

# Space Inertial Navigation System Accuracy Increasing Using Orbit Point Mass Dynamic

M. Jafari<sup>1\*</sup>, M. Taefi<sup>2</sup> and J. Roshanian<sup>3</sup>

1, 2, 3. Department of Aerospace Engineering, K.N.T University of Technology

\*East Vafadar Bld., 4<sup>th</sup> Tehranpars Sq., Tehran, IRAN

[mjafari@mail.kntu.ac.ir](mailto:mjafari@mail.kntu.ac.ir)

*Flight dynamic equations have an effective role in aerospace technologies. It can be as cheap and efficient means for correcting errors in the spatial position and velocity in inertial navigation systems. The Inertial navigation system is an ideal solution for motion detection with high accuracy with fast dynamics, but the precise location and status of the system output can be significantly reduced over time. In this paper, inertial navigation system integrated with a navigation aided system based on online solving of flight dynamic equations. For this purpose, the proposed use of the Lagrangian of Kepler equations and three degrees of freedom of Newton's equations of transfer flights dynamic has been studied. Using this method, online high accuracy to be achieved by flight computer. Kalman filter algorithm is used for integrating inertial navigation and flight dynamic equations. Finally, The simulation results including position and velocity errors with regard to fly a prototype space module, for the proposed two conditions were compared and the advantages and disadvantages of each method are presented*

**Keywords:** Integrate navigation, Dynamic equations, Inertial navigation, Kepler equation, Kalman filter

---

1. PhD Student (Corresponding Author)

2. Researcher

3. Professor

# افزایش دقت سامانه ناوبری اینرسی فضایی با استفاده از دینامیک مسیر

مهدی جعفری<sup>۱\*</sup>، مرتضی طایفی<sup>۲</sup> و جعفر روشنیان<sup>۳</sup>

۱، ۲ و ۳ - دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

\*تهران، تهرانپارس، وفادار شرقی

mjafari@mail.kntu.ac.ir

معادلات دینامیک مسیر پرواز می‌تواند ابزاری ارزان و کارا برای تصحیح خطاهای موقعیت و سرعت فضایی در سامانه ناوبری اینرسی در فناوری‌های هوافضایی باشد و نقش مؤثری ایفا کند. اگرچه سامانه ناوبری اینرسی، یک راه حل برای تشخیص حرکت‌های دینامیک سریع و با دقت بالاست، اما دقت خروجی موقعیت و وضعیت این سیستم با گذشت زمان کاهش چشمگیری پیدا می‌کند. در این مقاله، به تلفیق سیستم ناوبری اینرسی با یک سیستم کمک ناوبری بر مبنای حل آنالین معادلات پرواز پرداخته می‌شود. برای این منظور دو پیشنهاد استفاده از فرم لاگرانژی معادلات کپلر و بیان نیوتون معادلات پرواز سه درجه آزادی انتقالی مورد مطالعه قرار گرفته است. دقت بالا و قابل حل بودن به صورت آنالین توسط کامپیوتر پرواز از ویژگی‌هایی است که در توسعه این معادلات مد نظر قرار گرفته است. برای تلفیق پارامترهای پروازی حاصل از ناوبری اینرسی و معادلات پرواز از الگوریتم فیلتر کالمن استفاده شده است. در پایان با توجه به نتایج شبیه‌سازی پرواز یک ماژول فضایی نمونه، خطاهای موقعیت و سرعت برای دو حالت پیشنهادی مورد مقایسه قرار گرفته و مزایا و معایب هر یک از روش‌ها ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: ناوبری تلفیقی، معادلات دینامیک مسیر، ناوبری اینرسی، معادلات کپلر، فیلتر کالمن

## علائم و اختصارات

$J_k$	ضرایب پتانسیل میدان جاذبه		
$\psi$	عرض جغرافیایی ژئوسنتریک		
$\phi$	عرض جغرافیایی ژئودتیک	$F, G, F_r, G_r$	ضرایب لاگرانژ
$\vec{V}_a$	بردار سرعت وسیله نسبت به اتمسفر	$V, \Gamma$	بردار موقعیت و سرعت
$S$	سطح مقطع موثر آیرودینامیکی	$p$	پارامتر مدار
$C_d$	ضریب درگ	$f$	آنومالی واقعی
$C_b$	ضریب بالستیک	$\vec{g}$	بردار شتاب جاذبه زمین
		$\vec{F}$	بردار نیروی برآیند خارجی
		$V$	پتانسیل میدان جاذبه زمین

## مقدمه

در سال‌های اخیر ناوبری تلفیقی و استفاده از سیستمی موازی برای تصحیح خطاهای سیستم ناوبری پایه از مواردی است که کمک‌های

۱. دانشجوی دکتری (نویسنده مخاطب)

۲. پژوهشگر

۳. استاد

استفاده شود با چنین مسئله‌ای روبه‌رو خواهیم بود. با تعریف ضرایب لاگرانژ  $(F, G, F_r, G_r)$ ، مسئله مقدار اولیه مداری برای بردار موقعیت و سرعت عبارت است از [۵]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= F \mathbf{r}_0 + G \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v} &= F_r \mathbf{r}_0 + G_r \mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

ضرایب لاگرانژ بر حسب پارامترهای مداری عبارتند از:

$$\begin{aligned} F &= 1 - \frac{r}{p}(1 - \cos \theta) \\ F_r &= \frac{\sqrt{\mu}}{r_0 p} \left[ \sigma_0 (1 - \cos \theta) - \sqrt{p} \sin \theta \right] \\ G &= \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \theta \\ G_r &= 2 - \frac{r_0}{p}(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

پارامترهای مختلف در رابطه فوق به صورت زیر بر حسب دیگر پارامترهای مداری نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_0} &= \frac{p}{r_0 + (p - r_0) \cos \theta - \sqrt{p \sigma_0} \sin \theta} \\ \theta &= f - f_0 \\ \sigma_0 &= \frac{r_0 \cdot v_0}{\sqrt{\mu}} \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه فوق  $p$  پارامتر مدار و  $f$  آنومالی واقعی است. در بعضی موارد راحت‌تر است تا روابط ضرایب لاگرانژ را بر حسب آنومالی خارج از مرکز داشته باشیم. حال روابط مربوط به ضرایب لاگرانژ را بر حسب تفاضل آنومالی خارج از مرکز و مقدار اولیه آن که از قرار زیر است بسط می‌دهیم.

$$\varphi = E - E_0 \quad (4)$$

در این حالت برای چهار پارامتر لاگرانژ روابط زیر حکم فرما خواهد بود.

$$\begin{aligned} F &= 1 - \frac{a}{r_0}(1 - \cos \varphi) \\ F_r &= \frac{\sqrt{\mu a}}{r r_0} \sin \varphi \\ G &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[ a \sigma_0 (1 - \cos \varphi) - r_0 \sqrt{a} \sin \varphi \right] \\ G_r &= 2 - \frac{a}{r}(1 - \cos \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

پارامترهای به کار رفته در روابط فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} r &= a + (r_0 - a) \cos \varphi + \sigma_0 \sqrt{a} \sin \varphi \\ \sigma_0 &= \frac{r_0 \cdot v_0}{\sqrt{\mu}} \end{aligned} \quad (6)$$

نکته حائز اهمیتی که در اینجا لازم است مورد بررسی قرار گیرد این است که، به چه شکل می‌توان روابط فوق را با زمان پرواز ارتباط داد. در واقع این ارتباط چیزی جز دانستن مقادیر آنومالی در

شایانی به توسعه فناوری‌های هوافضایی کرده است. یکی از راهکارهایی که در مأموریت‌های فضایی می‌توان از آن به عنوان یک سیستم کمک ناوبری یاد کرد، حل معادلات حرکت (معادلات کپلر و یا معادلات دیفرانسیلی حرکت) حین پرواز و استخراج پارامترهای پروازی است. از مزیت‌های مهم این روش هزینه پایین آن برای پیاده‌سازی روی وسیله پرنده است. در این مقاله به این موضوع و چگونگی پیاده‌سازی آن در کامپیوتر پرواز پرداخته می‌شود. نمونه‌ای از کاربرد معادلات کپلر به عنوان سیستم کمک ناوبری در تلفیق با سیستم ناوبری اینرسی برای تعیین شش پارامتر مدار بیضوی ماهواره برای استفاده آن لاین در فضایی سرنشین‌دار یا بدون سرنشین در مدار زمین، ماه، یا هر سیاره دیگر در مرجع [۱] شرح داده شده است. در مرجع [۲] نیز از حل معادلات دوجسمی کپلر و معادلات دیفرانسیلی پروازی با احتساب اغتشاشات در دو سطح به عنوان بلوک کمک ناوبری استفاده شده است.

در مرجع [۳] نحوه مدل‌سازی نویزهای مؤثر بر مدار ماهواره و مسیر کپلری ارائه شده است. همچنین توضیحاتی راجع به تخمین گر کمترین مربعات خطا، انواع روش‌های ناوبری رادیویی و ماتریس کورایانس آورده شده است. در مرجع [۴] کاهش خطای ناوبری سامانه مداری حامل با استفاده از ناوبری رادیویی محلی زمین پایه (ایستگاه زمینی) برای بهبود دقت مسیر کپلری بدون وابستگی به سایر سامانه‌های کمک ناوبری مطرح شده است. راهکار پیشنهادی به این صورت است که به کمک ایستگاه‌های زمینی خطاهای موقعیت و سرعت ناوبری اینرسی سامانه مداری در خود سامانه مداری تخمین زده می‌شوند و تصحیح می‌شوند.

در بخش اول مقاله، فرم لاگرانژی مدار که به نوعی مسئله مدار را به عنوان یک مسئله مقدار اولیه بیان می‌کند شرح داده می‌شود. در بخش دوم، معادلات پرواز جرم نقطه‌ای برای بیان حرکت مازول فضایی بسط داده شده است. در بخش سوم به توضیح الگوریتم تلفیق معادلات پرواز با سیستم ناوبری اینرسی بر مبنای روش فیلتر کالمن پرداخته می‌شود. در پایان به تفسیر نتایج شبیه‌سازی پرداخته می‌شود.

## فرم لاگرانژ معادلات کپلر

فرم متداول مسئله مدار بدین صورت است که پارامترهای لحظه‌ای مدار بر حسب آنومالی واقعی یا زمان گذرنده از حضيض مدار تعیین می‌شوند درحالی‌که در بسیاری موارد لازم است پارامترهای لحظه‌ای مدار بر حسب نقطه خاصی از مدار که لزوماً حضيض نیست و میزان زمان گذرنده از آن نقطه محاسبه شوند. زمانی که قرار است از معادلات کپلر به منظور بلوک کمک ناوبری

از آنجا که هدف حل معادلات انتقالی برای ماژول به صورت یک جرم نقطه‌ای در فضاست، بهترین دستگاه برای حل معادلات پرواز دستگاه مختصات اینرسی زمین- مرکز است (شکل ۱) چراکه حل معادلات در این دستگاه بسیار ساده است و همچنین بیان نیروها نیز برای ماژول مورد نظر در این دستگاه آسان است. بیان حرکت انتقالی در دستگاه اینرسی با توجه به قانون دوم نیوتن عبارت است از:

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m} \quad (9)$$

پارامتر  $\vec{g}$  بردار شتاب جاذبه زمین و بردار  $\vec{F}$  نیروی برآیند (غیرجاذبه‌ای) اعمالی به وسیله در دستگاه اینرسی است که می‌توان آن را شامل نیروهای آیرودینامیک و نیروهای دیگر دانست. با انتگرال‌گیری از بردار شتاب، سرعت و از انتگرال دوم بردار موقعیت حاصل خواهد شد.

در حالت کلی می‌توان با مشتق‌گیری از تابع پتانسیل میدان جاذبه زمین نسبت به بردار موقعیت، بردار شتاب جاذبه را استخراج کرد.

$$\vec{g} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \quad (10)$$

که در آن  $V$  پتانسیل میدان جاذبه زمین است و از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$V(r, \phi) = \frac{GM_e}{r} \left[ 1 - \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left( \frac{r_{eq}}{r} \right)^k P_k(\sin \phi) \right] \quad (11)$$

ضرایب  $J_k$  را ضرایب پتانسیل میدان جاذبه یا ضرایب جفری می‌نامند. فهرستی از چند ضریب پتانسیل جاذبه زمین که اهمیت ویژه‌ای دارند در جدول (۱) ذکر شده است.

جدول ۱- ضرایب پتانسیل میدان جاذبه

مقدار ( $\times 10^6$ )	ضریب پتانسیل جاذبه
$1028.28 \pm 0.03$	$J_2$
$-2.3 \pm 0.2$	$J_3$
$-2.12 \pm 0.05$	$J_4$
$-0.2 \pm 0.1$	$J_5$
$-1.0 \pm 0.8$	$J_6$

مطابق شکل (۲) بردار شتاب جاذبه در دستگاه مختصات ژئوسنتریک به سمت مرکز زمین و دارای عرض جغرافیایی  $\psi$  و در دستگاه ژئودتیک دارای عرض جغرافیایی  $\phi$  است.

زمان خاص نیست. برای این منظور از تفاضل روابط مربوط به حرکت متوسط در لحظه زمانی فعلی و لحظه زمانی اولیه استفاده می‌کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$M - M_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0) = (E - e \sin E) - (E_0 - e \sin E_0) \quad (7)$$

رابطه فوق را می‌توان به فرم رابطه زیر نوشت:

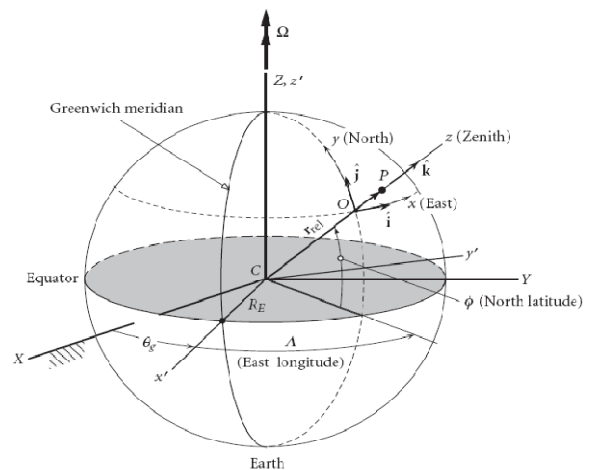
$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0) = \varphi + \frac{\sigma_0}{\sqrt{a}}(1 - \cos \varphi) - (1 - \frac{r_0}{a}) \sin \varphi \quad (8)$$

حال با توجه به رابطه فوق می‌توان دید که با معلوم بودن زمان پرواز، مقدار  $\varphi$  مشخص خواهد شد. با معلوم بودن  $\varphi$  ضرایب لاگرانژ محاسبه و به تبع آن مسئله مقدار اولیه بیان شده در رابطه (۱) حل خواهد شد. بدین طریق در هر لحظه می‌توان بردار سرعت و موقعیت را بر حسب مقادیر اولیه و زمان فعلی محاسبه کرد.

## معادلات پرواز جرم نقطه‌ای در سیستم ناوبری

همان‌طور که می‌دانیم در معادلات کپلر به فرم متعارف دو جرمی، مدل زمین به صورت کروی در نظر گرفته شده است. همچنین فرضیاتی از قبیل عدم وجود نیروهای آیرودینامیک، اثرات مغناطیس زمین، تشعشعات خورشیدی و میدان جاذبه اجرام سماوی دیگر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برای استخراج معادلات مداری دقیق‌تر، باید با لحاظ کردن اثرات فوق معادلات مداری جدید را بسط داد.

یکی از راه‌کارها برای رسیدن به معادلات مورد نظر این است که ماژول فضایی را به عنوان یک جرم نقطه‌ای در فضا در نظر بگیریم و معادلات حرکت سه درجه آزادی انتقالی برای آن را با در نظر گرفتن تمام نیروهای خارجی استخراج کنیم. از مزایای حل معادلات سه درجه آزادی انتقالی سادگی و حجم پایین محاسبات کامپیوتری است، که مناسب برای پردازش آن لاین در کامپیوتر پرواز است.



شکل ۱- دستگاه مختصات زمین- مرکز اینرسی و متصل

انجام داد. از این رو غالباً یک سیستم کمک ناوبری متکی به یک مرجع خارجی، با سیستم ناوبری اینرسی تلفیق می‌شود تا دقت سیستم ناوبری در بلند مدت در حد مطلوب باقی بماند. با توجه به اینکه سیستم موقعیت‌یابی جهانی نیز برای سنجش سرعت و موقعیت وسیله مورد نظر به کار می‌رود، رویکرد مورد استفاده در تلفیق معادلات دینامیک مدار و سیستم ناوبری اینرسی، مشابه سیستم‌های ناوبری تلفیقی ماهواره‌ای است [۸-۱۲]. الگوریتم تلفیق مورد استفاده در این مقاله مبتنی بر تخمین با استفاده از فیلتر کالمن است.

در الگوریتم فیلتر کالمن، متغیرهای حالت یک سیستم دینامیکی براساس اندازه‌گیری خروجی‌های سیستم تخمین زده می‌شوند. سیکل عملکرد فیلترهای کالمن به‌طور کلی شامل دو بخش تخمین اولیه و به‌روزرسانی تخمین است. در بخش تخمین اولیه، بر اساس مدل فضای حالت، یک تخمین اولیه از حالت‌های سیستم که شامل خطای موقعیت، سرعت، وضعیت و بایاس‌های حسگرهای ناوبری هستند و ماتریس کوواریانس خطای تخمین آنها بر حسب مقادیر تخمین زده شده آنها در گام قبل به‌دست می‌آید.

$$\hat{x}(k+1|k) = A x(k|k) + B u(k) \quad (14)$$

$$P(k+1|k) = A P(k|k) A^T + Q$$

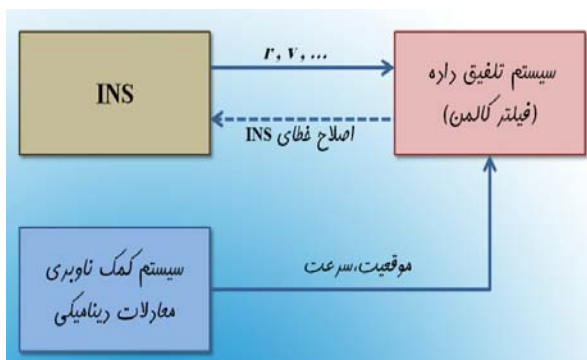
سپس به کمک اندازه‌گیری انجام شده توسط سیستم کمک ناوبری (خروجی معادلات دینامیک)، معادلات به‌روزرسانی فیلتر کالمن، تخمین اصلاح شده یا به‌روزرسانی شده‌ای از حالت‌های سیستم ایجاد می‌کنند.

$$W(k+1) = P(k+1|k) C^T [C P(k+1|k) C^T + R(k+1)]^{-1} \quad (15)$$

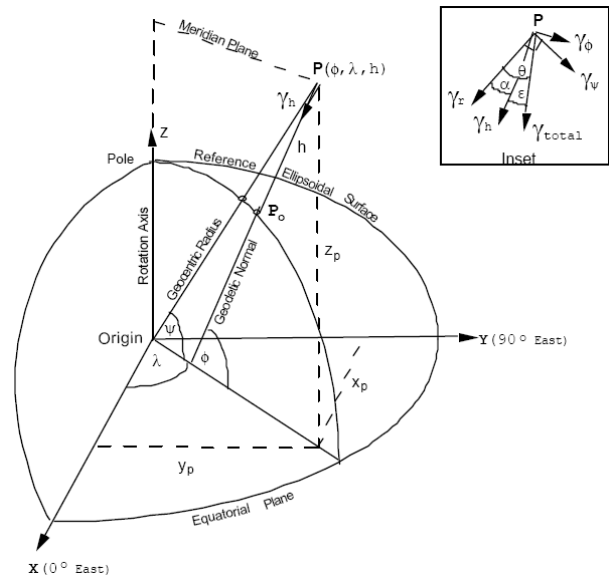
$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + W(k+1) (z(k+1) - C \hat{x}(k+1|k))$$

$$P(k+1|k+1) = (I - W(k+1) C) P(k+1|k)$$

خروجی سیستم ناوبری تلفیقی، در واقع خروجی سیستم ناوبری اینرسی است که خطاهای تخمین زده شده در فیلتر کالمن از مقادیر موقعیت، سرعت و وضعیت آنها کاسته شده است. شکل نمایی از فلوچارت سیستم تلفیق را نشان می‌دهد.



شکل ۳- فلوچارت سیستم تلفیق



شکل ۲- مؤلفه‌های بردار شتاب جاذبه

با فرض جرم نقطه‌ای برای حل معادلات انتقالی پرواز مازول فضایی، لازم است نیروی درگ آیرودینامیکی اعمالی بر آن محاسبه شود. رابطه نیروی درگ آیرودینامیکی را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_d \frac{\vec{V}_a}{V_a} \quad (12)$$

پارامتر  $\vec{V}_a$  در رابطه فوق، بردار سرعت وسیله نسبت به اتمسفر است (سرعت آیرودینامیکی) که مؤلفه‌های آن در دستگاه مختصات اینرسی زمین-مرکز بیان می‌شود.  $S$  سطح مقطع مؤثر آیرودینامیکی و  $C_d$  ضریب درگ وسیله است. حال می‌توان مقدار شتاب اغتشاشی ناشی از درگ آیرودینامیکی را به فرم زیر نوشت:

$$a_d = \frac{F_d}{m} = \frac{S C_d}{2m} \rho V_a^2 = C_b \rho V_a^2 \quad (13)$$

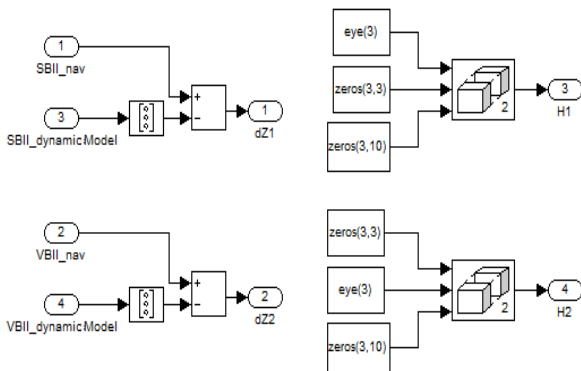
$$C_b = \frac{S C_d}{2m}$$

در رابطه فوق  $C_b$  ضریب بالستیک وسیله نامیده می‌شود. توجه شود که جهت بردار شتاب در خلاف جهت بردار سرعت آیرودینامیکی است. برای استخراج دانسیته هوا در ارتفاع‌های بالا (تا ۱۰۰۰ کیلومتر) می‌توان از مدل اتمسفر NRLMSISE-00 استفاده کرد [۶]. تابع این مدل در نرم‌افزار مطلب نیز موجود است.

### تلفیق بر مبنای الگوریتم فیلتر کالمن

همان‌طور که در مرجع [۷] شرح داده شده است، خطای سیستم‌های ناوبری اینرسی با گذشت زمان با توان دوم و سوم زمان افزایش پیدا می‌کند. در نتیجه نمی‌توان تنها به کمک سیستم‌های ناوبری اینرسی، عملیات ناوبری را برای مدت طولانی و با دقت مناسب

در شکل (۵)، ساختار مورد استفاده در بلوک اندازه گیری تلفیق ناوبری اینرسی با معادلات دینامیک مدار نشان داده شده است. در بلوک بهروزرسانی اندازه گیری، روابط محاسبه بهره کالمن و بهروزرسانی متغیر حالت و کوواریانس خطای آن، پیاده سازی شده اند.



شکل ۵- بلوک اندازه گیری برای تلفیق با معادلات دینامیک مدار

## نتایج شبیه سازی

در این بخش ابتدا نتایج حل معادلات مداری کپلر و معادلات انتقالی با در نظر گرفتن زمین بیضوی و اثرات آیرودینامیک ارائه می شود.

همان طور که در شکل (۶) و شکل (۷) نیز پیداست انحراف قابل توجهی در بردار سرعت و موقعیت برای دو روش معادلات کپلر و معادلات حرکت انتقالی وجود دارد. با بررسی های صورت گرفته مشخص شد که بالای ۹۵ درصد انحرافات ناشی از مدل جاذبه زمین و کمتر از ۵ درصد به عوامل دیگر نظیر اثرات آیرودینامیک بر می گردد. نتایج دو شکل (۸) و شکل (۹) تأییدکننده این ادعاست. از همین جا دیده می شود که معادلات کپلر به فرم متعارف قابل استفاده به عنوان سیستم کمک ناوبری نیست و تنها در صورتی که قابل تأیید است که از معادلات اغتشاشی مدار استفاده شود.

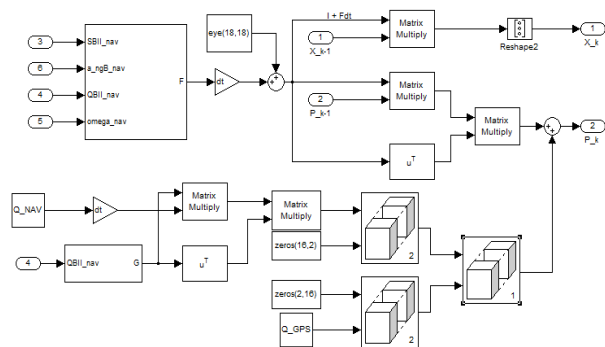
حال با مرجع قراردادن نرم افزار شبیه سازی شش درجه آزادی پرواز ماژول فضایی، به مقایسه نتایج و ارزیابی روش مورد نظر (معادلات جرم نقطه ای) برای به کارگیری به عنوان بلوک کمک ناوبری پرداخته شده است. همان طور که در شکل (۱۰) و شکل (۱۱) دیده می شود نتایج هر دو مدل سازی کاملاً بر هم منطبق هستند و این تأییدی بر صحیح بودن معادلات حرکت و مدل جاذبه به کاررفته است. با شبیه سازی سیستم ناوبری اینرسی و محاسبه رشد خطاها نسبت به زمان به مقایسه آنها با میزان خطاها در معادلات پرواز ملاحظه می شود که میزان رشد خطای سیستم ناوبری اینرسی تنها برای مؤلفه های موقعیت و سرعت نسبت به زمان دارای مقادیر

## زیرسیستم تلفیق

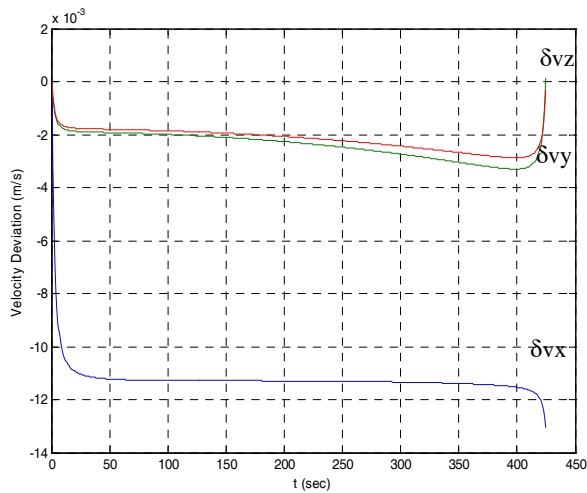
در این زیر سیستم، الگوریتم فیلتر کالمن برای تلفیق ناوبری اینرسی با معادلات دینامیک مداری، پیاده سازی شده است. این زیرسیستم شامل سه بخش اصلی: پیش بینی، اندازه گیری و بهروزرسانی (اصلاح) است. بلوک پیش بینی براساس ورودی هایی که از سیستم ناوبری اینرسی دریافت می کند، در هر گام زمانی  $dt = 0.02sec$  یک تخمین اولیه (پیشین) از حالت های سیستم را محاسبه می کند. این پیش بینی براساس مدل فضای حالت (گسترش خطای) ناوبری خواهد بود. تا زمانی که تصحیح متغیر حالت فیلتر کالمن، براساس اندازه گیری های سیستم کمک ناوبری، بهروزرسانی نشود، بلوک پیش بینی در هر گام  $dt$  یک پیش بینی جدید براساس متغیرهای حالت در گام قبل و اندازه گیری های سیستم ناوبری اینرسی ایجاد می کند. در هر گام زمانی که اندازه گیری های سیستم کمک ناوبری بهروزرسانی شوند، در بلوک اندازه گیری، بردار اندازه گیری و ماتریس اندازه گیری ایجاد شده و به بلوک بهروزرسانی اندازه گیری (تصحیح) ارسال می شوند.

در هر گام زمانی اندازه گیری، بر اساس الگوریتم محاسبه بهره کالمن تخمین دقیق تری از خطای سیستم ناوبری اینرسی و سیستم کمک ناوبری انجام می شود و متغیرهای حالت اصلاح می شوند. نتیجه این بهروزرسانی، متغیرهای حالت، ورودی بلوک پیش بینی را نیز تغییر می دهد. به کمک متغیرهای حالت تصحیح شده، خطای سیستم ناوبری اینرسی نیز اصلاح می شود.

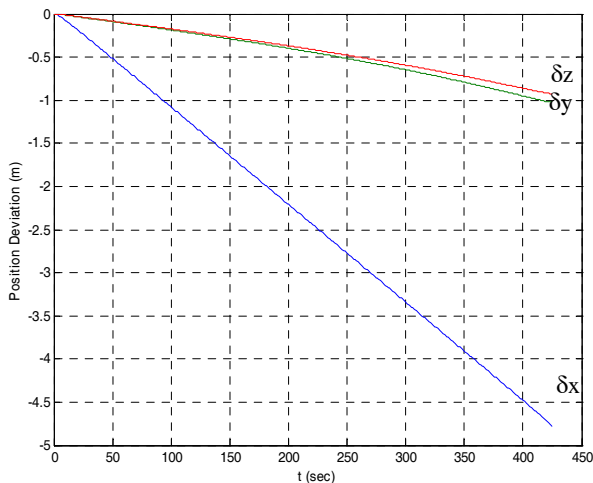
در شکل (۴) ساختار مورد استفاده در بلوک پیش بینی (تخمین اولیه) از متغیرهای حالت در سیستم ناوبری تلفیقی، ارائه شده است. تفاضل خروجی (سرعت و موقعیت) معادلات دینامیک مداری با خروجی سرعت و موقعیت ناوبری اینرسی، در واقع تنها ناشی از خطای سنسورهای اینرسی است. از این رو، این تفاضل دقیقاً بایستی برابر با خطای سرعت و موقعیت تعریف شده در فیلتر کالمن، باشد. از این رو در این روش تلفیق، اندازه گیری ها بدون هیچ گونه تبدیلی، در روابط ناوبری تلفیقی قابل استفاده هستند.



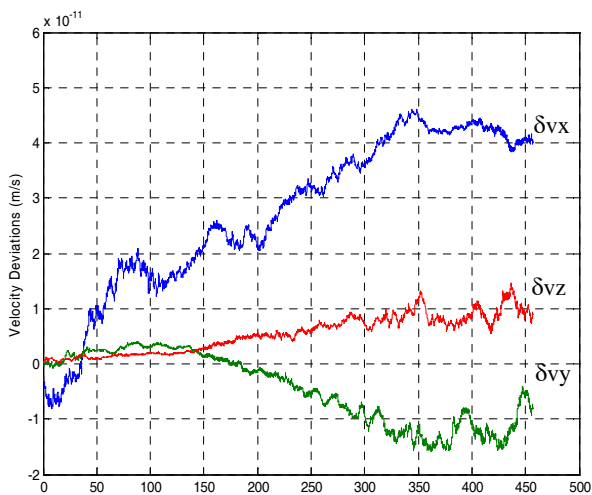
شکل ۴- بلوک پیش بینی متغیرهای حالت



شکل ۸- اختلاف مؤلفه‌های سرعت در شبیه‌سازی با و بدون اثرات آیرودینامیک



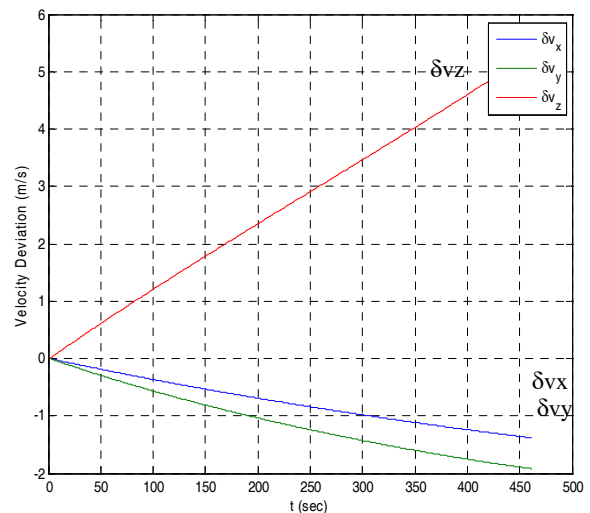
شکل ۹- اختلاف مؤلفه‌های موقعیت در شبیه‌سازی با و بدون اثرات آیرودینامیک



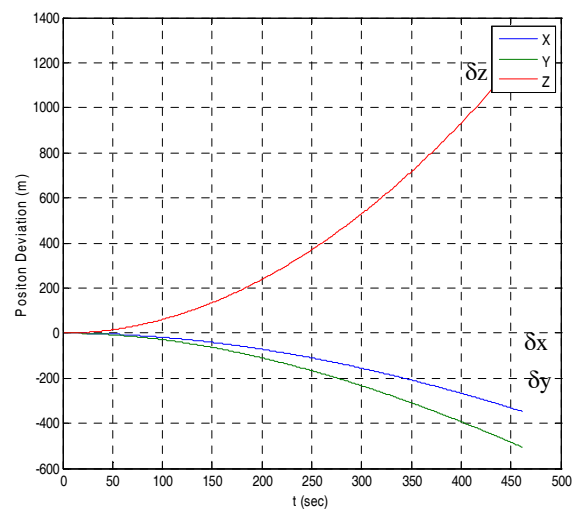
شکل ۱۰- اختلاف مؤلفه‌های سرعت در اعتبارسنجی با شبیه‌سازی شش درجه آزادی

زیادی است. این در حالی است که نتایج شبیه‌سازی معادلات دینامیک مدار نشان می‌دهد که خطاهای موقعیت برای زمان در نظر گرفته شده برای پرواز بسیار کمتر است که این توانمندی این رویکرد را در تصحیح خطاهای ناوبری اینرسی نشان می‌دهد. قابل ذکر است که سهم غالب این خطا ناشی از اثرات مدل جاذبه و مابقی ناشی از همه عوامل دیگر نظیر مدل آیرودینامیک، اثرات جسم سوم نظیر ماه، تشعشعات خورشیدی و ... است.

در شبیه‌سازی ارائه شده فرض شده است که سیستم ناوبری از زمان ۱۲۱ ثانیه تا زمان ۱۹۷ ثانیه از معادلات دینامیک پرواز در الگوریتم تلفیق استفاده کند. بنابراین ابتدا دقت معادلات دینامیک پرواز مورد استفاده در مقایسه با شبیه‌سازی شش درجه آزادی در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) مورد اعتبارسنجی قرار گرفته‌اند.



شکل ۶- اختلاف مؤلفه‌های سرعت در حل کپلر و معادلات انتقالی



شکل ۷- اختلاف مؤلفه‌های موقعیت در حل کپلر و معادلات انتقالی

منحنی‌های خطچین در شکل (۱۲) مؤلفه‌های بردار سرعت را نشان می‌دهد که از شبیه‌سازی شش درجه آزادی حاصل شده است. همان‌طور که دیده می‌شود در زمان ۱۲۱ ثانیه که فرمان فعال شدن بلوک کمک ناوبری داده می‌شود، بردار سرعت بلوک کمک ناوبری با مقدار بردار سرعت در این لحظه مقداردهی اولیه می‌شود. حال تا زمانی که فرمان غیرفعال شدن بلوک شبیه‌سازی (۱۹۷) نیاید، شبیه‌سازی معادلات دینامیک پرواز ادامه پیدا خواهد کرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این بازه پارامترهای پرواز از بلوک شبیه‌سازی در سیستم ناوبری محاسبه شده‌اند و منطبق بر مقادیر متناظر حاصل از شبیه‌سازی شش درجه آزادی هستند. تفسیری مشابه برای مؤلفه‌های بردار موقعیت وجود دارد که نتایج حاصل در شکل (۱۳) نشان داده شده است.

در مدل‌سازی خطای سیستماتیک ژایروسکوپ‌ها، پارامترهای خطای ضریب مقیاس، بایاس ثابت و بایاس حساس به شتاب مورد توجه قرار گرفتند. پارامترهای خطای حسگرهای ژایروسکوپ و شتاب‌سنج به صورت جدول (۲) و (۳) در نظر گرفته شده است.

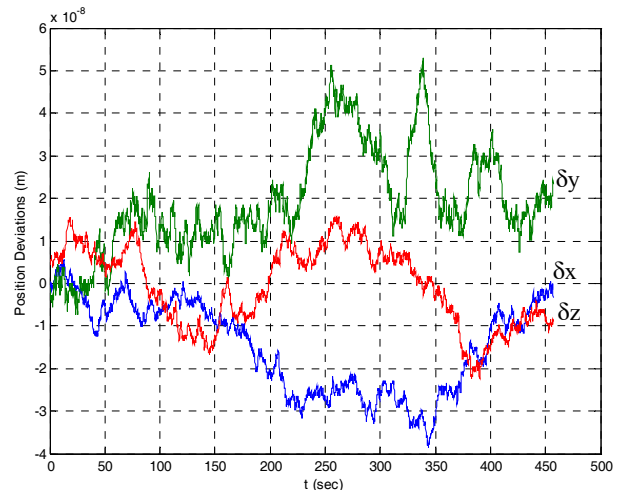
جدول ۲- مقادیر پارامترهای خطای سیستماتیک سنسور ژایروسکوپ

نام پارامتر	واحد	مقدار متوسط	انحراف معیار
خطای ضریب مقیاس	بدون واحد	۱۰۰ ppm	۱۰ ppm
خطای بایاس ثابت	درجه بر ساعت	۰/۵	۰/۱
خطای بایاس حساس به شتاب	درجه بر ساعت	۰/۱۵	۰/۰۴

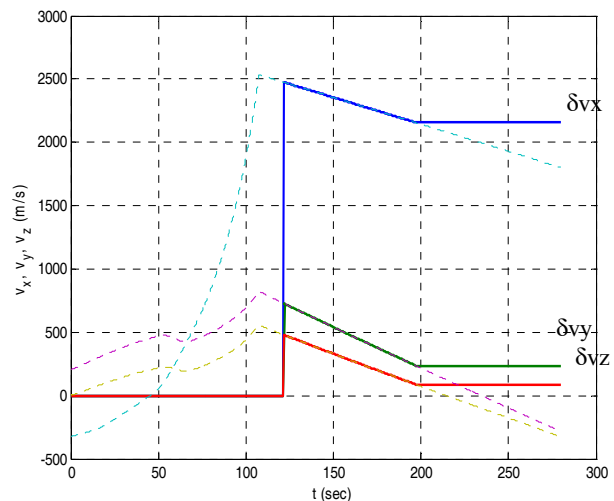
جدول ۳- مقادیر پارامترهای خطای سیستماتیک سنسور شتاب سنج

نام پارامتر	واحد	مقدار متوسط	انحراف معیار
خطای ضریب مقیاس	بدون واحد	۱۰۰ ppm	۱۰ ppm
خطای بایاس ثابت	میلی گرم	۰/۲	۰/۰۲

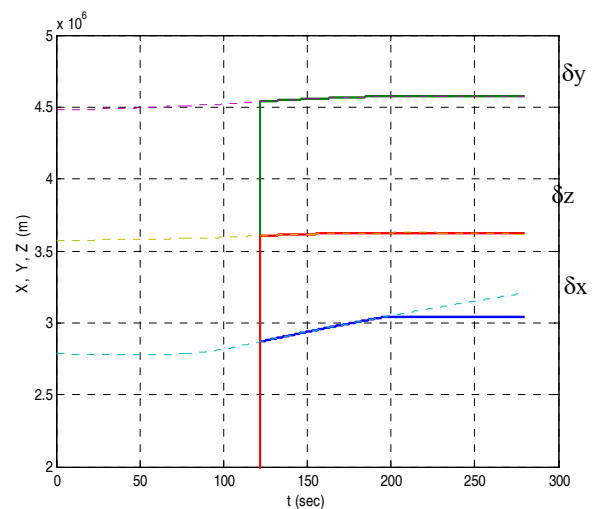
در ادامه در شکل‌های (۱۴) تا (۱۹)، ابتدا نمودارهای خطاهای موقعیت و سرعت و وضعیت ناوبری اینرسی با خطای حساسه‌های اینرسی و بدون فعال‌سازی الگوریتم‌های تلفیق در مقایسه با این نمودارها در تلفیق ناوبری اینرسی با معادلات دینامیک مدار ارائه می‌شود. الگوریتم تلفیق چند ثانیه پس از خاموشی موتور اصلی و جدایش محموله مداری آغاز به کار می‌کند. همان‌طور که مشاهده



شکل ۱۱- اختلاف مؤلفه‌های موقعیت در اعتبارسنجی با شبیه‌سازی شش درجه آزادی

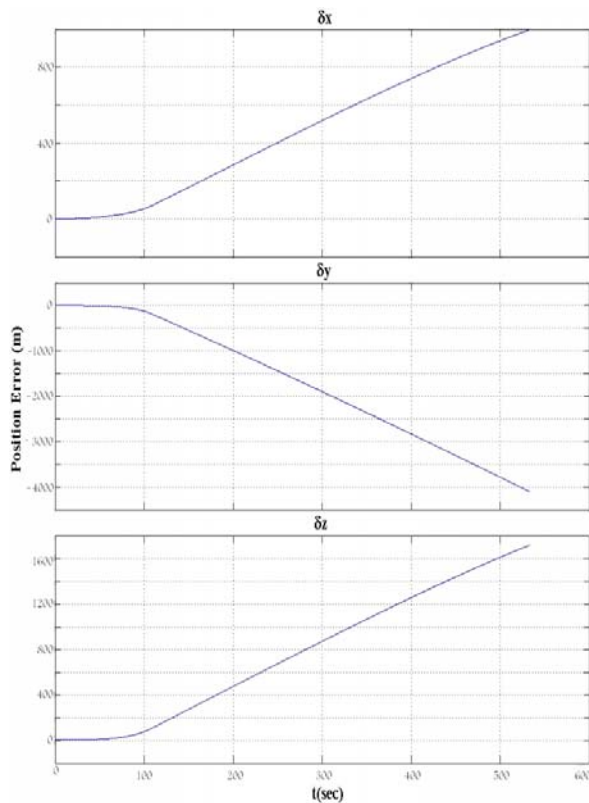


شکل ۱۲- مؤلفه‌های بردار سرعت

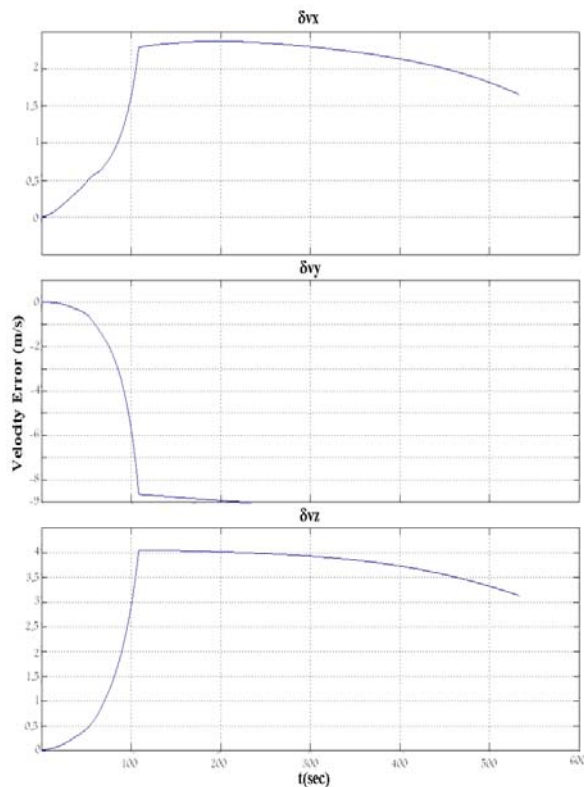


شکل ۱۳- مؤلفه‌های بردار موقعیت





شکل ۱۳ - خطای مؤلفه‌های موقعیت ناوبری با خطای حسگرهای اینرسی



شکل ۱۴ - خطای مؤلفه‌های سرعت ناوبری با خطای حسگرهای اینرسی

می‌شود، از رشد خطای تخمین سرعت به کمک این روش جلوگیری شده است و حتی پس از فعال‌سازی الگوریتم تلفیق کاهش یافته است. خطای تخمین موقعیت نیز به تناسب با بهبود خطای تخمین سرعت بهبود یافته است.

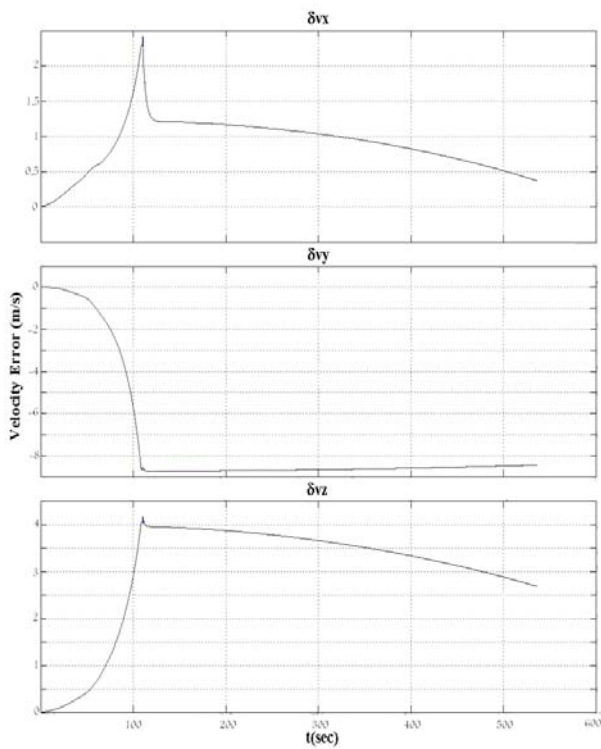
البته به‌رغم دقت بالای معادلات دینامیک مدار مورد استفاده در بلوک کمک ناوبری، به دلیل نحوهٔ مقداردهی اولیهٔ آن (استفاده از خروجی ناوبری اینرسی در ابتدای ورود به فضا)، خطای تجمعی ناوبری اینرسی ناشی از فاز قبل از ورود به فضا قابل جبران نخواهد بود. در صورتی که بتوان به نحوی مثل استفاده از سامانه کمک ناوبری رادیویی مقداردهی اولیهٔ موقعیت و سرعت را در ابتدای فاز پرواز آزاد بهبود بخشید بر دقت این روش بسیار افزوده خواهد شد. همان‌طوری که انتظار نیز می‌رفت استفاده از این روش در کاهش خطای موقعیت و سرعت ناوبری اینرسی کاملاً مؤثر است ولی با توجه به عدم وجود سامانهٔ کمک ناوبری وضعیت، خطای وضعیت ناوبری اینرسی بهبود چندانی نیافته است.

## نتیجه‌گیری

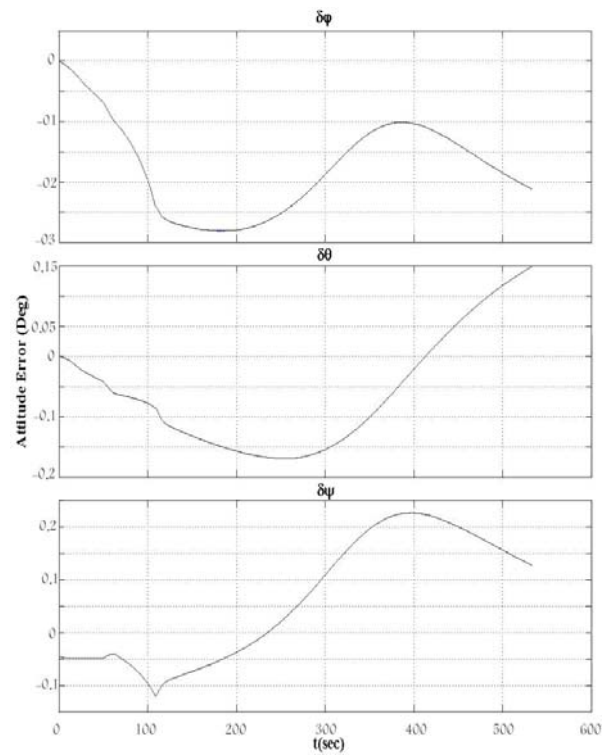
در این مقاله، استفاده از معادلات کپلر و معادلات دینامیک مسیر به‌عنوان سامانهٔ کمک ناوبری مورد بررسی قرار گرفته است. از مزایای استفاده از معادلات کپلر، جبری بودن معادلات و عدم نیاز به انتگرال‌گیری در طول زمان است که حجم محاسبات کمی دارد و جمع خطای انتگرال‌گیری نیز نخواهیم داشت. از معایب استفاده از این معادلات دقت پایین پارامترهای پروازی حاصل از این روش به خاطر در نظر نگرفتن اثرات نیروهای خارجی دیگر به جز مدل جاذبه زمین کروی است. جهت حل معایب فوق، استفاده از معادلات سه درجه آزادی دینامیک مسیر پرواز به عنوان روش دقیق و کارا جهت حل آنلاین و تصحیح خطاهای سیستم ناوبری اینرسی پیشنهاد شده است.

استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن برای تلفیق معادلات دینامیک مداری با ناوبری اینرسی، از افزایش خطای سرعت با گذشت زمان جلوگیری می‌کند.

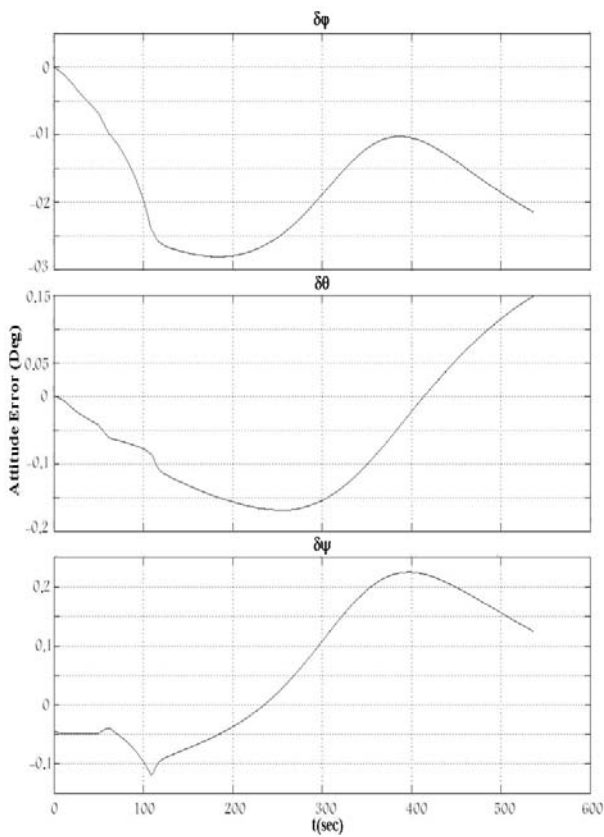
البته به‌رغم دقت بالای معادلات دینامیک مسیر مورد استفاده در بلوک کمک ناوبری، به دلیل نحوهٔ مقداردهی اولیهٔ آن (استفاده از خروجی ناوبری اینرسی در ابتدای ورود به فضا)، خطای تجمعی ناوبری اینرسی ناشی از فاز قبل از ورود به فضا جبران‌پذیر نخواهد بود.



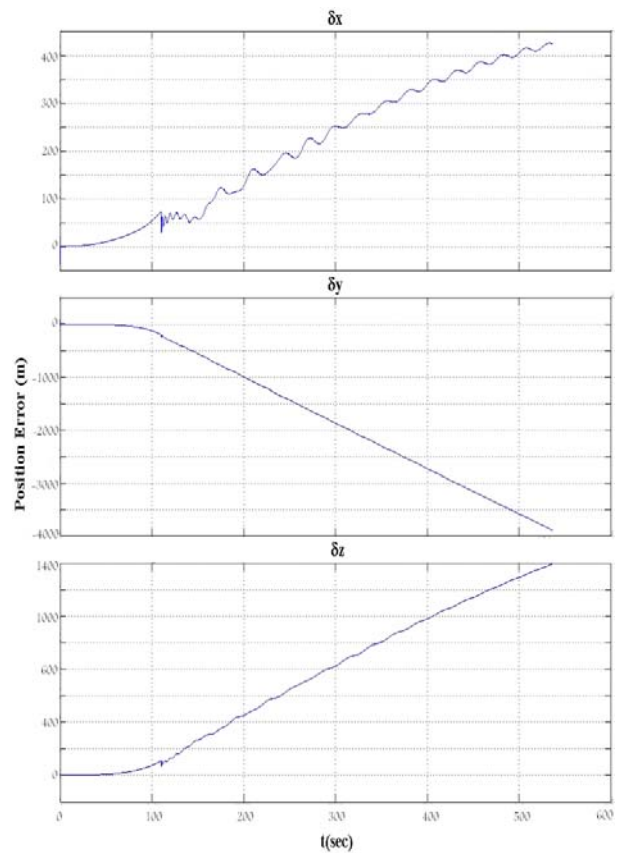
شکل ۱۸ - خطای مؤلفه‌های سرعت در تلفیق ناوبری اینرسی با معادلات دینامیک مدار



شکل ۱۶ - خطای مؤلفه‌های وضعیت ناوبری اینرسی با خطای حسگرهای اینرسی



شکل ۱۹ - خطای مؤلفه‌های وضعیت در تلفیق ناوبری اینرسی با معادلات دینامیک مدار



شکل ۱۷ - خطای مؤلفه‌های موقعیت در تلفیق ناوبری اینرسی با معادلات دینامیک مدار

## مراجع

- [7] Titterton, D. H., *Strapdown Inertial Navigation Technology*, 2<sup>nd</sup> Edition, Institution of Electrical Engineers, 2004.
- [8] *Department of Defense World Geodetic System*, 3<sup>th</sup> Edition, Technical Report, National Imagery and Mapping Agency (NIMA), 2000.
- [9] Grejner-Brzezinska, D., Toth, Ch. and Yi, Y., "On Improving Navigation Accuracy of GPS/INS Systems," *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, Vol. 71, No. 4, 2005, pp 377-389.
- [10] Gaylor, D. E., "GPS/INS Kalman Filter Design for Spacecraft Operating in the Proximity of the International Space Station," *AIAA GN&C Conference*, Austin, TX, 2003.
- [11] Gaylor, D. E., *Simulation of an Unaided INS in Orbit*, Center for Space Research, The University of Texas at Austin, 2002.
- [12] Jafari, M., Sangari, A. and Roshanian, J. "Inertial Navigation System and GPS Integration for Space Navigation Accuracy Increasing," *Journal Science Space Technology (JSST)*, Vol 5, No 3, 2012, pp 11-19, (In Persian).
- [1] Boltz, F. W., "Autonomous Orbital Navigation using Kepler's Equation," *AIAA Mechanics and Control of Flight Conference*, Anaheim, Calif, 1974.
- [2] Eneev, T. M., Ivashkin, V., Sharov, V. A. and Bagdasaryan, J. V., "Space Autonomous Navigation System of Soviet Project for Manned Fly by Moon," *Acta Astronautica*, Vol.66, Issues 3-4, 2009.
- [3] Monten Bruck, O., *Satellite Orbits Models, Methods and Applications*, Springer, 2001.
- [4] Chung, L. R., *Orbit Determination Methods for Deep Space Drag-Free Controlled Laser Interferometry Missions*, (Thesis M.Sc.), University of Maryland, 2006.
- [5] Battin, R. H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, Revised ed. Reston, AIAA Educational Series, 1999.
- [6] Picone, J. M., Hedin, A. E., Drob, D. P., and Aikin, A. C., "NRL-MSISE-00 Empirical Model of the Atmosphere: Statistical Comparisons and Scientific Issues", *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, Vol. 107, Issue A12, 2002, pp. SIA 15-1–SIA 15-16.