

Increasing Accuracy of Satellite Position Prediction with Considering Harmonics of Potential Function of the Earth

H. Bolandi¹, M. H. Ashtari^{2*}, M. Esmailzadeh³ and M. Haghparast⁴

1-4. Space Research Center, IRAN University of Science & Technology

*Farjam St., Tehran, IRAN

h_ashtari@iust.ac.ir

In this paper predicting of position of satellite based on extended kalman filter with considering hardware implementation consideration and simultaneously maintaining desired accuracy is investigated. For this purpose, first, effective forces on orbital dynamic and nonlinear equation of orbital motion are presented. In order to increasing accuracy of prediction in position of satellite, J₂, J₃ and J₄ harmonics of potential function of the earth are considered and future position of satellite is predicted using linearized dynamic model and applying EKF on this model. Here Measurement data are position and velocity vector of satellite which are extracted by GPS receivers. Since in this paper systematic satellite design is considered, scenario of "ON TIME" of GPS receivers based on power consumption considerations is discussed. Finally simulation results for a LEO satellite and comparing these results with STK results, shows accuracy of presented modeling and equations.

Key words: Satellite, Position determination, Orbital dynamic modeling, Extended kalman filter, Earth potential function

1. Associate Professor
2. PhD Student (Corresponding Author)
3. Assistant Professor
4. M. Sc

افزایش دقت پیش‌بینی موقعیت ماهواره با در نظر گرفتن هارمونیک‌های تابع پتانسیل زمین

حسین بلندی^۱، محمد حسن اشتری^{۲*}، سیدمجید اسماعیل‌زاده^۳ و مهران حق‌پرست^۴

۱- ۴- مرکز تحقیقات فضایی، دانشگاه علم و صنعت ایران

*تهران، خ فرجام

h_ashtari@iust.ac.ir

در این مقاله، رویه پیش‌بینی موقعیت ماهواره بر اساس فیلتر کالمن توسعه یافته و با مدنظر قرار دادن ملاحظات سخت‌افزاری پیاده‌سازی و در عین حال حصول دقت مطلوب در فرآیند تعیین موقعیت ماهواره مورد بررسی قرار گرفته است. در این راستا ابتدا نیروهای شاخص و مؤثر بر دینامیک مداری ماهواره مدلسازی و روابط غیرخطی حاکم بر حرکت مداری ماهواره ارائه شده است. به منظور افزایش دقت پیش‌بینی موقعیت ماهواره هارمونیک‌های J_2 ، J_3 و J_4 تابع پتانسیل زمین در معادلات دینامیک مداری لحاظ شده و با استفاده از خطی‌سازی دینامیک سیستم و اعمال فیلتر کالمن توسعه یافته EKF موقعیت آتی ماهواره پیش‌بینی می‌گردد. داده‌های اندازه‌گیری مورد استفاده، بردار موقعیت و سرعت ماهواره بوده که از گیرنده GPS حاصل می‌شوند. از آنجا که در این مقاله ملاحظات طراحی سیستمی ماهواره نیز مدنظر قرار گرفته است، لذا مدت زمان، سناریو روشن کردن گیرنده‌های GPS، بر اساس ملاحظات توان الکتریکی مصرفی مورد بحث قرار گرفته است، تا علاوه بر کاهش توان مصرفی، عملکرد زیر سیستم تعیین موقعیت با دقت مناسب ادامه یابد. در انتها با انجام شبیه‌سازی بر روی یک ماهواره ارتفاع پایین LEO و مقایسه نتایج با نرم‌افزار STK، صحت مدل‌سازی‌های انجام شده و روابط به‌کارگیری شده مورد تأیید قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: ماهواره، تعیین موقعیت، مدل‌سازی دینامیک مداری، فیلتر کالمن توسعه یافته، تابع پتانسیل زمین

علائم و اختصارات

ϕ	عرض جغرافیایی		
R_e	شعاع متوسط زمین در استوا		
μ	پارامتر جاذبه‌ای زمین	$i, \Omega, \omega, a, e, \theta$	پارامترهای شش‌گانه مداری
P_n^m	توابع لژاندر	x, y, z	مؤلفه‌های بردار موقعیت
C_n^m و S_n^m	هارمونیک‌های مشخصه توزیع جرمی زمین	v_x, v_y, v_z	مؤلفه‌های بردار سرعت
Γ_{m-b}	بردار موقعیت از ماه به ماهواره	a_x, a_y, a_z	مؤلفه‌های بردار شتاب
Γ_{s-b}	بردار موقعیت از خورشید به ماهواره	Φ	تابع پتانسیل گرانش زمین
Γ_{e-m}	بردار موقعیت از زمین به ماه	r	فاصله جسم تا مرکز زمین
Γ_{e-s}	بردار موقعیت از زمین به خورشید	λ	طول جغرافیایی
μ_m	ثابت گرانشی ماه		
μ_s	ثابت گرانشی خورشید		
∇	تابع گرادیان		

۱. دانشیار
۲. دانشجوی دکتری (نویسنده مخاطب)
۳. استادیار
۴. کارشناس ارشد

مقدمه

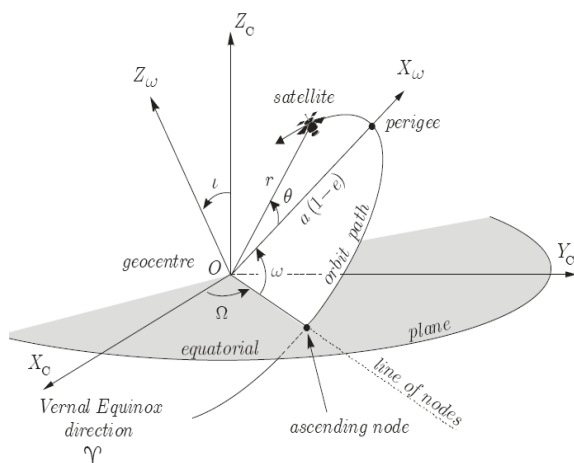
معمولاً گیرنده‌های GPS در تمامی زمان‌ها قابل روشن کردن نبوده و لذا در خصوص فواصل زمانی و مدت زمان روشن شدن آنها می‌بایست ملاحظات لازم صورت پذیرد [۱۲].

این مقاله به صورت زیر سازمان یافته است. پس از مقدمه و در بخش دوم، توصیف کلی از مدار حرکتی ماهواره ارائه شده است. در بخش سوم، نیروهای مؤثر بر حرکت مداری ماهواره مورد بحث قرار گرفته و بر این اساس در بخش چهارم مدل‌سازی از دینامیک حاکم بر سیستم ارائه شده است. در ادامه و در بخش پنجم مباحثی از تئوری تخمین و فیلتر کالمن توسعه یافته ارائه شده است. در انتها نتایج انجام شبیه‌سازی برای یک ماهواره ارتفاع پایین LEO و اعمال فیلتر کالمن توسعه یافته ارائه شده و با مقایسه نتایج با نرم‌افزار STK صحت مدل‌سازی و روابط مورد تأیید قرار گرفته است.

مدار حرکتی ماهواره

برای تفسیر مسیر حرکت ماهواره به دور زمین، نیاز به پارامترهایی داریم که با توجه به آن‌ها بتوان، ماهواره را به عنوان یک جسم متحرک در فضا، در چارچوب یک مرجع توصیف و حرکت بعدی آن را هم پیش‌بینی کرد.

پارامترهای کلاسیک مداری (C6)، قدیمی‌ترین مجموعه پارامترهایی است که برای مدل‌سازی دینامیک مداری ماهواره مورد استفاده قرار گرفته است [۱۳]. در این مجموعه، به کمک شش پارامتر $(i, \Omega, \omega, a, e, \theta)$ ، توصیف کامل و قابل لمسی از مدار حرکتی ماهواره، در دستگاه اینرسی بیان می‌شود. پارامترهای i, Ω, ω وضعیت صفحه مداری در فضا و پارامترهای a, e اندازه و شکل مدار حرکتی ماهواره و پارامتر θ موقعیت ماهواره در مدار را مشخص می‌کنند. توصیف این پارامترها در شکل (۱)، نشان داده شده است.



شکل ۱- نمایش پارامترهای کلاسیک مداری

تعیین موقعیت ماهواره از مباحث اساسی در طراحی سیستمی ماهواره و ایستگاه‌های ردیابی ماهواره است. این مسئله چه در فرآیند پرتاب و قرارگیری ماهواره در مدار و چه در دوره بهره‌برداری از آن حائز اهمیت است و عدم اطلاع از موقعیت ماهواره منجر به عدم اجرای موفقیت‌آمیز مأموریت خواهد شد. در بسیاری از کاربردها، پیش‌بینی مدار حرکتی ماهواره و در ادامه کنترل و ماندگار نگاه داشتن ماهواره در مداری خاص، از الزامات است. به عنوان نمونه‌هایی از این حوزه به ماهواره‌های مخابراتی، انجام عکس‌برداری از اهداف خاص، انتقال مداری ماهواره، تعیین زاویه و جهت‌گیری آنتن‌های زمینی برای رؤیت ماهواره می‌توان اشاره کرد. از آنجا که مدار حرکتی ماهواره، تحت تأثیر نیروهای اغتشاشی مختلفی است، برای تعیین و پیش‌بینی موقعیت ماهواره، می‌بایست این نیروها به صورت دقیق مدل‌سازی شده و میزان اثرگذاری هر یک از این نیروها نیز مشخص شوند [۱،۲].

از شاخص‌ترین نیروهای موجود در مسیر حرکت ماهواره به مواردی نظیر جاذبه زمین، اثر تابع پتانسیل گرانش زمین ناشی از عدم کرویت آن، نیروی مخالف درگ، نیروهای جاذبه سایر اجرام سماوی (خورشید و ماه) و تشعشعات موجود در فضا می‌توان اشاره کرد. این نیروهای اعمالی، بر مسیر حرکتی ماهواره و پارامترهای مداری آن تأثیرگذار بوده و منجر به ایجاد تغییرات در آنها می‌شوند. لذا لازم است برای پیش‌بینی مسیر ماهواره، این نیروها به صورت دقیق مدل‌سازی شده و در رویه انجام محاسبات لحاظ شوند.

امروزه، روش‌ها و الگوریتم‌های مختلفی در بحث پیش‌بینی موقعیت آبی ماهواره مورد استفاده قرار می‌گیرند که از جمله آنها به روش‌های مبتنی بر تئوری تخمین می‌توان اشاره کرد [۳-۴]. روش‌های تخمین متنوعی از قبیل فیلترهای خانواده کالمن، فیلترهای تطبیقی، فیلترهای ذره‌ای و ... موجود بوده، که هر یک دارای نقاط قوت و ضعف هستند [۵-۷]. فیلتر کالمن توسعه یافته EKF ضمن دقت و کارایی بالا در پیش‌بینی رفتار سیستم، از لحاظ پیاده‌سازی نیز در مقایسه با بسیاری از فیلترها، دارای بار محاسباتی کمتری بوده و از اینرو در بسیاری از علوم، به‌کارگیری شده است [۸-۱۰].

ادوات اندازه‌گیری مختلفی در بحث تعیین موقعیت ماهواره مورد استفاده قرار می‌گیرند که از جمله آنها به ایستگاه‌های زمینی و گیرنده‌های GPS می‌توان اشاره کرد [۱۱]. گیرنده‌های GPS از آنجا که به صورت مستقل از ایستگاه‌های زمینی توانایی فعالیت داشته و دقت بالایی نیز دارد، بسیار مورد توجه بوده و امروزه در بسیاری از ماهواره‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ماهواره‌های کوچک به علت محدودیت‌های منابع تولید و ذخیره توان الکتریکی،

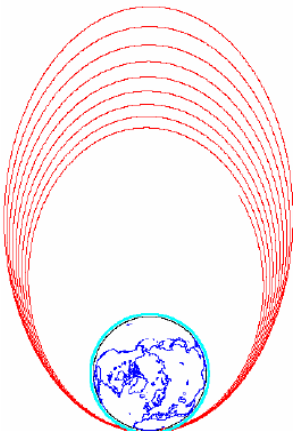
با اعمال تابع گرادیان بر تابع پتانسیل گرانش زمین، مطابق رابطه (۲)، مؤلفه‌های شتاب تأثیرگذار بر ماهواره در دستگاه مختصات اینرسی به دست می‌آیند.

$$\bar{a}_{gravity}(\mathbf{r}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

شتاب ناشی از نیروی مخالف درگ

نیروی مخالف درگ، ناشی از برخورد جسم با ذرات موجود در فضای اطراف آن است. همان‌طور که در شکل (۳)، نشان داده شده است، این نیرو باعث تغییر شکل و کاهش ارتفاع مدار ماهواره می‌شود. نیروی مخالف درگ، به چگالی محیط اطراف ماهواره و سطح مؤثر جسم در برخورد با ذرات موجود در اتمسفر وابسته بوده و به میزان سرعت نسبی آنها و ضریب درگ نیز بستگی دارد. رابطه (۳) بیانگر نیروی مخالف درگ است [۲].

$$\bar{a}_{drag}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{1}{2} \rho \frac{C_D A}{m} |\vec{v}_{rel}| \cdot \vec{v}_{rel} \quad (3)$$



شکل ۳- کاهش ارتفاع مداری ماهواره بر اثر نیروی درگ [۲۳]

پارامتر C_D که ضریب درگ نامیده می‌شود، پارامتری بی‌بعد بوده و در محدوده تقریبی $2 < C_D < 4$ قرار دارد. پارامتر A سطح مؤثر ماهواره در برخورد با اتمسفر بوده و m جرم ماهواره است. \vec{v}_{rel} بردار سرعت ماهواره نسبت به اتمسفر و ρ چگالی محیط اطراف ماهواره است. مدل‌های مختلفی برای بیان چگالی اتمسفر اطراف زمین ارائه شده است، که از مشهورترین آنها به مدل استاندارد ۱۹۷۶، US، MSIS و Jacchia می‌توان اشاره کرد [۱].

شتاب ناشی از جاذبه خورشید و ماه

بر طبق قانون جاذبه اجرام، هر دو جسم به هم نیروی جاذبه اعمال می‌کنند. این نیرو به فاصله و جرم آن دو وابسته است. از آنجا که ماهواره‌ها تحت تأثیر جاذبه خورشید و ماه هستند، بنابراین باید این

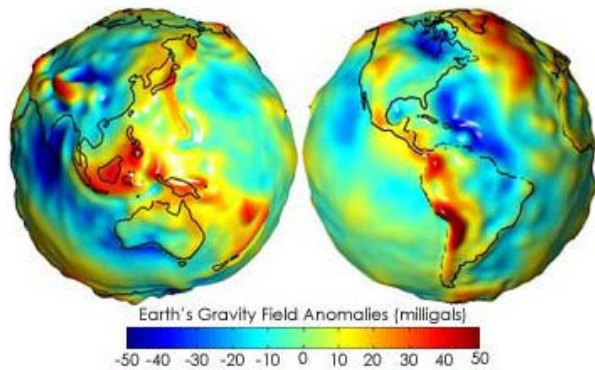
علاوه بر مجموعه پارامترهای کلاسیک مداری، به کمک بردارهای موقعیت و سرعت ماهواره (x, y, z, v_x, v_y, v_z) نیز می‌توان مدار حرکتی ماهواره را مدل‌سازی کرد. از نظر تئوری با دانستن مؤلفه‌های موقعیت و سرعت ماهواره در یک زمان، مؤلفه‌های موقعیت و سرعت ماهواره در سایر زمان‌ها قابل محاسبه است [۱۴].

نیروهای مؤثر بر حرکت مداری ماهواره

در این بخش روابط ریاضی بیان‌کننده نیروهای شاخص و مؤثر در حرکت مداری ماهواره ارائه شده است.

شتاب ناشی از تابع پتانسیل گرانش زمین

با توجه به عدم کرویت کامل زمین و توزیع جرمی غیریکنواخت آن، در نقاط مختلف سطح زمین شتاب گرانش متفاوت است. این موضوع در شکل (۲)، نشان داده شده است. از این‌رو تابع پتانسیل گرانش زمین در همه نقاط یکسان نبوده و به صورت رابطه (۱) قابل مدل‌سازی است [۱].

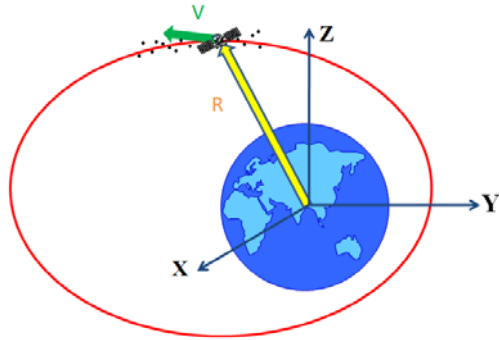


شکل ۲- تفاوت شتاب گرانش در نقاط مختلف سطح زمین [۲۳]

$$\Phi(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^0 \left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n^0(\sin \phi) + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n^m(\sin \phi) [S_n^m \sin m\lambda + C_n^m \cos m\lambda] \quad (1)$$

در رابطه فوق r فاصله جسم تا مرکز زمین، ϕ عرض جغرافیایی، λ طول جغرافیایی، R_e شعاع متوسط زمین در استوا، μ پارامتر جاذبه‌ای زمین و P_n^m توابع لژاندر با درجه n و مرتبه m هستند. پارامترهای C_n^m و S_n^m هارمونیک‌های مشخصه توزیع جرمی زمین هستند.

باید در دستگاه اینرسی بیان شوند. مؤلفه‌های شتاب اغتشاشی یا کنترلی a_x, a_y, a_z نیز، در دستگاه اینرسی بیان می‌شوند. در شکل (۴)، تلاش شده است درک شهودی مناسبی از موارد مطرح شده ارائه شود.

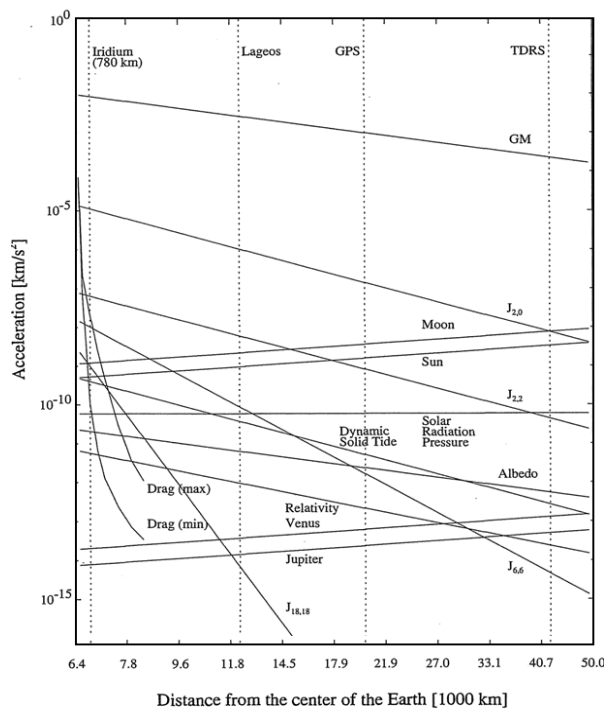


شکل ۴- نمایش بردار موقعیت و سرعت ماهواره در دستگاه اینرسی

بر مبنای توضیحات قسمت‌های گذشته مجموع شتاب‌های اعمالی به ماهواره در هر لحظه مطابق با رابطه (۷) است.

$$\bar{a}(r, v, t) = \bar{a}_{gravity}(r, t) + \bar{a}_{drag}(r, v, t) + \bar{a}_{sun-moon}(r, t) + \dots \quad (7)$$

باید توجه داشت هر یک از عوامل رابطه (۷)، در محدوده خاصی از ارتفاع قرارگیری ماهواره، اهمیت بالاتری دارد. این موضوع به صورت شماتیک در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۵- شتاب اعمالی به ماهواره ناشی از عوامل مختلف [۱]

نیروها در معادلات حرکتی آنها لحاظ شوند. میزان شتاب ناشی از جاذبه ماه و خورشید بر روی ماهواره به صورت رابطه (۴) مدل‌سازی می‌شود [۲].

$$\bar{a}_{sm}(r, t) = -\mu_m \left(\frac{r_{m-b}}{|r_{m-b}|^3} + \frac{r_{e-m}}{|r_{e-m}|^3} \right) - \mu_s \left(\frac{r_{s-b}}{|r_{s-b}|^3} + \frac{r_{e-s}}{|r_{e-s}|^3} \right) \quad (4)$$

پارامترهای موجود در رابطه (۴) به صورت زیر هستند:

Γ_{m-b}	بردار موقعیت از ماه به ماهواره
Γ_{s-b}	بردار موقعیت از خورشید به ماهواره
Γ_{e-m}	بردار موقعیت از زمین به ماه
Γ_{e-s}	بردار موقعیت از زمین به خورشید
μ_m	ثابت گرانشی ماه
μ_s	ثابت گرانشی خورشید

در [۱۵] روابط ریاضی برای تعیین محل قرارگیری خورشید و ماه و برخی دیگر از سیارات و با دقت 1 arcmin ، ارائه شده است.

مدل‌سازی دینامیک مداری

حرکت دو جسمی، اساس مدل‌سازی حرکت مداری است و مدارهای حرکتی اجسام در فضا را، می‌توان با تقریب مناسبی به کمک این ایده بیان کرد [۱۶]. در حالت ایده‌آل مسئله حرکت ماهواره به دور زمین، بر اساس ایده حرکت دو جسمی مطابق رابطه زیر است:

$$\ddot{r} + \frac{\mu}{\|r\|^3} r = 0 \quad ; \quad \mu = 398601 \text{ km}^3/\text{s}^2 \quad (5)$$

بر اساس رابطه (۵) و لحاظ کردن نیروهای مؤثر بر دینامیک مداری ماهواره، معادلات حرکت مداری به صورت زیر حاصل می‌شوند [۱۷].

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\mu/\|r\|^3 x + a_x \\ -\mu/\|r\|^3 y + a_y \\ -\mu/\|r\|^3 z + a_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

در رابطه فوق پارامترها به شرح زیر هستند:

x, y, z	مؤلفه‌های بردار موقعیت ماهواره Γ هستند.
v_x, v_y, v_z	مؤلفه‌های بردار سرعت ماهواره V هستند.
V, Γ	بردارهای موقعیت و سرعت ماهواره در دستگاه اینرسی هستند.
μ	پارامتر جاذبه‌ای زمین است.
a_x, a_y, a_z	مؤلفه‌های شتاب‌های اغتشاشی یا شتاب‌های کنترلی هستند.

در این مجموعه به کمک بردارهای موقعیت و سرعت، مدار ماهواره مشخص می‌شود. باید تذکر داد بردارهای موقعیت و سرعت ماهواره

می‌دهد. این فیلتر از رایج‌ترین ابزارهای تخمین و تصحیح داده در سیستم‌های دینامیکی است. این مسئله به دلیل انعطاف‌پذیری زیاد و قابلیت تطبیق بالای فرمولاسیون آن در کاربردهای مختلف است. در مدل‌های غیرخطی نیز می‌توان با خطی‌سازی مدل به کمک بسط تیلور (مرتبه اول یا مرتبه‌های بالاتر) حول آخرین تخمین، باز هم از فیلتر کالمن استفاده کرد. در روش کالمن معادلات حاکم بر سیستم به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) + \mathcal{W}(t) \quad , \quad \mathcal{W} \sim N(0, Q) \\ z(t) &= h(x(t), t) + \vartheta(t) \quad , \quad \vartheta \sim N(0, R) \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن x بردار حالت سیستم، z بردار مشاهدات، f و h روابط شناخته شده غیرخطی حاکم بر سیستم، \mathcal{W} و ϑ بردارهای نویز پروسه و نویز اندازه‌گیری هستند. ایده اصلی در روش EKF، خطی‌سازی لحظه‌ای توابع غیرخطی اشاره شده، حول نقطه کار سیستم است. با انجام عملیات خطی‌سازی حول نقطه x_i, u_i معادله (۸) به صورت زیر مبدل خواهد شد [۲۰].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u + a \\ z &= C x + c \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن ماتریس‌های A ، B و C به صورت زیر هستند:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i, u_i} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_i, u_i} \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x_i} \quad (10)$$

از آنجا که نقطه x_i, u_i لزوماً نقطه تعادل سیستم نیست، لذا ترم‌های a و c در مدل خطی‌شده سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند [۲۱].

$$\begin{aligned} a &= f|_{x_i, u_i} - A x_i - B u_i \\ c &= z|_{x_i, u_i} - C_i x_i \end{aligned} \quad (11)$$

بر اساس تئوری‌های گسسته‌سازی سیستم‌های پیوسته، معادلات فضای حالت (۹) به صورت زیر تبدیل خواهند شد [۲۲].

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F(k)x(k) + G(k)u(k) \\ z(k) &= H(k)x(k) \end{aligned} \quad (12)$$

در بحث گسسته‌سازی معادلات، باید به این نکته توجه داشت که ماتریس کواریانس نویز پروسه در حالت پیوسته و گسسته به صورت زیر با یکدیگر در ارتباط هستند:

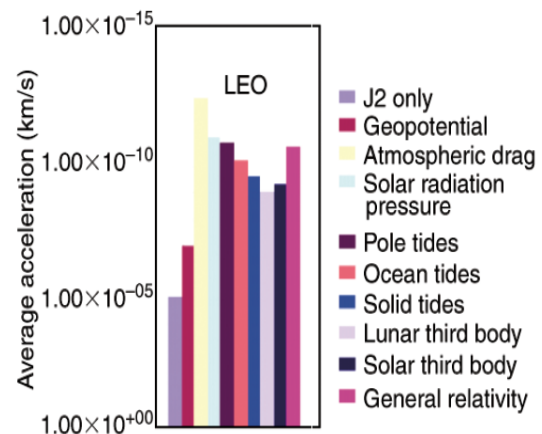
$$Q_d = T Q_c \quad (13)$$

در رابطه فوق، T زمان نمونه‌برداری سیستم است. حال می‌توان از روش فیلتر کالمن برای تخمین حالت‌های سیستم بهره

از آنجا که این مقاله به منظور تعیین و پیش‌بینی موقعیت ماهواره‌های LEO تنظیم شده است، در شکل (۶)، میزان اهمیت این نیروهای اغتشاشی به صورت خاص برای مدارات LEO نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل (۶) مشاهده می‌شود در مدارهای ارتفاع پایین LEO شتاب ناشی از هارمونیک‌های تابع پتانسیل زمین در مقایسه با سایر عوامل، اهمیت بالاتری داشته و در این بین نیز هارمونیک دوم J_2 خود دارای وزن اصلی است.

حال با انجام انتگرال‌گیری از رابطه (۶)، می‌توان موقعیت و سرعت ماهواره در هر لحظه را محاسبه کرد. با مشخص شدن موقعیت و سرعت ماهواره، می‌توان پارامترهای شش‌گانه مداری (C6)، مختصات طول و عرض جغرافیایی قرارگیری ماهواره و بسیاری از پارامترهای ارزشمند دیگر، در ارتباط با مدار حرکتی ماهواره را به دست آورد. این دیدگاه به نام الگوریتم Cowell مرسوم است [۱۸]. باید تذکر داد انتخاب نوع روش و گام‌های انتگرال‌گیری، بر دقت محاسبات در تعیین و پیش‌بینی موقعیت ماهواره بسیار اثرگذار است. در [۱۹] نشان داده شده است که صرفاً با انتگرال‌گیری از معادلات حاکم بر حرکت مداری و به دلیل طبیعت موجود در انتگرال‌گیری، خطای اندک در موقعیت و سرعت اولیه ماهواره، به مرور زمان منجر به افزایش خطا در تعیین موقعیت ماهواره خواهد شد و این مسئله مطلوب نیست. امروزه، برای غلبه بر این موضوع از روش‌های مبتنی بر تئوری تخمین استفاده می‌کنند.



شکل ۶- تأثیر خطای مدل‌سازی نیروها بر شتاب اعمالی به ماهواره‌های LEO ناشی از عوامل مختلف [۱۱]

فیلتر کالمن توسعه یافته EKF

فیلتر کالمن یک تخمین‌گر بهینه خطی است، که به صورت بازگشتی تخمینی بهینه از حالت‌های یک سیستم خطی دینامیکی را ارائه

$$\underline{z} = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z]^T \quad (۱۶)$$

همان طور که اشاره شد، مؤلفه‌های شتاب‌های اغتشاشی ناشی از عوامل مختلفی است که در مدارهای ارتفاع پایین اصلی‌ترین عامل مؤلفه J_2 و سایر مؤلفه‌های تابع پتانسیل گرانش زمین است. در این شبیه‌سازی تأثیر مؤلفه‌های J_2 ، J_3 و J_4 مورد بررسی قرار گرفته و سایر شتاب‌های اعمالی به ماهواره، به عنوان نویز پروسه در نظر گرفته شده است.

برای اعمال الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته EKF نیاز است معادلات بیان‌کننده دینامیک مداری ماهواره خطی‌سازی شوند. در ادامه برای نمونه، رویه خطی‌سازی معادلات دینامیک مداری در حالت وجود مؤلفه J_2 نشان داده شده است. بر اساس روابط (۸)، (۱۵) و (۱۶) داریم:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

$$C = \frac{\partial h}{\partial x} = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]) \quad (۱۸)$$

در رابطه (۱۷) اجزای ماتریس A به صورت زیر هستند. (۱۹)

$$A_{41} = \frac{3\mu x^2}{\|r\|^5} - \frac{\mu}{\|r\|^3} + \mu A_{J_2} \left\{ \frac{15(x^2+z^2)}{\|r\|^7} - \frac{105x^2z^2}{\|r\|^9} - \frac{3}{\|r\|^5} \right\}$$

$$A_{42} = \frac{3\mu xy}{\|r\|^5} + \mu A_{J_2} \left\{ \frac{15xy}{\|r\|^7} - \frac{105xyz^2}{\|r\|^9} \right\}$$

$$A_{43} = \frac{3\mu xz}{\|r\|^5} + \mu A_{J_2} \left\{ \frac{45xz}{\|r\|^7} - \frac{105xz^3}{\|r\|^9} \right\}$$

$$A_{51} = A_{42}$$

$$A_{52} = \frac{3\mu y^2}{\|r\|^5} - \frac{\mu}{\|r\|^3} + \mu A_{J_2} \left\{ \frac{15(y^2+z^2)}{\|r\|^7} - \frac{105y^2z^2}{\|r\|^9} - \frac{3}{\|r\|^5} \right\}$$

$$A_{53} = \frac{3\mu yz}{\|r\|^5} + \mu A_{J_2} \left\{ \frac{45yz}{\|r\|^7} - \frac{105yz^3}{\|r\|^9} \right\}$$

$$A_{61} = A_{43}$$

$$A_{62} = A_{53}$$

$$A_{63} = \frac{3\mu z^2}{\|r\|^5} - \frac{\mu}{\|r\|^3} + \mu A_{J_2} \left\{ \frac{90z^2}{\|r\|^7} - \frac{105z^4}{\|r\|^9} - \frac{9}{\|r\|^5} \right\}$$

در رابطه فوق $A_{J_2} = \frac{1}{2} \mu J_2 R_{eq}^2$ است. حال مدل گسسته سیستم به صورت رابطه زیر خواهد شد:

$$x(k+1) = e^{AT} x(k) + (e^{AT} - I_{6 \times 6}) A^{-1} a \quad (۲۰)$$

در رابطه فوق e^{AT} را ماتریس گذر حالت گویند و ماتریس a براساس تئوری گسسته‌سازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

بُرد. در زیر الگوریتم بروزرسانی در فیلتر کالمن توسعه یافته نشان داده شده است.

$$x(+) = x(-) + K[z_o - h(\hat{x}(-))] \quad (۱۴)$$

$$K = P(-)H^T(\hat{x}(-))[H(\hat{x}(-))P(-)H^T(\hat{x}(-)) + R - I]^{-1}$$

$$P(+) = P(-) - K H(x(-))P(-)$$

که در رابطه فوق پارامترها به صورت زیر هستند:

x تخمینی از بردار حالت سیستم است.

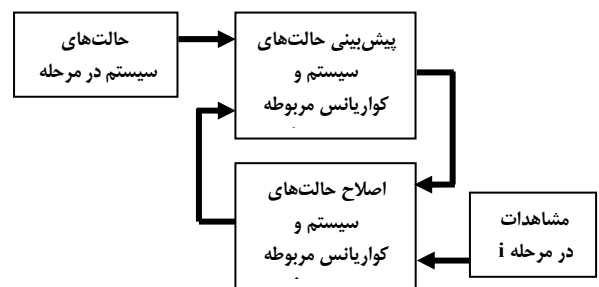
K ماتریس بهره حاصل از فیلتر است.

P ماتریس کواریانس حاصل از فیلتر است.

H ماتریس مشاهدات خطی شده است ($H = \partial h / \partial x^T$).

R ماتریس نویز اندازه‌گیری است.

فیلتر کالمن توسعه یافته دارای دو مرحله (الف) پیش‌بینی و (ب) تصحیح و بروزرسانی است. در مرحله پیش‌بینی به کمک اطلاعات گذشته، بردار حالت بعدی سیستم پیش‌بینی می‌شود. در مرحله تصحیح و بروزرسانی، به کمک اندازه‌گیری در زمان حال حاضر، بردار حالت سیستم تخمین زده می‌شود. در شکل (۷)، رویه بروزرسانی و انجام الگوریتم کالمن نشان داده شده است.



شکل ۷- رویه بروزرسانی در الگوریتم کالمن

شبیه‌سازی

با توجه به توضیحات ارائه شده و رابطه (۶)، معادلات فضای حالت حرکت مداری در حوزه زمان پیوسته به صورت رابطه (۱۵) قابل بازنویسی است.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -\frac{\mu}{\|r\|^3} \times I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

در این بخش فرض شده است که تمام متغیرهای بردار حالت در اختیار هستند. از این رو بردار اندازه‌گیری مطابق زیر است.

حالت‌های اولیه برای شروع الگوریتم در داده‌های موقعیتی با $20+$ کیلومتر خطا و در داده‌های سرعت با $15+$ متر بر ثانیه نسبت به حالت واقعی و ماتریس کواریانس اولیه مطابق رابطه (۲۳) در نظر گرفته شده‌اند.

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 \text{ km} \times I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \left(\frac{\text{km}}{\text{sec}}\right) \times I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (22)$$

با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش‌های قبل و زمان نمونه‌برداری ۱ ثانیه، ماتریس کواریانس نوین پروسه در حالت گسسته در حالت حرکت دو جسمی مطابق رابطه (۲۲) و در حالتی که هارمونیک‌های تابع پتانسیل زمین در نظر گرفته شده باشند به صورت رابطه (۲۴) اختیار شده است.

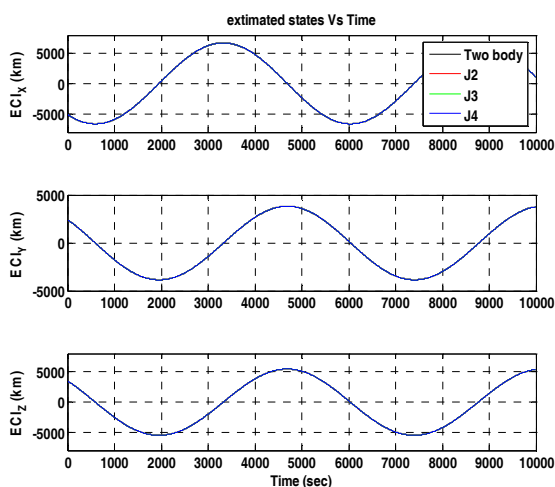
$$Q_a = \text{diag}([0 \ 0 \ 0 \ 10^{-10} \ 10^{-10} \ 10^{-10}]) \text{ km}^2/\text{s}^4 \quad (23)$$

$$Q_a = \text{diag}([0 \ 0 \ 0 \ 10^{-16} \ 10^{-16} \ 10^{-16}]) \text{ km}^2/\text{s}^4 \quad (24)$$

در مرحله اول فرض می‌کنیم داده‌های اندازه‌گیری در تمامی لحظات و با فواصل زمانی ۱ ثانیه در اختیار بوده و خطای اندازه‌گیری تعیین موقعیت ماهواره برابر ± 3 کیلومتر در هر راستا و خطای اندازه‌گیری سرعت ماهواره برابر ± 6 متر بر ثانیه در هر راستاست. لذا ماتریس R به صورت زیر انتخاب شده است.

$$R = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 4 \times 10^{-6} \ 4 \times 10^{-6} \ 4 \times 10^{-6}]) \quad (25)$$

به منظور بررسی میزان تأثیر افزودن هارمونیک‌های J_2 ، J_3 و J_4 در معادلات دینامیک مداری، با اجرای الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته، نتایج مطابق شکل (۹) به دست می‌آید.



شکل ۹- تخمین موقعیت ماهواره به روش EKF با در نظر گرفتن هارمونیک‌های J_2 ، J_3 و J_4 با فرض در اختیار بودن داده‌های اندازه‌گیری در تمام زمان‌ها

$$a = f|_{x_i, u_i} - A x_i \quad (21)$$

با دقت در اجزای ماتریس A مشاهده می‌شود این ماتریس از دو بخش تشکیل شده است. بخش ابتدایی مربوط به کروی در نظر گرفتن زمین و بخش دوم تأثیر مؤلفه J_2 را که نشان از عدم کروییت کامل زمین است در خود گنجانده است. به عبارتی می‌توان با برابر صفر قراردادن ضریب A_{J_2} در ماتریس A، تأثیر مؤلفه J_2 را نیز نادیده گرفت و مسئله را در قالب حرکت دو جسمی پی گرفت. رویه خطی‌سازی معادلات دینامیک مداری برای مؤلفه J_3 و J_4 مشابه با رویه ارائه شده برای مؤلفه J_2 بوده و به همین دلیل از ذکر آن خودداری شده است.

در ادامه با انجام شبیه‌سازی به بررسی میزان تأثیر مؤلفه‌های J_2 ، J_3 و J_4 در پیش‌بینی موقعیت آتی ماهواره بر اساس فیلتر کالمن توسعه یافته EKF می‌پردازیم. برای این منظور مدار حرکتی ماهواره‌ای با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است.

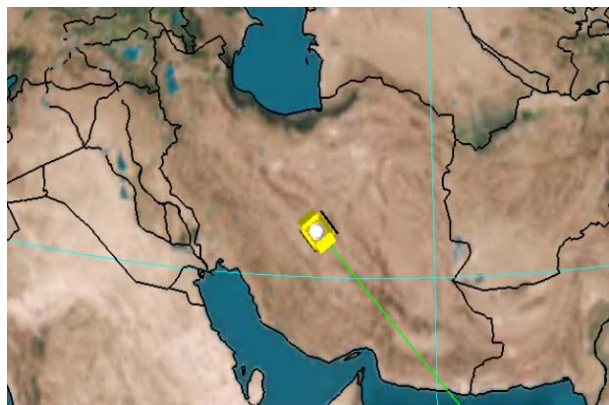
$$a = 11000 \text{ km}, e = 0.3636$$

$$i = 80^\circ, \Omega = 40^\circ, \omega = 60^\circ$$

دوره تناوب این مدار $191/4$ دقیقه است. به کمک نرم‌افزار STK، داده‌های موقعیت و سرعت ماهواره در دستگاه اینرسی و با فواصل زمانی ۱ ثانیه، به عنوان داده اندازه‌گیری تولید شده است. در روز اول جولای سال ۲۰۱۱ و در ساعت ۱۲ (UTC) ماهواره دارای موقعیت و سرعتی مطابق جدول (۱) بوده و از فضای بالای ایران گذر کرده است. این امر به صورت شماتیک در شکل (۸) نشان داده شده است.

جدول ۱- اطلاعات موقعیت و سرعت اولیه ماهواره

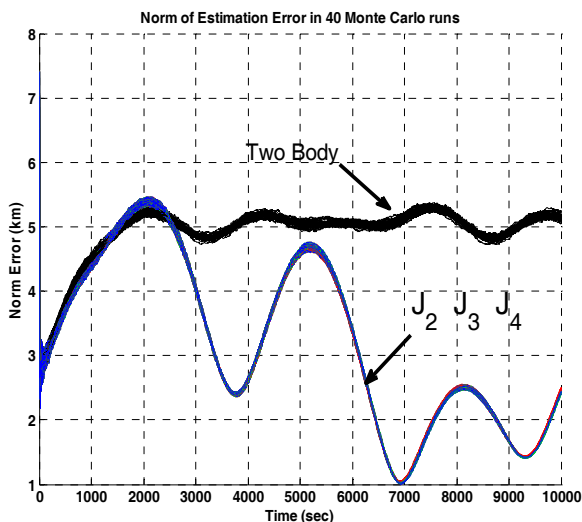
$x(\text{km})$	$y(\text{km})$	$z(\text{km})$
-5077.447517	2443.713424	3489.984456
$v_x(\text{km/sec})$	$v_y(\text{km/sec})$	$v_z(\text{km/sec})$
-5.007947	-3.423241	-4.888895



شکل ۸- گذر ماهواره از فضای بالای ایران و نمایش آن توسط نرم‌افزار STK

۳. لحاظ کردن هارمونیک‌های مرتبه بالاتر J_3 و J_4 در معادلات، منجر به افزایش بار محاسباتی و افزایش زمان اجرای برنامه می‌شوند.

برای صحت‌گذاری نتایج، در شکل (۱۱) محدوده خطای تخمین در ۴۰ بار انجام شبیه‌سازی مونت کارلو نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با انجام شبیه‌سازی‌های متعدد و اعمال نویزهای مختلف به داده‌های اندازه‌گیری، نتایجی مشابه گذشته حاصل می‌شود. به عبارت دیگر در حالت حرکت دو جسمی خطای تخمین به مراتب بالاتر بوده و با افزایش تعداد هارمونیک‌های تابع پتانسیل زمین در مدل‌سازی‌ها، بهبود چندانی در نتایج حاصل نمی‌شود. از این رو در ادامه، مقایسه نتایج تنها برای حالت حرکت دو جسمی و لحاظ کردن هارمونیک J_2 ارائه خواهد شد.



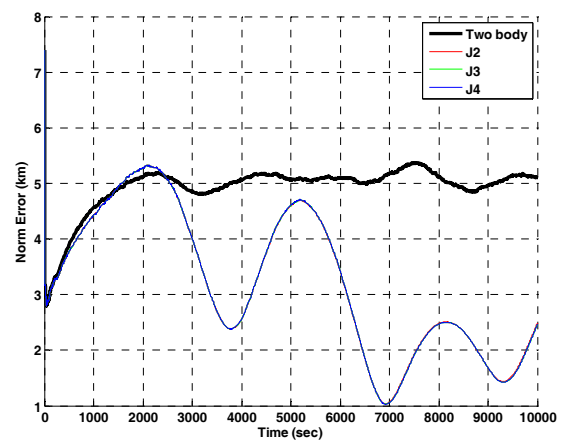
شکل ۱۱- محدوده خطای تخمین موقعیت ماهواره در ۴۰ شبیه‌سازی مونت کارلو با فرض در اختیار بودن داده‌های اندازه‌گیری در تمام زمان‌ها

در شکل (۱۲)، تأثیرات نویز اندازه‌گیری داده موقعیت، در میزان خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره نشان داده شده است. در این مسیر فرض شده است داده اندازه‌گیری در فواصل زمانی ۱۰۰ ثانیه در اختیار قرار می‌گیرند. مشاهده می‌شود با افزایش نویز اندازه‌گیری، خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره افزایش یافته و مدل J_2 در مقایسه با مدل حرکت دو جسمی نتایج بهتری دارد.

در کاربردهای عملیاتی داده‌های اندازه‌گیری در تمامی اوقات در اختیار نیستند. به عنوان مثال در صورت استفاده از ایستگاه زمینی برای رهگیری ماهواره، بر اساس مشخصات مداری ماهواره، مدت زمان محدودی در ایستگاه ماهواره قابل رؤیت است. در حالت دیگر اگر ماهواره به گیرنده GPS تجهیز شده باشد نیز به علت

مشاهده می‌شود نتایج در حالت‌های مختلف، تقریباً رویه یکسانی را پیگیری می‌کنند. برای درک بهتر میزان تفاوت و دقت نتایج، منحنی خطای تخمین موقعیت نسبت به داده‌های نرم‌افزار STK، در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

در جدول (۲) مدت زمان اجرای شبیه‌سازی و خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره، با افزایش تعداد هارمونیک‌های تابع پتانسیل زمین در معادلات دینامیک مداری نشان داده شده است. باید تذکر داد شبیه‌سازی‌ها توسط نرم‌افزار متلب ۲۰۱۰ بی و با استفاده از کامپیوتر تحت ویندوز ۷ از نوع ۶۴ بیتی، پردازنده Core i5 و رم ۴ گیگابایت انجام شده است.



شکل ۱۰- خطای تخمین موقعیت ماهواره با در نظر گرفتن هارمونیک‌های J_2 ، J_3 و J_4 نسبت به نرم‌افزار STK با فرض در اختیار بودن داده‌های اندازه‌گیری در تمام زمان‌ها

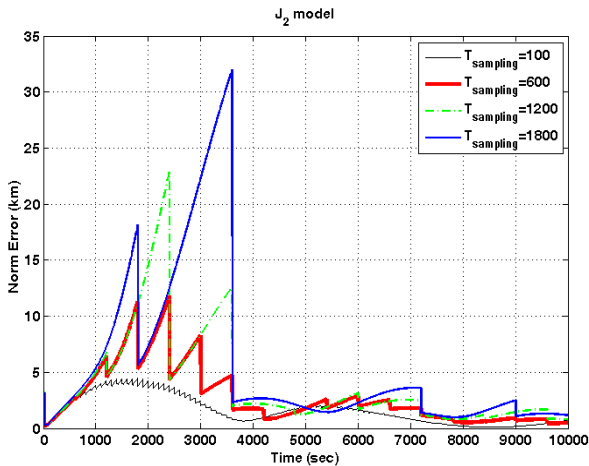
جدول ۲- مقایسه مدت زمان اجرای شبیه‌سازی و خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره، با افزایش تعداد هارمونیک‌های تابع پتانسیل زمین در معادلات دینامیک مداری

زمان اجزا (sec)	خطای موقعیت (km)	هارمونیک‌های لحاظ شده
۳/۴۴	۳/۴۷۶	J_2
۴/۱۲	۳/۴۷۳	J_2, J_3
۴/۸۹	۳/۴۶۹	J_2, J_3, J_4

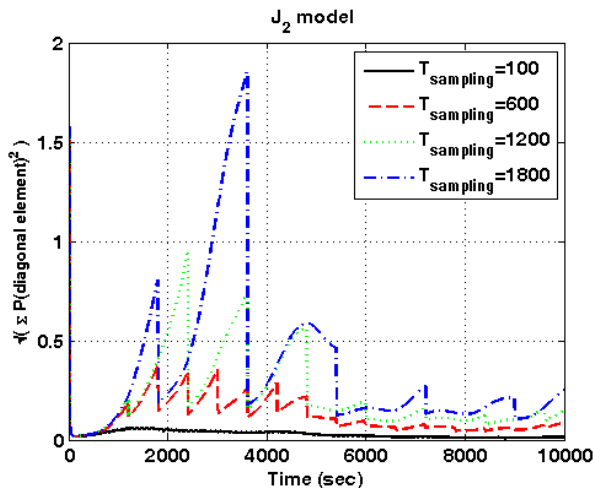
با توجه به شکل‌های (۹) و (۱۰) و اطلاعات مندرج در جدول (۲) نتایج زیر قابل حصول است:

- افزودن هارمونیک‌های J_2 ، J_3 و J_4 در معادلات دینامیک مداری، نسبت به حالت حرکت دو جسمی، منجر به کاهش خطای تخمین می‌شود.
- لحاظ کردن هارمونیک‌های مرتبه بالاتر J_3 و J_4 در معادلات، تفاوت چندانی در خطای تخمین نسبت به حالت در نظر گرفته شدن تنها هارمونیک J_2 ایجاد نمی‌کند.

دادن دقت پیش‌بینی موقعیت مناسب است. به‌علاوه باید به این نکته توجه داشت که پس از هر بار خاموش و روشن شدن، به مدت تقریبی ۲ الی ۴ دقیقه زمان (Warm/Cold start time) نیاز است تا گیرنده‌های GPS داده‌های معتبر از خود ارائه کنند. به عبارت دیگر روشن و خاموش شدن متوالی گیرنده GPS در فواصل زمانی ۱۰۰ ثانیه‌ای، از دیدگاه عملی غیر ممکن است.



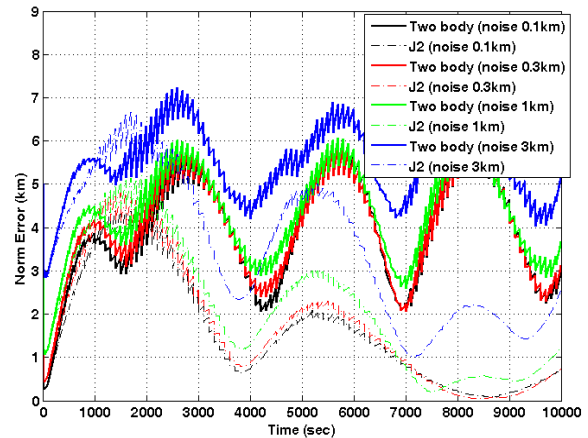
شکل ۱۳- خطای تخمین موقعیت ماهواره نسبت به نرم‌افزار STK ناشی از تغییرات فواصل زمانی در اختیار قرار گرفتن داده‌های اندازه‌گیری



شکل ۱۴- تغییرات اندازه ماتریس کواریانس، ناشی از تغییرات فواصل زمانی در اختیار قرار گرفتن داده‌های اندازه‌گیری

حال این سؤال مطرح می‌شود که در هر یک از این سررسیدهای زمانی گیرنده GPS چه مدت زمان روشن باشد و داده اندازه‌گیری در اختیار قرار دهد. پُر واضح است در این مسیر می‌بایست به ملاحظات مصرف توان الکتریکی در گیرنده‌های GPS نیز توجه داشت. همان‌طور که در شکل (۱۵) ملاحظه می‌شود، با تحویل گرفتن تعداد بیشتری داده اندازه‌گیری در هر بار روشن کردن گیرنده GPS و

محدودیت‌های توان الکتریکی مصرفی، گیرنده GPS در بازه‌های زمانی محدودی روشن بوده و داده در اختیار قرار می‌دهد. پُر واضح است در مابقی اوقات می‌بایست موقعیت ماهواره پیش‌بینی شود. ادامه با فرض استفاده از گیرنده GPS درون ماهواره به بررسی تأثیر فواصل زمانی در اختیار قرار گرفتن داده‌های اندازه‌گیری در دقت پیش‌بینی موقعیت ماهواره می‌پردازیم.

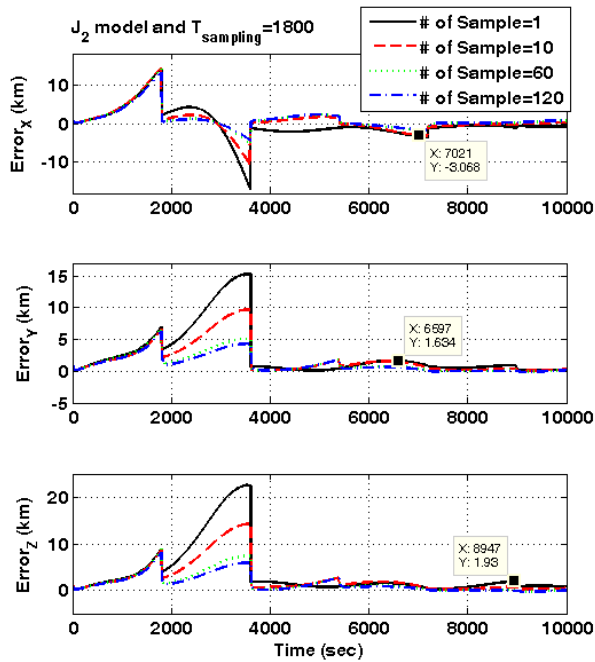


شکل ۱۲- خطای تخمین موقعیت ماهواره نسبت به نرم‌افزار STK با فرض تغییرات نویز اندازه‌گیری در داده موقعیت و در اختیار بودن داده‌های اندازه‌گیری در فواصل زمانی ۱۰۰ ثانیه‌ای

با توجه به دقت گیرنده GPS، در شبیه‌سازی‌های پیش‌رو، خطای داده موقعیت ۱۰۰ متر و خطای داده سرعت ۶ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. در شکل (۱۳) نتایج شبیه‌سازی‌ها برای فواصل زمانی مختلف در اختیار قرار گرفتن داده‌های اندازه‌گیری نشان داده شده است. باید تذکر داد در اینجا فرض شده است که در سررسید هر یک از این بازه‌های زمانی، تنها یک داده اندازه‌گیری در اختیار قرار می‌گیرد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش فواصل زمانی، خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره افزایش می‌یابد. در شکل (۱۴) رویه تغییرات ماتریس کواریانس ناشی از تغییرات فواصل در اختیار گرفتن داده‌های اندازه‌گیری نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود با افزایش فواصل زمانی، ماتریس کواریانس افزایش می‌یابد که خود بر افزایش خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره تأثیرگذار است. علاوه بر این ملاحظه می‌شود در زمانی که داده اندازه‌گیری در اختیار قرار می‌گیرد، کاهش شدیدی در اندازه ماتریس کواریانس رخ می‌دهد که مطلوب است.

حال اگر در شکل (۱۳) فاز گذار اولیه را نادیده بگیریم و به نتایج پس از پایدار شدن فیلتر توجه نماییم، مشاهده می‌شود دوره تناوب ۱۸۰۰ ثانیه بین دوبار روشن شدن گیرنده GPS از دیدگاه عملیاتی و با مدنظر قرار

باقی می‌ماند که از دیدگاه عملیاتی مقدار مناسبی است. علاوه بر این ملاحظه می‌شود تفاوت چندانی در دو حالت در اختیار داشتن ۶۰ داده اندازه‌گیری و ۱۲۰ داده اندازه‌گیری وجود ندارد. از این رو با مدنظر قراردادن ملاحظات توان الکتریکی مصرفی، پیشنهاد می‌شود در هر بار روشن کردن گیرنده GPS، تعداد ۶۰ داده اندازه‌گیری (معادل ۶۰ ثانیه) در اختیار قرار گیرد.



شکل ۱۷- خطای پیش‌بینی موقعیت در راستاهای X، Y و Z ناشی از تغییرات تعداد داده در اختیار قرار گرفته، در سر رسیدهای زمانی به فواصل ۱۸۰۰ ثانیه

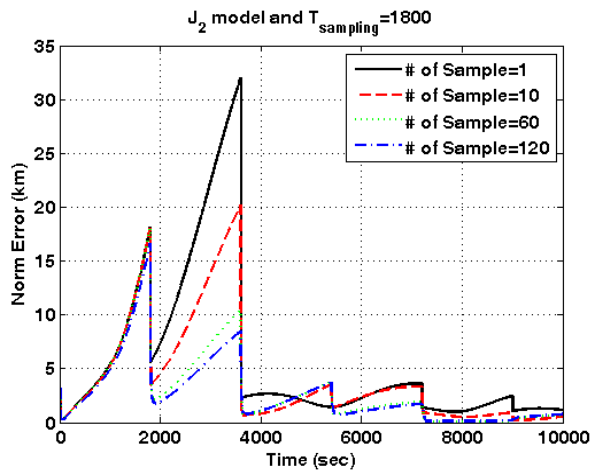
حال فرض کنید در حین عملیات به هر دلیل، روال پیشنهاد شده برای روشن و خاموش کردن متوالی گیرنده GPS اجرا نگردد و برای مدت زمان بیشتری گیرنده GPS خاموش شده باشد. در این صورت برای همگرا شدن مجدد فیلتر EKF و کاهش خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره و قرار گرفتن آن در محدوده مجاز، نیازمند در اختیار داشتن تعداد بیشتری داده اندازه‌گیری هستیم. تعداد این داده‌ها وابسته به مدت زمان سپری شده از آخرین بار روشن بودن گیرنده GPS است.

نتیجه‌گیری

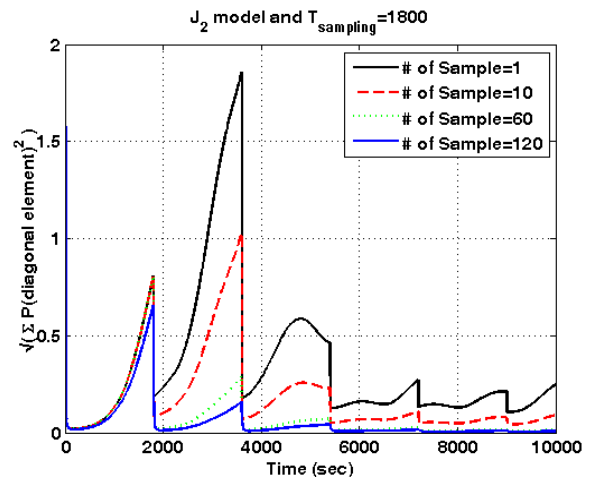
در این مقاله ابتدا مفاهیم اصلی از مدار و نیروهای مؤثر بر حرکت مداری ماهواره از قبیل نیروی ناشی از تابع پتانسیل گرانش زمین، نیروی مخالف درگ، نیروی ناشی از سایر اجرام سماوی و نیروی ناشی از تشعشعات ارائه شد. سپس دینامیک حرکت مداری ماهواره مدل‌سازی و الگوریتم Cowell معرفی شد. در ادامه مباحثی از

اعمال آنها در فیلتر EKF، خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره کاهش می‌یابد.

در شکل (۱۶) این مطلب به بیان دیگر و نشان دادن رویه کاهش ماتریس کواریانس مورد تأیید قرار گرفته است. ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد داده‌های به‌کارگیری شده در فیلتر، اندازه ماتریس کواریانس کاهش می‌یابد که خود بر کاهش خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره تأثیرگذار است.



شکل ۱۵- خطای تخمین موقعیت ماهواره نسبت به نرم‌افزار STK ناشی از تعداد داده در اختیار قرار گرفته، در سر رسیدهای زمانی به فواصل ۱۸۰۰ ثانیه



شکل ۱۶- تغییرات اندازه ماتریس کواریانس، ناشی از تغییرات تعداد داده در اختیار قرار گرفته، در سر رسیدهای زمانی به فواصل ۱۸۰۰ ثانیه

در شکل (۱۷) میزان خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره در هر یک از مؤلفه‌های X، Y و Z به ازای تعداد مختلف داده اندازه‌گیری در هر بار روشن شدن گیرنده GPS نشان داده شده است. مشاهده می‌شود پس از سپری شدن مدت زمان گذار اولیه و به حالت پایدار رسیدن فیلتر، خطای هر یک از این سه مؤلفه در محدوده کمتر از ۲ کیلومتر

- [5] Gang, W. and Jun, D. X., "Particle Filtering and Its Application in Satellite Orbit Determination," *IEEE, Congress on Image and Signal Processing, CISP*, 27-30 May 2008, pp.488-492.
- [6] Lee, D. J., Alfriend, K.T. Adaptive Sigma Point Filtering for State and Parameter Estimation, *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*, August 2004.
- [7] Psiaki, M. L., "Backward-Smoothing Extended Kalman Filter," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, pp. 885-894.
- [8] Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *ASME - Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, Series D., 1960, pp. 35-45.
- [9] Julier, S. J. and Uhlmann, J. K., "Unscented Filtering and Nonlinear Estimation," *Processing of the IEEE*, Vol. 92, 2004, pp. 401-422.
- [10] Arasaratnam, I., Haykin, S., "Cubature Kalman Filters," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 54, No.6, 2009, pp. 1254-1269.
- [11] Vetter, J. R., "Fifty Years of Orbit Determination Development of Modern Astrodynamics Methods," *Johns Hopkins APL Technical Digest*, Vol. 27, No. 3, 2007, pp. 239-252.
- [12] Zhou, N., Onboard Orbit Determination Using GPS Measurements for Low Earth Orbit Satellite, (PhD Thesis), Dissertation, Queensland University of Technology, Australia, 2004.
- [13] Escobal, P. R., *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
- [14] Chobotov, V. A., *Orbital Mechanics*, AIAA Education Series, 2002.
- [15] Flandern, T. C. and Pulkkinen, K. F., "Low-Precision Formulate for Planetary Positions," *Astrophysical Journal Supplement Series*, Vol. 41, 1979, pp. 391-411.
- [16] Sidi, M., *Spacecraft Dynamics and Control, A Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [17] Boden, A., Comparison of Nonlinear Filters for Orbit Determination, AIAA, 1986.
- [18] Stiefel, E. and Bettis, D. G., "Stabilization of Cowell's Method," *Numerische Mathematik*, Vol. 3, No. 2, 1969, pp. 154-175.
- [19] Bolandi, H. Ashtari, M. H. Kouchaki, H. "Effect Analysis of Measurement Error in Prediction of Satellite Crossing Path," *2th Conference on Control, Instrumentation and Automation*, Shiraz 1390 (In Persian).
- [20] Grewal, M. S. and Andrews, A. P., *Kalman Filtering, Theory and Practice Using MATLAB*. Wiley Interscienc, 2001.
- [21] Bergsten, P., Palm, R., and Driankov, D., "Observers for Takagi-Sugeno Fuzzy Systems," *IEEE Transaction on System*, Vol. 32, No. 1, 2002, pp. 114-121.
- [22] Crassidis, J. L. and Junkins, J. L., *Optimal Estimation of Dynamic System*. CRC Press, 2004.
- [23] Available, [on line]: <http://en.wikipedia.org>

تئوری تخمین و فیلتر کالمن توسعه یافته و روابط حاکم بر آن ارائه شد.

پیرو این مفاهیم، معادلات حاکم بر حرکت مداری ماهواره با در نظر گرفتن ترم J_2 ، J_3 و J_4 از تابع پتانسیل گرانش زمین، در قالب مناسب برای اعمال فیلتر کالمن توسعه یافته EKF تنظیم شد. با انجام شبیه‌سازی برای یک ماهواره فرضی و مقایسه نتایج با نرم افزار STK نشان داده شد که با لحاظ کردن هارمونیک‌های تابع پتانسیل زمین J_2 ، J_3 و J_4 در معادلات حرکت مداری در مقایسه با حالت دو جسمی، خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره به شدت کاهش می‌یابد. در ضمن مشاهده شد که لحاظ کردن هارمونیک‌های J_3 و J_4 در معادلات، به‌رغم افزودن بار محاسباتی بالا به مسئله، نسبت به حالت در نظر گرفته شدن تنها هارمونیک J_2 تفاوتی چندانی در خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره ایجاد نمی‌کند. از آنجاکه در بحث پیاده‌سازی Onboard زیر سیستم تعیین موقعیت ماهواره، محدودیت‌های حجم پردازش و حجم حافظه از چالش‌ها به حساب می‌آید، لذا پیشنهاد آن است که تنها از هارمونیک J_2 در سخت‌افزار نهایی استفاده شود.

در ادامه فرض شد که ماهواره به گیرنده GPS مجهز است، بر این اساس و با مد نظر قراردادن محدودیت‌های توان الکتریکی مصرفی نشان داده شد، در صورتی که گیرنده GPS در فواصل زمانی ۳۰ دقیقه یکبار روشن شده و ۶۰ ثانیه داده اندازه‌گیری در اختیار قرار دهد و در مابقی این بازه زمانی خاموش باشد، در آن صورت خطای پیش‌بینی موقعیت ماهواره کمتر از ۲ کیلومتر بوده که از دیدگاه عملیاتی مناسب است.

مراجع

- [1] Montenbruck, O., *Satellite Orbits Models, Methods, Application*. Springer, 2001.
- [2] Vallado, D., *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, 3rd Ed., McGraw-Hill Space Technology Series, 2007.
- [3] Choi, E. J., "Onboard Orbit Determination Using GPS Observations Based on the Unscented Kalman Filter," *Advances in Space Research*, Vol.46, Issue 11, 2010, pp. 1440-1450.
- [4] Pardal, P. C., Kuga, H. K. and Vilhena de Moraes, R., "Comparing the Extended and the Sigma Point Kalman Filters for Orbit Determination Modeling Using GPS Measurements," *Proceedings of the 23rd International Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation*, 2010.