

# Attitude Stabilization and Manauvring of Agility Nanosatellitewith Control Moment Gyros

A. Nikkhah<sup>1\*</sup>, J. Tayebi<sup>2</sup> and J. Roshanian<sup>3</sup>

1-3. Department of Aerospace Engineering K.N.Toosi University of Technology

\*Postal Code:1656983911,Tehran,IRAN

**Nikkhah@kntu.ac.ir**

*In this paper attitude control system of nanosatellite based on Single Gimbal Control Moment Gyroscope (SGCMG) is presented. A LQR/LQG method is developed for stability of satellite and a feedback quaternion strategy is used for maneuvering mode. In the stabilization mode LQR/LQG controllers are designed with linearization of nonlinear dynamic equation of satellite and control moment gyroscope, so that in other reseach didn't use this controller in the stabilization mode of this system. In the maneuvering mode a feedback quaternion controller applied for nonlinear system. Numerical simulations are provided to show the efficiency of the proposed controller for a nanosatellite with four single gimbal control moment gyroscope pyramid cluster. Results of simulations shown that LQR/LQG method is more accurate in compared with feedback quaternion controller.*

**Keywords:** Satellite attitude control, Agility satellite, Control Moment Gyroscope(CMG), Steering of CMG, Singularity condition, LQG/LQR.

---

1. Ph. D(Corresponding Author)  
2. M.Sc.  
3. Professor

# پایداری وضعیت و مانور نانو ماهواره واکنش سریع با عملگرهای ژيروسکوپی

امیرعلی نیکخواه<sup>۱\*</sup>، جواد طیبی<sup>۲</sup> و جعفر روشنی‌یان<sup>۳</sup>

۱، ۲ و ۳- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

\* تهران، کد پستی: ۱۶۵۶۹-۸۳۹۱۱

Nikkhah@kntu.ac.ir

در این مقاله، شبیه‌سازی سیستم کنترل وضعیت یک نانو ماهواره مجهز به عملگرهای ژيروسکوپی تک‌قابلی با به‌کارگیری راهبردهای کنترلی مختلف، ارائه شده است. سیستم کنترل وضعیت در حالت پایداری وضعیت از راهبردهای  $LQG$  و  $LQR$  و در حالت مانوری ماهواره از راهبرد کنترل فیدبک کوآترینیون استفاده می‌کند. در حالت پایداری وضعیت با خطی‌سازی معادلات دینامیکی غیرخطی ماهواره و عملگرهای ژيروسکوپی، کنترلرهای  $LQR$  و  $LQG$  طراحی شده‌اند؛ به طوری که در سایر تحقیقات صورت گرفته در این زمینه، از این کنترلرها در پایداری وضعیت استفاده نشده است. در حالت مانوری ماهواره نیز از یک کنترلر فیدبک کوآترینیون به فرم خطی به منظور سیستم غیر خطی استفاده شده است. کارایی سیستم کنترل وضعیت و راهبردهای کنترلی ارائه شده برای یک نانو ماهواره مجهز به عملگرهای ژيروسکوپی تک‌قابلی با آرایش هرمی در نرم‌افزار سیمولینک/متلب بررسی شده است. نتایج شبیه‌سازی بیانگر تحقق پایداری وضعیت و مانور ماهواره در زوایای بزرگ و همچنین دقت بیشتر راهبردهای  $LQR$  و  $LQG$  در مقایسه با روش فیدبک کوآترینیون است.

واژه‌های کلیدی: کنترل وضعیت ماهواره، ماهواره واکنش سریع، ژيروسکوپ کنترل ممان (CMG)، هدایت ژيروسکوپ کنترل ممان، شرایط تکینگی،  $LQG/LQR$

		علائم و اختصارات	
$R^{B_0}$	ماتریس تبدیل از مختصات مداری به مختصات بدنی	A	ماتریس حالت
R	ماتریس وزنی	B	ماتریس کنترل
$T_{ext}$	مجموع گشتاورهای اغتشاشی خارجی	E	انرژی جنبشی
$T_c$	گشتاور کنترلی	Hs	مومنتم زاویه‌ای ماهواره نسبت به محور بدنی
V	تابع لیاپانوف	I <sub>s</sub>	ماتریس اینرسی کل ماهواره
$h_{cmg}$	بردار مومنتم زاویه‌ای ژيروسکوپ کنترل ممان	J <sub>δ</sub>	ماتریس جاکوبین
m	اندازه تکینگی	K	بهره کنترل فیدبک
$[q_1, q_2, q_3, q_4]$	مؤلفه‌های کوآترینیون وضعیت	Q	ماتریس وزنی
$[q_{1e}, q_{2e}, q_{3e}, q_{4e}]$	بردار خطای کوآترینیون وضعیت		
$[q_{1c}, q_{2c}, q_{3c}, q_{4c}]$	بردار کوآترینیون فرمان وضعیت		

ژیروسکوپ‌های کنترل ممان در سال ۱۹۷۸ از پیش‌تازان این کار بودند. بدروسیان [۵ و ۴]، در سال ۱۹۹۰ قوانین هدایت را برای ژيروسکوپ‌های کنترل ممان تک قابی<sup>۵</sup> ارائه کرد و روش معکوس MPP<sup>۶</sup> با یک الگوریتم بلاثر را برای موفق نبودن الگوریتم‌های موجود با استفاده از فرمان‌های گشتاور یک سوپه نشان داد. وادالی [۶] در سال ۱۹۹۱ تولید فرمان گشتاور با استفاده از ژيروسکوپ‌های کنترل ممان تک‌قابلی و تخمین زوایای قاب‌بندی اولیه<sup>۷</sup> مطلوب را برای سیستم‌های ژيروسکوپ کنترل ممان تک‌قابلی برای دوری از تکینگی‌های داخلی، عنوان کرد. اُه و وادالی [۷] یک مجموعه کامل معادلات حرکت شامل اینرسی عرضی روتور به همراه ترم‌های اینرسی جیمبال را استنباط کردند. در سال ۱۹۹۷، قانون هدایت محدود ژيروسکوپ کنترل ممان هرمی توسط کاروکاوا [۹] ارائه شد. پس از این فضای مومنتوم زاویه‌ای محدود شده شناسایی شد و بسته مومنتوم به‌دست آمد. علاوه بر این، کاروکاوا کاربردهای این روش را برای کنترل سیستم ژيروسکوپ کنترل ممان ایستگاه فضایی میر توصیف کرد. وی [۱۰] با اصلاح روش معکوس SR، منطقی جدید را معرفی کرد که به عبور از میان تکینگی‌های داخلی کمک می‌کرد.

علاوه بر تحقیقاتی که در زمینه قوانین هدایت و شرایط تکینگی ژيروسکوپ‌های کنترل ممان بیان شد، قسمت دیگری از این تحقیقات به بررسی قوانین کنترلی متمرکز شده‌اند. کنترل‌هایی که با فرض گشتاور مستقیم حول محورهای بدنی ماهواره به کار می‌رود، به‌دلیل تولید گشتاورهای ماهواره با عملگرهایی به همراه دینامیک اضافی، برای کاربردهایی که نیازمند کنترل وضعیت دقت بالا هستند مناسب نیست. ظرفیت گشتاور تولیدی ژيروسکوپ‌های کنترل ممان به علت تغییر در دینامیک مانند فرسایش یا تاقان و افزایش اصطکاک در قاب‌بندی ممکن است، کاهش یابد. علاوه بر این به دلیل اتلاف انرژی، مصرف توان ژيروسکوپ کنترل ممان نیز افزایش خواهد یافت. ماهواره‌های هیپارکوس و ماژلان [۱۱]، نمونه‌هایی از شکست ماهواره‌های واقعی از چالش‌های ژيروسکوپ کنترل ممان هستند. هیپارکوس به دلیل تعداد زیادی خرابی ژيروسکوپی شکست خورد. یکی از این عیب‌ها به علت گشتاور مقاوم بالا و متغیر در جاپرو شماره ۴ بود که به تخریب نا به هنگام منجر شد. ماهواره ماژلان مدت ۵ ماه در راه رسیدن به ونوس قرار داشت اما قبل از این که مأموریت را شروع نکند رانش نامنظم موتور در یکی از ژایروها نمایان شد. دلیل این خرابی اصطکاک ایجاد شده به علت خطای فرآیند ساخت در روغنکاری یاتاقان یافت شد که با مواد زائد آلوده شده بود. طراحی سیستم کنترل وضعیت برای ماهواره به علت نامعینی‌های پارامتریک، اغتشاشات و غیرخطی‌ها که معمولاً در دینامیک ماهواره وجود دارند پیچیده است. برای فائق آمدن بر این چالش‌ها به طور نمونه کنترلر وضعیت بر اساس شبکه‌های عصبی<sup>۷</sup>

u	بردار کنترل
v	نویز اندازه‌گیری
w	نویز ورودی
X	متغیر حالت
y	متغیر خروجی
$\varphi$	زاویه دوران (رول)
$\theta$	زاویه فراز پیچ
$\psi$	زاویه سمت یاو
$\omega$	بردار سرعت زاویه‌ای ماهواره
$\beta$	زاویه شیب هرم
$\delta$	بردار زاویه قاب ژيروسکوپ کنترل ممان

## مقدمه

اخیراً بسیاری از مأموریت‌های فضایی به دلایل آسان‌تر بودن، ساخت سریع، هزینه کمتر و افزایش فرصت پرتاب، از ماهواره‌های کوچک استفاده می‌کنند. برخی از این مأموریت‌ها شامل وظایفی هستند که نیازمند مانورهای سریع ماهواره هستند. مانورهای سریع ماهواره در محدوده ۱۰-۱ درجه بر ثانیه و مانورهای بسیار سریع در محدوده مانوری ۴۰-۱۰ درجه بر ثانیه قرار دارند [۱]. به دلیل ویژگی‌های منحصر به فرد مانند دامنه گشتاور بالا، ذخیره مومنتوم و هزینه کمتر، ژيروسکوپ‌های کنترل ممان<sup>۴</sup> به‌منظور تحقق مانورهای سریع ماهواره استفاده می‌شوند. با قابلیت اجرای مانورهای سریع، ماهواره قادر است اهداف نزدیک زمین را برای چندین دقیقه ردیابی کند. موارد کاربردهای علمی و فنی زیر نیازمند مانورهای سریع و بسیار سریع ماهواره هستند:

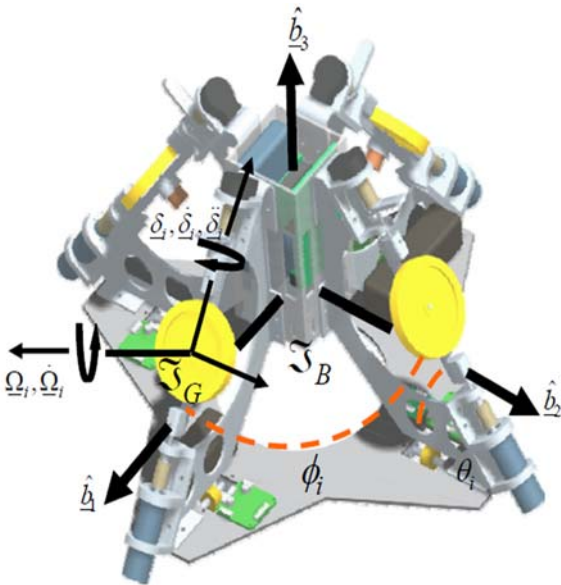
- اهداف نقطه‌ای؛ که ماهواره نیاز دارد تا روی یک هدف ایستا قفل کند و تصاویر پایدار فراهم کند. نمونه‌ای از این موارد مشاهده ستاره‌هاست.
  - ردیابی هدف؛ که ماهواره نیاز دارد یک هدف متحرک را دنبال کند. نمونه‌ای از این موارد ردیابی شهاب‌سنگ‌ها و مشاهده تخلیه الکتریکی بالای اتمسفر است.
- علاوه بر این، قابلیت عکس‌العمل سریع ماهواره به‌طور چشمگیر محدوده عملیاتی و بازدهی ماهواره را افزایش داده و همچنین محدودیت‌های زمانی مربوط به انتقال داده‌ها را برطرف می‌سازد. این موضوع کارایی زیادی در آرایش پروازی ماهواره‌ها دارد.
- اولین تحقیق در مورد استفاده از ژيروسکوپ‌های کنترل ممان برای کنترل وضعیت فضاپیما توسط جاکوت و لیسکا انجام پذیرفت [۲]. مارگولیس و اوبران [۳] در فرمول‌بندی تئوری تکینگی و کنترل برای

6. Moore Penrose Peseudo  
7. Neural networks

4. Control Moment Gyros  
5. Single Gimbal Control Moment Gyro (SGCMG)

فرار از شرایط تکینگی استفاده می‌شود. به منظور تحقق کنترل وضعیت سه محوره ماهواره، حداقل سه ژيروسکوپ کنترل ممان تک‌قابی مورد نیاز است. اما به دلیل ایجاد عملکرد غیرکارا که با عنوان تکینگی داخلی شناخته می‌شود، در پهنه‌ترین حالت، سیستم کنترل وضعیت نیازمند ۴ عدد از این عملگرهاست.

در شکل (۱) آرایش هرمی ژيروسکوپ‌های تک‌قابی دانشگاه فلوریدا نشان داده شده است.  $b_i$  بیانگر محورهای مختصات بدنی،  $\delta, \delta', \delta''$  به ترتیب زاویه تقدم، نرخ تقدم و شتاب تقدم قاب‌های ژيروسکوپ هستند.  $\Omega$  و  $\dot{\Omega}$  به ترتیب سرعت و شتاب چرخ طیار هستند که در حالت ژيروسکوپ‌های تک‌قابی سرعت چرخ چرخان ثابت است. زاویه  $\theta_i$  نشان داده شده در شکل (۱) بیانگر زاویه شیب صفحه هرم است که برای تولید بسته مومنتوم زاویه‌ای کروی برابر  $54/7$  درجه انتخاب می‌شود.



شکل ۱- آرایش هرمی ۴ ژيروسکوپ تک‌قابی [۱۵]

### مدل‌سازی دینامیک وضعیت ماهواره مجهز به عملگرهای ژيروسکوپ

مومنتوم زاویه‌ای کل ماهواره به صورت مجموع مومنتوم زاویه‌ای بدنی ماهواره و مومنتوم زاویه‌ای ژيروسکوپ‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_s = I_s \omega + h_{cmg} \quad (1)$$

در معادله (۱)،  $H_s$  مومنتوم زاویه‌ای کل سیستم نسبت به محور بدنی،  $I_s$  ماتریس اینرسی کل ماهواره شامل عملگرها،  $\omega$  بردار

[۱۳ و ۱۲] به کار برده شده است. ماکونیس [۱۴] یک کنترلر تطبیقی غیرخطی استفاده کرده است، که نامعینی‌های اینرسی و نامعینی اصطکاک قاب‌بندی را جبران می‌کند، به طوری که به جای ایجاد یک گشتاور کنترلی برای حل کردن مسئله تعقیب وضعیت، کنترلر تعقیب وضعیت در ترم‌هایی از سرعت زاویه‌ای قاب ژيروسکوپ کنترل ممان ایجاد شده‌اند. این کار به واسطه این که ورودی کنترل با یک ماتریس نامعینی غیرخطی زمان متغیر ضرب شده، پیچیده شده است. پیچیدگی بیشتر به دلیل ترم کنترل سرعت قاب اضافه شده در یک غیرخطی ناپیوسته (یعنی تابع علامت استاندارد) منتج از اثرات اصطکاک استاتیکی ژيروسکوپ کنترل ممان ناشی می‌شود.

در این مقاله، با بررسی تحقیقات صورت گرفته در این زمینه، یک کنترلر دو سطحی به منظور کنترل وضعیت ماهواره با عملگرهای ژيروسکوپ تک‌قابی ارائه شده است. در حالت پایداری وضعیت راهبردهای کنترلی LQR و LQG به کار گرفته شده‌اند که در تحقیقات انجام شده در این زمینه، از راهبرد LQR با خطی‌سازی معادلات غیرخطی با روش جاکوبین و راهبرد LQG با در نظر گرفتن نویزهای سیستم و اندازه‌گیری استفاده نشده است. در حالت مانوری ماهواره نیز راهبرد کنترل فیدبک کواترنیون با به کارگیری منطق هدایت GSR برای اجرای مانورهای سریع ماهواره استفاده شده است. با استخراج سینماتیک، دینامیک ماهواره و عملگرهای ژيروسکوپ و طراحی کنترلرها، شبیه‌سازی این سیستم به منظور کنترل وضعیت نانو ماهواره در مدار ۳۰۰ کیلومتری انجام شده است.

### ژيروسکوپ کنترل ممان تک‌قابی

این عملگرها از یک محور تک‌قابی برای تولید گشتاور ژيروسکوپ با استفاده از چرخش روتور چرخان حول محور عمود بر محورهای قاب بهره می‌برند و پیچیدگی مکانیکی کمتری نسبت به ژيروسکوپ‌های کنترل ممان دو قابی<sup>۸</sup> و سرعت متغیر<sup>۹</sup> دارند. به طور کلی ژيروسکوپ‌های کنترل ممان به سه نوع تک‌قابی، دو قابی و سرعت متغیر تقسیم می‌شوند که در این پژوهش به دلایل زیر از ژيروسکوپ کنترل ممان تک‌قابی استفاده شده است:

- قابلیت تولید گشتاور و مومنتوم زاویه‌ای بیشتر که منجر به یک پایداری زیاد پلتفرم می‌شود.
- مصرف توان، جرم و ابعاد مناسب با توجه به میزان گشتاور تولیدی
- ساختار مکانیکی ساده

با توجه به مزایای بیان شده، یکی از معایب اصلی ژيروسکوپ‌های کنترل ممان تک‌قابی نسبت به سایر عملگرهای ژيروسکوپ وجود بیشترین تکینگی در مقایسه با سایر عملگرهای ژيروسکوپ است که برای رفع این چالش از روش‌های هدایت ژيروسکوپ به منظور دوری یا

$$h = h(\delta) \quad (۴)$$

با در نظر گرفتن بردارهای مومنوم زاویه‌ای چهار ژيروسکوپ کنترل ممان تک‌قابی و زاویه  $\beta$  در شکل (۲) و با تصویر کردن بردارهای مومنوم زاویه‌ای در محورهای بدنی ماهواره داریم:

$$h_{cmg} = h_0 \begin{bmatrix} -\cos \beta \sin \delta_1 \\ \cos \delta_1 \\ \sin \beta \sin \delta_1 \end{bmatrix} + h_0 \begin{bmatrix} -\cos \delta_2 \\ -\cos \beta \sin \delta_2 \\ \sin \beta \sin \delta_2 \end{bmatrix} + h_0 \begin{bmatrix} \cos \beta \sin \delta_3 \\ -\cos \delta_3 \\ \sin \beta \sin \delta_3 \end{bmatrix} + h_0 \begin{bmatrix} \cos \delta_4 \\ \cos \beta \sin \delta_4 \\ \sin \beta \sin \delta_4 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

مشتق زمانی  $h$  به صورت زیر است:

$$\dot{h}_{cmg} = J(\delta)\dot{\delta}, \quad J = \frac{\partial h_{cmg}}{\partial \delta} \equiv \left[ \frac{\partial h_{cmg i}}{\partial \delta_j} \right] \quad (۶)$$

در معادله (۶)،  $\dot{\delta}$  بردار نرخ تقدم قاب است.  $J(\delta)$  یک ماتریس  $3 \times n$  است که جاکوبین طرح مومنوم زاویه‌ای (معادله (۷)) است.  $n$  تعداد عملگرهای ژيروسکوپ کنترل ممان استفاده شده در سیستم کنترل وضعیت ماهواره است.

$$J(\delta) = \frac{\partial h_{cmg}}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} -\cos \beta \cos \delta_1 & \sin \delta_2 & \cos \beta \cos \delta_3 & -\sin \delta_4 \\ -\sin \delta_1 & -\cos \beta \cos \delta_2 & \sin \delta_3 & \cos \beta \cos \delta_4 \\ \sin \beta \cos \delta_1 & \sin \beta \cos \delta_2 & \sin \beta \cos \delta_3 & \sin \beta \cos \delta_4 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

### پایداری وضعیت ماهواره

در این تحقیق پایداری وضعیت ماهواره با استفاده از راهبردهای کنترلی  $LQR$  و  $LQG$  انجام شده است. برای به‌کارگیری این روش‌ها معادلات غیرخطی مربوط به دینامیک و سینماتیک ماهواره خطی‌سازی شده و در نهایت به فرم فضای حالت تبدیل شده‌اند. در طول حالت پایداری فقط تغییرات کوچک زوایا در نظر گرفته می‌شوند. سینماتیک خطی‌سازی شده با ترتیب زوایای  $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$  (ابتدا سمت  $\psi$ ، سپس فراز  $\theta$  و در آخر دوران  $\phi$ ) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۷].

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \dot{\phi} - \psi \omega_0 \\ \dot{\omega}_y &= \dot{\theta} \\ \dot{\omega}_z &= \dot{\psi} + \phi \omega_0 \end{aligned} \quad (۸)$$

در معادلات (۸)،  $\omega_0$ ، سرعت زاویه‌ای متوسط مداری ماهواره،  $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$  سرعت زاویه‌ای ماهواره نسبت به مختصات اینرسی بیان شده در مختصات مرجع بدنی هستند. با جایگذاری معادلات (۸) به

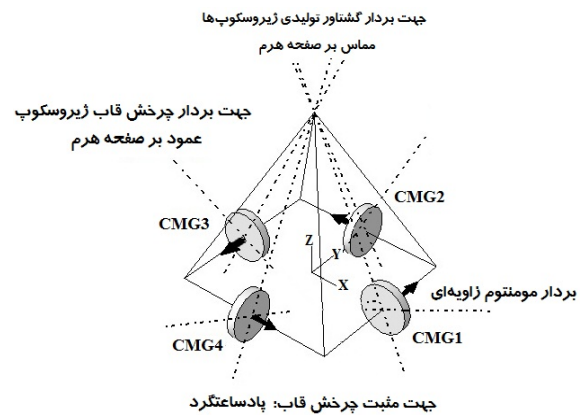
سرعت زاویه‌ای ماهواره در مختصات بدنی و  $h_{cmg}$  بردار مومنوم زاویه‌ای وسایل تبادل مومنوم (در اینجا ژيروسکوپ‌ها) در محورهای بدنی است. با جایگذاری این رابطه در معادله حرکت چرخشی در مختصات بدنی و ساده‌سازی معادلات داریم:

$$\begin{aligned} \dot{H}_s + \omega \times H_s &= T_{ext} \\ I_x \dot{\omega}_x &= T_x - \omega_z \omega_y (I_z - I_y) + T_{c1} \\ I_y \dot{\omega}_y &= T_y - \omega_z \omega_x (I_x - I_z) + T_{c2} \\ I_z \dot{\omega}_z &= T_z - \omega_y \omega_x (I_y - I_x) + T_{c3} \end{aligned} \quad (۲)$$

$T_{ext}$  مجموع گشتاورهای خارجی عمل‌کننده روی ماهواره (شامل گشتاور گرادیان جاذبه، فشار تابش خورشید، آیرودینامیک و مغناطیسی) و  $T_c$  گشتاور کنترلی هستند. گشتاور کنترلی برای یک ماهواره کنترل شده با وسایل تبادل مومنوم به صورت زیر بیان می‌شود.

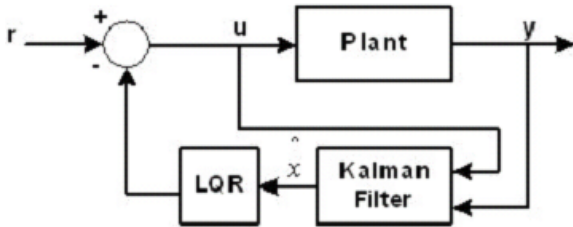
$$\begin{aligned} \dot{h}_{cmg} + \omega \times h_{cmg} &= -T_c \\ -\dot{h}_{cmg} - \omega \times h_{cmg} &= T_c \end{aligned} \quad (۳)$$

در معادله (۳)،  $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$  و  $[I_x, I_y, I_z]$  به ترتیب مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای ماهواره در مختصات بدنی و ممان اینرسی کل ماهواره هستند. مختصات مرجع و آرایش هرمی ژيروسکوپ کنترل ممان تک‌قابی در شکل (۲) ارائه شده است. مطابق شکل (۲) راستای بردار چرخش قاب یا تقدم ژيروسکوپ عمود بر صفحه هرم و راستای گشتاور کنترلی مماس بر وجه هرم هستند. جهت‌های مثبت بردار مومنوم زاویه‌ای چرخ‌های طیار نیز برای ژيروسکوپ‌های تک‌قابی ۱ تا ۴ در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲- مختصات مرجع و آرایش هرمی ژيروسکوپ‌های کنترل ممان تک‌قابی  
هر یک از صفحه‌های هرم نسبت به قاعده هرم دارای زاویه انحراف  $\beta = 54.73^\circ$  هستند و کنترل سه محوره کامل با قابلیت مومنوم تقریباً برابر در همه محورها را با کمترین افزونگی فراهم می‌کند [۱۶]. بردار مومنوم زاویه‌ای ژيروسکوپ  $h$  تابعی از زاویه قاب ژيروسکوپ  $\delta$  مطابق معادله (۴) است.

را می‌دهد. ترکیب این تخمین بهینه با کنترل بهینه، یک سیستم بهینه حلقه بسته خواهد داد. لیکن تخمین و کنترل را می‌توان به طور جداگانه بررسی و از پیچیده شدن بیش از حد مسئله ترکیب شده جلوگیری کرد. دیاگرام کلی سیستم در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل ۳- استراتژی LQG

### مانور سریع ماهواره

برای انجام مانورهای سریع ماهواره بنابر تعریف ارائه شده در مقدمه، کنترلر فیدبک خطی به فرم زیر به کار گرفته شده است [۶].

$$u = -Kq_e - D\omega \quad (14)$$

مطابق رابطه (۱۴)  $q_e$  (خطای کواترنیون) و  $\omega$  (نرخ سرعت زاویه‌ای ماهواره) به کنترلر فیدبک، برای تولید بردار گشتاور کنترل  $u$  تغذیه می‌شوند. به منظور بیان اختلاف بین کواترنیون لحظه‌ای ( $q$ ) و کواترنیون فرمان ( $q_c$ )، خطای کواترنیون به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} q_{1e} \\ q_{2e} \\ q_{3e} \\ q_{4e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{4c} & q_{3c} & -q_{2c} & -q_{1c} \\ -q_{3c} & q_{4c} & q_{1c} & -q_{2c} \\ q_{2c} & -q_{1c} & q_{4c} & -q_{3c} \\ q_{1c} & q_{2c} & q_{3c} & q_{4c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)،  $q_e = [q_{1e}, q_{2e}, q_{3e}, q_{4e}]$  بردار خطای کواترنیون وضعیت،  $q_c = [q_{1c}, q_{2c}, q_{3c}, q_{4c}]$  بردار کواترنیون فرمان هستند. در رابطه (۱۴)،  $K$  و  $D$  ماتریس‌های وزنی هستند که به طور مناسب انتخاب می‌شوند. بهره‌های سیستم از وی [۱۸]، به فرم معادله (۱۶) انتخاب شده‌اند. در [۲۰ و ۱۹] نشان داده شده است که سیستم غیرخطی حلقه بسته ماهواره صلب با کنترلر فیدبک حالت خطی با فرم معادله (۱۴) به طور کلی پایدار مجانبی برای بهره‌های انتخاب شده در رابطه (۱۶) است. در روابط (۱۶)  $\zeta$  نسبت میرایی و  $\omega_n$  فرکانس طبیعی است.  $I_{s/c}$  ماتریس اینرسی کل فضاپیما و بردار سرعت زاویه‌ای فضاپیما هستند.

همراه گشتاور گرادیان جاذبه به عنوان گشتاور خارجی و گشتاورهای تحقق یافته عملگرها در معادلات (۲) و با در نظر گرفتن متغیرهای حالت به فرم (۹)، ماتریس‌های حالت و کنترل با استفاده از روش جاکوبین به فرم ماتریس‌های (۱۰) و (۱۱) استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi, x_2 = \theta, x_3 = \psi, x_4 = \dot{\phi}, x_5 = \dot{\theta}, x_6 = \dot{\psi} \\ u_1 &= \delta_1, u_2 = \delta_2, u_3 = \delta_3, u_4 = \delta_4 \end{aligned} \quad (9)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4a_0^2(I_x - I_y)}{I_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_0(I_x + I_z - I_y)}{I_x} \\ 0 & \frac{3a_0^2(I_x - I_y)}{I_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_0^2(I_x - I_y)}{I_z} & \frac{a_0(I_y - I_x - I_z)}{I_z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_0 \cos \beta}{I_x} & 0 & \frac{-h_0 \cos \beta}{I_x} & 0 \\ 0 & \frac{h_0 \cos \beta}{I_y} & 0 & \frac{-h_0 \cos \beta}{I_y} \\ \frac{-h_0 \sin \beta}{I_z} & \frac{-h_0 \sin \beta}{I_z} & \frac{-h_0 \sin \beta}{I_z} & \frac{-h_0 \sin \beta}{I_z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

در راهبرد LQR، هدف محاسبه قانون کنترل فیدبک  $u = -K(t)x(t)$  با کمینه کردن معیار بهینه‌سازی  $J$  به صورت زیر است:

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt \quad (12)$$

ماتریس  $K$  از حل معادلات ریکاتی به دست خواهد آمد. تکنیک LQR اغلب برای سیستم‌هایی که مدل‌های معقولانه دقیق و حسگرها و عملگرهای ایده‌آل دارند، مناسب است. به همین علت روش LQG به فرم زیر به کار گرفته شده است تا اثرات نویزهای ورودی سیستم و نویزهای اندازه‌گیری در نظر گرفته شوند.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned} \quad (13)$$

حل مسئله LQG شامل دو زیر مسئله تعیین سیگنال کنترل توسط تخمین حالت از خروجی و به کارگیری قانون کنترل بهینه براساس اصل دوگان<sup>۱۲</sup> است. با توجه به فرض خطی بودن سیستم و گوسی بودن نویز، هر سیگنال تصادفی در سیستم نیز گوسی است و به طور کامل توسط میانگین و واریانس آن مشخص می‌شود. فیلتر کالمن یک تخمین غیر بایاس شده با واریانس حداقل فراهم آورده و بهترین تخمین بردار حالت

پایداری رسیده است. با تنظیم مجدد بهره‌ها و افزایش تلاش کنترلی این زمان کاهش خواهد یافت. اما در این روش نوبزهای ورودی و اندازه‌گیری سیستم در نظر گرفته نشده‌اند و عملکرد آن‌ها ایده‌آل فرض شده است. از این رو در واقعیت ممکن است موارد مطرح شده منجر به ناپایداری یا خطای سیستم شود. به همین دلیل مطابق نتایج شکل (۵) از روش LQG برای پایداری با در نظر گرفتن نوبزهای ورودی و اندازه‌گیری سیستم استفاده شده است. با تنظیم بهره‌های سیستم تقریباً نتایجی مطابق حالت ایده‌آل (LQR) به دست آمده است. در شکل (۶) نمودار نرخ چرخش جیمبال قبل از فیلترینگ در روش LQG نشان داده شده است. از معایب این روش نداشتن روند سیستماتیک در انتخاب بهره‌های سیستم است.

جدول ۱- پارامترهای شبیه‌سازی ماهواره

پارامتر	مقدار
ارتفاع مدار دایره‌ای (km)	۳۰۰
جرم ماهواره (kg)	۵۰
ممان اینرسی ماهواره (kg.m <sup>2</sup> )	[۲/۵ ۲/۵ ۲/۵]
مومنوم زاویه‌ای ژيروسکوپ کنترل ممان (N.m.s)	۰/۳۵
زاویه شیب هرم (β) (deg)	۵۴/۷۳
نرخ مجاز قاب ژيروسکوپها (rad/s)	±۰/۱۲

جدول ۲- مشخصات عملگر ژيروسکوپ [۱۶]

پارامتر	مقدار
جرم موتور DC	۳۰ گرم
چرخ مومنوم	۱۵۰ گرم
جرم موتور جیمبال	۹ گرم
گیربکس موتور جیمبال	۶ گرم
ولتاژ	۵-۱۲ ولت
جرم هر ژيروسکوپ کنترل ممان	۲۰۰~ گرم
اویونیک ژيروسکوپ کنترل ممان	۲۰ گرم
قطعات مکانیکی	۲۰۰ گرم
جرم کل ژيروسکوپ کنترل ممان	۱~ کیلوگرم

جدول ۳- شرایط اولیه

نرخ مجاز قاب (rad/s)	±۰/۱۲
زوایای اویلر اولیه (deg)	[۱۰ ۱۰ ۱۰]
زوایای اولیه جیمبال (deg)	[۰ ۰ ۰]

$$K = kI_{s/c}, \quad \frac{k}{2} = \omega_n^2 \quad (۱۶)$$

$$D = dI_{s/c}, \quad d = 2\zeta\omega_n$$

علاوه بر مراجع [۲۰ و ۱۹]، می‌توان با استفاده از تابع کاندید لیاپانوف به صورت رابطه (۱۷) نیز پایداری را بررسی کرد. در رابطه (۱۷) انرژی کل ماهواره به عنوان تابع کاندید لیاپانوف انتخاب می‌شود. انرژی کل ماهواره مجموع انرژی جنبشی ناشی از چرخش ماهواره در مدار و انرژی پتانسیل به دلیل گرایان جاذبه و اثرات ژيروسکوپی ناشی از چرخش حول زمین هستند.

$$V(x) = E_{tot} \quad (۱۷)$$

با جایگذاری انرژی پتانسیل و جنبشی در رابطه (۱۷) و ساده‌سازی روابط، تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۱۸) به دست خواهد آمد. در این رابطه، ماتریس چرخش مداری به بدنی به صورت  $R_O^B = [c_1^B \quad c_2^B \quad c_3^B]$  بیان شده است که  $c_i^B = [c_{1i}^B \quad c_{2i}^B \quad c_{3i}^B]^T$  است.

$$E_{tot} = \frac{1}{2}(\omega_{Bo}^B)^T I \omega_{Bo}^B + \frac{3}{2}\omega_0^2((I_x - I_z)C_{13}^2 + (I_y - I_x)C_{23}^2) + \frac{1}{2}\omega_0^2((I_x - I_y)C_{21}^2 + (I_x - I_z)C_{31}^2) \quad (۱۸)$$

رابطه (۱۸) به عنوان تابع کاندید لیاپانوف شرایط زیر را برآورده می‌کند:

$$V(0) = 0 \quad (۱۹)$$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

مشقت تابع لیاپانوف به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{V} = (\omega_{Bo}^B)^T \tau^B \quad (۲۰)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) به عنوان گشتاور به کار برده شده در سیستم در رابطه (۲۰) داریم:

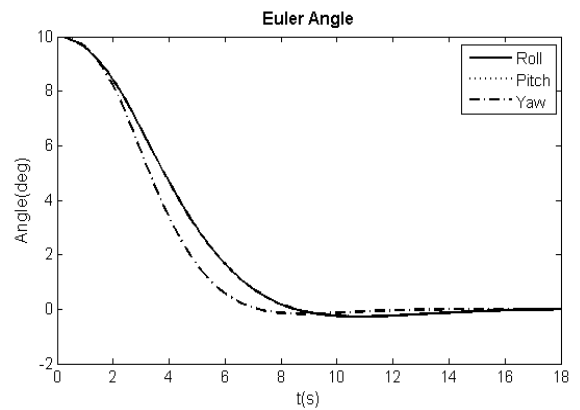
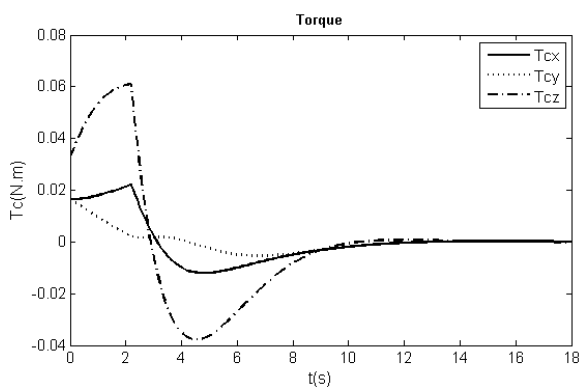
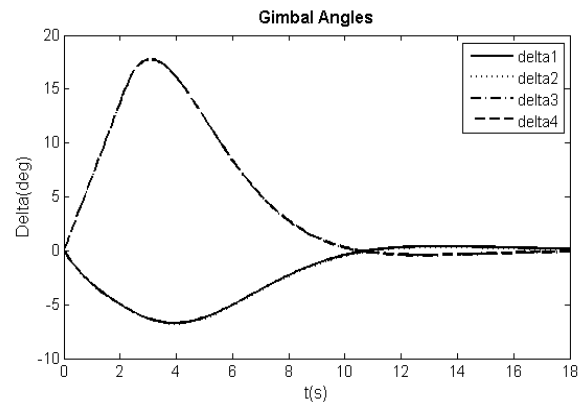
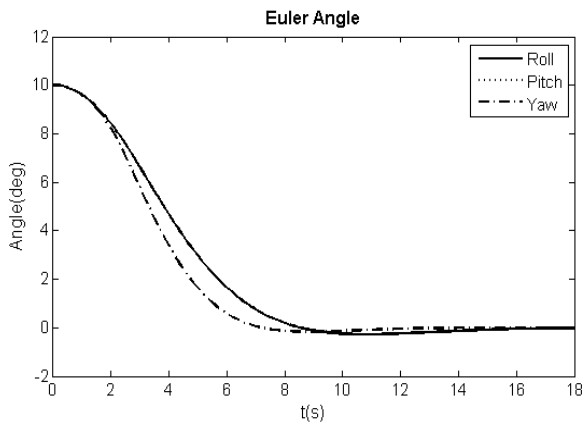
$$\dot{V} = (\omega_{Bo}^B)^T \tau^B = (\omega_{Bo}^B)^T (-Kq_{ed} - D\omega) \quad (۲۱)$$

با جایگذاری روابط سینماتیک و ساده‌سازی رابطه (۲۱) در نهایت شرط پایداری  $\dot{V} < 0$  محقق می‌شود.

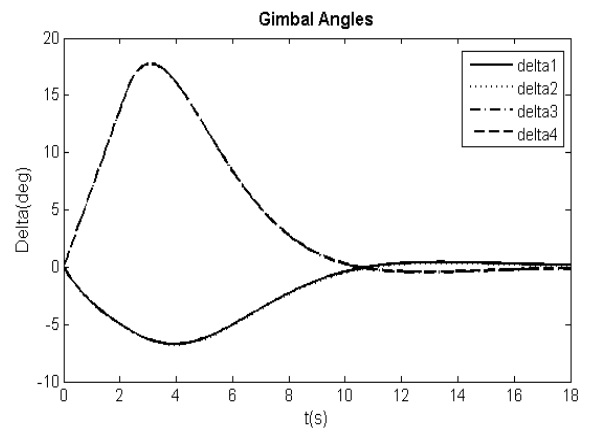
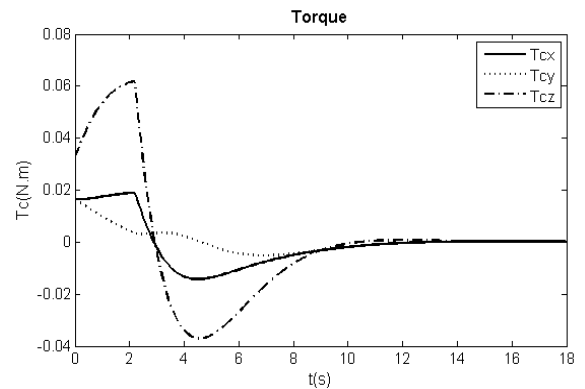
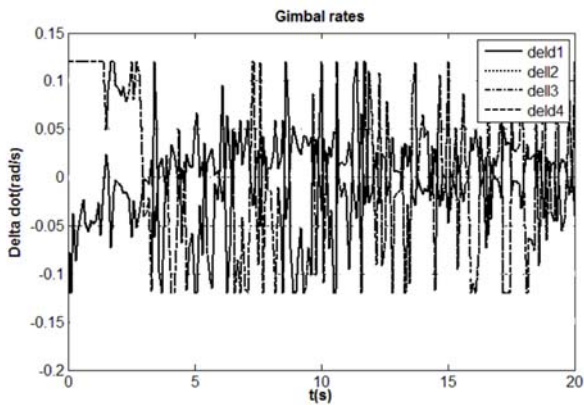
## شبیه‌سازی

عملکرد کنترلهای ارائه شده به منظور کنترل وضعیت نانوماهواره با عملگرهای ژيروسکوپی تک‌قابی با آرایش هرمی، به وسیله شبیه‌سازی دینامیکی معادلات و طراحی کنترلر در نرم‌افزار سیمولینک/ متلب مورد بررسی قرار گرفته‌اند. پارامترهای عمومی استفاده شده ماهواره و مشخصات عملگر ژيروسکوپی در شبیه‌سازی‌ها مطابق جداول (۱ و ۲) هستند.

نتایج شبیه‌سازی پایداری وضعیت با روش LQR در شکل (۴) مطابق با شرایط اولیه جدول (۳) ارائه شده است. مطابق شکل (۴) در روش LQR سیستم در کمتر از ۱۸ ثانیه با کمترین تلاش کنترلی به



شکل ۵- پایداری با روش LQG بعد از فیلترینگ با در نظر گرفتن نویز سیستم و اندازه‌گیری



شکل ۶- نمونه نتایج شبیه‌سازی LQG قبل از فیلترینگ

نتایج شبیه‌سازی حالت مانوری ماهواره با استفاده از راهبرد فیدبک کواترنیون در شکل (۷) نشان داده شده است. در این شبیه‌سازی مانور سه محوره ماهواره به مقدار  $[30 \ 20 \ 40]$  درجه، بر اساس زوایای اولیه قاب  $[0 \ 0 \ 0]$  و زوایای اوپلر اولیه صفر مد نظر بوده است. در این شبیه‌سازی از روش GSR  $[10]$  در هدایت ژيروسکوپها استفاده شده است. مطابق شکل مانور سه محوره در کمتر از ۱۶ ثانیه محقق شده است. نتایج ارائه شده براساس مشخصات

شکل ۴- نتایج پایداری با روش LQR



## نتیجه‌گیری

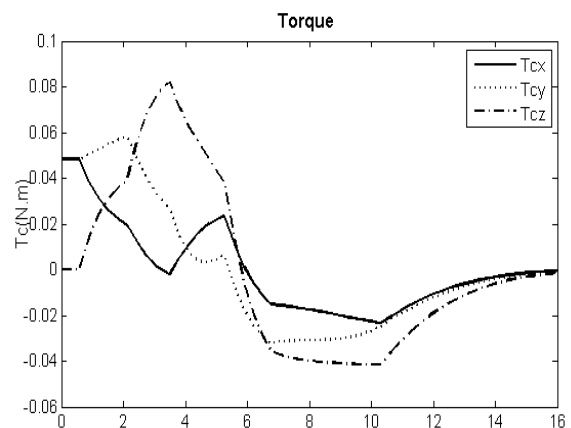
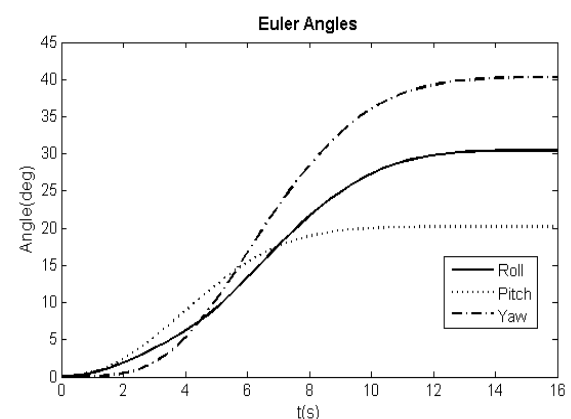
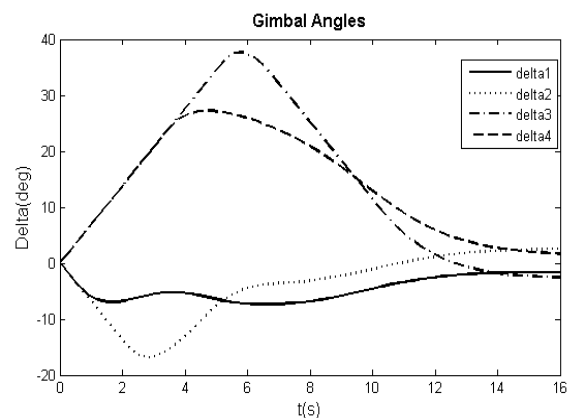
در این مقاله، شبیه‌سازی سیستم کنترل وضعیت یک نانو ماهواره مجهز به عملگرهای ژيروسکوپی کنترل ممان تک قابی با به‌کارگیری راهبردهای کنترلی مختلف ارائه شد. راهبرد LQG تا به حال در تحقیقات انجام شده برای ماهواره‌های واکنش سریع استفاده نشده و راهبرد LQR نیز برای اولین بار با فرم معادلات ارائه شده، استفاده شده است. در حالت پایداری، روش‌های ارائه شده پایداری وضعیت را بدون نیاز به منطق هدایت فراهم کرده و نویزهای ورودی به سیستم و نویزهای اندازه‌گیری را در نظر می‌گیرند، از این رو در مقایسه با سایر روش‌ها برتری دارند. نتایج شبیه‌سازی بیانگر پایداری وضعیت در حالت‌ها و زوایای مختلف با کمترین تلاش کنترلی است. در حالت مانوری ماهواره به‌کارگیری راهبرد کنترل فیدبک کواترنیون، مانورهای سریع در حالت‌ها و زوایای مختلف محقق شده است. در این حالت به دلیل استفاده از منطق هدایت ژيروسکوپ، عملکرد سیستم در حالت تکینگی وابسته به عملکرد منطق هدایت است که در این مقاله، از منطق هدایت GSR استفاده شده و با یک تأخیر زمانی از حالت‌های تکینگی عبور می‌کند. به‌طور کلی عملگرهای ژيروسکوپی دقت وضعیت کمتر از ۱ درجه را فراهم می‌کنند؛ به‌طوری که در راهبردهای مطرح‌شده در این مقاله، دقت LQR/LQG به‌طور تقریبی کمتر از ۰/۲ درجه و فیدبک کواترنیون کمتر از ۰/۴ درجه است. در روش فیدبک کواترنیون در شرایط تکینگی دقت وضعیت، وابسته به عملکرد منطق هدایت خواهد بود و اغلب دقت کمتر، از حالت بدون تکینگی است. به‌طور کلی نتایج بیانگر دقت بیشتر روش LQR/LQG در مقایسه با کنترلر فیدبک کواترنیون است.

## مراجع

- [1] Gersh, J. and Peck, M. "Violet: A High-Agility Nanosatellite for Demonstrating Small Control-Moment Gyroscope Prototypes and Steering Law," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Chicago, August 2009.
- [2] Jacot, A. D. and Liska, D. J., "Control Moment Gyros in Attitude Control," *Journal of Spacecrafts and Rockets*, Vol. 3, No.9, 1966, pp. 1313-1320.
- [3] Margulies, G. and Aubrun, J. N., "Geometrical Theory of Single Gimbal Control Moment Gyro System," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. XXVI, No.2, 1978, pp.159-191.
- [4] Bedrossian, N.S., Paradiso, J., Bergman, E. and Rowell, D., "Redundant Single Gimbal Control Moment Gyroscope Singularity Analysis," *Journal of Guidance*, Vol. 13, No. 6, 1990, pp. 1096-1099.

ژيروسکوپ جدول (۲) است. با استفاده از بهینه‌سازی سیستم یا عملگر ژيروسکوپی با قابلیت نرخ چرخش بالاتر، زمان مانور کاهش خواهد یافت.

در سیستم کنترل وضعیت ارائه شده می‌توان در حالت پایداری وضعیت از راهبرد LQR/LQG و در حالت مانوری از راهبرد فیدبک کواترنیون استفاده کرد. نتایج شبیه‌سازی‌های مختلف بیانگر تحقق مانورهای تک محوره، دو محوره و سه محوره با مقادیر مختلف است.



شکل ۷- نتایج شبیه‌سازی مانور سریع ماهواره

- [13] Unnikrishnan, N., Balakrishnan, S.N. and Padhi, R., "Dynamic-Optimization of a Spacecraft Attitude Controller in the Presence of Uncertainties," *Proceeding of IEEE, Symposium on Intelligent Control*, Munich, Germany, Oct. 2006.
- [14] Makunis, W., "Adaptive Satellite Attitude Control in the Presence of Inertia and Cmg Gimbal Friction Uncertainties," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 56, No. 1, 2008, pp. 121-134.
- [15] Leve, F. A. Development of the Spacecraft Orientation Buoyancy Experimental Kiosk, (Thesis Ms.c.), University of Florida, 2008.
- [16] Lappas, V. A Control Moment Gyro Based Attitude Control System for Agile Satellites, (Thesis PhD), University of Surrey, 2002.
- [17] Sidi, M., *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge Aerospace Series 7, 1997.
- [18] Wie, B. and Lu, J., "Feedback Control Logic for Spacecraft Eigenaxis Rotations under Slow Rate and Control Constraints," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 18, No. 6, 1995, pp.1372-1379.
- [19] Wie, B. and Weiss, H., "Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotation," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, No. 3, 1989, pp. 375-380.
- [20] Wie, B. and Barba, P. M., "Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 8, No. 3, 1985, pp. 360-365.
- [5] Bedrossian, N. S., Paradiso, J. and Bergman, E., "Steering Law Design for Redundant Single Gimbal Control Moment Gyroscopes," *Journal of Guidance*, Vol. 13, No.6, 1990, pp. 1083-1089.
- [6] Vadali, S. R. Oh, H.S. and Walker, S., "Preferred Gimbal Angles for Single Gimbal Control Moment Gyroscopes," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 13, No. 6, 1990, pp. 1090-1095.
- [7] Oh, H.S. and Vadali, S. R., "Feedback Control and Steering Laws for Spacecraft Using Single Gimbal Control Moment Gyros," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 39, No. 2, 1991, pp. 183-203.
- [8] Meffe, G. and Stocking, M., "Momentum Envelope Topology of Single Gimbal CMG Arrays for Space Vehicle Control," *Proceedings of AAS Guidance and Control Conference*, Keystone, CO., 1987.
- [9] Kurokawa, H., "Constrained Steering Law of Pyramid-Type Control Moment Gyros and Ground Tests," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 20, No. 3, 1996, pp. 445-449.
- [10] Wie, B., Bailey, D. and Heiberg, C., "Singularity Robust Steering Logic for Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyros," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, No. 5, 2001, pp. 865-871.
- [11] Harland, D. M. and Lorenz, R. D., *Space Systems Failures*, Springer-Praxis, 2005.
- [12] KrishnaKumar, K. "Adaptive Neuro-Control for Spacecraft Attitude Control," *Proceeding of the IEEE Conference on Control Applications*, Aug. 1994.