Vol. 6, No. 3, 2013

JSST
Journal of Space Science & Technology

# Assessment of Solution of the Boundary Layer Equations and Approximate Relations for Aeroheating of Axisymmetric Reentry Vehicles

**R. Kamali –Moghadam[1*], S. Nouri[2], M. R. Salimi[3], M. Sheida[4] and S. A. Hosseini[5]**

1, 3, 4 and 5. Astronautics Research Institute, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran.

2. Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology

[*] Sahrak ghods, Tehran, IRAN

**rkamali@ari.ac.ir**

*When a solver is used for analyzing the hypersonic reentry vehicles, high speed and accuracy of the solver results are the basic parameters in the design process. In the present study, the results obtained by solution of laminar boundary layer equations using integral matrix method and approximate method are assessed in aeroheating prediction around hypersonic axisymmetric reentry bodies. The results show that the applied methods have suitable accuracy in aeroheating and high computational speed for reentry vehicle design. Space marching method in numerical simulation of boundary layer equations and applying less grid point in the boundary layer due to use of integral matrix method rather than other methods efficiently decrease computational costs. Also, high robustness of approximate method in the heat flux prediction over the reentry surface makes it useful for design process.Using a special approximate relation for stagnation region improves the aero-thermodynamics results.*

**Keywords:** Non-similar boundary layer equestions, Approximat boundary, Integred matrix method, Aeroheatin, Hypersonic flow

1. Assistant Professor (Correspending Athour)
2. Assistant Professor
3. PhD Candidate
4. PhD Candidate
5. Researcher

Recived: 2012.10. 30 , Accepted: 2013.11.04

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۶ / شمارهٔ ۳/ پاییز ۱۳۹۲
ص. ص ۴۸- ۳۹

# ارزیابی حل معادلات لایه‌مرزی و روابط تقریب مهندسی در گرمایش آیرودینامیکی اجسام متقارن محوری بازگشتی

**رامین کمالی‌مقدم[۱*]، سحر نوری[۲]، محمدرضا سلیمی[۳]، مجتبی شیدا[۴] و سیدامیر حسینی[۵]**

**۱، ۳، ۴ و ۵- پژوهشکده سامانه‌های فضانوردی، پژوهشگاه فضایی ایران**

**۲- دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر**

*ایران، تهران، شهرک قدس

**rkamali@ari.ac.ir**

*در فرآیند طراحی، هنگامی‌که از یک حلگر برای تحلیل اجسام بازگشتی ماورای‌صوت استفاده شود، داشتن سرعت بالای محاسباتی در کنار دقت مناسب نتایج از نکات کلیدی محسوب می‌شود. در تحقیق حاضر، نتایج حاصل از حل معادلات لایه‌مرزی آرام با استفاده از روش ماتریس انتگرالی و استفاده از روابط تقریب مهندسی در تخمین گرمایش آیرودینامیکی حول اجسام ماورای‌صوت متقارن محوری بازگشتی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهند که روش‌های به‌کار رفته دارای دقت مناسب در تحلیل گرمایش آیرودینامیکی اجسام متقارن محوری بوده و دارای سرعت بالا در راستای طراحی آیرودینامیکی اجسام بازگشتی هستند. برداشتن گام مکانی در شبیه‌سازی عددی معادلات لایه‌مرزی و همچنین استفاده از تعداد نقاط شبکه کمتر در لایه‌مرزی به دلیل استفاده از روش ماتریس انتگرالی نسبت به سایر روش‌های عددی، سرعت تحلیل معادلات لایه‌مرزی را به‌شدت افزایش می‌دهد. همچنین انعطاف‌پذیری بالای روابط تقریب مهندسی در تخمین شار حرارتی روی سطح اجسام بازگشتی، استفاده از آنها را برای طراحی مناسب می‌سازد. استفاده از یک رابطهٔ تقریب مهندسی جداگانه برای ناحیهٔ سکون نتایج گرمایش آیرودینامیکی روش تقریبی را در این ناحیه بهبود می‌بخشد.*

**واژه‌های کلیدی:** معادلات لایه‌مرزی غیرتشابهی، روابط تقریب مهندسی، روش ماتریس انتگرالی، گرمایش آیرودینامیکی، جریان ماورا ی‌صوت، جسم متقارن محوری

## علائم و اختصارات

| | |
|---|---|
| عدد پراندتل | $Pr$ |
| لزجت سیال | $\mu$ |
| عدد استانتون | $St$ |
| عدد رینولدز | $Re$ |
| ضریب اصطکاک | $C_f$ |
| ضریب بازیافت | $R$ |
| جریان دوبعدی | $j=0$ |
| جریان تقارن محوری | $j=1$ |
| چگالی | $\rho$ |
| سرعت در راستای جریان | $u$ |
| سرعت عمود بر جریان | $v$ |
| مختصه مماس بر سطح | $x$ |
| مختصه عمود بر سطح | $y$ |
| فشار | $p$ |
| آنتالپی کل | $H$ |
| شعاع انحنای سطح | $r$ |

## مقدمه

تعیین شار حرارتی روی سطح جسم به‌عنوان اطلاعات مورد نیاز برای طراحی سپرهای حرارتی و مواد فداشونده، تخمین تنش برشی روی سطح به‌منظور محاسبهٔ اتلافات نیروی پیشران و طراحی

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)
۲. استادیار
۳. دانشجوی دکتری
۴. دانشجوی دکتری
۵. پژوهشگر

**دریافت مقاله: ۹۱/۰۸/۰۹ ، تأیید مقاله: ۹۲/۰۸/۱۳**

نازل‌ها و دماغه‌ها همواره اهمیت ویژه‌ای دارد. در رژیم سرعت‌های ماورای‌صوت به دلیل وجود جریان‌های با سرعت و آنتالپی بالا، استفاده از امکانات آزمایشگاهی محدودیت پیدا می‌کند. این محدودیت سبب می‌شود که دینامیک سیالات محاسباتی به عنوان یک ابزار قدرتمند در شبیه‌سازی و طراحی وسایل پرنده ابرصوتی مورد توجه قرار گیرد. به‌منظور شبیه‌سازی عددی کامل و دقیق رفتار سیال حول اجسام آیرودینامیکی استفاده از معادلات ناویر- استوکس کامل، ضروری است. اما با وجود پیشرفت‌های فراوانی که در زمینهٔ سخت‌افزار کامپیوترها و پردازش موازی صورت گرفته است تمامی متخصصان CFD به خوبی آگاهند که تحلیل عددی مسائل مختلف با استفاده از این سیستم معادلات نیازمند تلاش محاسباتی بسیار بالا بوده و بسیار زمانبر است. از طرفی برای طراح اجسام پرنده، زمان از پارامترهای اساسی محسوب می‌شود و لذا صرف زمان بالا در طراحی، هزینه‌بر بوده و مناسب طراحی اولیه نیست. این مسئله سبب شده که روش‌های سریع با دقت مناسب در زمینهٔ گرمایش آیرودینامیکی مورد توجه قرار گیرند. در این راستا، ساده‌سازی معادلات ناویر- استوکس با استفاده از روابط تقریبی گرمایش آیرودینامیکی با توجه به نوع مسئلهٔ مورد تحلیل تا جائی‌که دقت و فیزیک مسئله را تحت تأثیر قرار ندهد امری منطقی و معقول است. معادلات لایه‌نازک (TLNS)، سهموی (PNS)، لایهٔ شوک لزج (VSL) و لایه‌مرزی (BL) نمونه‌هایی از معادلات ساده‌شده‌ای هستند که از سیستم معادلات ناویر- استوکس کامل به‌دست آمده و در تحلیل جریان‌های ماورای‌صوت و گرمایش آیرودینامیکی اجسام بازگشتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. معادلات لایه‌مرزی نیز به‌دلیل سرعت محاسباتی و دقت بالا همواره در طراحی اجسام بازگشتی ماورای‌صوت مورد توجه محققان بوده است [۵-۱]. با توجه به ماهیت جریان ماورای‌صوت روی اجسام پرنده، فرضیات معادلات لایه‌مرزی برای حل جریان ماورای‌صوت قابل قبول بوده و نتایج دقیقی به‌دست می‌دهد. تخمین گرمایش آیرودینامیکی به روش تقریبی نیز به دلیل سرعت بالای محاسباتی و همچنین انعطاف‌پذیری خوب آنها در حل شرایط مختلف جریان، از دیرباز مورد بررسی محققان و طراحان پرنده‌های آیرودینامیک بوده‌است [۱۰-۶]. در این راستا با استفاده از فرضیات متفاوت، روابط تقریبی مختلفی ارائه شده‌است که از مهم‌ترین آنها می‌توان به فعالیت‌های انجام شده توسط زوبی و همکارانش [۱۱] اشاره کرد. در این تحقیق نیز یک روش تقریب مهندسی به منظور حل نرخ گرمایش آیرودینامیکی در حالت جریان آرام و مغشوش برای هندسه‌هایی با دماغه پخ مورد استفاده قرار گرفته‌است.

در تحقیق حاضر، گرمایش آیرودینامیکی حول اجسام متقارن محوری در جریان ماورای‌صوت به دو روش حل معادلات لایه‌مرزی غیرتشابهی با استفاده از روش ماتریس انتگرالی و روابط تقریب مهندسی با فرض جریان آرام و گاز کامل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. معادلات لایه‌مرزی و روابط تقریبی به‌کاررفته تشریح شده و الگوریتم حل به دو روش به تفصیل بیان می‌شود. از آنجا که معادلات لایه‌مرزی برای حالت پایا بیان می‌شوند، برداشتن گام مکانی در شبیه‌سازی عددی آنها، سرعت تحلیل را به‌شدت افزایش می‌دهد. روش ماتریس انتگرالی نیز با فراهم‌ساختن امکان استفاده از تعداد نقاط شبکه کمتر در لایه‌مرزی به نسبت سایر روش‌های عددی همچون روش اختلاف محدود، سرعت حل معادلات فوق را با حفظ دقت بیشتر کرده و استفاده از الگوریتم فوق را برای طراحی مناسب‌تر می‌سازد. در تخمین شار حرارتی روی سطح جسم به روش تقریبی نیز از روابط توسعه داده شده توسط زوبی استفاده شده‌است. از آنجاکه روابط تقریبی فوق برای اجسام سریخ در جریان ماورای‌صوت حاصل شده، نتایج روی چند هندسهٔ متقارن محوری سریخ به دو روش تهیه شده و با نتایج تجربی مقایسه شده‌است. انعطاف‌پذیری بالای روابط تقریب مهندسی در تخمین شار حرارتی روی سطح اجسام بازگشتی، استفاده از آنها را برای طراحی مناسب می‌سازد. تحقیقات حاضر نشان می‌دهد که رابطهٔ تقریبی معمول در محاسبات گرمایش آیرودینامیکی برای نواحی سکون اعتبار نداشته و جهت به‌دست آوردن نتایج فیزیکی نیاز است از روابط تقریب مهندسی دیگری برای این ناحیه استفاده شود.

## معادلات لایه‌مرزی

تئوری لایه‌مرزی در سال ۱۹۰۴ توسط پراندل [۱۲] معرفی شد. با استفاده از این تئوری می‌توان جریان حول یک جسم در حال پرواز را مدل‌سازی کرد. این تئوری بر این پایه استوار است که در اعداد رینولدز بالا اثرات مربوط به پخش در مقابل با جابه‌جایی تضعیف شده و بنابراین جریان خارجی حول یک جسم را می‌توان به دو ناحیهٔ غیرلزج (خارج لایه‌مرزی) و لزج (داخل لایه‌مرزی) تقسیم کرد. در تحقیق حاضر، حل ناحیهٔ خارج از لایه‌مرزی توسط یک تحلیلگر جریان غیرلزج (مانند نرم‌افزار فلوئنت) صورت می‌گیرد. نتایج حاصل از حل غیرلزج که شامل اندازهٔ سرعت، مقدار فشار و دمای سیال روی سطح هستند در مرحلهٔ بعد جهت تحلیل معادلات لایه‌مرزی توسط حلگر توسعه داده شده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

معادلات لایه‌مرزی آرام در حالت پایا برای هندسه‌های دوبعدی/ متقارن محوری به فرم زیر نوشته می‌شوند [۲]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r^j) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r^j) = 0 \qquad (۱)$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r^j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu r^j\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (۳)$$

$$\rho u\frac{\partial H}{\partial x} + \rho v\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r^j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{Pr} r^j\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{1}{r^j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(1-\frac{1}{pr}\right) r^j\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right) \qquad (۴)$$

معادلات فوق در ازای $j=0$ دو بعدی و در ازای $j=1$ متقارن محوری هستند. جدول (۱) شرایط مرزی مربوط به معادلات ۱ تا ۴ را نشان می‌دهد، با توجه در این جدول مشخص است که می‌توان اثرات دمش و مکش روی سطح را وارد محاسبات کرد. همچنین، سطح می‌تواند دما ثابت یا آدیاباتیک در نظر گرفته شود.

**جدول ۱**- شرایط مرزی معادلات لایه‌مرزی

| روی سطح | روی لبهٔ لایه‌مرزی |
|---|---|
| $u=0$<br>$v=0$ | $u \to u_e$ |
| $H=H_w$ یا $\left.\frac{dH}{dn}\right\vert_w = 0$ | $H=H_e$ |

جهت سادگی حل معادلات ۱-۴ مختصات جدیدی که در آن وابستگی معادلات در راستای جریان بسیار کمتر از جهت عمود است، تعریف شده و معادلات غیرتشابهی حاصل می‌شوند. لذا می‌توان با استفاده از تبدیل‌های موجود معادلات مشتق جزئی ۱-۴ را تبدیل به معادلات دیفرانسیلی معمولی کرد. یکی از پرکاربردترین توابع انتقال موجود روابط لوی- لیز (Levy-Lees) هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_e\mu_e u_e r_b^{2j}\,dx \qquad (۵)$$

$$\eta(x,y) = u_e(2\xi)^{-1/2}\int_0^y \rho r^j\,dy \qquad (۶)$$

که در آنها اندیس $e$ نشان‌دهندهٔ شرایط روی لبهٔ لایه‌مرزی است. با فرض نازک بودن لایه‌مرزی در مقایسه با ابعاد مسئله می‌توان r را ثابت فرض کرد و معادلات مومنتم و انرژی انتقال یافته را به فرم زیر نوشت [۱]:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(N\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right) + f\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} + 2\frac{\xi}{u_e}\frac{du_e}{d\xi}\left(\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^2\right) = 2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi} - \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right) \qquad (۷)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{N}{Pr}\frac{\partial g}{\partial\eta}\right) + f\frac{\partial g}{\partial\eta} + \frac{u_e^2}{H_e}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(N\left(1-\frac{1}{Pr}\right)\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right) = 2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial g}{\partial\xi} - \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta}\right) \qquad (۸)$$

که در آن $N=\frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e}$، $g=\frac{H}{H_e}$ و $f=\frac{u}{u_e}$ هستند. جدول (۲) شرایط مرزی مرتبط با معادلات ۷ و ۸ را نشان می‌دهد.

**جدول ۲**- شرایط مرزی معادلات انتقال‌یافتهٔ لایه‌مرزی

<table>
<tr><th>روی سطح</th><th>روی لبهٔ لایه‌مرزی</th></tr>
<tr><td>$f=0$<br>و در صورت وجود دمش یا مکش:<br>$f_w = -\frac{1}{\sqrt{2\xi}}\int_0^\xi \frac{\rho_w v_w}{\rho_e u_e \mu_e r_0^j}d\xi$</td><td>$f' = \frac{u_e}{u_e} = 1$</td></tr>
<tr><td>$f' = \frac{u(0)}{u_e} = 0$</td><td rowspan="2">$g = \frac{H_e}{H_e} = 1$</td></tr>
<tr><td>$g = \frac{H(0)}{H_e} = \frac{H_{Wall}}{H_e}$<br>و در صورت آدیاباتیک بودن دیواره:<br>$g' = 0$</td></tr>
</table>

## روش ماتریس انتگرالی

اساس کار روش ماتریس انتگرالی بر استفاده از تعدادی چند جمله‌ای است که برای تقریب‌زدن کمیت‌های وابسته در فاصلهٔ بین نقاط شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرند. توابع ذکر شده به‌نحوی انتخاب می‌شوند که شروط پیوستگی کمیت‌ها و مشتقات اول و دوم آنها روی نقاط شبکه برآورده شود. بنابراین، استفاده از این روش امکان تقریب‌زدن کمیت‌های داخل لایه‌مرزی را با کمترین تراکم شبکه فراهم می‌سازد. استفاده از تعداد نقاط کم شبکه در ازای حفظ دقت را می‌توان مهم‌ترین امتیاز استفاده از روش انتگرال ماتریسی دانست که سرعت بالای حل معادلات لایه مرزی را موجب می‌شود. با انتگرال‌گیری در ξ ثابت و روی دو نقطهٔ متوالی شبکه j-1 و j معادلات لایه‌مرزی به فرم زیر در می‌آیند [۱]:

$$(Nf'')_{j-1}^{j} + \int_{j-1}^{j} ff''\,d\eta + \beta\int_{j-1}^{j}\frac{\rho_e}{\rho}\,d\eta - \beta\int_{j-1}^{j} f'^2\,d\eta = \int_{j-1}^{j} 2\left(f'\frac{\partial f'}{\partial(\ln\xi)} - f''\frac{\partial f}{\partial(\ln\xi)}\right)d\eta \qquad (۹)$$

$$\left(\frac{N}{Pr}g'\right)_{j-1}^{j} + \frac{u_e^2}{H_e}\left(N\left(1-\frac{1}{Pr}\right)f'f''\right)_{j-1}^{j} + \int_{j-1}^{j} fg'\,d\eta = \int_{j-1}^{j} 2\left(f'\frac{\partial g}{\partial(\ln\xi)} - g'\frac{\partial f}{\partial(\ln\xi)}\right)d\eta \qquad (۱۰)$$

با استفاده از روش انتگرال جزء به جزء و بسط سری تیلور می‌توان انتگرال‌های موجود در عبارات ۹ و ۱۰ را محاسبه کرد. در این صورت شکل گسستهٔ شدهٔ معادلات مومنتم و انرژی به‌ترتیب مطابق عبارت‌های ۱۱ و ۱۲ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&[Nf'' + f'((1+d_0)f_i + d_1 f_{i-1} + d_2 f_{i-2})]_{j-1}^{j}\\&+\beta\left[\left(\frac{\rho_e}{\rho_j}+\frac{\rho_e}{\rho_{j-1}}\right)\frac{\delta\eta}{2}+\left(\frac{\rho_e \rho'_j}{\rho_j^2}+\frac{\rho_e \rho'_{j-1}}{\rho_{j-1}^2}\right)\frac{\delta\eta^2}{12}\right]\\&=(1+\beta+2d_0)[f'_j XP_1 + f''_j XP_2 + f'''_j XP_3 +\\&f'''_{j-1} XP_4]\\&+[P'_j ZM_1 + P''_j ZM_2 + P'''_j ZM_3 + P'''_{j-1} ZM_4]\\&-2[f'_j ZP_1 + f''_j ZP_2 + f'''_j ZP_3 + f'''_{j-1} ZP_4]\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{N}{Pr}g'\right)+\frac{u_e^2}{H_e}\left(N\left(1-\frac{1}{Pr}\right)f'f''\right)\right]_{j-1}^{j}\\&+[g((1+d_0)f_i + d_1 f_{i-1} + d_2 f_{i-2})]_{j-1}^{j}\\&=(1+2d_0)[f'_j XP_1 + f''_j XP_2 + f'''_j XP_3 +\\&f'''_{j-1} XP_4]_{p_j=g_j}\\&+[f'_j ZP_1 + f''_j ZP_2 + f'''_j ZP_3 + f'''_{j-1} ZP_4]_{p_j=g_j}\\&+[g_j ZP_1 + g'_j ZP_2 + g''_j ZP_3 + g''_{j-1} ZP_4]_{p_j=f'_j}\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، برای متراکم‌کردن معادلات گسسته حاصل از انتگرال‌گیری‌ها از متغیرهای کمکی بسیاری استفاده شده است. در ادامه تعاریف مربوط به تک‌تک عبارت‌های کمکی به‌کار رفته ارائه می‌شود. ابتدا برای عبارت XP داریم:

$$\begin{aligned}XP_1 &= \delta\eta\left(P_j - P'_j\frac{\delta\eta}{2} + P''_j\frac{\delta\eta^2}{8} + P'''_{j-1}\frac{\delta\eta^2}{24}\right)\\XP_2 &= -\delta\eta^2\left(\frac{P_j}{2} - P'_j\frac{\delta\eta}{3} + P''_j\frac{11\delta\eta^2}{120} + P'''_{j-1}\frac{\delta\eta^2}{30}\right)\\XP_3 &= \delta\eta^3\left(\frac{P_j}{8} - P'_j\frac{\delta\eta}{120} + P''_j\frac{11\delta\eta^2}{420} + P'''_{j-1}\frac{5\delta\eta^2}{504}\right)\\XP_4 &= \delta\eta^3\left(\frac{P_j}{24} - P'_j\frac{\delta\eta}{30} + P''_j\frac{5\delta\eta^2}{504} + P'''_{j-1}\frac{\delta\eta^2}{252}\right)\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

توجه شود که متغیر $P$ در معادلهٔ مومنتم ( رابطهٔ ۱۱) برابر $f'$ بوده و مقدار آن در معادلهٔ انرژی (رابطهٔ ۱۲) برابر $g$ است. در رابطه با عبارت $ZP$ نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}ZP_1 &= \delta\eta\left(YP_1 - YP'_2\frac{\delta\eta}{2} + YP_3\frac{\delta\eta^2}{8} + YP_4\frac{\delta\eta^2}{24}\right)\\ZP_2 &= -\delta\eta^2\left(\frac{YP_1}{2} - YP_2\frac{\delta\eta}{3} + YP_3\frac{11\delta\eta^2}{120} + YP_4\frac{\delta\eta^2}{30}\right)\\ZP_3 &= \delta\eta^3\left(\frac{YP_1}{8} - YP_2\frac{\delta\eta}{120} + YP_3\frac{11\delta\eta^2}{420} + YP_4\frac{5\delta\eta^2}{504}\right)\\ZP_4 &= \delta\eta^3\left(\frac{YP_1}{24} - YP_2\frac{\delta\eta}{30} + YP_3\frac{5\delta\eta^2}{504} + YP_4\frac{\delta\eta^2}{252}\right)\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که در آنها $YP$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}YP_1 &= d_1 P_{i-1}^{j} + d_2 P_{i-2}^{j}\\YP_2 &= d_1 P'^{j}_{i-1} + d_2 P'^{j}_{i-2}\\YP_3 &= d_1 P''^{j}_{i-1} + d_2 P''^{j}_{i-2}\\YP_4 &= d_1 P''^{j-1}_{i-1} + d_2 P''^{j-1}_{i-2}\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

ضرایب $d_0$، $d_1$ و $d_2$ نیز بسته به اینکه از تقریب دو نقطه‌ای یا سه نقطه‌ای در جهت ξ استفاده شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

برای تقریب دو نقطه‌ای:

$$d_0 = \frac{2}{\Delta_{i-1}^{i}} \qquad d_1 = -\frac{2}{\Delta_{i-1}^{i}} \qquad d_2 = 0$$

برای تقریب سه نقطه‌ای:

$$d_0 = 2\frac{\Delta_{i-1}^{i}+\Delta_{i-2}^{i}}{\Delta_{i-1}^{i}\Delta_{i-2}^{i}} \qquad d_1 = -2\frac{\Delta_{i-2}^{i}}{\Delta_{i-1}^{i}\Delta_{i-2}^{i-1}} \qquad d_2 = 2\frac{\Delta_{i-1}^{i}}{\Delta_{i-2}^{i}\Delta_{i-2}^{i-1}}$$

با توجه به معادلات ۱۱ و ۱۲، مشاهده می‌شود که متغیرهای $f$، $f'$، $f''$، $f'''$، $g$ $g'$، $g''$ مجهولات ما را تشکیل می‌دهند. بنابراین، در کنار معادلات مومنتم و انرژی لازم است تا ۵ معادلهٔ کمکی تعریف شوند تا سیستم معادلات بسته شوند. معادلات کمکی با نوشتن بسط سری تیلور برای کمیت‌های $f$، $f'$، $f''$، $g$ و $g'$ به‌صورت زیر ایجاد می‌شوند:

$$-f_{j+1} + f_j + f'_j\delta\eta + f''_j\frac{\delta\eta^2}{2} + f'''_j\frac{\delta\eta^3}{8} + f'''_{j+1}\frac{\delta\eta^3}{24} = 0 \qquad (۱۶)$$

$$-f'_{j+1} + f'_j + f''_j\delta\eta + f'''_j\frac{\delta\eta^2}{3} + f'''_{j+1}\frac{\delta\eta^2}{6} = 0 \qquad (۱۷)$$

$$-f''_{j+1} + f''_j + f'''_j\frac{\delta\eta}{2} + f'''_{j+1}\frac{\delta\eta}{2} = 0 \qquad (۱۸)$$

$$-g_{j+1} + g_j + g'_j\delta\eta + g''_j\frac{\delta\eta^2}{3} + g''_{j+1}\frac{\delta\eta^2}{6} = 0 \qquad (۱۹)$$

$$-g'_{j+1} + g'_j + g''_j\frac{\delta\eta}{2} + g''_{j+1}\frac{\delta\eta}{2} = 0 \qquad (۲۰)$$

قبل از تحلیل دسته معادلات حاصل، ابتدا، لازم است که معادلات غیرخطی ۱۱ و ۱۲ خطی‌سازی شوند. در این تحقیق از روش نیوتن- رافسون برای خطی‌سازی این معادلات استفاده شده است. بعد از انجام خطی‌سازی‌ها معادلات حاصل در هر مقطع ξ به‌صورت کاملاً ضمنی تحلیل شده و اثرات مربوط به مقاطع قبلی به‌صورت صریح درنظرگرفته می‌شود. ازآنجاکه برای به‌دست‌آوردن متغیرهای جریان در هر نقطه j تنها به اطلاعات نقاط $j+1$ و $j-1$ نیاز است، ماتریس ضرایب حاصل شکل بلوکی سه‌قطری به‌خود می‌گیرد که هر بلوک آن شامل یک ماتریس ۷ x ۷ است. بدین ترتیب، الگوریتم حل در مکان شکل پیش‌رونده خواهد داشت.

در حل معادلات لایه‌مرزی با توجه به ماهیت غیرتشابهی معادلات مورد استفاده، لازم است که یک حل اولیه برای مقطع اول $(\xi = 0)$ وجود داشته باشد. در مسائل عملی تلاش می‌شود که نقطهٔ آغاز محاسبات جایی قرار داشته باشد که بتوان برای آن یک حل تشابهی به‌دست آورد. این نقطه اغلب روی ناحیهٔ سکون قرار داشته و از حل هیمنز[۶] به عنوان مقدار اولیه برای شروع محاسبات استفاده می‌شود. همچنین، با توجه به تغییرات کمی که پروفیل‌های مربوط به کمیت‌های $f$، $f'$، $f''$، $f'''$، $g$ $g'$، $g''$ از یک مقطع تا مقطع مجاور می‌کنند، برای حل جریان در هر مقطع از حل مقطع قبلی به عنوان حدس اولیه استفاده می‌شود. این موضوع سبب می‌شود که همگرایی حل سریع‌تر رخ داده و سرعت محاسبات افزایش یابد. شبکهٔ مورد استفاده نیز اغلب شامل ۷ تا ۱۰ نقطه بوده و تراکم نقاط به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شیب پروفیل‌های سرعت و دما که مشخص‌کنندهٔ ضریب اصطکاک سطحی و شار حرارتی هستند با دقت بالایی محاسبه شوند.

6. Hiemenz

## روابط تقریب مهندسی

استفاده از روابط تقریب مهندسی گرمایش آیرودینامیکی یکی از روش‌های انعطاف‌پذیر و سریع در طراحی وسایل بازگشتی در سرعت‌های ماورای‌صوت است. در این راستا روابط تقریبی مختلفی ارائه شده که در این بخش برای محاسبهٔ گرمایش آیرودینامیکی از معادلات انتگرالی زوبی استفاده شده است. این روابط برای جریان آرام و آشفته توسعه داده شده که در این مقاله از روابط جریان آرام استفاده می‌شود.

اساس رابطهٔ زوبی در تعیین شار حرارتی با استفاده از تعریف عدد استانتون به‌صورت رابطهٔ ۲۱ است [۱۱]:

$$q_w = St\,\rho_e u_e (h_{aw} - h_w) \tag{۲۱}$$

با استفاده از رابطهٔ اصلاح شدهٔ آنالوژی رینولدز عدد استانتون را می‌توان توسط رابطهٔ ۲۲ به ضریب اصطکاک مرتبط کرد [۱۱]:

$$St = \frac{c_f}{2}(Pr)^{-k} \tag{۲۲}$$

در رابطهٔ ۲۲، Pr عدد پرانتل و پارامتر k، عددی ثابت است که برای جریان آرام ۰/۶ و برای جریان مغشوش ۰/۴ است. مقدار $C_f$ نیز ضریب اصطکاک بوده که می‌توان آن را از حل دقیق معادله بلازیوس و تعیین ضخامت مومنتوم لایه‌مرزی محاسبه کرد. در رابطهٔ ۲۱ $h_{aw}$ آنتالپی دیواره عایق است که از رابطهٔ ۲۳ محاسبه می‌شود:

$$h_{aw} = h_e + \frac{1}{2} R {u_e}^2 \tag{۲۳}$$

که در این رابطه R ضریب بازیافت بوده و برای جریان آرام $R = pr^{\frac{1}{2}}$ انتخاب می‌شود. با تعریف ضخامت مومنتوم و ساده‌سازی در نهایت نرخ شار حرارتی وارد به سطح از رابطهٔ ۲۴ تعیین می‌شود [۱۱]:

$$q_{wl} = C_1 (Re_{\theta l})^{-m} \left(\frac{\rho^*}{\rho_e}\right)\left(\frac{\mu^*}{\mu_e}\right)^m \rho_e u_e (h_{aw} - h_w)(Pr)^{-k} \tag{۲۴}$$

این رابطه برای جریان آرام و آشفته صادق بوده و تنها ضرایب آن متفاوت است. در این رابطه برای درنظرگرفتن اثر تراکم‌پذیری از تعریف آنتالپی مرجع [۱۳] استفاده شده است تا بتوان از روابط و متغیرهای جریان تراکم‌ناپذیر برای جریان تراکم‌پذیر استفاده کرد. ثابت‌های مربوط به محاسبهٔ نرخ شار حرارتی جریان آرام برابر $C_1 = 0.22$، $K = 0.6$ و $m = 1$ انتخاب می‌شوند. همچنین عدد رینولدز بر مبنای ضخامت مومنتوم لایه‌مرزی در جریان آرام توسط رابطهٔ ۲۵ محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{Re}_{\theta l} = \frac{0.664\left(\int_0^{\xi} \rho^* \mu^* u_e h_\beta d\xi\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_e u_e h_\beta} \tag{۲۵}$$

رابطهٔ ۲۱ برای ناحیهٔ سکون صادق نبوده و دارای خطای بالایی است بنابراین در این تحقیق نرخ انتقال حرارت در ناحیهٔ سکون با استفاده از رابطهٔ ۲۶ به‌دست می‌آید [۱۱]:

$$q_w = 0.76\, Pr^{-0.6} (\rho_e u_e)^{0.4} (\rho_w u_w)^{0.1} \sqrt{\left(\frac{du_e}{dx}\right)_s} (h_{aw} - h_w) \tag{۲۶}$$

این رابطه توسط فای و ریدل برای حالت گاز کامل و بدون واکنش شیمیایی پیشنهاد شده است [۱۴]. در رابطهٔ ۲۶ مقدار گرادیان سرعت در نقطهٔ سکون از رابطهٔ ۲۷ تعیین می‌شود [۱۴]:

$$\left(\frac{du_e}{dx}\right)_s = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2(\mathrm{p_e} - \mathrm{p_\infty})}{\rho_\infty}} \tag{۲۷}$$

که در آن R همان شعاع انحنای دماغه است.

## حل غیرلزج

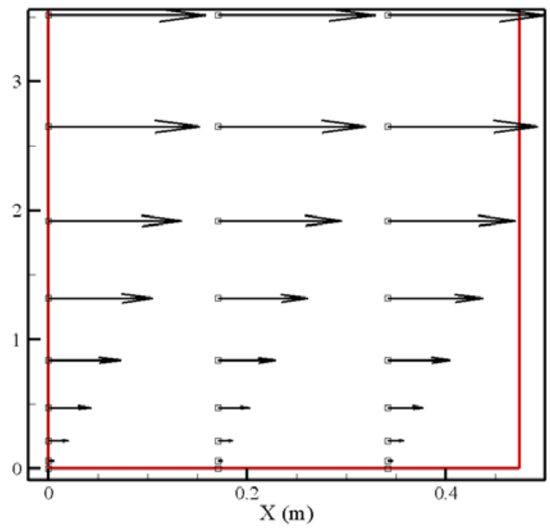
برای هر دو حلگر توسعه‌یافته به روش لایه‌مرزی و تقریب مهندسی در تحقیق حاضر، تعیین مقادیر اندازهٔ سرعت، فشار و دمای استاتیکی روی لبهٔ لایه‌مرزی حاصل از حل غیرلزج جریان به عنوان ورودی ضروری است. در تحقیق حاضر، از نرم‌افزار تجاری فلوئنت برای حل غیرلزج میدان جریان اطراف جسم مورد مطالعه استفاده شده است. در ادامه توضیحات مربوط به تنظیمات صورت گرفته در نرم‌افزار مذکور بیان می‌شود.

شبکهٔ مورد استفاده به‌صورت باسازمان بوده و استقلال حل از شبکهٔ محاسباتی روی نمودار متغیرهای خروجی در تمامی مسئله‌های فصل بعد صورت گرفته است. برای حل میدان جریان نیز از حلگر چگالی مبنا بر پایهٔ روش گسسته‌سازی Roe به‌صورت ضمنی استفاده شده است. دقت شبیه‌سازی‌های مکانی از مرتبهٔ دو (روش بالادست مرتبهٔ دو) بوده و از معادلهٔ حالت گاز ایده‌آل برای برقراری ارتباط بین میدان انرژی و مومنتم استفاده شده است. علاوه بر این، ظرفیت گرمایی در فشار ثابت برای هوا ثابت فرض شده است. به‌منظور اطمینان از همگرایی نتایج نیز علاوه بر کمتر بودن باقیمانده‌ها از معیار $10^{-5}$، انتگرال پارامترهای مورد استفاده در لبهٔ لایه مرزی نیز، از تکرار مستقل شده است.

## نتایج

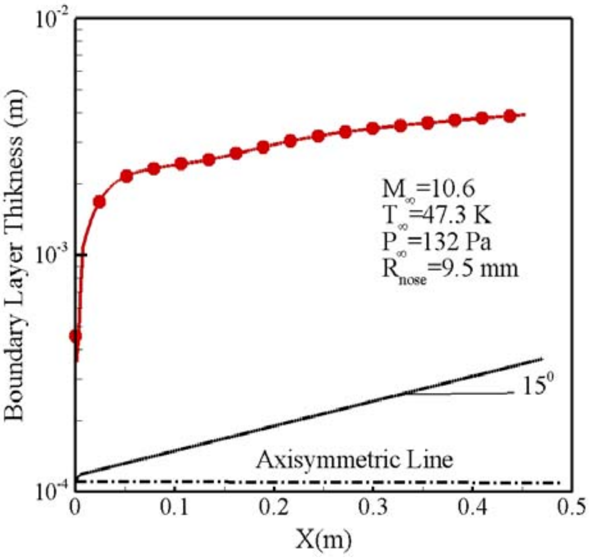
به‌منظور بررسی صحت و عملکرد الگوریتم ماتریس انتگرالی در تحلیل معادلات متقارن محوری لایه‌مرزی و روابط تقریبی

گرمایش آیرودینامیکی، نتایج حاصل از اعمال الگوریتم‌های حاضر روی چند مسئلهٔ نمونه با داده‌های موجود در مراجع معتبر مقایسه شده‌اند. مسئلهٔ اول، بررسی گرمایش حول یک هندسهٔ مخروط سرپخ با زاویهٔ ۱۵ درجه در عدد ماخ ۱۰/۶ است که طولی معادل با ۰/۴۵ متر و دمای دیواره ثابت معادل ۳۰۰ کلوین دارد. سایر شرایط جریان در شکل‌ها آورده شده‌اند. در حل معادلات لایه‌مرزی که نیاز به تولید شبکهٔ محاسباتی وجود دارد؛ بیشترین مقدار $\eta$ و اولین فاصلهٔ شبکه از دیواره، دو پارامتر اساسی در تعیین پایداری حل عددی و میزان دقت حل هستند. در مرجع [۱۵] حساسیت روش ماتریس انتگرالی به تعداد نقاط شبکه در راستای عمود بر جریان بررسی و نتیجه گرفته شده‌است که با تعداد حداقل ۹ نقطه درون لایه‌مرزی در هر گام می‌توان نتایج قابل قبولی در گرمایش آیرودینامیکی به‌دست آورد. در واقع استفاده از الگوریتم ماتریس انتگرالی در حل معادلات لایه‌مرزی سبب شده‌است که با تراکم کم نقاط بتوان نتایج مناسبی را فراهم کرد. شکل (۱) پروفیل سرعت به همراه تعداد نقاط درون لایه‌مرزی در شبکهٔ محاسباتی را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که تعداد شبکه در راستای جریان ۵۰۰ گام مکانی است. همان‌طورکه بیان شد تخمین گرمایش آیرودینامیکی به روش تقریب مهندسی نیازی به تولید شبکه ندارد و روابط در هر گره محاسباتی روی سطح قابل استفاده است.




**شکل ۱**– پروفیل سرعت روی شبکهٔ محاسباتی کرهٔ مخروط ۱۵ درجه

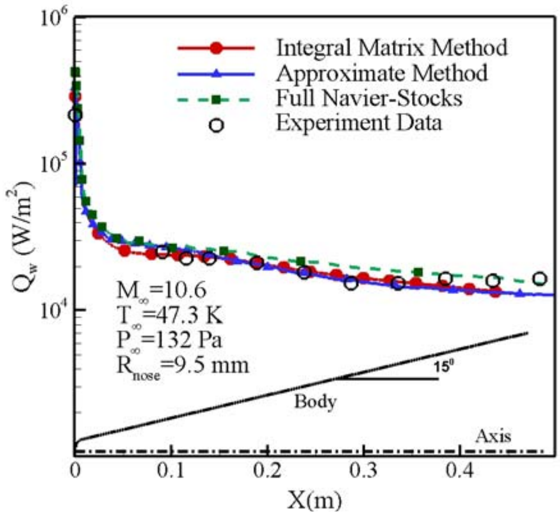
یکی از مزیت‌های حل معادلات لایه‌مرزی تعیین ضخامت و نحوهٔ رشد لایه‌مرزی است. از آنجاکه جهت حل معادلات لایه‌مرزی، دما، فشار و سرعت روی لبهٔ لایه‌مرزی به‌عنوان شرط‌مرزی مورد نیاز است و این مقادیر از تحلیل جریان غیرلزج هندسه موردنظر و با استفاده از داده‌های روی سطح جسم تأمین می‌شود، از ضخامت لایه‌مرزی صرفنظر می‌شود. در واقع برای تعیین دقیق مقادیر روی لبه لایه‌مرزی، جسمی که حل غیرلزج روی آن صورت می‌گیرد می‌بایست به مقدار ضخامت لایه‌مرزی، ضخیم‌تر شود تا شرایط مرزی روی لبهٔ لایه‌مرزی معادلات دقیق‌تر شده و حل دقیق‌تری از معادلات لایه‌مرزی فراهم شود. با توجه به اینکه ضخامت لایه‌مرزی نسبت به ابعاد جسم بسیار کوچک است، درنظر نگرفتن آن خطای زیادی در محاسبات ایجاد نمی‌کند اما اطلاع از میزان ضخامت لایه‌مرزی میزان دقت نتایج به‌دست آمده را روشن کند. شکل (۲) توزیع ضخامت لایه‌مرزی روی سطح مخروط ۱۵ درجه را نشان می‌دهد که بیانگر رشد آن در راستای طول بدنه است. مشاهده می‌شود که حداکثر ضخامت لایه‌مرزی در انتهای بدنه حدود ۳ میلی‌متر بوده که در مقابل طول و شعاع نوک جسم ناچیز است.



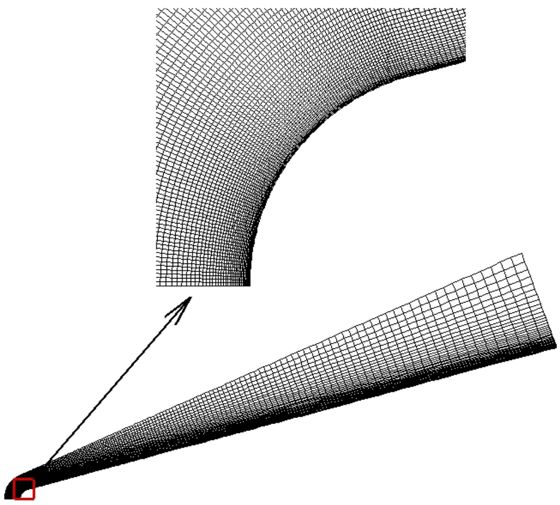

**شکل ۲**– ضخامت لایه‌مرزی روی سطح بدنه مخروط ۱۵ درجه

به‌منظور بررسی گرمایش آیرودینامیکی روی سطح مخروط فوق مقایسهٔ توزیع شار حرارتی به روش تقریب مهندسی و روش حل معادلات لایه‌مرزی با داده‌های تجربی [۱۶] در شکل (۳) آورده شده‌است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند با اینکه در نواحی نزدیک به نقطهٔ سکون اختلافاتی بین دو روش وجود دارد، اما نتایج حاصل از هر دو روش تطابق خوبی با داده‌های تجربی دارند. با توجه در این نمودار مشخص است که به‌استثنای نتایج مربوط به حل کامل معادلات ناویر– استوکس، سایر روش‌های استفاده شده شار حرارتی را در انتهای مدل کمتر از داده‌های تجربی محاسبه می‌کنند. دلیل این اختلاف ناشی از درنظرنگرفتن ضخامت جابه‌جایی و عدم اعمال اثرات مرتبط با لایهٔ آنتروپی در روش‌های مورد استفاده است. اگرچه، اثرات لایهٔ آنتروپی

غالباً مربوط به نواحی نزدیک به شوک کمانی یعنی در نزدیکی دماغه مشهود هستند، اما خطایی که درنظرنگرفتن آن ایجاد می‌کند با توجه به نتایج موجود در تحقیق حاضر و مرجع [۱۶] تا پایین‌دست جریان امتداد می‌یابد. درنظرگرفتن تناوبی ضخامت جابه‌جایی در حل غیرلزج و اصلاح شرایط روی لبه لایه‌مرزی در حل معادلات لایه‌مرزی می‌تواند به اصلاح نتایج به‌خصوص در نواحی دور از دماغه که ضخامت لایه مرزی رشد می‌کند کمک کند [۱۶].




**شکل ۳**– مقایسهٔ توزیع شار حرارتی روی سطح بدنهٔ کره مخروط ۱۵ درجه



**شکل ۴**– شبکهٔ محاسباتی برای حل لزج فلوئنت

به‌منظور بررسی راندمان الگوریتم‌های حاضر نتایج حاصل با حل لزج نرم‌افزار فلوئنت مقایسه شده‌اند. شبکه مورد استفاده برای این حل بعد از انجام مطالعات مربوط به استقلال حل از شبکه محاسباتی انتخاب شده است. بنابراین، جهت انجام محاسبات از کمترین نقاط شبکه که توزیع شار حرارتی صحیحی روی دیواره حاصل کند استفاده شده است (شکل ۳). در شکل (۴) شبکه‌بندی صورت گرفته برای حل فوق آورده شده‌است. شبکهٔ ایجاد شده برای این حل دارای تعداد ۱۸۰۰۰ المان است. به‌دلیل اهمیت فوق‌العادهٔ فاصلهٔ نقطهٔ اول شبکه در محاسبات مربوط به گرمایش، از نتایج کد لایه‌مرزی و محاسبهٔ ضخامت لایه‌مرزی استفاده شده و مناسب‌ترین شبکه برای حل لزج نرم‌افزار فلوئنت ایجاد شده است. در این شبکه، فاصلهٔ اولین نقطه از سطح معادل ۰/۱ ضخامت لایه مرزی هیمنز بوده و از ۸۰ نقطهٔ محاسباتی در راستای عمودی استفاده شده است. شایان ذکر است که شبکهٔ تولید شده برای فراهم‌کردن نقاط کافی در لایهٔ مرزی به‌سمت دیواره متراکم شده است. به‌منظور ارزیابی الگوریتم‌های توسعه‌یافته، در جدول (۳) مقایسهٔ زمان محاسباتی با استفاده از نرم‌افزار فلوئنت و الگوریتم‌های حاضر با استفاده از یک رایانه با مشخصات Core-i5-2400, CPU 3.1GHz, RAM 4GB برای این مسئله صورت گرفته‌است.

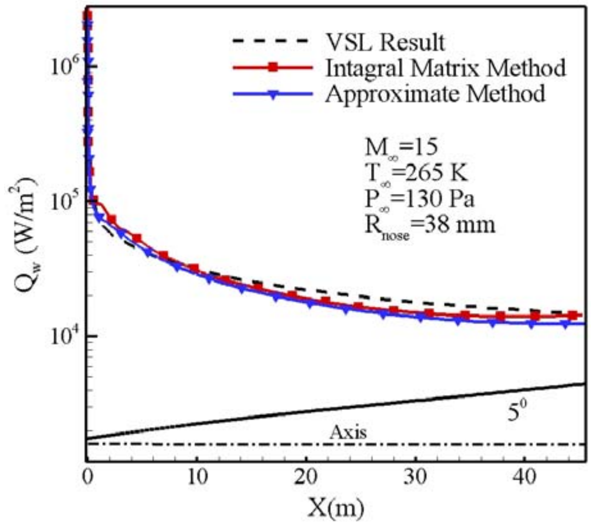
**جدول ۳**– مقایسهٔ زمان محاسباتی

| ردیف | نرم‌افزار/روش | معادلات | زمان (دقیقه) |
|---|---|---|---|
| ۱ | فلوئنت | معادلات ناویر- استوکس | ۴۵ |
| ۲ | فلوئنت | معادلات اویلر | ۱۰ |
| ۳ | لایه‌مرزی | لایه‌مرزی | ۰/۲۵ |
| ۴ | تقریبی | تقریبی | ۰/۱۵ |

مشاهده می‌شود که زمان محاسباتی برای این مسئله با استفاده از نرم‌افزار فلوئنت تقریباً ۴۵ دقیقه و با استفاده از حل معادلات لایه‌مرزی حدود ۰/۲۵ دقیقه و برای روش تقریبی معادل ۰/۱۵ دقیقه است. بنابراین، زمان محاسباتی برای دو روش حاضر به همراه حل غیرلزج آنها حدود ۱۰ دقیقه می‌شود. با توجه به مقایسهٔ هزینه‌های محاسباتی و این حقیقت که اختلاف زمان محاسباتی در مسائل سه‌بعدی به‌مراتب تشدید می‌شود، می‌توان به اهمیت توسعهٔ الگوریتم‌های فوق پی برد.

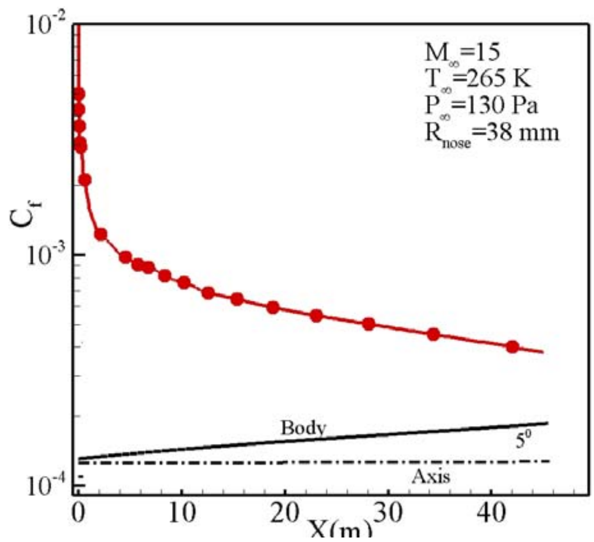
به‌منظور ارزیابی نتایج الگوریتم حاضر در تحلیل هندسه‌هایی با طول بیشتر، تحلیل جریان ماورای‌صوت حول یک مخروط سریخ با زاویهٔ ۵ درجه با طولی معادل ۴۷ متر مورد بررسی قرار گرفته‌است. جریان آزاد دارای عدد ماخ ۱۵ بوده و دمای سطح جسم ۱۲۵۵ درجهٔ کلوین است. شار حرارتی روی سطح جسم با استفاده از دو روش حل معادلات لایه‌مرزی و روابط تقریبی در شکل (۵) با نتایج عددی مرجع [۱۷] که با روش عددی لایه شوک لزج (VSL) است، مقایسه شده‌است. مشاهده می‌شود که نتایج هر دو روش برهم منطبق بوده و روند مناسبی دارند. بررسی حاضر نشان می‌دهد که استفاده از روابط تقریبی در تخمین گرمایش آیرودینامیکی حول

اجسام متقارن محوری در جریان ماورای‌صوت در فاصله‌های زیاد از نوک جسم قابل اعتماد است.



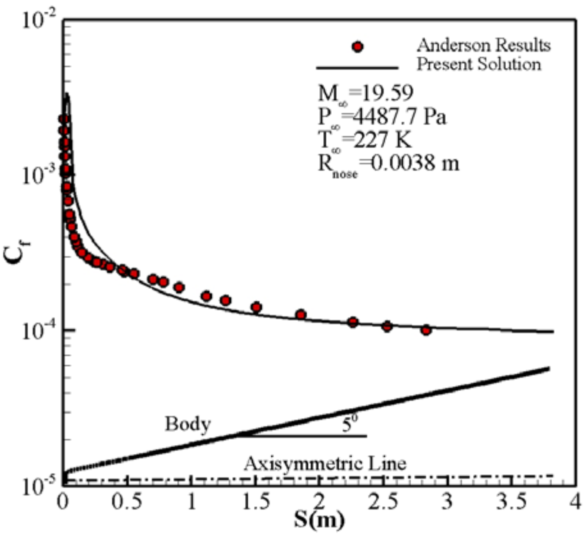

**شکل ۵**– مقایسهٔ توزیع شار حرارتی روی سطح بدنهٔ کره مخروط با زاویهٔ ۵

یکی از پارامترهایی که در طراحی اجسام پرنده در سرعت‌های ماورای‌صوت بسیار حائز اهمیت است، مقدار و نحوهٔ توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح جسم است. از آنجاکه استفاده از روابط تقریبی ۲۱ و ۲۶ تنها برای محاسبهٔ شار حرارتی روی سطح اجسام بازگشتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، در شکل (۶) توزیع این پارامتر روی سطح هندسهٔ مخروط سریخ حاصل از حل معادلات لایه‌مرزی آورده شده‌است. صحت نتایج مربوط به شارحرارتی با توجه به ارتباطی که از طریق آنالوژی رینولدز بین عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای وجود دارد، به‌نحوی صحت نتایج مربوط به $C_f$ را نیز به اثبات می‌رساند.




**شکل ۶**– مقایسهٔ ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح بدنهٔ کرهٔ مخروط با زاویهٔ ۵ درجه

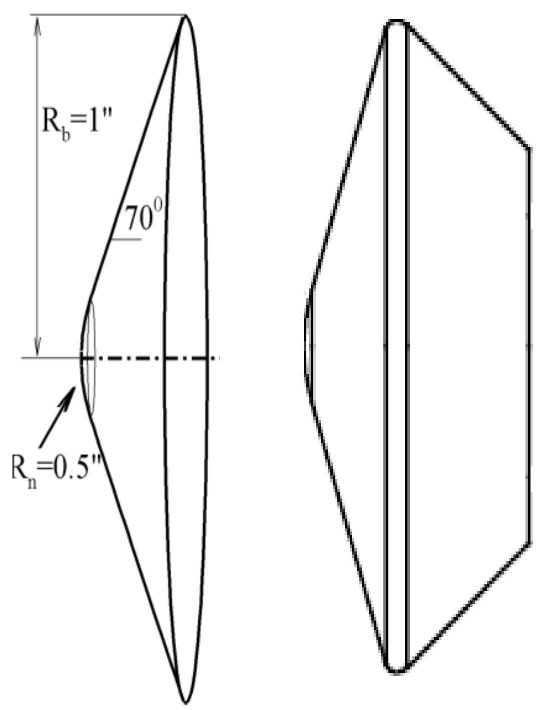
برای مطالعهٔ دقیق‌تر عملکرد کد توسعه داده شده در محاسبهٔ ضریب اصطکاک پوسته‌ای جریان ماورای‌صوت اطراف کرهٔ مخروط با ماخ ۱۹/۶ و زاویهٔ جانبی ۵ مورد ارزیابی قرار گرفته است. شعاع دماغه در این مسئله برابر ۰/۰۰۳۸ متر بوده و دمای دیواره ۵۵۵ درجهٔ کلوین است [۱۸]. فشار و دمای جریان آزاد نیز به ترتیب برابر ۴۴۸۸ پاسکال و ۲۲۷ درجهٔ کلوین درنظرگرفته شده است. در این رابطه شکل (۷) توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای حاصل از الگوریتم مورد استفاده را در مقایسه با نتایج اندرسن [۱۸] نمایش می‌دهد که تطابق خوبی دارد.



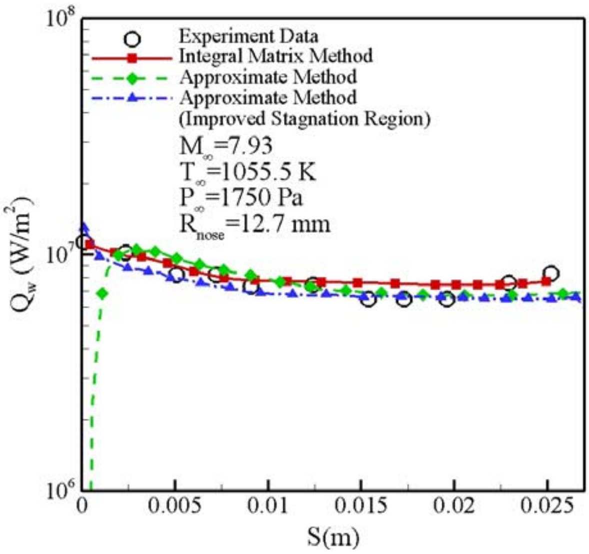

**شکل ۷**– مقایسهٔ توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح

به‌منظور بررسی قابلیت الگوریتم‌های حاضر در تحلیل هندسه‌های پیچیده‌تر و با زوایای هندسی بالاتر، مسئلهٔ دیگری که مورد تحلیل قرارگرفته مدلی از کپسول مریخ‌پیمای بازگشتی در مأموریت ناسا با دماغهٔ سریخ و زاویهٔ شیب ۷۰ درجه است. هندسهٔ کپسول فوق در شکل (۸) آورده شده‌است اما به‌دلیل اینکه معادلات لایه‌مرزی و روابط تقریبی پس از جدایش جریان از روی سطح حاکم بر رفتار سیال نیستند، لذا تنها قسمت جلو دماغه که تقریباً مهم‌ترین ناحیهٔ جسم از لحاظ بررسی گرمایش آیرودینامیکی است توسط نرم‌افزار حاضر مدل‌سازی شده‌است. در تحلیل‌ها دمای دیواره ثابت و برابر با ۳۰۰ کلوین درنظرگرفته شده‌است. مقایسهٔ توزیع شار حرارتی روی سطح بدنه حاصل از دو روش تقریبی و حل معادلات لایه‌مرزی با داده‌های تجربی [۱۹] در شکل (۹) نشان داده شده‌است. در این مسئله نیز مشابه با مسائل قبلی، شبکهٔ به‌کار رفته برای حل معادلات لایه‌مرزی دارای ۹ گره در عرض لایه‌مرزی است. مشاهده می‌شود که حل

معادلات لایه‌مرزی و استفاده از الگوریتم ماتریس انتگرالی تنها با ۹ نقطه در شبکه محاسباتی نتایج مناسبی را فراهم می‌کند. شایان ذکر است که حل معادلات لایه‌مرزی شدیداً وابسته به شرایط مرزی روی لبهٔ لایه مرزی است که از حل غیرلزج جریان فراهم می‌شود. ازآنجاکه هندسهٔ کپسول در این مسئله دارای ناحیهٔ سکون بزرگی است، فراهم‌کردن نتایج غیرلزج دقیق و هموار در این ناحیه با استفاده از حلگرهای غیرلزج دشوار بوده و هر خطایی در آنها باعث بروز خطا در نتایج حل معادلات لایه‌مرزی می‌شود. همان‌طورکه بیان شد رابطهٔ ۲۱ در تخمین شار حرارتی در ناحیهٔ سکون قابل استفاده نیست. این مسئله به‌وضوح در شکل (۹) مشاهده می‌شود. در واقع روابط تقریب مهندسی زوبی با فرض نازک بودن لایهٔ شوک به‌دست آمده‌است که در هندسهٔ فوق ضخامت لایه شوک با افزایش زاویهٔ هندسی، بیشترشده و باعث ایجاد خطا در نتایج می‌شود. ازاین‌رو برای اصلاح نتایج در این ناحیه از رابطه ۲۶ استفاده شده که مخصوص ناحیهٔ سکون توسعه داده شده‌است و مشاهده می‌شود که با استفاده از این رابطه در نقطه سکون نتایج تطابق مناسبی با داده‌های تجربی پیدا می‌کنند. نکتهٔ حائز اهمیت سرعت تحلیلگر حاضر چه به روش حل معادلات لایه‌مرزی و چه به روش تقریبی است که این مسئله در هندسه‌های سه‌بعدی بیشتر مشهود است.

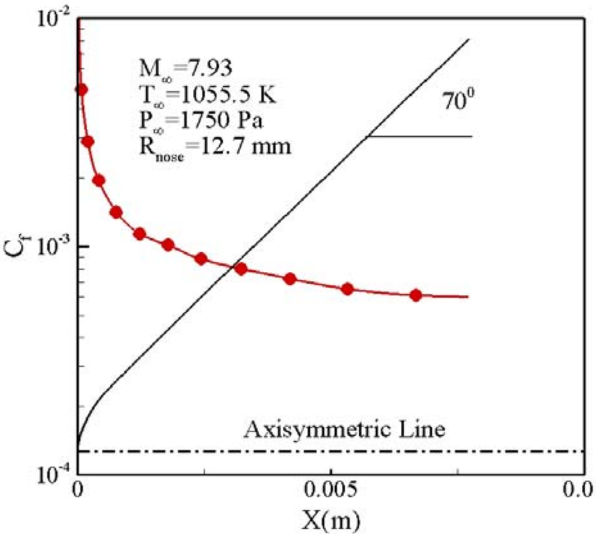



**شکل ۸**– هندسهٔ کپسول کره- مخروط با زاویهٔ ۷۰ درجه




**شکل ۹**– مقایسه توزیع شار حرارتی روی سطح بدنه کپسول

در شکل (۱۰) ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح جسم حاصل از حل معادلات لایه‌مرزی آورده شده‌است. همان‌طورکه بیان شد نتایج به‌دست آمده برای ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح جسم به‌دلیل انطباق خوب شارحرارتی به‌دست آمده روی جسم با داده‌های تجربی و ارتباط بین عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای از طریق آنالوژی رینولدز قابل اعتماد است.




**شکل ۱۰**– مقایسه توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح بدنه کپسول

## نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، گرمایش آیرودینامیکی جریان حول اجسام ماورای‌صوت متقارن محوری به دو روش حل عددی معادلات

لایه‌مرزی آرام و روش تقریب مهندسی مورد بررسی قرار گرفته است. استفاده از روش ماتریس انتگرالی در حل معادلات لایه‌مرزی سبب می‌شود که با تراکم کم تعداد شبکه در عرض لایه‌مرزی جریان بتوان نتایج مناسبی را فراهم کرد که این مسئله هزینهٔ محاسباتی را به‌شدت کاهش می‌دهد. به‌منظور اعتباردهی الگوریتم‌های توسعه‌یافته، جریان ماورای‌صوت حول سه هندسهٔ مخروط سریخ با زوایای هندسی متفاوت و در شرایط مختلف مورد تحلیل قرارگرفته است. نتایج نشان می‌دهند که روش‌های به‌کار رفته دارای دقت مناسب در تحلیل گرمایش آیرودینامیکی اجسام متقارن محوری بوده و دارای سرعت بالا در راستای طراحی آیرودینامیکی اجسام بازگشتی هستند. استفاده از الگوریتم ماتریس انتگرالی در حل معادلات لایه‌مرزی باعث شده که بتوان با تعداد نقاط کمتری در عرض لایه‌مرزی نسبت به سایر روش‌های عددی نتایج را استخراج کرد که این موضوع سرعت حلگر لایه‌مرزی را به‌شدت افزایش می‌دهد. همچنین انعطاف‌پذیری بالای روش تقریب مهندسی در تخمین گرمایش آیرودینامیکی اجسام بازگشتی به دلیل عدم استفادهٔ آنها از حل عددی، این حلگر را برای طراحی مناسب می‌سازد. البته استفاده از رابطهٔ تقریب مهندسی زوبی در ناحیهٔ سکون محدودیت پیدا کرده و تخمین شار حرارتی را دچار خطا می‌کند که این موضوع با استفاده از رابطهٔ تقریبی فای-ریدل که برای نقطهٔ سکون توسعه داده شده قابل حل است.

## مراجع

[1] Bartlett, E. P. and Kendall, R. M., "Nonsimilar Solution of the Multicomponent Laminar Boundary Layer by an Integral Matrix Method," NASA CR-1062, Part I, 1967.

[2] Anderson, L. W. and Kendall, R. M., "A Nonsimilar Solution for Multicomponent Reacting Laminar and Turbulent Boundary Layer Flows Including Transverse Curvature," AFWL TR-69-106, 1970.

[3] Hamilton, H. H., Millman, D. R. and Greendyke, R. B., "Finite-Difference Solution for Laminar or Turbulent Boundary Layer Flow over Axisymmetric Bodies with Ideal Gas, CF4, or Equilibrium Air Chemistry," NASA CR-3271, 1992.

[4] Catherall, D. and Mangler, K.W., "The Integration of the Two-Dimensional Laminar Boundary-Layer Equations Past the Point of Vanishing Skin Friction," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 26, Issue 01, 1966, pp.163-182.

[5] Lewins, J. D. "Comparative Solutions to the Integral-Approximate Thermal Boundary Layer Equations for a Flat Plate," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 32, Issue 4, 2004, pp. 316-344.

[6] Dejarnette, F. R., Hamilton, A. H., Weilmuenster K. J. and Cheatwood F. M., "A Review of Some Approximate Methods Used in Aerodynamic Heating Analysis," *Journal of Thermo physics*, Vol. 1, No. 1 1978, pp. 5-12.

[7] Dejarnette, F. R and Hamilton, H. H., "Inviscid Surface Streamlines and Heat Transfer on Shuttle-Type Configurations," *Journal of Spacecraft*, Vol. 10, No. 5 , 1973, pp.314-321.

[8] Riley, C. J. and Dearnette, F. R, "Engineering Aerodynamic Heating Method for Hypersonic Flow," *Journal of Spacecraft and Rockets,* Vol. 29, No. 3, 1992, pp.327-339.

[9] Shimshi, J. P. and Walberg, G. D., "Aerodynamic Heating to Spherically Blunted Cones at Angle of Attack," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 32, No 33, 1995, pp. 559-561.

[10] Carlson, H. A., "Aerothermodynamics Analyses of Hypersonic Blunt Body Flows," *Journal of Spacecraft and Rocket*, Vol. 36, No. 6, 1999, pp. 912-915.

[11] Zoby, E. V., Moss, J. N. and Sutton, K., "Approximate Convecting Heating Equations for Hypersonic Flows," *Journal of Spacecraft*, Vol.18, No.1, 1981, pp 64-70.

[12] Anderson, J. D. *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, NewYork: McGraw-Hill Book Company, 1989.

[13] Eckert, E. R. G., "Engineering Relations for Friction and Heat Transfer to Surfaces in High Velocity Flow," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 22, No .8, 1955, pp. 585-587.

[14] Fay, J. A. and Riddle, F. R., "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air," *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 25, No.2, 1958, pp. 73-85.

[15] Kamali Moghadam, R. and Salimi, M. R. "Hypersonic Flow Solution around the Axisymmetric Reentry Vehicles Using Laminar Boundary Layer Equations by Integral Matrix Method," *the first Aero-Hydro Conference*, Iran, 2012 (In Persian).

16] Cleary, J. W., "Effects of Angle of Attack and Bluntness on Laminar Heating- Rate Distributions of Angle 15 Cone at a Mach Number of 10.6," NASA Technical Note, TN D-5450, October 1969.

[17] Cheatwood, F. and Dejarnet, F. R., "Approximate Viscous Shock Layer Technique for Calculating Hypersonic Flows about Blunt-Nosed Bodies," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 31, No. 4, 1994, pp. 621-629.

[18] Anderson, E. C., Lewis, H., "Laminar or Turbulent Boundary-Layer Flows of Perfect Gases or Reacting Gas Mixtures in Chemical Equilibrium," NASA CR-1893, 1971.

[19] Hollis, B. R. and Perkins J. N., "Comparison of Experimental and Computational Aerothermodynamics of a 70-deg Sphere-Cone", AIAA 96-1867, 1996.