JSST
Journal of Space Science & Technology

Vol. 6, No. 3, 2013

Design of Round Trip Trajectories to Lunar L1

M. Jafari -Nadoushan[1], A. Novinzadeh[2*]

1. Department of Aerospace Engineering, Sharig University of Technology

2. Department of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of Technology

[*]Azadi St., Tehran, IRAN

novinzadeh@kntu.ac.ir

In this paper design of transfer trajectory from Earth park orbit to a halo orbit around L1 of Earth-Moon system and return trajectory from halo orbit to the Earth are investigated. Since satisfying constraints and boundary conditions at the end of trajectory is an important point in trajectory design, we deal with a two point boundary value problem. Considered constraints in this paper include height, orthogonality of position and velocity vectors for reducing required Del-V for orbital transfer and flight path angle. Due to complex dynamics of three body problem and also in order to satisfying these constraints and suitable trajectory design, the multiple shooting methods based on differential correction is used.

Keywords: Three body problem, Stable and unstable Manifold, Design of round trip, Multiple shooting method

1. Graduate Student
2. Assistant Professor (Corresponding Athour)

Recived: 2013.02.12 , Accepted: 2013.04.23

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۶ / شمارهٔ ۳/ پاییز ۱۳۹۲
ص. ص ۵۴- ۴۹

طراحی مسیر رفت و برگشتی به نقطهٔ لاگرانژی L1 سیستم زمین- ماه

مهدی جعفری‌ندوشن[۱] و علیرضا نوین‌زاده[۲]*

۱- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

۲- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه‌نصیرالدین طوسی

*تهران، تهرانپارس، وفادار شرقی

novinzadeh@kntu.ac.ir

در این مقاله به طراحی مسیر رفت از مدار پارک زمینی به مدار هاله‌ای حول نقطهٔ لاگرانژی L_1 سیستم زمین- ماه و مسیر بازگشتی آن از مدار هاله‌ای به زمین پرداخته شده است. از نکات مهم در طراحی مسیر در مسئله سه جسم، برآورده شده قیدها و شرایط مرزی در ابتدا و انتهای مسیر است، لذا با یک مسئله با شروط مرزی مواجه هستیم. قیدهای درنظر گرفته شده در این مقاله، شامل ارتفاع، عمود بودن بردار موقعیت بر بردار سرعت به منظور کاهش تغییر سرعت مورد نیاز جهت انتقال مداری و زاویهٔ مسیر پرواز مشخصی است. به واسطهٔ دینامیک پیچیدهٔ مسئله سه جسم و نیز به جهت ارضای این قیود و طراحی مسیر مناسب، از روش پرتابه‌ای چندگانه مبتنی بر تصحیح دیفرانسیلی استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: مسئلهٔ سه جسم، منیفلد پایدار و ناپایدار، طراحی مسیر رفت و برگشتی، روش پرتابه‌ای چندگانه

علائم و اختصارات

نقاط لاگرانژی شماره i	L_i
مولفه‌های بردار موقعیت در دستگاه چرخان	x, y, z
مولفه‌های بردار سرعت در دستگاه چرخان	$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$
مولفه‌های بردار شتاب در دستگاه چرخان	$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$
فاصله فضاپیما با جسم iام	r_i
نسبت جرم جسم کوچکتر به مجموع اجرام	μ
شعاع زمین	R_E
ارتفاع لازم برای ورود به جو	h_{req}
زاویه مسیر پرواز لازم برای ورود به جو	γ_{req}
مقدار نهایی پارامتر W	W_f
تغییر سرعت لازم برای انتقال از مدار هاله‌ای به مسیر انتقالی یا بالعکس	Δv_H
تغییر سرعت لازم برای انتقال از مدار پارک به مسیر انتقالی یا بالعکس	Δv_L
تغییر سرعت کل	Δv_T

مقدمه

در سال‌های اخیر، علاقه به طراحی مأموریت‌های فضایی بر مبنای دینامیک مسئله سه جسم و استفاده از نقاط لاگرانژی مورد استقبال قرار گرفته است. در این میان نقطهٔ لاگرانژی L_1 سیستم زمین- ماه موقعیت راهبردی دارد. این موقعیت راهبردی ناشی از نزدیکی به زمین و قرارگیری در حد فاصل سیستم زمین- ماه و خورشید- زمین است. معمولاً نقاط L_1 و L_2 سیستم زمین ماه به عنوان دروازهٔ ورود به سیستم خورشید- زمین و انجام سفرهای فضایی تلقی می‌شود.

۱. دانشجوی دکتری
۲. استادیار (نویسنده مخاطب)

دریافت مقاله: ۹۰/۱۱/۱۵ ، تأیید مقاله: ۹۲/۰۸/۱۳

فاصلهٔ نزدیک نقطهٔ L_1 به زمین موجب شده است که این نقطه مکان مناسبی برای برپایی یک ترمینال فضایی باشد. در این ترمینال فضایی می‌توان خدمات مختلفی از قبیل تعمیر و نگهداری، جابه‌جایی خدمه و غیره را به تلسکوپ‌های فضایی و فضاپیماها ارائه داد که بر روی هزینه‌های مأموریت‌های فضایی و امکان‌پذیری آن‌ها تأثیر چشم‌گیری خواهد داشت. فضاپیمایی که در این نقطه قرار دارد با صرف انرژی ناچیزی می‌تواند طی یک هفته به سمت زمین یا طی چند ساعت به سمت ماه حرکت کند [۱].

گرچه از عمر مسئله سه جسم و فرمول‌بندی آن توسط نیوتن چهار قرن می‌گذرد، ولی بحث طراحی مسیر در مسئله سه جسم بحث جدیدی است که در چند دههٔ اخیر توسعه یافته است. قبل از آن دانشمندان بر روی جواب‌های مختلف تناوبی، شبه‌تناوبی و خواص دینامیکی مسئله سه جسم و روش‌های دست‌یابی به آن‌ها متمرکز بودند که به‌عنوان نمونه به کارهای فارکوهار [۲] و هاول [۳] می‌توان اشاره کرد. البته با این عمر نسبتاً کوتاه، تاکنون کارهای متنوعی برای تدوین راهبرد طراحی مسیر در مسئلهٔ سه جسم مخصوصاً از زمین به نقاط لاگرانژی صورت گرفته است. مهم‌ترین مانع بر سر راه طراحی مسیر کمی ابزارهای تحلیلی و نبود کامپیوترهای مناسب بود که با ظهور کامپیوترهای پرسرعت و گسترش روش‌های عددی، راه برای این امر هموار شد. اولین کار در این حوزه توسط دی‌آماریو [۴] در سال ۱۹۷۳ میلادی منتشر شد. وی تکنیک‌های تحلیلی و عددی را با تئوری بردار ابتدایی ترکیب کرد و روش نسبتاً دقیقی را برای محاسبات سریع مسیر انتقالی از زمین و ماه به نقطهٔ لاگرانژی L_2 توسعه داد. بعد از آن مأموریت ISEE-3 طرح‌ریزی شد که طی آن فضاپیما توانست با موفقیت در مدار هاله‌ای نقطهٔ L_1 سیستم خورشید- زمین قرارگیرد. مسیر حرکت این مأموریت از جمله مسیرهایی بود که حرکت فضاپیما بر روی آن به آهستگی صورت می‌پذیرفت. علت این انتخاب به انرژی مصرفی پایین این نوع مسیرها بر می‌گردد [۵]. سیمو و همکارانش در سال ۱۹۹۱ میلادی، روش استفاده از تئوری منیفلد را برای کمک در طراحی مسیر انتقالی منتشر ساختند. از آنجاکه منیفلدها به طور مجانبی به مدارهای هاله‌ای میل می‌کنند، موجب کاهش انرژی مورد نیاز برای انتقال می‌شوند. در سال ۱۹۹۳ ماینز مطالعات وسیعی را بر روی روش‌های عددی و استفاده از تصحیح دیفرانسیلی برای مدار انتقالی از مدار پارک زمینی به مدار هاله‌ای دور نقطه L_1 سیستم خورشید-زمین انجام داد [۶]. باردن کار ماینز را با ترکیب روش‌های عددی و تئوری سیستم‌های دینامیکی ادامه داد [۷]. گومز و همکارانش با استفاده از روش لیندشتات- پوانکاره نیز مجموعه سه جلدی در رابطه با طراحی مسیر در مسئلهٔ سه جسم در سیستم‌های زمین- ماه و خورشید- زمین منتشر ساختند. سال ۲۰۰۱ میلادی اندرسون، گازمن و هاول فرایندی را برای بررسی انتقال از زمین به مدار لیساجوس با استفاده از گرانش ماه، توسعه دادند [۸]. راش در سال ۲۰۰۵، انتقال مداری از مدار پارک و نیز از یک سایت پرتاب به مدار هاله‌ای حول نقطه L_1 سیستم زمین- ماه و خورشید- زمین را بررسی کرده است [۹]. وی همچنین یک بازگشت مجانی و بدون صرف انرژی از مدار هاله‌ای به زمین را در کار خود مطالعه کرده است. در سال ۲۰۰۹ آلسی، گومز و مزدمونت انتقال مداری از مدار پارک زمینی به مدار لیساجوس حول نقطهٔ L_1 و L_2 سیستم زمین- ماه با استفاده از روش لیندستد- پوانکاره و یک بهینه‌ساز مطالعه کرده‌اند [۱۰].

با وجود کارهای ارزشمند و پایه‌ای در این حوزه، موردی را نمی‌توان یافت که به یک ماموریت رفت و برگشتی با اعمال قید بر روی شرایط مرزی، مخصوصاً هنگام بازگشت به زمین، پرداخته باشد. به همین منظور در این مقاله به طراحی مسیر رفت و برگشتی از مدار پارک زمینی به مدار هاله‌ای حول نقطه L_1 سیستم زمین–ماه و از آن به زمین پرداخته شده است. در طراحی مسیر از زمین و یا به سمت زمین در مسئله سه جسم زمین–ماه سختی دو چندانی نسبت به طراحی مسیر از زمین و یا به سمت زمین در مسئله سه جسم خورشید–زمین دارد. چرا که در سیستم زمین- ماه، زمین جسم اولیه سنگین‌تر است و منیفلدهای پایدار و ناپایدار مدارهای هاله‌ای در فاصله‌ای دور نسبت به آن عبور می‌کنند. در حالی‌که در سیستم خورشید- زمین، زمین به عنوان جسم اولیه سبک‌تر محسوب می‌شود و منیفلدهای پایدار و ناپایدار نه تنها از نزدیکی آن می‌گذرند، بلکه بعضاً سطح آن را قطع می‌کنند.

برای انجام چنین مأموریتی بسته به هدف مأموریت و محمولهٔ فضاپیما، سناریوهای متفاوتی را برای انتهای مأموریت می‌توان درنظر گرفت. معمولاً یکی از سه حالت در پیش رو اتفاق می‌افتد. اگر فضاپیما بازگشتی بخشی از یک ایستگاه فضایی در یک مدار زمین پایین باشد، در آن مدار حول زمین قرار خواهد گرفت. اگر بخش بازگشتی، کپسول حاوی اطلاعات و نمونه‌های جمع‌آوری از فضا باشد، در مختصات جغرافیایی خاصی از سطح زمین مانند دریا و یا صحرا سقوط خواهد کرد و اگر یک فضاپیمای سرنشین‌دار باشد، باید در کریدر پروازی خاصی بر سطح زمین فرود آید. در حالت اول برای کاهش میزان تغییر سرعت لازم برای قرارگیری فضاپیما در مدار زمین پایین می‌توان از مانور آیروکپچر استفاده کرد. به این ترتیب برای هر سه حالت نحوهٔ ورود فضاپیما به جو مسئله قابل ملاحظه‌ای است که آن را با شاخص زاویهٔ مسیر پرواز ارزیابی می‌کنیم.

سناریوی پرواز در این مقاله عبارت است از انتقال از مدار پارک زمینی با ارتفاع ۲۰۰ کیلومتر به مدار هاله‌ای حول نقطهٔ L_1 سیستم زمین– ماه و سپس بازگشت از آن به زمین به‌طوری‌که شرایط برای ورود به جو فراهم باشد.

در بخش اول، شرح مختصری از مدل دینامیکی مورد استفاده بیان می‌شود. سپس روش پرتابه‌ای چندگانه و چگونگی حل مسئله طراحی مسیر توضیح داده خواهد شد و در آخر نیز نتایج و مسیرهای حاصل از حل ارائه و جمع‌بندی می‌شوند.

مسئلهٔ سه جسم محدود دایروی

مدل دینامیکی که در این مقاله از آن استفاده شده، مسئلهٔ سه جسم محدود دایروی است. حرکت فضاپیما تحت میدان گرانشی دو جسم وزین، که حرکت کپلری در مدار دایروی دارند، تحت عنوان مسئله سه جسم محدود دایروی شناخته می‌شود [۱۱]. تئوری سیستم‌های دینامیکی نشان می‌دهد که این مدل رفتار دینامیکی بسیار پیچیده‌ای دارد. در این مدل اجسام اولیه که در این مقاله زمین و ماه هستند، میدان گرانشی پیچیده‌ای تولید می‌کنند که فضاپیما بدون تأثیر بر روی آن، در آن حرکت می‌کند.

معادلات حرکت

معادلات حرکت فضاپیما در دستگاه چرخان و بر حسب عبارت‌های بی‌بعد شده عبارت است از [۱۲]:

$$\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2\dot{y}-\frac{1-\mu}{r_1^3}\left[x+\mu\right]+\frac{1-\mu}{r_2^3}\left[x-\left(1-\mu\right)\right]\\ y-2\dot{x}-\frac{1-\mu}{r_1^3}y-\frac{1-\mu}{r_2^3}y\\ -\frac{1-\mu}{r_1^3}z-\frac{1-\mu}{r_2^3}z\end{bmatrix} \tag{1}$$

در معادلهٔ (۱) تعاریف زیر را داریم:

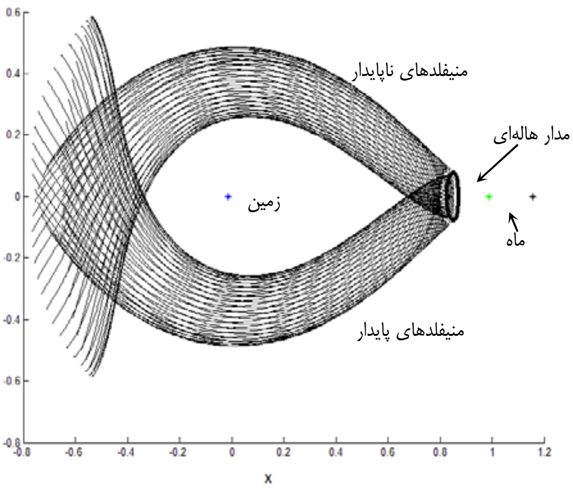
$$\begin{aligned} r_1&=\sqrt{\left(x+x_1\right)^2+y^2+z^2}\\ r_2&=\sqrt{\left(x-x_2\right)^2+y^2+z^2}\\ \mu&=\frac{m_{Moon}}{m_{Moon}+m_{Earth}}=0.0121506\end{aligned} \tag{2}$$

همچنین x، y و z موؤلفه‌های بردار موقعیت، $\dot{x}$، $\dot{y}$ و $\dot{z}$ مؤلفه‌های بردار سرعت و $\ddot{x}$، $\ddot{y}$ و $\ddot{z}$ مؤلفه‌های بردار شتاب در دستگاه مختصات چرخان هستند.

نقاط لاگرانژی

معادلات توصیف‌کنندهٔ مسئله سه جسم محدود دایروی پنج نقطه تعادل دارند که به نقاط لاگرانژی معروف هستند. در این نقاط نیروی گرانشی اجسام اولیه و نیروی گریز از مرکز در حال تعادل هستند. در این مقاله بر روی نقطهٔ لاگرانژی L_1 که مابین زمین و ماه قرار دارد متمرکز می‌شویم.

حول هر نقطهٔ لاگرانژی تعداد زیادی مدارهای تناوبی در فضای دو بعدی و سه بعدی وجود دارد که به ترتیب به مدارهای لیاپانوف و هاله‌ای معروف هستند. به واسطهٔ طبیعت هذلولوی، نقطهٔ L_1 دارای دینامیک ناپایدار است [۱۲]. به عبارت دیگر به همراه هر مدار حول این نقطه، ساختارهای ناوردایی وجود دارد که تحت عنوان منیفلدهای پایدار و ناپایدار شناخته می‌شوند. وقتی زمان به بی‌نهایت میل کند، منیفلدهای پایدار به صورت نمایی به مدار تناوبی میل می‌کند و منیفلدهای ناپایدار به صورت نمایی از مدار تناوبی دور خواهند شد [۱۳]. در این مقاله، منیفلدهای پایدار و ناپایدار برای تولید مسیرهای از مدار پارک زمینی به مدار هاله‌ای و بازگشت از آن به زمین به‌کارگرفته می‌شوند. شکل (۱) مدار هاله‌ای و منیفلدهای پایدار و ناپایدار آن که در این مقاله استفاده شده‌اند را نشان می‌دهد.



شکل ۱– مدار هاله‌ای و منیفلدهای پایدار و ناپایدار آن

روش حل

در این بخش، می‌خواهیم مسیر انتقالی بین زمین و مدار هاله‌ای را بیابیم. معمولاً برای این موضوع از منیفلدهای پایدار برای مسیر انتقالی از مدار پارک زمینی به مدار هاله‌ای و از منیفلدهای ناپایدار برای مسیر بازگشتی استفاده می‌شود. نکتهٔ قابل توجه اینکه تعداد بسیار کمی از منیفلدها از نزدیکی زمین می‌گذرند. مسیرهای انتقالی باید شرایط مورد نظر در ابتدا یا در انتها را ارضا کنند. در واقع ما باید مسئله با شرایط مرزی را حل کنیم. به‌منظور تولید مسیر با مشخصه‌های مورد نظر، از روش پرتابه‌ای چندگانه [۱۴] استفاده می‌کنیم. ما از منیفلدهای پایدار یا ناپایدار به عنوان حدس اولیهٔ این فرایند استفاده می‌کنیم. روش پرتابه‌ای چندگانه در واقع مجموعه‌ای

از پرتابه‌ای‌های یگانه هستند که با هم در ارتباط هستند. روش پرتابه‌ای چندگانه یک مسیر را به مجموعه‌ای از زیرمسیرها می‌شکند و در هر زیر مسیر از یک پرتابه‌ای یگانه استفاده می‌کند تا قیود مسیر ارضا شوند.

تجربه برای نویسندگان مقاله ثابت کرده است که طراحی مسیر در مسئلهٔ سه جسم که جسم اولیه بزرگ‌تر (در این مورد زمین) به عنوان مبدأ یا مقصد مطرح است، کار ساده‌ای نبوده و از هر روش عددی نمی‌توان استفاده کرد. به دلیل دینامیک پیچیده، مخصوصاً در نزدیکی مرز تعادلی دو میدان گرانشی ناشی از اجسام اولیه و همچنین عبور منیفلدها از فواصل دور از جسم اولیه سنگین‌تر، روش‌های عددی اگر از پابرجایی لازم برخوردار نباشند، واگرا شده و دسترسی به جواب به مخاطره می‌افتد. لذا روش‌هایی مثل روش پرتابی یگانه مبتنی بر تصحیح دیفرانسیلی برای حل مناسب نیستند و از روش‌هایی همچون روش پرتابه‌ای چندگانه یا روش کالوکیشن که روش‌هایی مقاوم و پابرجا محسوب می‌شوند، باید استفاده کرد.

شرایط مرزی

مسیر مأموریت شامل دو بخش است: بخش اول، شامل مسیر انتقالی از مدار پارک زمینی با ارتفاع ۲۰۰ کیلومتر به مدار هاله‌ای و بخش دوم شامل مسیر انتقالی از مدار هاله‌ای به زمین است. بخش اول با استفاده از منیفلد پایدار حاصل خواهد شد. ما دو قید بر روی این بخش از مسیر اعمال می‌کنیم تا ابتدای آن بر روی مدار دایروی پارک قرار گیرد. یکی قید روی ارتفاع و دیگری قید عمود بودن بردار موقعیت بر بردار سرعت که به منظور کاهش تغییر سرعت مورد نیاز جهت انتقال مداری در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned}&\left(x_f+\mu\right)^2+y_f^2+z_f^2=\left(R_E+200\right)^2\\&\left(x_f+\mu\right)\dot{x}_f+y_f\dot{y}_f+z_f\dot{z}_f=0\end{aligned}\qquad (۳)$$

بخش دوم مسیر از مدار هاله‌ای شروع می‌شود و به زمین ختم می‌شود. شرایط انتهایی را به‌گونه‌ای درنظر می‌گیریم که برای ورود به جو مساعد باشد. این شرایط مساعد با اعمال شرط بر روی زاویه مسیر پرواز در ارتفاع مشخصی حاصل می‌شود. این دو شرط مرزی عبارتند از [۱۴]:

$$\begin{aligned}&\left(x_f+\mu\right)^2+y_f^2+z_f^2=\left(R_E+h_{req}\right)^2\\&\frac{\left(x_f+\mu\right)\dot{x}_f+y_f\dot{y}_f+z_f\dot{z}_f}{\sqrt{\left(x_f+\mu\right)^2+y_f^2+z_f^2}\sqrt{\dot{x}_f^2+\dot{y}_f^2+\dot{z}_f^2}}=\sin\left(\gamma_{req}\right)\end{aligned}\qquad (۴)$$

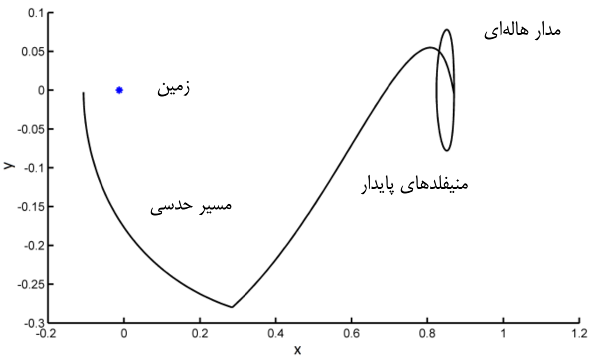
کریدر پروازی برای مانور آیروکپچر بسیار نازک بوده و در محدودهٔ ارتفاعی ۴۰ تا ۶۰ کیلومتری قرار دارد، لذا مقادیر درنظرگرفته شده برای ارتفاع و زاویهٔ مسیر پرواز به ترتیب ۵۰ کیلومتر و ۱۰- درجه هستند. شرایط مرزی فوق باید در فرایند پرتابه‌ای چندگانه ارضا شوند.

حدس اولیه

همان‌طورکه بیان شد از منیفلدهای پایدار و ناپایدار به عنوان حدس اولیهٔ فرایند پرتابه‌ای چندگانه استفاده می‌کنیم. البته گفته شد که این منیفلدها از فاصلهٔ دوری از زمین می‌گذرند. لذا برای رسیدن به حدس اولیه مناسب، از انتهای منیفلد پایدار و ناپایدار با اعمال شرایط اولیهٔ مناسب، مسیری را تولید می‌کنیم که از نزدیکی سطح زمین بگذرد. در شکل (۲) منیفلد پایدار و مسیر حدسی مربوط به مسیر رفت نشان داده شده است.

با ارائهٔ این مسیر دو تکه‌ای شامل منیفلد و مسیر حدسی به فرایند پرتابه‌ای چندگانه، مسیر پیوسته‌ای حاصل خواهد شد. لازم به ذکر است که برای تولید منیفلدهای پایدار از معادلات حرکت در جهت عکس زمان باید انتگرال‌گیری کرد [۱۲].

حال مسیر پیوسته حاصل را به عنوان حدس اولیه به فرایند پرتابه‌ای چندگانه با شرایط مرزی (۳) و (۴)، معرفی می‌کنیم. دلیل این نوع نحوهٔ لحاظ کردن حدس اولیه، حساسیت بالای دینامیک مسئله سه جسم و روش حل به حدس اولیه است.



شکل ۲- مسیر دو تکه‌ای شامل منیفلد و مسیر حدسی

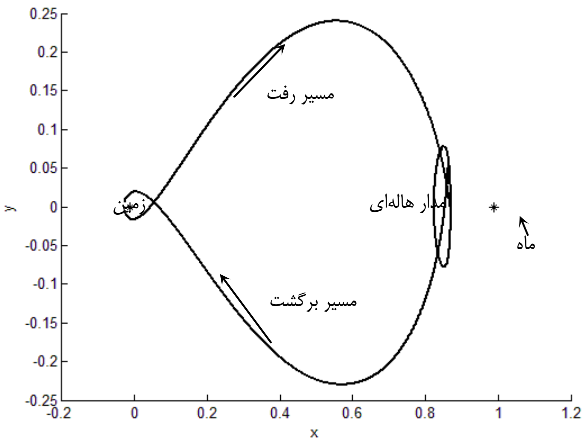
ارائهٔ نتایج

با بهره‌گیری از روش پرتابه‌ای چندگانه که در آن مسیر حل به پنج بازه شکسته شده و حدس اولیهٔ فوق، مسیر رفت و برگشتی شکل (۳) را به دست آورده‌ایم. هر یک از مسیرها به دو Δv، یکی در ابتدای مسیر و دیگری در انتهای مسیر نیاز دارد.

مقادیر Δv و زمان سفر برای هر دو مسیر در جدول (۱) ارائه شده‌اند. در این جدول Δv_H مربوط به انتقال از مدار هاله‌ای به

مسیر انتقالی یا بالعکس، Δv_L نیز مربوط به انتقال از مدار پارک به مسیر انتقالی یا بالعکس و Δv_T مجموع تغییر سرعت‌های لازم برای هر مسیر است.

تغییر سرعت لازم برای انتقال از مسیر برگشت به مدار زمین، به دلیل ورود به جو و بحث مانور آیروکپچر صفر لحاظ شده است.



شکل ۳- مسیر رفت و برگشتی از مدار پارک زمینی به مدار هاله‌ای

در ردیف سوم جدول (۱) مقادیر Δv و زمان سفر از مرجع [۹] به‌منظور مقایسه و همچنین اطمینان از صحت نتایج آورده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، نتایج با هم همخوانی دارند. لازم به ذکر است که مقادیر Δv و زمان سفر در انتقال به مدار هاله‌ای به اندازهٔ مدار هاله‌ای وابستگی زیادی دارد [۷]. همچنین به دلیل ماهیت غیرخطی دینامیک سه‌جسم تغییرات اندکی در Δv بعضاً موجب تغییرات قابل ملاحظهٔ نسبی در زمان سفر می‌شود.

جدول ۱- انرژی و زمان لازم برای مسیرهای رفت و برگشت

مسیر	Δv_L (Km/sec)	Δv_H (Km/sec)	Δv_T (Km/sec)	زمان لازم (روز)
رفت	۳/۰۹۷	۰/۶۶۹	۳/۷۶۶	۳/۶۳۳
برگشت	۰	۰/۶۶۱	۰/۶۶۱	۴/۰۴۲
رفت (مرجع [۹])	–	–	۳/۶۵۹	۴/۶۷۰

نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از روش پرتابه‌ای چندگانه، مسیر رفت و برگشتی از زمین به مدار هاله‌ای حول نقطهٔ L_1 و بالعکس طراحی شده است. زمانی‌که طراحی مسیر به جسم سنگین‌تر در مسئلهٔ سه جسم مدنظر است، استفاده از روش‌های پابرجا و مقاوم در طراحی مسیر ضروری است تا همگرایی جواب تهدید نشود. مسیرهای حاصل از روش استفاده شده در این مقاله برای تحقق یافتن نیاز به دو تغییر سرعت در ابتدا و انتهای مسیر دارند. با توجه به اینکه این تغییر سرعت‌ها به صورت ضربه‌ای مدل شده‌اند، به آسانی و با تکنولوژی‌های در دسترس قابل پیاده‌سازی هستند.

مراجع

[1] Lo, M. W. and Ross, S. D., "The Lunar L1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond," *AIAA Space 2001 Conference*, August 28-30, 2001.

[2] Farquhar, R.W., The Control and Use of Libration Point Satellites, (Ph.D. Thesis), Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, 1968.

[3] Howell, K. C., "Three-Dimensional, Periodic, Halo, Orbits," *Celestial Mechanics*, Vol. 32, Issue 1, 1984, pp 53-71.

[4] Amario, L. A., Minimum Impulse Three-Body Trajectories, (Ph.D. Thesis), Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institue of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1973.

[5] Koon, W., Marsden, J. Lo, M. and Ross, S. "Constructing a Low Energy Transfer between the Jovian Moons, *Contemporary Mathematics*, Vol. 292, 2002, pp.129-146.

[6] Mains, D. L., Transfer Trajectories from Earth Parking Orbits to L1 Halo Orbits. (M.Sc. Thesis), School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, 1993.

[7] Barden, B. T., Using Stable Manifolds to Generate Transfers in the Circular Restricted Problem of Three Bodies, (M. Sc. Thesis), School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, 1994.

[8] Howell, K. C., Guzman, J. J. and Anderson J. P., "Trajectory Arcs with Lunar Encounter for Small Amplitude L2 Lissajous Orbits," *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 108, Part II, pp. 1481-1502, 2001.

[9] Rausch, R. R., Earth to Halo Orbit Transfer Trajectories, (M. Sc. Thesis), School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, 2005.

[10] Alessia E. M., Gomeza, G., Masdemont, J. J. "Two-Manoeuvres Transfers Between LEOs and Lissajous Orbits in the Earth–Moon System," *Advances in Space Research*, Vol. 45, May 2010, pp 1276-1291.

[11] Jafari Nadoushan, M., Pourtakdoust, S. H., "Modeling Halo Orbits and the Associated Manifolds in the RCTBP," *Journal of Space Science and Technology (JSST)*, Vol. 3, No.1 & 2, Spring and Summer 2010, pp. 75-80 (In Persian)

[12] Koon, W. S., Lo, M., Marsden, W. J. E., Ross, S. D., "Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design," *International Conference on Differential Equations. Control and Dynamical Systems* pdf Version, 2006, pp. 1167-1181, Available, [On line]: http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20100630-152103628.

[13] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 3rd Edition, 2001.

[14] Marchand, B., Howell, K., and Wilson, R., "An Improved Corrections Process for Constrained Trajectory Design," in the n-Body Problem," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 44, No. 4, 2007, pp. 884-897.