley & Sons Inc, 1983.
- [10] Bently, D. E. Hatch, C. T. and Grissom, B., *Fundamentals of Rotating Machinery Diagnostics*, Bently Pressurized Bearing Press, 2002.
- [11] Aghalari, A., Iranzad, M., General Analytical RWA Disturbance Modeling, *Technical Report, Aerospace University Complex*, 1388, (In Persian).
- [12] Available, [on line]: <http://www.ati-ia.com>, Access, 2006.

اندازه‌گیری اغتشاشات، بستر تست مناسب طراحی و ساخته شده است. برای اغتشاشات دو مدل ارائه می‌شود. مدل اول بر اساس داده‌های تست است و یک رابطه تجربی به صورت یک سری سینوسی برای اغتشاشات ارائه می‌دهد. این مدل قادر به پیش‌بینی اثر مودهای سازه‌ای چرخ عکس‌العملی نیست. برای این منظور یک مدل تحلیلی ارائه می‌شود. این مدل تنها قادر به پیش‌بینی نیروها و گشتاورهای اغتشاشی (شش درجه آزادی) در هارمونی‌های اصلی چرخ عکس‌العملی است که در فرکانس‌های چرخشی رخ می‌دهند. برای لحاظ کردن هارمونی‌های دیگر، مدل تحلیلی مذکور با مدل اول ترکیب شده و مدل بسط‌یافته ایجاد می‌شود. در شکل‌های (۵) و (۶) نتایج مدل تجربی با داده‌های تست به ترتیب در دو حالت وجود اثر مود سازه‌ای و حذف آن ارائه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تطابق بسیار خوبی در حالت دوم وجود دارد و مدل تجربی به خوبی توانسته است اغتشاشات عملگر را مدل کند. در شکل‌های (۱۶) تا (۳۹) نتایج مدل تحلیلی بسط‌یافته با نتایج مدل تجربی و نیز تست ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل تحلیلی بسط‌یافته توانسته است به خوبی اثر مودهای سازه‌ای را مدل کند. اما در سرعت‌های چرخشی بالا بین داده‌های تست و مدل تحلیلی اختلافی وجود دارد. چون عملگر مذکور نمونه آزمایشگاهی و تحقیقاتی است، گذشت زمان و فعالیت‌های صورت گرفته می‌تواند بر روی آن تأثیر منفی داشته باشد لذا این اختلاف می‌تواند ناشی از خود عملگر یا مشکلات تست باشد. همچنین دلایل بالا بر روی بالانس چرخ‌طیار نیز تأثیر منفی دارد که مقادیر نسبتاً زیاد نیروها و گشتاورهای اغتشاشی مؤید این موضوع است.

## مراجع

- [1] Bailke, B., "High Fidelity Mathematical Modeling of Reaction Wheel Performance," *21<sup>st</sup> Annual American*