

# Developing a New Explicit Guidance Method for the Trajectory Correction of Sub-Orbital Modules

A. R. Alemi Naeeni<sup>1\*</sup> and J. Roshanian<sup>2</sup>

1, 2. Center of Excellence for Design and Simulation of Space Systems, Department of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of Technology

\*East Vafadar Bld., 4<sup>th</sup>Tehranpars Sq., Tehran, IRAN.

[aalemi@mail.kntu.ac.ir](mailto:aalemi@mail.kntu.ac.ir)

*This paper presents an explicit guidance method which could be used in the problems of orbit correction for sub-orbital modules. This method is based on solving the Lambert problem. Two efficient methods of solving the Lambert problem are introduced and compared. Using of the selected method a guidance scenario is developed which is capable of solving the problem under investigation. All of the methods of solving the Lambert problem, are based on spherical gravitational field and aerodynamic forces are not considered by them. In order to consider those important factors, a method is presented which increases the accuracy of guidance block computations. Finally using of developed method, two sample problems are investigated. Applying the developed method, a guidance block is prepared which performs the required maneuvers in a mission. Monte Carlo simulation confirms the ability of developed method in different conditions.*

**Keywords:** Lambert problem, Orbital mechanics, Guidance, Perturbation factors, Virtual displacement

---

1. PHD Candidate (Corresponding Author)  
2. Professor

# توسعه یک روش هدایتی صریح در مأموریت‌های اصلاح مسیر حرکتی ماژول‌های زیرمداری

علیرضا عالمی نائینی<sup>۱\*</sup> و جعفر روشنی‌یان<sup>۲</sup>

۱ و ۲- قطب طراحی و شبیه‌سازی سامانه‌های فضایی، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین توسی

\*تهران، فلکه چهارم تهرانپارس، وفادار شرقی

aalemi@mail.kntu.ac.ir

هدف از مقاله حاضر، تدوین یک قانون هدایتی صریح برای مسائلی با ماهیت تغییر یا اصلاح مسیر حرکت ماژول‌های زیرمداری است. روش مورد استفاده، مبتنی بر حل مسئله لامبرت بوده و از این رو، دو روش کارآمد در این حوزه معرفی شده و مورد ارزیابی و مقایسه قرار خواهد گرفت. بر این اساس یک سناریوی هدایت معرفی شده و در مسئله تحت بررسی به‌کار گرفته می‌شود. متأسفانه تمامی روش‌های حل مسئله لامبرت از فرض میدان گرانش نقطه‌ای تبعیت می‌کند. با توجه به اهمیت نیروهای آیرودینامیک و اثرات نیروهای اغتشاشی حاصله از میدان گرانش و از جمله بیضی گون بودن میدان گرانش زمین، در ادامه این مقاله، روشی برای لحاظ کردن اثرات عوامل یاد شده به منظور اصلاح بلوک هدایت معرفی خواهد شد. عملیاتی بودن و قابلیت استفاده در کلیه مأموریت‌های هدایت از نوع ذکر شده، از اهداف موجود در توسعه سناریوی هدایت است. در پایان، دو مسئله نمونه با استفاده از الگوریتم معرفی شده مورد بررسی قرار گرفته و روش اتخاذ شده ارزیابی خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: لامبرت، مکانیک مدارهای فضایی، هدایت، عوامل اغتشاشی، جابجایی مجازی

## مقدمه

ماژول‌های زیرمداری، از جمله مهم‌ترین وسایل هوافضایی محسوب می‌شوند. اصطلاح زیرمداری از آن جهت به این وسایل اطلاق می‌گردد که سرعت ماکزیمم آنها کمتر از حداقل سرعت مداری است و به همین جهت در پایان مأموریت، ورود مجدد به جو را تجربه می‌کنند. از این جهت این وسیله‌ها به لحاظ قوانین هدایتی مشابه پرتابگرهای بازگشت‌پذیر و در بخش پایانی مشابه پرتابه‌های هدایت‌شونده هستند. به‌طور کلی مسائل مربوط به هدایت و کنترل این سامانه‌ها را در سه فاز صعود، فاز میانی و فاز پایانی می‌توان طبقه‌بندی کرد. یک ماژول زیرمداری برای دستیابی به هدف نهایی خود، فازهای حرکتی متعددی را تجربه می‌کند. در بخش اول پس از روشن شدن موتورهای اصلی، فاز فعال یا بوست طی می‌شود که در آن، هدایت از طریق اعمال سرعت‌های زاویه‌ای مناسب برای دستیابی به زوایای حمله مطلوب انجام می‌گیرد. با پایان یافتن این فاز، موتورها خاموش شده و فاز میانی که عموماً در خارج از جو

## علائم و اختصارات

$\mu$	ثابت گرانشی زمین
$a$	نیم قطر بزرگ مدار حرکت
$r$	فاصله از مرکز گرانش
$c$	طول وتر اتصال‌دهنده دو نقطه از مدار
$E$	آنومالی مرکزی
$g$	شتاب گرانش
$f$	آنومالی حقیقی
$e$	خروج از مرکزیت
$\gamma$	زاویه مسیر حرکت با افق
$v$	اندازه سرعت
$t$	زمان

۱. دانشجوی دکتری (نویسنده مخاطب)  
۲. استاد

[۱۳] با تنظیم زاویه بردار سرعت با افق، مسئله حل می‌شود. مراجع [۱۱]، [۱۴] و [۱۵] با بهره‌گیری از توابع فرائندسی، فرایند تکرار را روی مشخصه‌های دیگری از مدار به انجام می‌رساند. مرجع [۱۲] از روش متغیرهای جهانی مسئله را مورد حل قرار می‌دهد. در تمامی این روش‌ها، با احتساب یک میدان گرانش کروی، مسئله حل می‌شود. چنانچه بخواهیم اثرات اغتشاشی حاصله از میدان گرانش بیضی‌گون، آیرودینامیک یا دوران زمین را نیز در حل مسئله لامبرت و تدوین استراتژی هدایت لحاظ نماییم، روش‌های ارائه شده کارایی کافی را نخواهند داشت و از این‌رو امکان تدوین یک سناریوی هدایتی حلقه بسته بر مبنای این روش‌ها وجود نخواهد داشت. در این مقاله، با تعریف یک مسئله بهینه‌سازی جانبی، راه حل مناسبی برای درنظر گرفتن اثرات کلیه عوامل غیرکپلری در مسئله فراهم می‌شود. روش استفاده شده، موسوم به روش بردار جابه‌جایی مجازی، به شکلی کارآمد و در حداقل زمان، اصلاحات مورد نیاز برای حل مسئله لامبرت را به انجام رسانیده و امکان پیاده‌سازی یک هدایت حلقه بسته با وجود عوامل اغتشاشی از قبیل آیرودینامیک و غیره را فراهم می‌سازد. سایر بخش‌های مقاله به شرح زیر هستند: ابتدا مرور مختصری بر مسئله لامبرت ارائه می‌شود. در ادامه روش‌های باتین و زارچان معرفی شده و مورد مقایسه قرار می‌گیرد. بحث در خصوص عوامل غیرکپلری تأثیرگذار در ادامه مطرح شده و سپس روش بردار جابه‌جایی مجازی معرفی می‌شود. نهایتاً کارایی روش ذکر شده، از طریق حل دو مسئله هدایت مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت.

### مسئله لامبرت

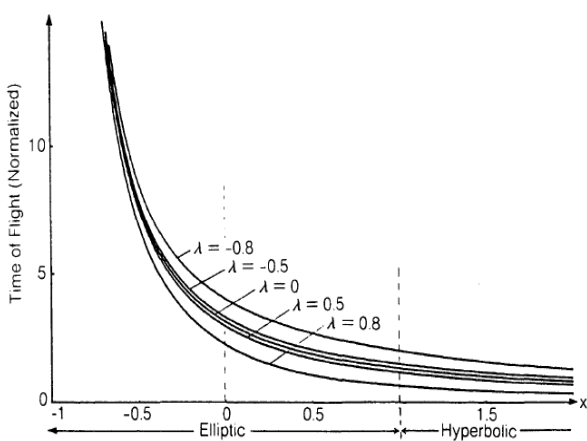
از مسائل مهمی که در مبحث مکانیک مدارهای فضایی مورد بحث قرار می‌گیرد، مسئله لامبرت است. بر اساس تئوری لامبرت، زمان انتقال بین دو نقطه مشخص از مدار به نیم قطر بزرگ مدار، مجموع فاصله‌های دو نقطه از مرکز جاذبه و طول وتر اتصال‌دهنده آنها بستگی دارد.

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = f(a, c, r_1 + r_2) \quad (1)$$

که در آن  $(t_2 - t_1)$  بازه زمانی مورد نیاز است (شکل ۱). حال مسئله لامبرت به این صورت مطرح می‌شود که با دانستن موقعیت اولیه و ثانویه و مدت زمان حرکت، مدار مطلوب را محاسبه کنید. با تعیین مدار، اندازه سرعت در نقاط مورد نظر نیز تعیین خواهد شد و الگوریتم‌های هدایتی، امکان تولید فرامین مناسب را خواهند یافت.

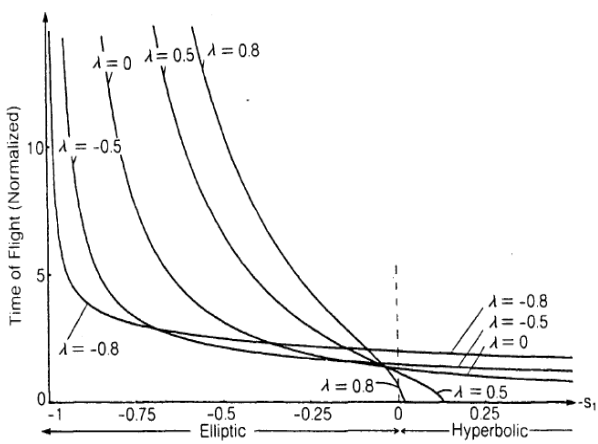
طی می‌شود آغاز خواهد شد. نهایتاً با ورود مجدد به جو، فاز بازگشت به جو را خواهیم داشت. مرجع [۱] با تفکیک مسیر مازول زیرمداری به سه فاز، هدایت آن را به انجام رسانیده است. مرجع [۲] طراحی مسیر سه درجه آزادی قابل تحقق برای وسیله زیرمداری را به انجام رسانیده است. مرجع [۳] از روش برنامه‌ریزی استاتیکی مدل- پیش‌بین برای هدایت پرتابگر بازگشت‌پذیر استفاده کرده است. با توجه به بروز خطا در مراحل مختلف حرکت که باعث فاصله گرفتن مسیر حرکت نامی از مسیر طراحی شده می‌شود، فاز میانی که بیشترین زمان از کل مدت زمان حرکت به آن اختصاص دارد، اهمیت ویژه‌ای می‌یابد. در این فاز رشد تدریجی خطا و افزایش فاصله نسبت به مسیر نامی را خواهیم داشت. از این روست که به‌منظور کنترل خطا و رسیدن به دقت مطلوب، هدایت در فاز میانی اهمیت زیادی می‌یابد. به دلیل آنکه این فاز در خارج از جو طی می‌شود، امکان استفاده از نیروهای کنترلی آیرودینامیکی در آن وجود ندارد، بنابراین لازم است از پیش‌ران‌های گاز سرد یا گرم استفاده شود. در چنین فرایندی، سیستم هدایت شرایط مورد نیاز برای اعمال ایمپالس هدایتی را معین می‌سازد که این شرایط به وسیله سیستم کنترل محقق می‌شود. هدایت فاز میانی در مراجع [۴] و [۵] با استفاده از روش شبکه‌های عصبی انجام شده است. در این دو مرجع، اطلاعات مسیر بهینه از قبل طراحی شده به شبکه عصبی آموزش داده می‌شود تا در حین مأموریت با حداقل محاسبات، اهداف مورد نظر محقق شود. مرجع [۶] برای هدایت از سیستم‌های فازی بهره می‌گیرد. قوانین درنظرگرفته شده به‌گونه‌ای است که گستره‌ای از مسیرهای بهینه قابل تحقق است. یکی از مهم‌ترین روش‌های هدایتی قابل پیاده‌سازی در این زمینه، محاسبه بردار سرعت یا موقعیت مطلوب و تولید فرامین کنترلی برای دستیابی به آن است. برای این منظور لازم است بردار سرعت لازمه محاسبه شود تا با بهره‌گیری از آن، امکان تولید فرامین هدایتی فراهم شود. برای این منظور دو دسته از روش‌ها به نام‌های روش‌های صریح و ضمنی قابل طرح است. در روش‌های ضمنی به طور غیرمستقیم این کار انجام می‌شود. به عنوان مثال روش Q (مراجع [۷] الی [۹]) که از معروف‌ترین روش‌های موجود در این حوزه است، معادلاتی را در اختیار قرار می‌دهد که با حل آن، تفاضل سرعت لحظه‌ای از سرعت لازمه محاسبه می‌گردد. به دلیل سنگینی روابط و محدودیت در مدل‌سازی پارامترهای تأثیرگذار و برخی اشکالات جانبی، روش‌های صریح مورد توجه قرار گرفته‌اند که از معروف‌ترین روش‌ها در این مورد می‌توان به مسئله لامبرت اشاره کرد. روش‌های متعددی برای حل مسئله لامبرت پیشنهاد شده است (مراجع [۱۰] الی [۱۵]). به‌طور خلاصه در مراجع [۱۰] و

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\mu}{a_m^3}}(t_2 - t_1) = \frac{4}{3}\eta^3 F\left(3, 1, \frac{5}{2}, z\right) + 4\lambda\eta \\ \eta = \sqrt{(1-\lambda)^2 + 4\lambda z} \end{cases} \quad (8)$$



شکل ۲- زمان انتقال مداری به صورت تابعی از متغیر x در روش لاگرانژ [۱۴]

همانگونه که ملاحظه می‌شود، در اینجا، زمان حرکت به صورت تابعی از متغیر z محاسبه می‌شود که نحوه ارتباط آن در شکل (۳) نمایش یافته است.

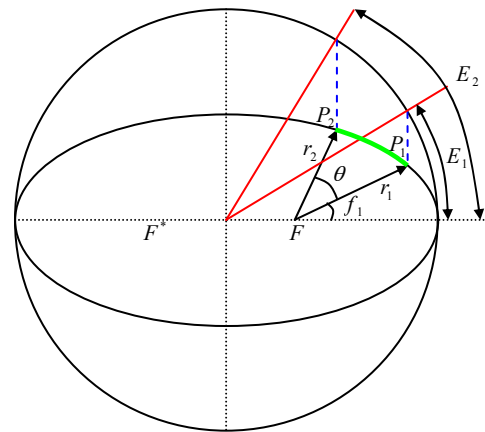


شکل ۳- زمان انتقال مداری به صورت تابعی از متغیر z در روش گاوس [۱۴]

ایده‌ای که در روش باتین دنبال می‌شود، دستیابی به روشی است که مزایای روش‌های گاوس و لاگرانژ را در بر داشته و در عین حال، محدودیت کمتری داشته باشد. در این راستا پس از بررسی‌های انجام شده، رابطه زیر بین متغیرهای لاگرانژ و گاوس یافته شده است:

$$\eta = y - \lambda x \quad (9)$$

و در نتیجه، مجموعه روابط زیر حاصل می‌شود:



شکل ۱- پارامترهای هندسی مورد نیاز در حل مسئله لامبرت

### روش باتین

بیان اولیه مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = 2a^{\frac{3}{2}}(\psi - \sin\psi \cos\phi) \\ r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos\psi \cos\phi) \\ c = 2a \sin\psi \sin\phi \\ \lambda s = a(\cos\psi - \cos\phi) \end{cases} \quad (2)$$

که در رابطه فوق، تعاریف زیر را داریم (شکل ۱):

$$\psi = \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \quad , \quad \cos\phi = e \cos \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \quad (3)$$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + c) \\ \lambda^2 = \frac{s - c}{s} \end{cases} \quad (4)$$

مقدمه بیان روش باتین، معرفی روش‌های لاگرانژ و گاوس است که پایه و اساس روش باتین است. روش لاگرانژ منتهی به رابطه زیر خواهد شد:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a_m^3}}(t_2 - t_1) = \frac{4}{3}F\left(3, 1, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}(1-x)\right) - \frac{4}{3}\lambda^3 F\left(3, 1, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}(1-y)\right) \quad (5)$$

که در آن داریم:

$$\alpha = \phi + \psi \quad , \quad \beta = \phi - \psi \quad (6)$$

$$x = \cos \frac{1}{2}\alpha \quad , \quad y = \cos \frac{1}{2}\beta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1-a_m}{a}} \\ y = \sqrt{1-\lambda^2(1-x^2)} \end{cases} \quad (7)$$

بنا بر رابطه فوق، زمان انتقال مداری تنها وابسته به متغیر x خواهد بود که در شکل (۲) برای مقادیر مختلف x زمان انتقال مداری نمایش یافته است. در روش دیگری که توسط گاوس توسعه داده شده است با تغییر متغیر  $z = \sin^2 \frac{\psi}{2}$  در نهایت رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$s = \frac{(r_1 + r_2 + c)}{2} \quad (21)$$

$$a_m = \frac{s}{2} \quad (22)$$

$$c = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta)} \quad (23)$$

### فرمول‌بندی حل به روش زارچان

در روش زارچان، از این فرض استفاده می‌شود که بردار سرعت مطلوب، در صفحه حاصله از بردارهای موقعیت ابتدا و انتهای مسیر حرکت قرار خواهد داشت. با داشتن زاویه اولیه مسیر پرواز و فاصله نقطه اولیه مورد نظر از مرکز گرانش، سرعت اولیه مورد نیاز برای رسیدن به نقطه‌ای با فاصله نهایی معین از مرکز گرانش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \sqrt{\frac{g(1 - \cos \varphi)}{r_0 \cos \gamma_L [(r_0 \cos \gamma_L / r_f) - \cos(\varphi + \gamma_L)]}} \quad (24)$$

که در آن  $\varphi$  عبارت است از زاویه مرکزی بین بردار ابتدا و بردار انتهای پرواز،  $\gamma_L$  عبارتست از زاویه بردار سرعت اولیه نسبت به افق محلی،  $r_0$  فاصله بین مرکز زمین تا نقطه آغازین حرکت و  $r_f$  فاصله بین مرکز زمین تا نقطه نهایی مطلوب است.

با مشخص بودن بردارهای اولیه و نهایی، زاویه  $\varphi$  به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\varphi = \cos^{-1} \left( \frac{|\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_f|}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_f|} \right) \quad (25)$$

از سوی دیگر، مدت زمان مورد نیاز برای حرکت در یک مسیر بیضوی به طول زاویه‌ای  $\varphi$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$t_f = \frac{r_0}{V_L \cos \gamma_L} \left\{ \frac{\tan \gamma_L (1 - \cos \varphi) + (1 - \lambda) \sin \varphi}{(2 - \lambda) \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{\lambda \cos^2 \gamma_L} + \frac{\cos(\gamma + \varphi)}{\cos \gamma_L} \right]} + \frac{2 \cos \gamma_L}{\lambda \left( \frac{2}{\lambda} - 1 \right)^{1.5}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda} - 1}}{\cos \gamma_L \cot \frac{\varphi}{2} - \sin \gamma_L} \right) \right\} \quad (26)$$

که در آن  $V_L$  مقدار سرعت لازمه و  $\lambda$  نیز عبارت است از:

$$\lambda = \frac{r_0 V_L^2}{gm} \quad (27)$$

با توجه به روابط ۲۴ الی ۲۶ می‌توان  $\varphi$  و  $V_L$  و  $t_f$  را به صورت توابع تحلیلی از  $r_0$ ،  $r_f$  و  $\gamma_L$  به دست آورد. به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \varphi &= f(r_0, r_f) \\ V_L &= f(r_0, r_f, \varphi, \gamma_L) \\ t_f &= f(V_L, \varphi, \gamma_L) \end{aligned} \quad (28)$$

با توجه به روابط فوق، سناریوی حل به صورت زیر امکان‌پذیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1 - \lambda^2 (1 - x^2)} \\ \eta &= y - \lambda x \\ z &= \frac{1}{2}(1 - \lambda - x\eta) \\ Q &= \frac{4}{3}F\left(3, 1, \frac{5}{2}, z\right) \\ \Delta t &= \sqrt{\frac{a_m^3}{\mu}} (\eta^3 Q + 4\lambda\eta) \end{aligned} \quad (10)$$

بنابراین در اینجا متغیر  $x$  در فرایند تکرار تا همگرایی مورد استفاده قرار می‌گیرد و بر این اساس، روابط نهایی مورد استفاده به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a_m^3}{\mu}} \left( \frac{4\eta_i^3}{3 - 3.6z_i G_z} + 4\lambda\eta_i \right) \quad (11)$$

$$= \sqrt{\frac{a_m^3}{\mu}} \left( \frac{4\eta_i^2 \left( \frac{\lambda^2 x_L}{y_i} - \lambda \right)}{1 - 1.2z_i G_z} - \frac{2}{3} \eta_i^3 \left( \eta_i + x_i \left( \frac{\lambda^2 x_L}{y_i} - \lambda \right) \right) DG_z + 4\lambda \left( \frac{\lambda^2 x_L}{y_i} - \lambda \right) \right) \quad (12)$$

در رابطه فوق داریم:

$$G_z = G(z_i) \quad (13)$$

$$DG_z = \frac{6 - 3.6G_z}{2(1 - z_i)(1 - 1.2z_i G_z)} \quad (14)$$

که در آن:

$$G(z) = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_2 z}{1 - \frac{\gamma_3 z}{1 - \frac{\gamma_4 z}{\dots}}}} \Rightarrow \gamma_n = \begin{cases} \frac{(n+2)(n+5)}{(2n+1)(2n+3)} & n \text{ odd} \\ \frac{n(n-3)}{(2n+1)(2n+3)} & n \text{ even} \end{cases} \quad (15)$$

به این ترتیب با استفاده از روش نیوتون رافسون، امکان انجام یک فرایند تکرار، تا همگرایی و دست یافتن به مدار مورد نظر فراهم می‌شود. مشخصه‌های مدار حاصله و بردار سرعت مورد نیاز در نقطه اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$a = \frac{a_m}{1 - x_{i+1}^2} \quad (16)$$

$$p = \frac{r_1 r_2 (1 - \cos \theta)}{a(1 - \cos(\Delta E))} \quad (17)$$

$$\vec{v}_r = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin \theta} \left( (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{r_2}{p} (1 - \cos \theta) \vec{r}_1 \right) \quad (18)$$

که در روابط فوق داریم:

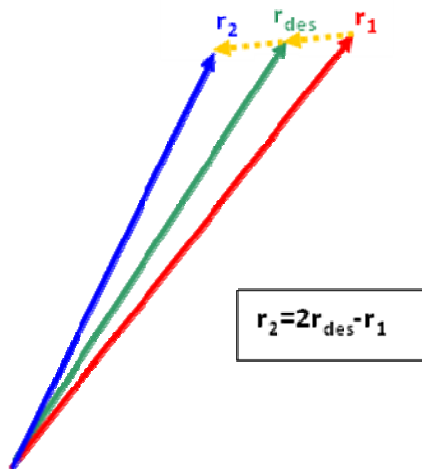
$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{r_1 r_2} \right) \quad (19)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{s - c}{s}} \quad (20)$$

متفاوت است و در واقع چالش اصلی سیستم‌های هدایت، دستیابی به روشی کارآمد و با حداقل بار محاسباتی برای دستیابی به حل دقیق است. از یک طرف در نظر نگرفتن عوامل اغتشاشی، خطاهای قابل توجهی را باعث خواهد شد و تأثیر بسیار نامطلوبی بر عملکرد روش هدایتی دارد. از طرف دیگر استفاده از یک مدل سنگین، کارایی الگوریتم را به عنوان یک روش صریح با قابلیت کاربری برخط با چالش قابل ملاحظه‌ای مواجه خواهد ساخت. روش پیشنهاد شده در این پژوهش، تمامی این مشکلات را حل نموده و به شکل مطلوبی حل مسئله را به انجام می‌رساند.

### روش بردار جابه‌جایی مجازی

ایده اصلی روش پیشنهادی، پوشش دادن اثر کلیه عوامل اغتشاشی در نظر گرفته نشده در حل مسئله لامبرت از طریق استفاده از بردار جابه‌جایی مجازی به منظور دستیابی به هدف مجازی است. مفهوم این موضوع، به این شکل قابل طرح است که با در نظر گرفتن نقطه نهایی واقعی و حل مسئله لامبرت روی مسیر نامی، میزان مشخصی ایمپالس برای تصحیح مسیر حرکت محاسبه می‌شود که اعمال آن روی مسیر نامی (که اساساً نیازی به ایمپالس تصحیح ندارد)، ایجاد خطا خواهد کرد. طبیعتاً چنانچه از ابتدا به وسیله یک بردار جابه‌جایی، نقطه نهایی مورد استفاده در حل مسئله لامبرت تغییر داده شود، ایمپالس تصحیح و به تبع آن خطا روی مسیر نامی تغییر خواهد کرد. هدف، انتخاب بردار جابه‌جایی است به گونه‌ای که با در نظر گرفتن آن، ایمپالس تصحیح روی مسیر نامی صفر شود. ساده‌ترین روشی که در این خصوص قابل استفاده است، در شکل (۵) نمایش یافته است.



شکل ۵- ساده‌ترین روش تعیین موقعیت هدف مجازی

برای استفاده از این روش، کافی است از مسیر نامی که طبیعتاً از نقطه نهایی عبور می‌کند، استفاده شود. برای این منظور، برای هر

• در نظر گرفتن فرض اولیه مناسبی برای زاویه بردار سرعت با افق در صفحه حرکت

• محاسبه سرعت و زمان کل با استفاده از روابط ۲۴ و ۲۶

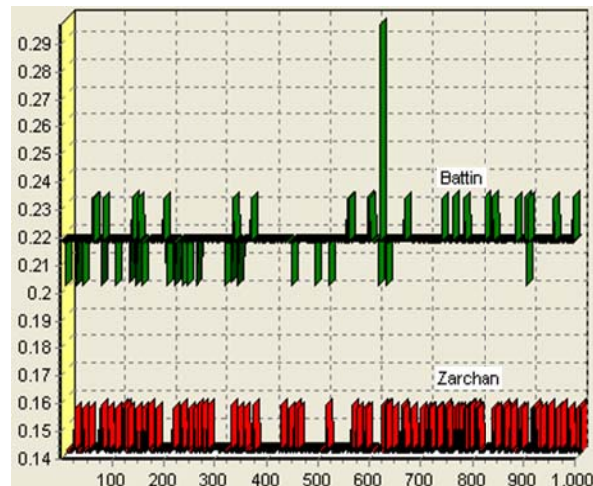
• مقایسه زمان حاصله با زمان مطلوب و اصلاح زاویه بردار سرعت با افق به صورت تابعی از اختلاف زمان حاصله اصلاح زاویه با افق، به صورت تابع میزان اختلاف زمان حرکت حاصله با زمان حرکت مطلوب، بر اساس رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(t_{DES} - t_n)}{(t_n - t_{n-1})} \quad (29)$$

در رابطه فوق،  $t_{DES}$  زمان برنامه‌ریزی شده برای انجام مأموریت یا زمان مطلوب است.

### مقایسه روش‌های حل مسئله لامبرت

برای تدوین الگوریتم هدایتی، روش‌های باتین و زارچان مورد مقایسه قرار گرفت. برای این منظور، در هزار وضعیت تصادفی، برای هر وضعیت، ۱۰۰۰۰ بار هر یک از دو الگوریتم مورد اجرا قرار گرفت و زمان حل محاسبه شد. همانگونه که شکل (۴) نشان می‌دهد، در این مسئله روش زارچان، سرعت بالاتری را به نمایش گذاشته است. بنابراین در نهایت روش زارچان برای استفاده در الگوریتم هدایتی انتخاب شد.



شکل ۴- مقایسه عملکرد روش‌های زارچان و باتین

### فرضیات در نظر گرفته شده در تقابل با واقعیت

همانگونه که گفته شد، روش‌های پیشنهاد شده برای حل مسئله لامبرت، مبتنی بر مکانیک کپلری هستند و از این رو میدان گرانش را به صورت کره‌ای همگن در نظر می‌گیرد که فاقد هر گونه عامل اغتشاشی از قبیل آیرودینامیک است. اما در عمل واقعیت با این فرضیات

از رابطه :

$$\bar{R}_{i+1} = \bar{R}_i - \frac{|\Delta \bar{V}_1|}{|\Delta \bar{V}_1| - |\Delta \bar{V}_2|} \nabla \bar{f} \quad (32)$$

برای اصلاح بردار جابه‌جایی مجازی استفاده می‌شود. فرایند تکرار فوق تا همگرایی کامل ادامه خواهد یافت. نکته مهمی که باید در نظر گرفته شود این است که ثابت در نظر گرفتن بردار جابه‌جایی مجازی صحیح نیست و عملکرد الگوریتم هدایتی را مخدوش می‌سازد. در حقیقت، اینکه هدایت در چه زمانی انجام شود یا اینکه مدت زمان انجام مأموریت چقدر باشد بر اندازه بردار جابه‌جایی مجازی تأثیر گذار است.

### بحثی در خصوص بردار جابه‌جایی مجازی در مأموریت یک مدول زیرمداری

با مشخص شدن روش محاسبه بردار جابه‌جایی مجازی، حال این سؤال پیش می‌آید که در مأموریت یک مدول زیرمداری چه عواملی بر پارامتر مذکور مؤثر بوده و این پارامتر به چه صورت باید در نظر گرفته شود. شکل‌های (۶) و (۷) اثر تغییر زمان کل حرکت را بر موقعیت هدف مجازی در یک مسیر نمونه نشان می‌دهد. منظور از هدف مجازی، بردار موقعیت نهایی مطلوب با اعمال بردار جابه‌جایی مجازی است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، تغییر زمان کل انجام مأموریت کاملاً بر موقعیت هدف مجازی مؤثر است و لذا چنانچه زمان مورد نظر برای انجام مأموریت، تغییر قابل توجهی کند، دیگر نمی‌توان از هدف مجازی قبلی استفاده کرد. شکل‌های (۸) و (۹)، اثر تغییر زمان اعمال ایمپالس هدایتی بر موقعیت هدف مجازی را نشان می‌دهد. باز هم ملاحظه می‌شود که هدف مجازی متغیر خواهد بود. با توجه به بررسی‌های انجام شده، چنانچه کل مدت زمان انجام مأموریت برای اجرای هدایت مد نظر باشد، لازم است هدف مجازی در طول زمان محاسبه شده و برای تأمین دقت مطلوب در الگوریتم هدایت بارگذاری شود. به‌علاوه پارامترهای تأثیرگذاری چون زمان کل انجام مأموریت نیز نباید تغییر قابل توجهی کند. به عنوان نمونه شکل (۱۰) نشان می‌دهد چنانچه با هدف مجازی ثابت، زمان کل مأموریت تغییر زیادی یابد، ایمپالس مورد نیاز نیز افزایش چشمگیری خواهد یافت. در این موارد، چنانچه تغییر مأموریت به صورت از پیش تعیین شده مد نظر باشد، لازم است تصحیحات مربوط به هدف مجازی نیز لحاظ شود.

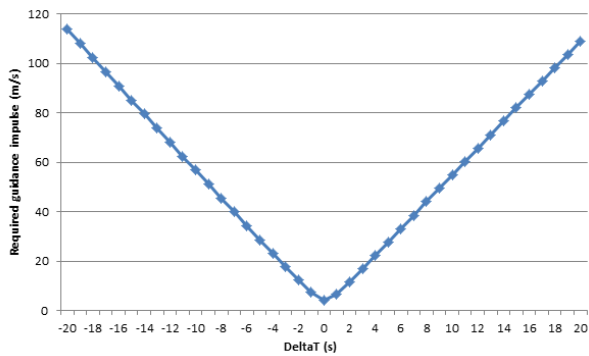
نقطه اولیه تحت بررسی برای یافتن بردار جابه‌جایی مجازی، مسئله لامبرت حل شده و بر این اساس، میزان سرعت محاسبه شده با حل لامبرت، مورد استفاده قرار می‌گیرد. بر این اساس، نقطه نهایی حاصله، محاسبه شده و با مقایسه نقطه مطلوب، بردار جابه‌جایی مجازی مناسب با استفاده از رابطه برداری ارائه شده در شکل (۵) تعیین می‌شود. این روش، برای وضعیت‌هایی قابل استفاده خواهد بود که ایمپالس محاسبه شده روی مسیر نامی، مقدار زیادی نداشته باشد و در بسیاری از موارد، دقت کافی با استفاده از این روش تأمین نخواهد شد. از طرف دیگر چنانچه محاسبه بردار جابه‌جایی مجازی برای نقاط متعددی از مسیر حرکتی مد نظر باشد، حجم محاسبات پیش از مأموریت افزایش چشمگیری خواهد یافت و در واقع برای هر نقطه حداقل یک اجرای شبیه‌سازی پرواز ضروری خواهد بود.

روش پیشنهاد شده در این مقاله، علاوه بر اینکه دقت بسیار بالایی دارد، حجم محاسبات آن نیز به مراتب کمتر از روش قبل است و در واقع با یک بار شبیه‌سازی پرواز، امکان محاسبه بردار جابه‌جایی مجازی برای کلیه نقاط وجود خواهد داشت. در این روش، باز هم مسیر نامی مورد استفاده قرار می‌گیرد اما این بار، استراتژی به این صورت خواهد بود که بردار جابه‌جایی مجازی، برداری است که با لحاظ کردن آن در مسئله لامبرت برای هر نقطه روی مسیر نامی، بردار سرعت مورد نیاز، برابر بردار سرعت نامی در لحظه موردنظر باشد. به عبارت دیگر، اگر تابع اسکالری با ورودی برداری را در نظر بگیریم که ورودی آن بردار جابه‌جایی و خروجی آن مقدار ایمپالس مورد نیاز برای اصلاح مسیر باشد، هدف دستیابی به میزانی از بردار جابه‌جایی است که خروجی مرتبط با آن، برای مسیر نامی صفر باشد. به این ترتیب، مسئله، تبدیل به یک مسئله بهینه‌سازی با هدف مینیمم کردن یک تابع اسکالر با ورودی بردار جابه‌جایی خواهد شد. برای حل این مسئله، روش بهینه‌سازی در مسیر بیشترین شیب را می‌توان پیشنهاد کرد. در این روش، حرکت در راستای منفی گرادیان سرعت مورد نیاز نسبت به بردار جابه‌جایی انجام می‌گیرد. در واقع داریم:

$$\vec{\Delta v} = f(\vec{R}_{vt}, T, \vec{R}_0, \vec{V}_0, \vec{R}_f) \quad (30)$$

که با توجه به ثابت بودن موقعیت و سرعت ابتدا و انتهای بازه و زمان مأموریت، می‌توان آن را در یک لحظه خاص، فقط تابعی از بردار جابه‌جایی مجازی دانست. برای انتخاب گام جستجو، فرض کنیم در مرحله  $i$  ام برای بردار جابه‌جایی مجازی  $\vec{R}_1$ ، مقدار  $\vec{\Delta v}_1$  حاصل شده باشد. با محاسبه

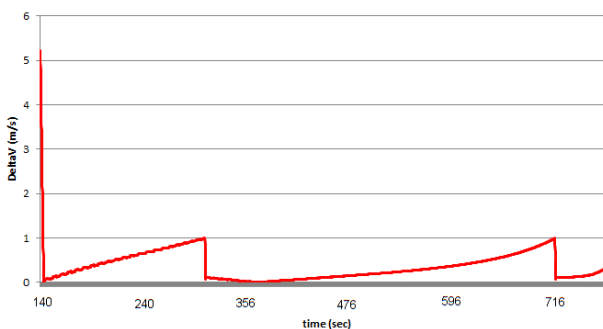
$$\vec{\Delta v}_2 = f(\vec{R}_i - \nabla \bar{f}(\vec{R}_i, T, \vec{R}_0, \vec{V}_0, \vec{R}_f), T, \vec{R}_0, \vec{V}_0, \vec{R}_f) \quad (31)$$



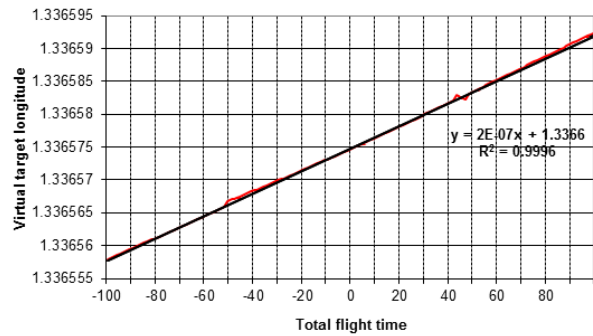
شکل ۱۰- نحوه تغییر میزان ایمپالس مورد نیاز برای هدایت با تغییر زمان کل حرکت برنامه‌ریزی شده از ۲۰ ثانیه کمتر تا ۲۰ ثانیه بیشتر از زمان نامی مأموریت

### الگوی پیاده‌سازی هدایت

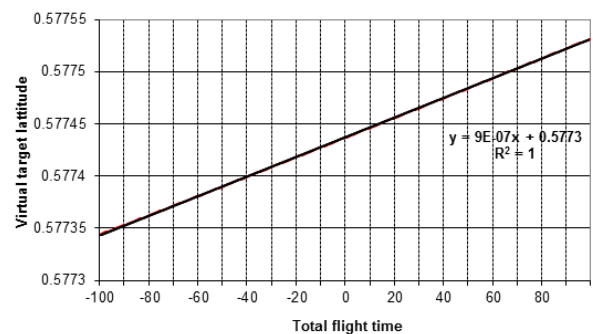
نحوه عملکرد سیستم هدایت به این صورت است که الگوریتم هدایت در هر لحظه ایمپالس مورد نیاز برای تصحیح مسیر حرکت و رسیدن به نقطه نهایی مطلوب را محاسبه می‌کند. طبیعتاً چنانچه مسیر حرکت از مسیر نامی منحرف نشده باشد ایمپالس مورد نیاز، نزدیک به صفر بوده و نیازی به تغییر مسیر حرکتی نیست. اما چنانچه مقدار ایمپالس از حد تعیین شده برای مأموریت بیشتر شود، فرامین زاویه‌ای محاسبه شده به طور مداوم، توسط سیستم کنترل اجرا شده و به محض رسیدن به وضعیت زاویه‌ای مورد نظر، موتور هدایت روشن شده و ایمپالس مورد نیاز را تأمین خواهد کرد. در مدت زمان عملکرد موتور هدایت، وضعیت زاویه‌ای مطابق فرمان سیستم هدایت باقی خواهد ماند. البته این فرامین مقدار تقریباً ثابتی داشته و حتی می‌توان مقدار اولیه را تا پایان دنبال کرد. با توجه به اینکه در این بررسی هدف ارزیابی عملکرد الگوریتم هدایتی است، سیستم کنترل ایده‌آل در نظر گرفته شده و فرض می‌شود فرامین داده شده توسط سیستم هدایت به‌طور کامل اجرا شده و راستای مورد نظر تأمین شود. با روشن شدن موتور هدایت، ضربه مورد نیاز برای تصحیح مسیر شروع به کاهش می‌نماید که با کمتر شدن آن از حد تعیین شده موتور هدایت خاموش خواهد شد. نحوه کنترل ایمپالس به طور نمونه در شکل (۱۱) برای یک مسیر نمونه نمایش یافته است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، روشن شدن موتور هدایت در سه مرحله، خطا را تحت کنترل در آورده است.



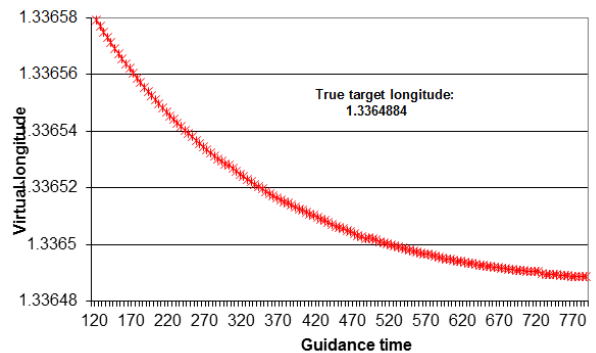
شکل ۱۱- تغییرات ایمپالس مورد نیاز در یک مسیر هدایت شده مشخص



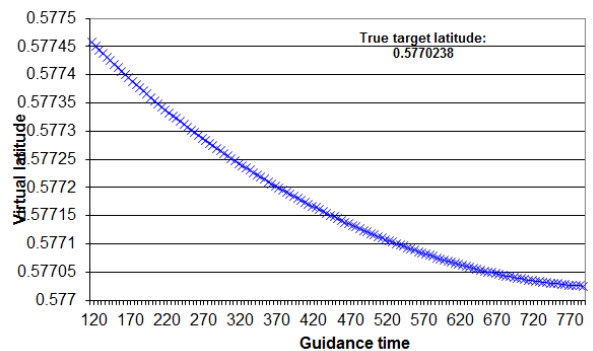
شکل ۶- تأثیر زمان کل انجام مأموریت بر طول جغرافیایی هدف مجازی (طول جغرافیایی حقیقی هدف برابر ۱.۳۳۶۴۸۸۴)



شکل ۷- تأثیر زمان کل انجام مأموریت بر عرض جغرافیایی هدف مجازی (عرض جغرافیایی حقیقی هدف برابر ۰.۵۷۷۰۲۳۸)



شکل ۸- تأثیر زمان اعمال ایمپالس هدایت بر طول جغرافیایی هدف مجازی



شکل ۹- تأثیر زمان اعمال ایمپالس هدایت بر عرض جغرافیایی هدف مجازی

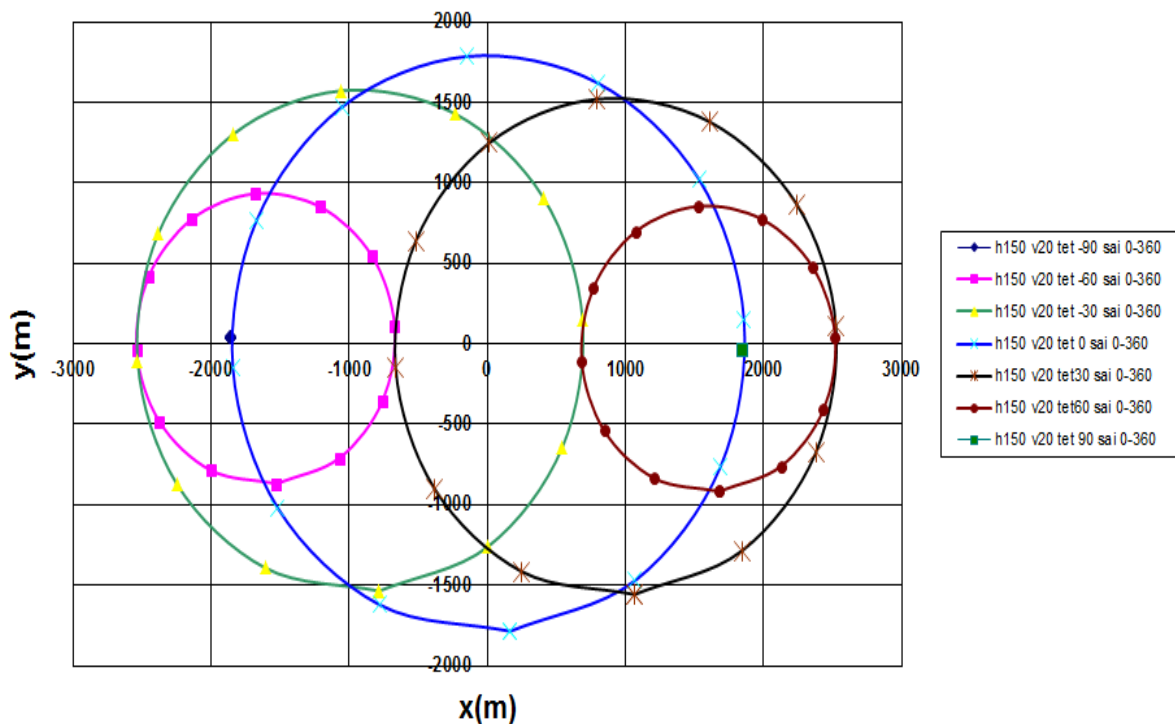


### اثر اعمال ایмпالس در مأموریت یک مدول زیرمداری

قبل از بحث در خصوص روش‌های هدایتی، در این بخش بررسی کلی در خصوص اثر اعمال ضربه بر میزان جابه‌جایی نقطه‌نهایی مسیر حرکت یک مدول بازگشت‌پذیر انجام خواهد شد. برای این منظور، اثر اعمال ضربه‌ای برابر ۲۰ متر بر ثانیه در ارتفاع ۱۵۰ کیلومتری فاز بازگشت بررسی شده است. هدف از این بررسی، صرفاً ایجاد نوعی نگاه کیفی نسبت به اثر زاویه فضایی ایмпالس بر میزان جابه‌جایی نقطه‌نهایی است. برای این بررسی، زاویه‌های سمت صفر تا ۳۶۰ درجه نسبت به راستای شمال محلی و زاویه پیچ ۹۰- تا ۹۰+ درجه نسبت به افق محلی بررسی شده که مکان هندسی جابه‌جایی نقطه‌نهایی در شکل (۱۲) نمایش یافته است. در واقع این گراف به طراح سیستم کمک می‌کند تا میزان تأثیر یک مانور مشخص را مورد ارزیابی قرار دهد.

واقع در مسیر حرکتی ماژول زیر مداری، هدف، رسیدن به نقطه ثانویه مطلوبی است که ارتفاع پایینی داشته و لذا تحت تأثیر نیروهای آیرودینامیکی و از طرف دیگر اغتشاش گرانشی ناشی از بیضویت زمین می‌باشد. وسیله تحت بررسی، دارای موتور هدایتی و سیستم کنترل وضعیت می‌باشد. برای اصلاح مسیر حرکت، قبل از ورود به جو، ابتدا وسیله در راستای مطلوب محاسبه شده توسط الگوریتم هدایت قرار خواهد گرفت و در ادامه موتور هدایتی شروع به کار خواهد نمود. در مدت زمان عملکرد موتور هدایتی، وضعیت زاویه ای جسم پرنده تحت کنترل و مطابق با فرامین صادر شده توسط سیستم هدایت خواهد بود و در انتهای عملکرد سیستم هدایت، جسم به وضعیت زاویه ای اولیه باز خواهد گشت.

برای ارزیابی روش هدایتی اتخاذ شده، دو مسیر حرکتی مورد بررسی قرار گرفت. در مسیر حرکتی الف، در لحظه اولیه، مدول در طول و عرض جغرافیایی صفر درجه، ارتفاع ۱۰۰ کیلومتر و سرعت ۳



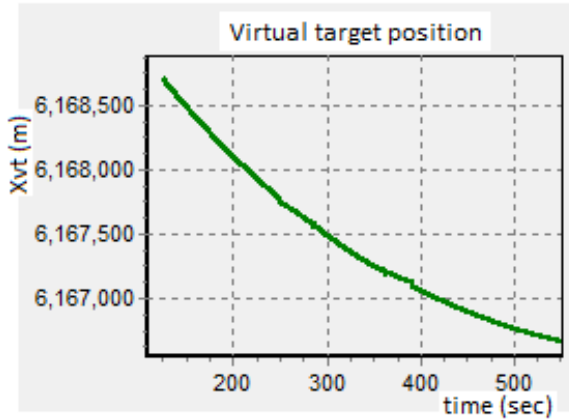
شکل ۱۲- اثر اعمال ایмпالس در زاویه‌های مختلف فضایی در برد ۱۰۰۰ کیلومتر بر نقطه برخورد

### بررسی و حل مسئله‌های نمونه

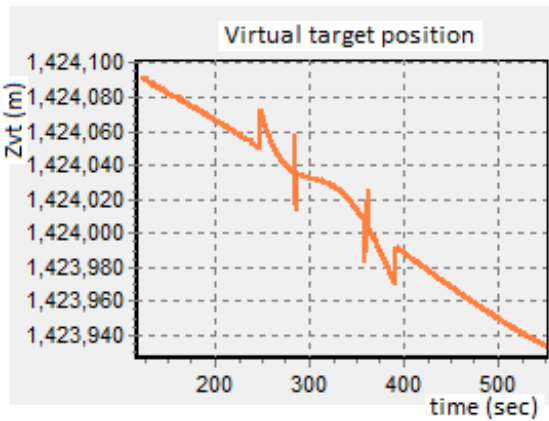
به منظور ارزیابی الگوریتم تدوین شده، دو مسئله هدایت تحت بررسی قرار می‌گیرد. در هر دو مسئله، با شروع از نقطه اولیه‌ای

کیلومتر بر ثانیه با زاویه ۴۰ درجه نسبت به افق محلی قرار دارد. مولفه‌های موقعیت و سرعت در دستگاه اینرسی از این لحظه تا پایان مأموریت، در شکل‌های (۱۳) الی (۱۶) نمایش یافته است.

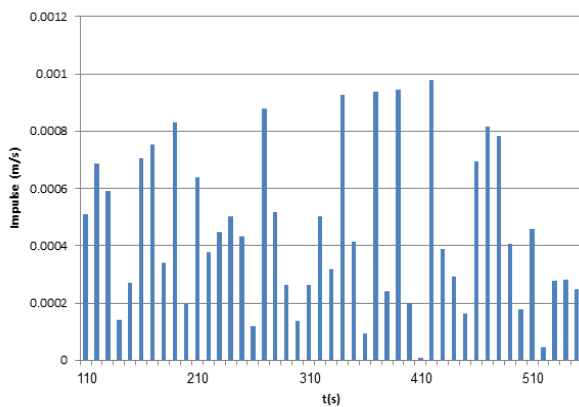
برای مسیر حرکتی اتخاذ شده، محاسبه موقعیت هدف مجازی صورت پذیرفت که در نتیجه، مؤلفه‌های هدف مجازی در طول زمان به صورت نشان داده شده در شکل‌های (۱۷) و (۱۸) محاسبه شد. شاخص دقت حل در شکل (۱۹) نمایش یافته است.



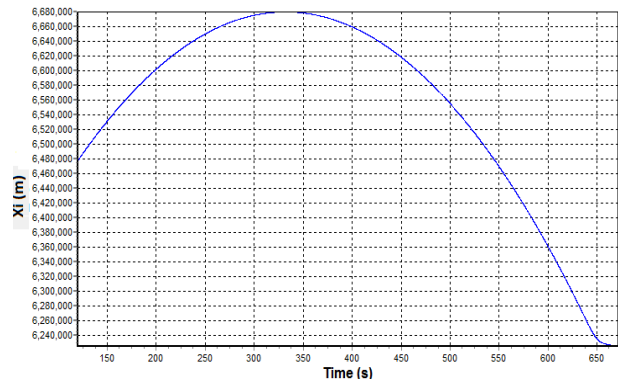
شکل ۱۷- موقعیت مؤلفه X بردار هدف مجازی تولید شده در مدت زمان انجام مأموریت



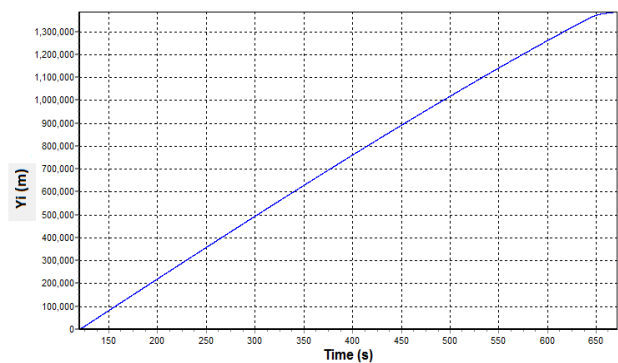
شکل ۱۸- موقعیت مؤلفه Z بردار هدف مجازی تولید شده در مدت زمان انجام مأموریت



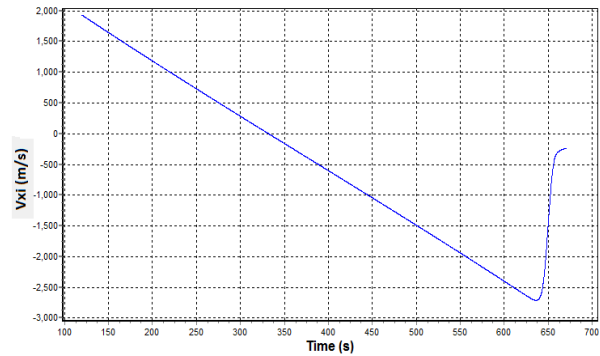
شکل ۱۹- شاخص خطای روش انتخاب شده در مدت زمان انجام مأموریت



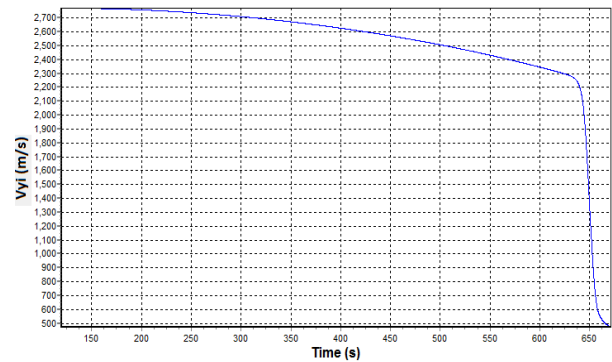
شکل ۱۳- مؤلفه X بردار موقعیت در دستگاه اینرسی (مسیر حرکتی الف)



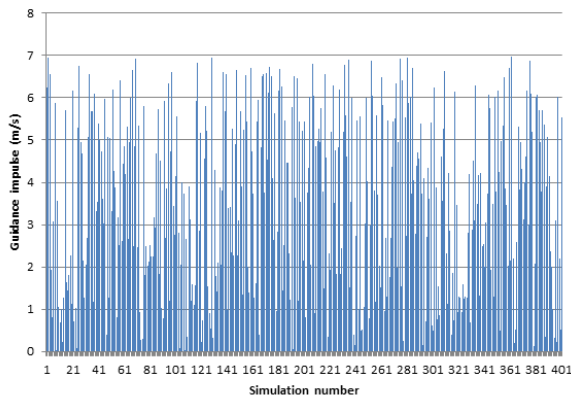
شکل ۱۴- مؤلفه Y بردار موقعیت در دستگاه اینرسی (مسیر حرکتی الف)



شکل ۱۵- مؤلفه X بردار سرعت در دستگاه اینرسی (مسیر حرکتی الف)

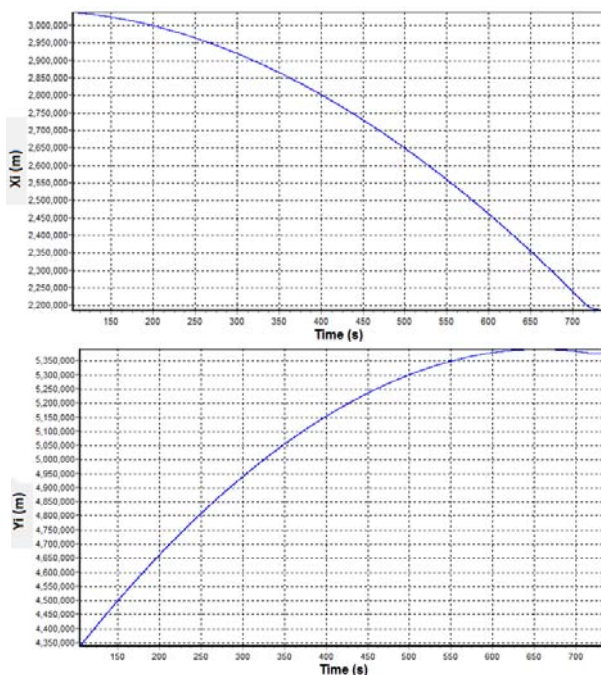


شکل ۱۶- مؤلفه Y بردار سرعت در دستگاه اینرسی (مسیر حرکتی الف)

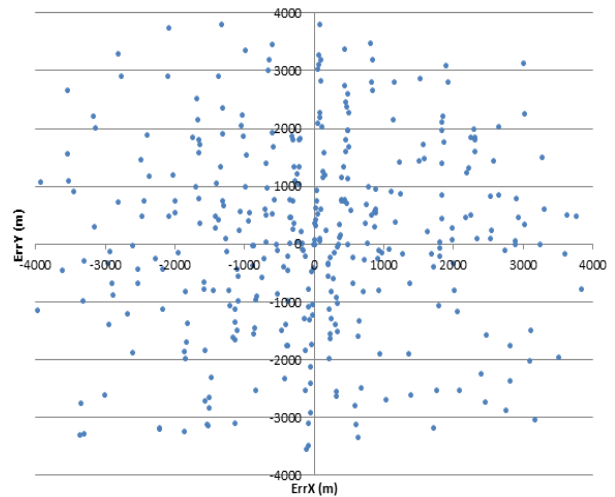


شکل ۲۲- مدت زمان عملکرد موتور هدایت متناظر با وضعیت‌های هدایت‌شده در شکل ۲۱

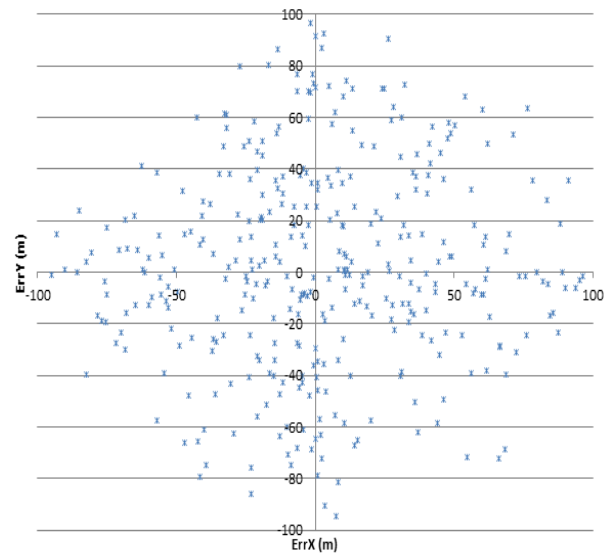
در بررسی بعدی، مسیر حرکتی (ب) که در خارج از صفحه استوا واقع شده است مورد بررسی قرار گرفت. مؤلفه‌های بردار موقعیت و سرعت اینرسی مربوط به این مسیر در شکل (۲۳) نمایش یافته است. مشخصه‌های هدف مجازی مربوط به این مسیر در شکل (۲۴) نمایش داده شده است. خطای نهایی، بدون هدایت و با اعمال هدایت در ۲۰۰ وضعیت با خطای تصادفی در شکل‌های (۲۵) و (۲۶) مشاهده می‌شود. میزان ایمپالس هدایتی هر یک از وضعیت‌های هدایت شده را نیز می‌توان در شکل (۲۷) ملاحظه کرد. باز هم عملکرد مناسب روش هدایتی و جبران خطا به طور کامل مشهود است. برای افزایش بیشتر دقت، می‌توان با کنترل مقدار ایمپالس بعد از اعمال ضربه اول، تعداد ایمپالس‌ها را افزایش داد که بهبود دقت را در پی خواهد داشت.



بر اساس منابع خطای در نظر گرفته شده که در موقعیت و سرعت به ترتیب ۱۰۰۰ متر و ۵ متر بر ثانیه (مقدار ۳۵) است، بدون اعمال هدایت، خطا در رسیدن به نقطه از پیش تعیین شده در ۴۰۰ اجرای تصادفی، مطابق شکل (۲۰) محاسبه شد. با در نظر گرفتن موتور هدایت با پیشران ۱۰۰۰ نیوتن و حداکثر مدت اعمال پیشران ۱۰ ثانیه، خطا به صورت نشان داده شده در شکل (۲۱) کاهش یافت.

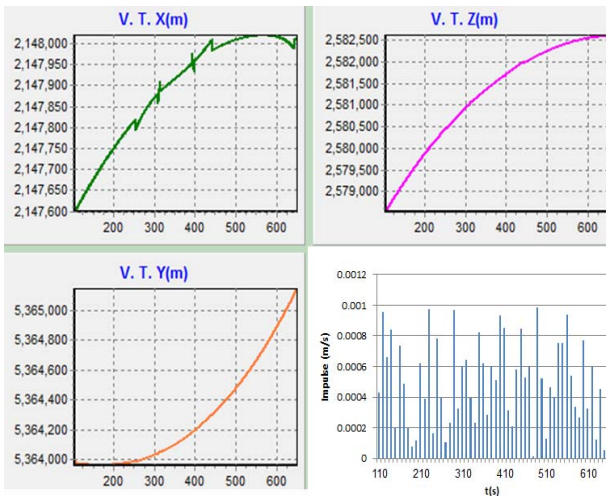


شکل ۲۰- میزان انحراف از موقعیت مطلوب نهایی قبل از اعمال هدایت

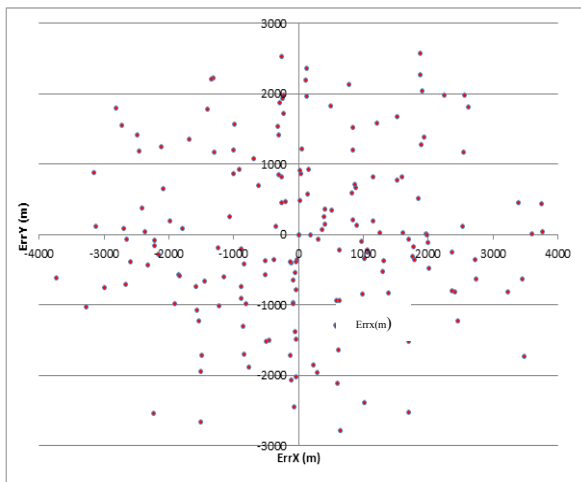


شکل ۲۱- میزان انحراف از موقعیت مطلوب نهایی بعد از اعمال هدایت

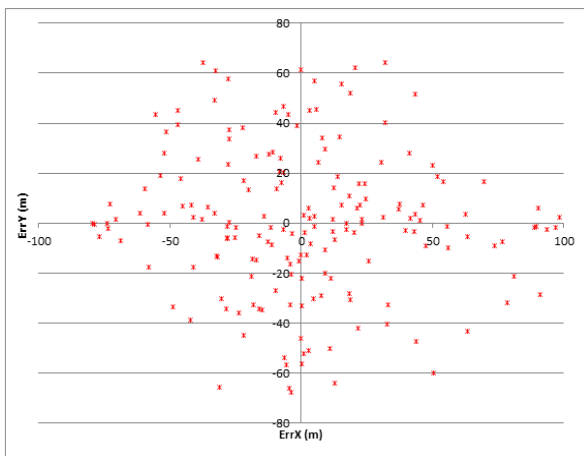
همانگونه که ملاحظه می‌شود، خطا به شکل بسیار مناسبی کاهش یافته و دقت، افزایش چشمگیری یافته است. برای دستیابی به دقت فوق، مدت زمان عملکرد موتور هدایتی در وضعیت‌های در نظر گرفته شده، به صورت نشان داده شده در شکل (۲۲) خواهد بود.



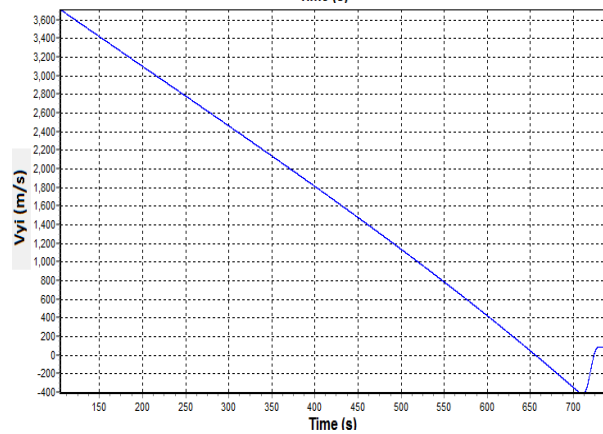
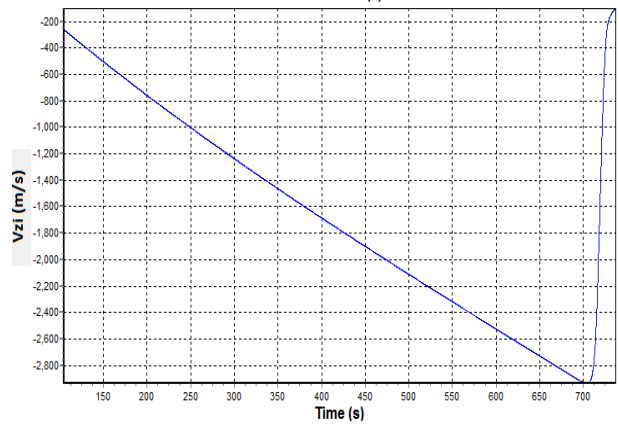
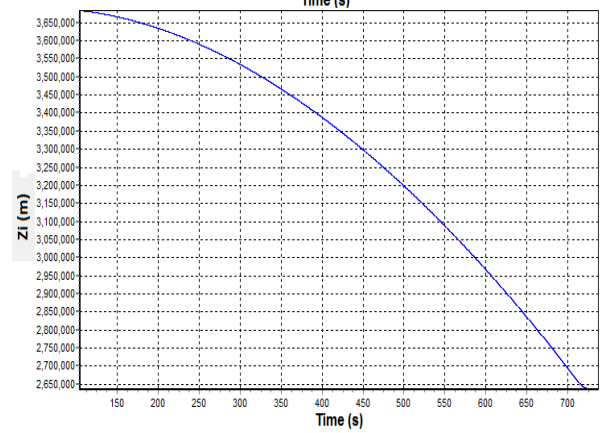
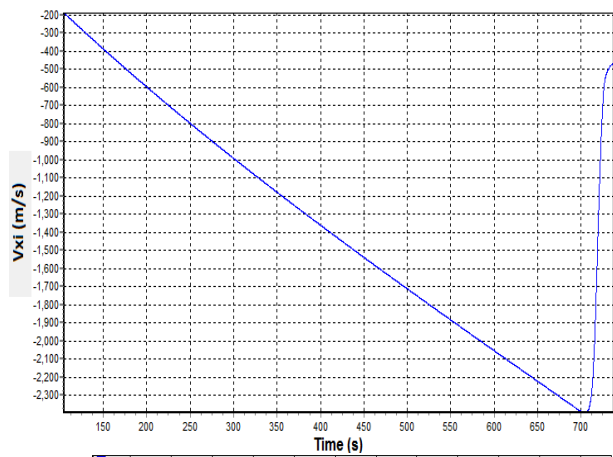
شکل ۲۴ - مؤلفه‌های بردار موقعیت هدف مجازی به همراه ارزیابی عملکرد بردار مزبور برای مسیر ب



شکل ۲۵ - پراکندگی حاصله از اعمال خطای تصادفی برای مسیر ب

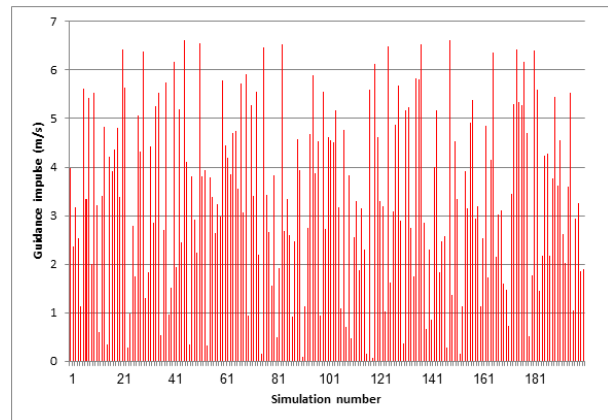


شکل ۲۶ - پراکندگی حاصله از اعمال خطای تصادفی برای مسیر ب پس از اعمال هدایت



شکل ۲۳ - مؤلفه‌های بردار موقعیت و سرعت در دستگاه اینرسی برای مسیر حرکتی ب

- [3] Chawla, C., Sarmah, P. and Padhi, R., "Suboptimal Reentry Guidance of a Reusable Launch Vehicle Using Pitch Plane Maneuver," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 14, Issue 6, September 2010, pp. 377–386.
- [4] Song, E. J. and Jeon, M., "Real-time Midcourse Missile Guidance Robust Against Launch Conditions," *Control Engineering Practice*, Vol. 7, Issue 4, April 1999, pp. 507–515.
- [5] Song, E. J. and Jeon, M., "Real-Time Midcourse Guidance with Intercept Point Prediction," *Control Engineering Practice*, Vol. 6, Issue 8, August 1998, pp. 957–967.
- [6] Lin, Ch. L., Lin, Y. P. and Chen, K. M., "On the Design of Fuzzified Trajectory Shaping Guidance Law," *ISA Transactions*, Vol. 48, Issue 2, April 2009, pp. 148–155.
- [7] Bhat, M. S. and Shrivastava, S. K., "An Optimal Q-Guidance Scheme for Satellite Launch Vehicles," *Journal of Guidance, Control and Navigation*, Vol. 10, No. 1, 1987, pp. 53-60.
- [8] Circi, C. and Teofilatto, P., "On Optimality of Q-Guidance," *55<sup>th</sup> International Astronautical Congress*, Vancouver, Canada, 2004.
- [9] Circi, C., "Hybrid Methods and Q-Guidance for Rocket Performance Optimization," *Journal of Aerospace Engineering, Part. G.*, Vol. 218, No. 5, 2004, pp. 353-359.
- [10] Steven, L. N. and Zarchant, P., "Alternative Approach to the Solution of Lambert's Problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 4, July-August 1992, pp. 1003-1009.
- [11] Battin, R. H. and Vaughan, R. M., "An Elegant Lambert Algorithm," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 6, 1984, pp. 662-670.
- [12] Curtis, H. D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Elsevier, 2005.
- [13] Zarchan, P., "Tactical and Strategic Missile Guidance," *AIAA*, 1997.
- [14] Battin, R. H., "An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics," *AIAA Education Series*, 1999.
- [15] Battin, R. H., *Astronautical Guidance*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1964.



شکل ۲۷- مدت زمان عملکرد موتور هدایت متناظر با وضعیت‌های شکل ۲۶

## نتیجه‌گیری

از بین روش‌ها برای حل مسئله لامبرت، روش باتین با رویکرد کسرهای پیوسته و روش زارچان مورد استفاده قرار گرفت. مقایسه این دو روش در پیاده‌سازی یک سناریوی هدایت، نشان داد روش زارچان برای این منظور، سرعت بالاتری را به نمایش می‌گذارد. در عین حال دقت روش‌ها مشابه هم و در حد مطلوب است. به‌منظور لحاظ کردن اثرات نیروهای آیرودینامیکی در ورود به جو و سایر عوامل اغتشاشی، روش بردار جابه‌جایی مجازی معرفی شد که با سرعت و دقت مناسب، اثرات عوامل یاد شده را در اجرای هدایت حلقه بسته لحاظ می‌نماید. دو مأموریت هدایتی متفاوت بررسی شد که کارایی الگوریتم هدایتی را به‌طور کامل اثبات کرد.

## مراجع

- [1] Wu, L., Huang, Y. and Zhang, J., "The Design of Guidance on Suborbital Reentry," *2009 International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, Bangkok, Thailand, 1-2 February 2009.
- [2] Shen, Z., Lu, P., "On-board Entry Trajectory Planning for Sub-Orbital Flight", *Acta Astronautica*, Vol. 56, Issue 6, March 2005, pp. 573–591.