

# Analytical Solution to Relative Motion Dynamics in Satellite Formation Flying Using Geostationary Orbit Sets

S. H. Mortazavi<sup>1</sup>

Satellite Research Institute, Iranian Space Research Center

Postal Code: 1997994313, Tehran, IRAN

**h.mortazavi@sri.ac.ir**

*Satellite formation flying is one of the most recent research topics in space field owing to various operational projects. The first and the most important step in facing with this concept is studying and modeling of dynamics of the problem. In this paper, the relative dynamics of a satellite formation flying including the leader-follower satellites based on the concept of control for geostationary vehicles, has been examined. As a consequence, an analytical solution for determination of relative position and velocity of the formation in local horizontal coordinate system which is set on leader-follower satellites has been derived. Dynamics modeling of the problem is done based on parameters which are normally used for control of geostationary maneuvers like station keeping. The advantages of utilizing these parameters are non singularity of equations and having physical sensation to these parameters. The analytical solution has been resulted from two supposes: the relative orbit is semi circular and the leader-follower satellites are close to each other in the formation.*

**Keywords:** Satellite formation flying, Relative position, Relative velocity, Geostationary orbit

---

1. Lecturer (Corresponding Author)

# حل تحلیلی برای دینامیک حرکت نسبی در پرواز آرایش مند ماهواره‌ها با استفاده از پارامترهای مداری مختص مدار زمین آهنگ

سید حسین مرتضوی<sup>۱</sup>

پژوهشکده سامانه‌های ماهواره، پژوهشگاه فضایی ایران

تهران، کدپستی: ۱۹۹۷۹۹۴۳۱۳

h.mortazavi@sri.ac.ir

پرواز آرایش‌مند ماهواره‌ها با توجه به پروژه‌های مختلف عملیاتی در دنیا، یکی از موضوعات به‌روز تحقیقاتی- عملیاتی علوم فضایی محسوب می‌شود. اولین و مهم‌ترین گام در مواجهه با این مفهوم، مطالعه و مدل‌سازی دینامیک مسئله است. در این مقاله، دینامیک آرایش پرواز ماهواره‌ها شامل یک ماهواره پیشرو و یک ماهواره تعقیب‌گر، با استفاده از پارامترهای مدار مختص مدار زمین‌آهنگ مطالعه شده است. در طی آن، رابطه‌ای تحلیلی برای محاسبه موقعیت و سرعت نسبی مسئله پیشرو- تعقیب‌گر در دستگاه مختصات افقی محلی ماهواره پیشرو، استخراج شده است. برای مدل‌سازی دینامیک مسئله از پارامترهای مداری مختص به مدار زمین‌آهنگ استفاده شده که به‌صورت معمول برای مانور حفظ موقعیت ماهواره‌های زمین‌آهنگ استفاده می‌شود. مزیت استفاده از این پارامترها، عدم تکینگی و همچنین وجود درک فیزیکی نسبت به المان‌های مشخص‌کننده مدار است. روابط تحلیلی به‌دست آمده برای حرکت و سرعت نسبی با فرض نزدیک به دایروی بودن مدارها و نزدیکی دو ماهواره به یکدیگر، حاصل شده است.

واژه‌های کلیدی: پرواز آرایش‌مند ماهواره‌ها، موقعیت نسبی، سرعت نسبی، مدار زمین‌آهنگ

## علائم و اختصارات

$r$	برداری موقعیت ماهواره		
$t$	زمان		
$u$	خطای طول جغرافیایی نقطه حضیض	$a$	نیم قطر اصلی محور اصلی
$[x \ y \ z]$	برداری موقعیت نسبی ماهواره تعقیب‌گر به پیشرو	$e$	خروج از مرکز
$[v_x \ v_y \ v_z]$	برداری سرعت نسبی ماهواره تعقیب‌گر به پیشرو	$i$	زاویه شیب مداری
$\theta_G$	زمان نجومی نصف‌النهار گرینویچ	$L$	ماتریس دوران
$\Omega$	زاویه گره صعودی	$l_m$	موقعیت زاویه‌ای ماهواره نسبت به نصف‌النهار گرینویچ
$\omega$	آرگومان نقطه حضیض	$M$	آنومالی متوسط
$\Delta$	تفاضل نسبی پارامترها	$n$	سرعت زاویه‌ای متوسط مداری

نمایشگر پارامترهای ماهواره پیشرو

( ۰ )

نمایشگر پارامترهای ماهواره تعقیب‌گر

( ۱ )

## مقدمه

پرواز آرایش‌مند ماهواره‌ها، تدبیری است که در آن چندین ماهواره به‌شکلی آرایش می‌یابند تا مأموریتی را انجام دهند که یک ماهواره، به‌تنهایی نمی‌تواند انجام دهد یا انجام آن با مجموعه ماهواره‌ها، بهینه‌تر و کم‌هزینه‌تر است. مهم‌ترین هدف برای پرواز آرایش‌مند ماهواره‌ها، توزیع فعالیت‌های ماهواره‌های بزرگ به فعالیت‌های کوچک‌تر است که هر یک از ماهواره‌های آرایش، بتوانند انجام دهند. این تدبیر، که یکی از مباحث نو در حوزه مأموریت‌های ماهواره‌ها و فضاپیماهاست، کاربردهای فضایی بسیار زیادی را ممکن می‌سازد که از آن جمله می‌توان به رادارهای فضا- مینا، تلسکوپ‌های قدرتمند فضایی و همچنین راه‌اندازی سرویس‌های اینترنتی بسیار پیشرفته، اشاره کرد.

به‌رغم تازگی و نو بودن این مسئله و کاربردهای آن، پیشینه تحقیقاتی عملیاتی آن به زمان آغاز برنامه‌های فضایی سرنشین‌دار باز می‌گردد. چالش پیش‌روی آن زمان، چگونگی انجام مانورهای ملاقات فضایی و الحاق دو فضاپیما به یکدیگر بود. در خلال انجام این مانورها، تصحیحات مداری به‌منظور کنترل مدار نسبی میان دو فضاپیما انجام می‌گرفت. برای مانور الحاق، فاصله نسبی دو وسیله به آرامی و به‌شکل کنترل‌شده به صفر کاهش می‌یافت. حفظ فاصله نسبی میان دو فضاپیما و اعمال تغییر در این فاصله نسبی یا جهت نسبی دو وسیله، مفهوم اصلی پرواز آرایش‌مند ماهواره‌هاست.

آغاز فعالیت‌های تحقیقاتی- کاربردی در زمینه پرواز آرایش‌مند فضاپیماها، به اواخر دهه نود میلادی باز می‌گردد که نقطه شروع بسیاری از پروژه‌های عملیاتی با استفاده از این مفهوم است. تحقیقات گسترده‌ای درخصوص مدل‌سازی دینامیکی، کنترل فضاپیما برای حفظ آرایش، چگونگی انجام مانورها در حین عملیات، تغییر آرایش و بسیاری از زمینه‌های مرتبط با این موضوع انجام شده‌است.

اما بدون شک مدل‌سازی دینامیکی آرایش، اولین و مهم‌ترین گام در مطالعه مسئله است، زیرا موقعیت و سرعت فضاپیماها، حرکت نسبی آن‌ها نسبت به‌هم، تعیین فرامین هدایت و پیاده‌سازی آن‌ها و اعمال قوانین کنترلی به این مجموعه، بدون استخراج دینامیک دقیق مسئله، ممکن نیست. در زمینه مدل‌سازی مسئله با استفاده از پارامترهای مداری مختلف، در دستگاه‌های مختصات مختلف و با در نظر گرفتن اغتشاشات مختلف، تحقیقات گسترده‌ای انجام شده‌است. مرسوم‌ترین مدل‌سازی مدار نسبی، معادلات  $HCW^2$  است

که به سال ۱۸۷۸ میلادی باز می‌گردد که هیل<sup>۳</sup> از آن برای مدل‌سازی حرکت نسبی ماه نسبت به زمین استفاده کرد [۱]. کلوهمسی<sup>۴</sup> و ویلتشر<sup>۵</sup> در سال ۱۹۶۰، مدل خطی شده این معادلات را برای مسئله ملاقات فضایی معرفی کردند [۲]. شونر و همکارش با در نظر گرفتن اثر خروج از مرکز برای مدار مرجع، یک مدل‌سازی غیرخطی برای این مسئله ارائه کردند [۳]. برای این دسته معادلات غیرخطی با در نظر گرفتن اثر خروج از مرکز، حل‌های بهینه‌تری توسط کارتر ارائه شد [۵ و ۴]. غیرخطی بودن معادلات نسبی با در نظر گرفتن مدار مرجع بیضوی در بسیاری از تحقیقات دیگر دنبال شد [۶-۱۰]. بیشتر تحقیقات انجام شده تا این سال‌ها برای آرایش دو ماهواره و بدون در نظر گرفتن اثرات اغتشاشی، انجام شده‌است. با در نظر گرفتن اثرات بیضوی بودن زمین، نیروی پسا برای ارتفاع‌های کم، اثرات فشار خورشیدی و گشتاورهای جاذبی، مدل‌های دینامیکی بسیار دقیق‌تری برای این مسئله، به‌دست آمده است [۱۱-۱۷].

اما علاوه بر استخراج روابط مربوط به مدار نسبی با روش دینامیکی مستقیم، مدل‌سازی مدار نسبی با استفاده از پارامترهای مداری نسبی نیز مورد توجه قرار گرفت. ابتدا، آلفریند و همکارانش با بهره‌گیری از روش هندسی، تلاش کردند تا مدار نسبی را به‌صورت اختلاف پارامترهای مداری، توصیف کنند [۱۹ و ۱۸]. سپس وادی و همکارانش نیز، اثرات غیرخطی بودن و اغتشاشات ناشی از خروج از مرکز را بدون در نظر گرفتن تأثیر جاذبه مدل کردند [۲۰]. در ادامه، ودالی موفق شد تا میان مقادیر ثابت حل‌های پروردیک معادلات  $HCW$  و پارامترهای کلاسیک مداری، ارتباط ایجاد کند [۲۲ و ۲۱]. به‌دنبال این تحقیق، گائو یانگ-فنگ و همکارش توانستند با استفاده از اختلاف پارامترهای مداری، دینامیک مسئله مدار نسبی را مدل‌سازی و تحلیل کنند.

در این مقاله، دینامیک مدار نسبی با استفاده از پارامترهای مداری مختص مدار زمین‌آهنگ مطالعه شده، که توسط سوپ [۲۳] ارائه شده است. این پارامترهای مداری نه از مجموعه دسته معادلات  $HCW$  و نه از تفاضل ساده هندسی دو دسته از پارامترهای مداری، استخراج می‌شوند. این پارامترهای مداری بیشتر برای مدل‌سازی مانور حفظ موقعیت ماهواره‌های مدار زمین‌آهنگ، استفاده می‌شوند [۲۴]. مزیت استفاده از این پارامترها، عدم تکیگی در زوایای خاص و همچنین وجود درک فیزیکی ملموس نسبت به این پارامترهاست.

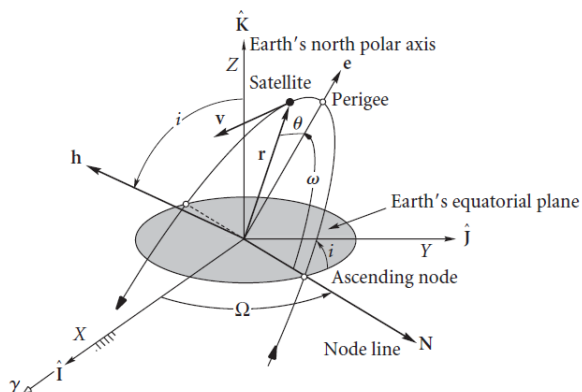
در اولین گام از این مطالعه، رابطه‌ای تحلیلی برای تعیین موقعیت و سرعت نسبی در دستگاه مختصات افقی محلی که بر

3. Hill

4. Clohessy

5. Wiltshire

2. Hill-Clohessy-Wiltshire(HCW)



شکل ۱- پارامترهای کلاسیک مداری [۱۰]

### پارامترهای مداری مختص مدار زمین‌آهنگ

به‌طور کلی موقعیت یک ماهواره در فضا را با شش پارامتر توصیف می‌کنند که یکی از مرسوم‌ترین آن‌ها پارامترهای کلاسیک مداری است. این پارامترها به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$R = (a, e, i, \Omega, \omega, \theta) \quad (1)$$

که به ترتیب، نیم‌قطر محور اصلی، خروج از مرکز، زاویه‌شیب، زاویه نقطه صعود، آرگومان نقطه حضیض و زاویه موقعیت ماهواره تا راستای نقطه حضیض هستند. این پارامترها در شکل (۱) مشخص است.

براساس تئوری سوپ [۲۳] با استفاده از شش پارامتر مداری می‌توان موقعیت یک ماهواره در فضا را مشخص کرد. این پارامترها بیشتر برای مدار زمین‌آهنگ و مانورهای ماهواره ژئوسنکرون از جمله حفظ موقعیت استفاده می‌شود. این پارامترها و ارتباط آن با پارامترهای کلاسیک مداری به‌شکل زیر است:

$$\begin{aligned} a & \\ e_x &= e \cos(\omega + \Omega) \\ e_y &= e \sin(\omega + \Omega) \\ i_x &= i \cos(\Omega) \\ i_y &= i \sin(\Omega) \\ l_m &= M + \omega + \Omega - \theta_G(t) \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه فوق،  $a$  نیم‌قطر محور اصلی؛  $e_x, e_y$  تصویر بردار خروج از مرکز در صفحه مدار زمین‌آهنگ؛  $i_x, i_y$  تصویر زاویه میل در صفحه مدار زمین‌آهنگ؛  $\theta_G(t)$  زمان نجومی نصف‌النهار گرینویچ و  $M$  آنومالی متوسط است.

برای مدل‌سازی مسئله، با استفاده از پارامترهای مدار نسبی، فرض می‌شود که دو ماهواره در دو مدار غیرهمسان، مطابق شکل (۲) در حال حرکت هستند. در این حالت برای به‌دست‌آوردن موقعیت

روی ماهواره پیشرو قرار گرفته است، به‌دست آمده‌است. برای به‌دست آوردن این رابطه تحلیلی از دو فرض استفاده شده‌است: نزدیک بودن دو ماهواره به یکدیگر و نزدیک به دایروی بودن مدار نسبی دو ماهواره (خروج از مرکز بسیار کوچک). مهم‌ترین مزایای این روابط تحلیلی، کاهش پیچیدگی روابط حرکت مداری و مانورهای مختلف و همچنین سهولت در طراحی کنترلرهای مناسب برای آرایش پرواز است.

### دستگاه‌های مختصات

به‌صورت کلی نخستین گام برای مدل‌سازی دینامیک یک مسئله، مشخص کردن دستگاه‌های مختصات مورد نیاز مسئله است. بدین منظور باید دستگاه‌های مختصات و ارتباط میان آن‌ها تعریف شود.

در مدل‌سازی حرکت نسبی ماهواره‌ها و نیروهای مؤثر بر آنها، دستگاه‌های مختصات مختلفی در نظر گرفته می‌شود. مهم‌ترین ویژگی در انتخاب دستگاه‌های مختصات، کاهش پیچیدگی روابط و ملموس بودن پارامترهای آن‌هاست. در این مسئله که هدف مدل‌سازی موقعیت و سرعت نسبی میان دو ماهواره پیشرو و تعقیبگر است، از چهار دستگاه مختصات مختلف استفاده شده‌است که هر یک در ادامه معرفی می‌شود:

**دستگاه مختصات اینرسی (I):** در این دستگاه که به‌عنوان دستگاه مرجع در نظر گرفته می‌شود، مرکز دستگاه بر روی مرکز زمین قرار گرفته و محور  $X$  آن به سمت نقطه اعتدال بهاری است. همچنین محور  $Z$  آن در راستای چرخش زمین بوده و با توجه به راستگرد بودن دستگاه مختصات، محور  $Y$  به آسانی تعیین می‌شود.

**دستگاه مختصات نقطه صعود (N):** مرکز این دستگاه مختصات، روی مرکز زمین قرار گرفته است. محور  $X$  این دستگاه به سمت نقطه صعود مداری و محور  $Z$  آن در راستای مومنوم حرکت مداری است و محور  $Y$  آن نیز با قانون دست راست به‌دست می‌آید.

**دستگاه مختصات محلی افقی (O):** این دستگاه به این شکل تعریف می‌شود که مرکز این دستگاه مختصات، روی ماهواره قرار می‌گیرد. محور  $X$  این دستگاه در جهت بردار سرعت، محور  $Y$  عمود بر صفحه مداری و محور  $Z$  آن نیز به سمت مرکز زمین است.

**دستگاه مختصات ثابت بدنی ( $\hat{O}$ ):** این دستگاه به صورت ثابت بر روی ماهواره تعریف می‌شود که محور  $X$  آن در جهت شعاعی ماهواره نسبت به زمین است. محور  $Y$  دستگاه به سمت بردار سرعت و محور  $Z$  آن عمود بر صفحه مداری است. این دستگاه از مرسوم‌ترین دستگاه‌های مورد استفاده در پروژه‌های فضایی است.

پارامتر  $\Delta i$  نیز به شکل بردار واحد زاویه شیب ماهواره تعقیب‌گر که در صفحه X-Y دستگاه مختصات نقطه صعود ماهواره پیشرو تصویر می‌شود، تعیین می‌گردد. به این بردار نیز، بردار زاویه شیب نسبی گفته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_x \\ \Delta i_y \\ \Delta i_z \end{bmatrix} = L_x(i_0)L_z(-\Delta\Omega)L_x(-i_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} \sin i_0 \sin \Delta\Omega \\ \sin i_0 \cos i_1 - \cos i_0 \sin i_1 \cos \Delta\Omega \\ \cos i_0 \cos i_1 - \sin i_0 \sin i_1 \cos \Delta\Omega \end{bmatrix}$$

که در این رابطه،  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_0$  است. با توجه به تعریف مسئله، برای مدل‌سازی حرکت نسبی دو فضاپیما با استفاده از پارامترهای نسبی مختص مدار زمین‌آهنگ فقط به دو مؤلفه  $\Delta i_x$  و  $\Delta i_y$  نیاز است. با فرض کوچک بودن  $\Delta\Omega$ ، بردار زاویه شیب نسبی به شکل رابطه (۸) تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_x \\ \Delta i_y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Delta\Omega \sin i_0 \\ -\sin \Delta i \end{bmatrix} \quad (8)$$

اما آخرین پارامتر نسبی موردنظر،  $\Delta\dot{M}$  است که نمایشگر اختلاف فاز اولیه دو فضاپیما ناشی از  $\Delta\Omega$  و  $\delta u$  (خطای طول جغرافیایی نقطه حضيض) است.

$$\Delta\dot{M} = (\omega_1 - \omega_0) + (M_1^0 - M_0^0) + \delta u \quad (9)$$

در این رابطه،  $M^0$  آنومالی متوسط در لحظه  $t_0$  است. با توجه به شکل (۲)، می‌توان نوشت:

$$\tan \delta u = \tan \Delta\Omega \cos i_0 \quad (10)$$

با فرض کوچک بودن  $\Delta\Omega$  می‌توان  $\Delta\dot{M}$  را به شکل زیر نمایش داد:

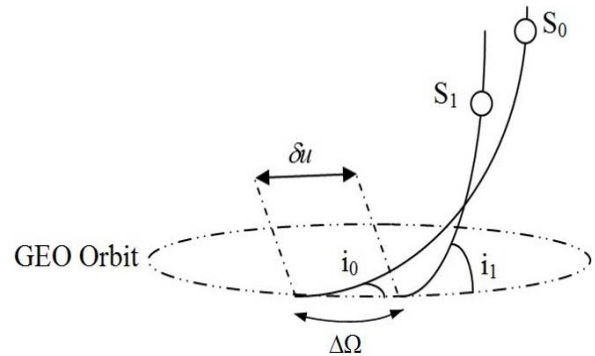
$$\Delta\dot{M} = (\omega_1 - \omega_0) + (M_1^0 - M_0^0) + \Delta\Omega \cos i_0 \quad (11)$$

شایان ذکر است که فرض کوچک بودن  $\Delta\Omega$ ، به این دلیل مطرح می‌شود که معمولاً فاصله دو ماهواره پیشرو و تعقیب‌گر بسیار کم است که به تناسب آن، اختلاف نقاط زاویه صعود آنها نیز کوچک می‌شود.

### دینامیک حرکت نسبی

برای استخراج دینامیک حرکت نسبی مسئله پیشرو-تعقیب‌گر، بردار موقعیت هر یک از ماهواره‌ها در دستگاه مختصات اینرسی، مدل‌سازی شده و بردار موقعیت نسبی از تفاضل برداری آنها تعیین می‌شود. این بردارها با استفاده از پارامترهای مداری مختص مدار زمین‌آهنگ در دستگاه مختصات ثابت بدنی ماهواره پیشرو محاسبه و با استفاده

نسبی، حرکت هر دو ماهواره در صفحه مدار زمین‌آهنگ تصویر شده و با انجام تفاضل برداری آنها، بردار موقعیت نسبی با استفاده از پارامترهای مختص مدار زمین‌آهنگ، استخراج می‌شود.



شکل ۲- تصویرسازی مدارهای دو ماهواره در صفحه مدار زمین‌آهنگ

در این بخش هدف، یافتن پارامترهای مدار نسبی مختص مدار زمین‌آهنگ با استفاده از تفاضل هندسی تصویر پارامترهای مداری هریک از مدارهای پیشرو و تعقیب‌گر می‌باشد. همانطور که در رابطه (۲) مشخص گردید، حرکت یک ماهواره در مدار زمین‌آهنگ با استفاده از این شش پارامتر، تعیین می‌شود. با استفاده از این رابطه و شکل (۲)، پارامترهای مدار نسبی مختص مدار زمین‌آهنگ به چهار پارامتر برداری کاهش داده می‌شود. این چهار پارامتر نسبی به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$RelativeOrbitElement = (\Delta n, \Delta e, \Delta i, \Delta\dot{M}) \quad (3)$$

که  $\Delta n$  اختلاف سرعت زاویه‌ای متوسط بین دو ماهواره می‌باشد که بصورت تفاضل متوسط سرعت زاویه‌ای ماهواره پیشرو با نمایه 0 با ماهواره تعقیب‌گر با نمایه 1، نمایش داده می‌شود:

$$\Delta n = n_1 - n_0 \quad (4)$$

با فرض رابطه  $\Delta a = a_1 - a_0$  و همچنین کوچک بودن مقدار  $\Delta a$ ، تفاضل متوسط سرعت‌های زاویه‌ای را می‌توان به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\Delta n \approx -\frac{3n_0}{2a_0} \Delta a \quad (5)$$

یکی دیگر از پارامترهای نسبی،  $\Delta e$  است که به صورت تفاضل بردار خروج از مرکز دو فضاپیما که در صفحه X-Y دستگاه مختصات نقطه صعود، تصویر شده است، تعیین می‌شود. به این پارامتر، بردار خروج از مرکز نسبی گفته می‌شود.

$$\Delta e = \begin{bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \cos \omega_1 - e_0 \cos \omega_0 \\ e_1 \sin \omega_1 - e_0 \sin \omega_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ماهواره پیشرو به دستگاه مختصات افقی محلی، استخراج شود. روند استخراج بردار موقعیت نسبی بدین شکل است که ابتدا بردار موقعیت ماهواره تعقیب‌گر در دستگاه مختصات ماهواره پیشرو تصویر شده و تفاضل برداری آن به دست می‌آید. آنگاه بردار موقعیت نسبی در دستگاه مختصات افقی محلی، تصویر می‌شود:

$$[r]^0 = L_0^0([L_1^0]^0 r_1 - r_0) \quad (16)$$

در رابطه بالا،  $[r]^0$  بردار موقعیت نسبی در دستگاه مختصات محلی افقی متصل به ماهواره پیشرو است.

با توجه به شکل (۳)، ماتریس دوران دستگاه مختصات محلی ماهواره تعقیب‌گر به ماتریس دوران دستگاه مختصات محلی ماهواره پیشرو به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$[L_1^0]^0 = L_z(u_0)L_x(i_0)L_z(-\Delta\Omega)L_x(-i_1)L_z(-u_1) \quad (17)$$

در این رابطه،  $u$  جمع جبری  $\Omega$  و  $\omega$  است، که به آن طول جغرافیایی نقطه حضيض گفته می‌شود. چنانچه ماتریس دوران رابطه (۱۷) استخراج شده و در رابطه (۱۶) قرار گیرد، بردار موقعیت نسبی به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$[L_1^0]^0 = \begin{bmatrix} (\cos u_0 \cos u_1 + \sin u_0 \sin u_1 \cos i_0 \cos i_1) \cos \Delta\Omega + (\sin u_0 \cos u_1 \cos i_0 - \cos u_0 \sin u_1 \cos i_1) \sin \Delta\Omega + \sin u_0 \sin u_1 \sin i_0 \sin i_1 \\ (-\sin u_0 \cos u_1 + \cos u_0 \sin u_1 \cos i_0 \cos i_1) \cos \Delta\Omega + (\cos u_0 \cos u_1 \cos i_0 + \sin u_0 \sin u_1 \cos i_1) \sin \Delta\Omega + \cos u_0 \sin u_1 \sin i_0 \cos i_1 \\ -\sin i_0 \cos u_1 \sin \Delta\Omega - \sin i_0 \cos i_1 \sin u_1 \cos \Delta\Omega + \cos i_0 \sin i_1 \sin u_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

حال می‌توان فرضیه‌های در نظر گرفته شده را اعمال کرد و تأثیر آن‌را بر ماتریس دوران بالا و همچنین تعیین بردار موقعیت نسبی بررسی کرد.

الف) کوچک بودن آرایش ماهواره

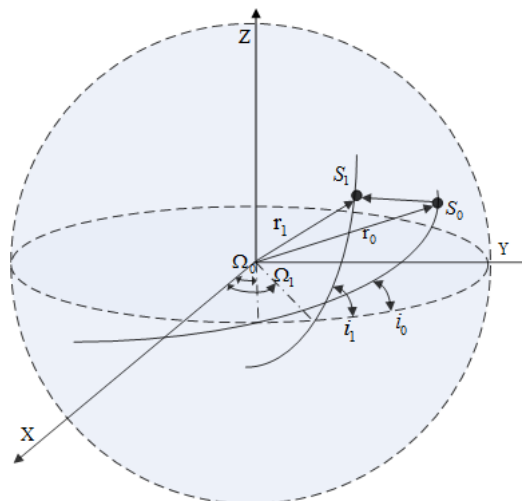
در این بخش، فرض می‌شود که آرایش کل ماهواره‌ها کوچک است. به عبارت دیگر فاصله بین ماهواره پیشرو و ماهواره تعقیب‌گر بسیار کم است. در نظر گرفتن این فرض به مفهوم کوچک شدن مقادیر  $\Delta i$  و  $\Delta\Omega$  خواهد بود.

$$\Delta\Omega \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \Delta\Omega \approx 1 - \frac{1}{2} \Delta\Omega^2 \quad (19)$$

$$\therefore \cos \Delta\Omega \approx 1$$

با قراردادن این رابطه در ماتریس دوران و حذف ترم‌های کوچک و همچنین فرض  $\Delta i = i_1 - i_0$ ، ماتریس دوران رابطه (۱۸) به شکل زیر تغییر می‌یابد:

از چرخش دستگاه‌ها در دستگاه محلی افقی متصل به ماهواره پیشرو، استخراج می‌شود (شکل ۳).



شکل ۳- تصویر مدار نسبی در صفحه X-Z و در شرایط  $D=0$

در استخراج دینامیک نسبی ماهواره‌ها مواردی وجود دارد که به شرح زیر است:

- بردار موقعیت و سرعت نسبی در دستگاه مختصات محلی افقی متصل به ماهواره پیشرو استخراج می‌شود.
  - مدار نسبی به شکل نزدیک به دایره فرض می‌شود.
  - دو ماهواره در آرایش، نزدیک به یکدیگر هستند.
- در حالت کلی، اندازه بردار موقعیت ماهواره نسبت به مرکز دستگاه مختصات اینرسی به شکل زیر است:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (12)$$

با فرض بسیار دایروی بودن مدار ماهواره (خروج از مرکز بسیار کم)، رابطه فوق به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$r \approx a(1 - e \cos \theta) \quad (13)$$

همچنین برای زاویه موقعیت ماهواره نسبت به نقطه حضيض برای مدار نسبی بسیار دایروی، رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\theta \approx M + 2e \sin \theta \quad (14)$$

مشخص است که بردار مدار نسبی از تفاضل دو بردار موقعیت ماهواره نسبت به مرکز زمین، تعیین می‌شود:

$$r = r_1 - r_0 \quad (15)$$

حال برای محاسبه دینامیک پرواز آرایش مند دو ماهواره، بردار موقعیت مدار نسبی در دستگاه مختصات محلی افقی (6) تصویر می‌شود. بدین منظور باید ماتریس دوران از دستگاه مختصات بدنی

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(\sin\Delta u + \cos\Delta u \cos i_0 \sin \Delta\Omega) \\ r_1(\sin i_0 \cos u_1 \sin \Delta\Omega - \sin \Delta i \sin u_1) \\ r_1 \cos\Delta u - r_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

فرض کوچک بودن  $\Delta u$  نیز با توجه به نزدیکی فاصله دو ماهواره، قابل اعمال به مسئله است:

$$\begin{aligned} \Delta u \rightarrow 0 &\Rightarrow \cos \Delta u \approx 1 - \frac{1}{2} \Delta u^2, \\ \sin \Delta u &\approx \Delta u + \frac{1}{3} \Delta u^3 \\ \therefore \cos \Delta u &\approx 1, \sin \Delta u \approx \Delta u \end{aligned} \quad (27)$$

استفاده از رابطه بالا و همچنین رابطه (۸)، شکل ساده‌تری از بردار موقعیت نسبی را ترسیم می‌کند. همچنین کوچک بودن آرایش ماهواره‌ها، این اجازه را می‌دهد تا  $r_1$  را با  $a_0$  هم اندازه فرض شود.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(\Delta u + \Delta\Omega \cos i_0) \\ r_1(\Delta i_x \cos u_1 + \Delta i_y \sin u_1) \\ r_0 - r_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

ب) دایروی بودن مدار نسبی علاوه بر فرض کوچک بودن آرایش ماهواره‌ها، فرض می‌شود که مدار نسبی، یک مدار بسیار نزدیک به دایره است. هدف آن است که برای موقعیت‌هایی که ماهواره تعقیب‌گر در مدار تقریباً دایروی، ماهواره پیشرو را تعقیب می‌کند؛ موقعیت مدار نسبی را با شکل ساده‌تری تعیین کرد.

با فرض دایروی بودن مدار، روابط زیر برای یک مدار دایروی، صادق است:

$$\begin{aligned} r &\approx a(1 - e \cos \theta) \\ \theta &\approx M + 2e \sin \theta \\ u &= \omega + \theta \\ M &= M^0 + n \cdot t \end{aligned} \quad (29)$$

با استفاده از روابط بالا، اثرات دایروی بودن مدار نسبی را می‌توان در بردار موقعیت نسبی، رابطه (۲۸)، اعمال کرد.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \left( \omega_1 - \omega_0 + M_1^0 - M_0^0 + \Delta\Omega \cos i_0 + \right) \\ a_0 (\Delta i_x \cos u_1 + \Delta i_y \sin u_1) \\ \frac{2D}{3n_0} + (e_1 \cos \theta_1 - e_0 \cos \theta_0) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[L_1^0]^o \approx \begin{bmatrix} \cos u_0 \cos u_1 + \sin u_0 \sin u_1 \cos \Delta i + \\ (\sin u_0 \cos u_1 \cos i_0 - \cos u_0 \sin u_1 \cos i_1) \sin \Delta\Omega \\ - \sin u_0 \cos u_1 + \cos u_0 \sin u_1 \cos \Delta i + \\ (\cos u_0 \cos u_1 \cos i_0 + \sin u_0 \sin u_1 \cos i_1) \sin \Delta\Omega \\ - \sin i_0 \cos u_1 \sin \Delta\Omega + \sin \Delta i \sin i_1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

حال با فرض نزدیک بودن دو ماهواره تعقیب‌گر و پیشرو به یکدیگر، مقدار  $\Delta i$  به سمت صفر میل می‌کند:

$$\begin{aligned} \Delta i \rightarrow 0 &\Rightarrow \cos \Delta i \approx 1 - \frac{1}{2} \Delta i^2 \\ \therefore \cos \Delta i &\approx 1 \end{aligned} \quad (21)$$

با جایگذاری مقدار  $\cos \Delta i$  در رابطه (۲۰)، ماتریس دوران ماهواره تعقیب‌گر به پیشرو در دستگاه مختصات محلی افقی که به ماهواره پیشرو متصل است به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$[L_1^0]^o \approx \begin{bmatrix} \cos\Delta u + \sin\Delta u \sin \Delta\Omega \cos i_0 \\ \sin\Delta u + \cos\Delta u \cos i_0 \sin \Delta\Omega \\ -\sin i_0 \cos u_1 \sin \Delta\Omega + \sin \Delta i \sin u_1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

که در رابطه بالا  $\Delta u = u_1 - u_0$  است. با توجه به کوچک بودن مقادیر  $\Delta\Omega$  و  $\Delta i$  و  $\Delta u$ ، ترم‌های بسیار کوچک از ماتریس دوران حذف می‌شود:

$$[L_1^0]^o \approx \begin{bmatrix} \cos\Delta u \\ \sin\Delta u + \cos\Delta u \cos i_0 \sin \Delta\Omega \\ -\sin i_0 \cos u_1 \sin \Delta\Omega + \sin \Delta i \sin u_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

با جایگذاری این ماتریس دوران در رابطه (۱۶)، بردار موقعیت نسبی تعیین می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \approx \mathbf{L}_0^0 \times \left( r_1 \begin{bmatrix} \cos\Delta u \\ \sin\Delta u + \cos\Delta u \cos i_0 \sin \Delta\Omega \\ -\sin i_0 \cos u_1 \sin \Delta\Omega + \sin \Delta i \sin u_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (24)$$

که در آن ماتریس دوران از دستگاه ثابت بدنی به دستگاه محلی افقی است:

$$\mathbf{L}_0^0 = L_x \left( \frac{\pi}{2} \right) L_z \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

از ترکیب دو رابطه آخر با یکدیگر و همچنین استفاده از رابطه (۸)، مختصات بردار نسبی تعیین می‌شود:

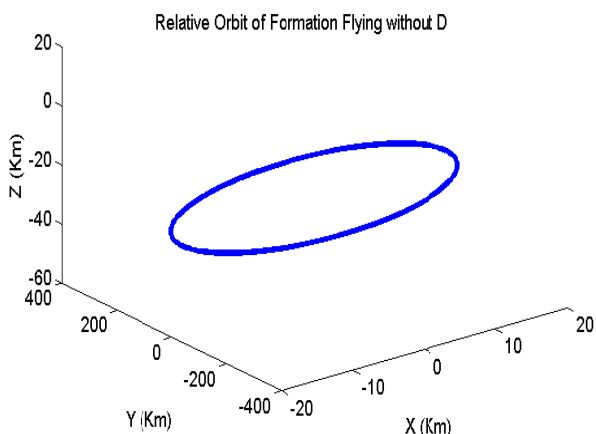
## شبیه‌سازی

در این بخش، رفتار دینامیک مسئله تعقیب‌گر- پیشرو با استفاده از شبیه‌سازی انجام شده برای حالت‌های مختلف، مطالعه شد. بدین منظور، مشخصات دو ماهواره تعقیب‌گر و پیشرو در جدول شماره (۱) مشخص شده‌است. این دو ماهواره در دو مدار غیرهم صفحه، نزدیک به دایروی قرار گرفته‌اند.

پس از مدل‌سازی حرکت مداری ماهواره‌های پیشرو و تعقیب‌گر با فرض کروی بودن زمین و مدل‌سازی مدار نسبی با استفاده از رابطه (۱۶)، نتایج شبیه‌سازی ارائه می‌شود.

جدول ۱- مشخصات مداری ماهواره‌های پیشرو و تعقیب‌گر

	ماهواره پیشرو	ماهواره تعقیب‌گر
$a$ (km)	۶۹۸۸	۶۹۲۸
$e$	۰/۰۰۷	۰/۰۰۵
$i$ (deg)	۳۲	۳۰
$\omega$ (deg)	۳۰	۳۰
$\Omega$ (deg)	۵۰	۵۰
$\theta$ (deg)	۰	۰



شکل ۴- مدار نسبی ماهواره‌های پیشرو و تعقیب‌گر در شرایط  $D=0$

در شکل (۴)، مدار نسبی برای آرایش ماهواره‌ها نمایش داده شده‌است. این شکل نمایانگر مدار نسبی یک پرواز پایدار است که در آن  $D=0$  است.  $D$  بیانگر افزایش حرکت موج‌وار مدار در حل عادی معادلات دینامیک مداری است. به عبارت دیگر، اگر معادلات دینامیک مداری بدون نظر گرفتن شرط مرزی برای بسته بودن مدار در نظر گرفته شود، مدار نسبی به صورت شکل (۸) به دست

$$= \begin{bmatrix} a_0 \left( \frac{\Delta \dot{M} + 2e_1 \sin(u_1 - \omega_1) - 2e_0 \sin(u_0 - \omega_0) + D \cdot t}{\Delta i_x \cos u_1 + \Delta i_y \sin u_1} \right) \\ \frac{2D}{3n_0} + a_0 \left( \frac{e_1 \cos \sin(u_1 - \omega_1) - e_0 \cos(u_0 - \omega_0)}{\Delta i_x \cos u_1 + \Delta i_y \sin u_1} \right) \end{bmatrix}$$

$$\approx a_0 \begin{bmatrix} \left( \frac{\Delta \dot{M} + 2(\Delta e_x \sin u_1 - \Delta e_y \cos u_1) + D \cdot t}{\Delta i_x \cos u_1 + \Delta i_y \sin u_1} \right) \\ \frac{2D}{3n_0} + (\Delta e_x \cos u_1 - \Delta e_y \sin u_1) \end{bmatrix}$$

با مشتق‌گیری از بردار مدارنسبی، سرعت نسبی دو ماهواره

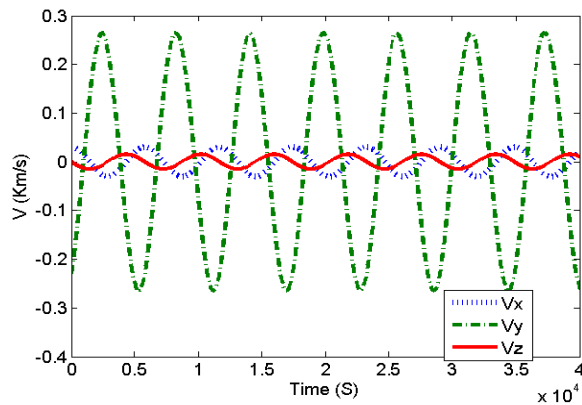
تعیین می‌شود:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 2n_0(\Delta e_x \cos u_1 + \Delta e_y \sin u_1) + D \\ n_0(\Delta i_y \cos u_1 - \Delta i_x \sin u_1) \\ n_0(\Delta e_y \cos u_1 - \Delta e_x \sin u_1) \end{bmatrix} \quad (31)$$

بدین ترتیب، بردارهای موقعیت و سرعت نسبی دو ماهواره تعقیب‌گر و پیشرو با در نظر گرفتن دو فرض کوچک بودن آرایش مجموعه و همچنین دایروی بودن مدارنسبی، به ترتیب مطابق روابط (۳۰) و (۳۱) به دست می‌آید. اما علاوه بر تعیین موقعیت و سرعت نسبی، از این دو رابطه نکات مهم دیگری نیز حاصل می‌شود:

- اگر  $D=0$  باشد، بردار موقعیت و سرعت نسبی توابعی پریودیک خواهند شد و بدین ترتیب، یک آرایش ماهواره بلندمدت (از نظر زمانی) ایجاد می‌شود.
- اگر  $D \neq 0$  باشد، مرکز بیضی نسبی در راستای محور  $x$  با نرخ  $Da_0$  در حال جابه‌جایی است.
- رابطه (۳۱) نشان می‌دهد که بردار موقعیت نسبی ماهواره تعقیب‌گر به پیشرو به شکل یک بیضی است که مرکز این بیضی در نقطه  $(a_0 \Delta \dot{M}, 0, \frac{2a_0 D}{3n_0})$  است.
- اگر بردار موقعیت نسبی در صفحه  $x-z$  دستگاه مختصات متصل به ماهواره پیشرو تصویر شود، یک بیضی با نیم قطر اصلی به اندازه  $2a_0|\Delta e|$  در راستای بردار سرعت ماهواره و نیم قطر فرعی با اندازه  $a_0|\Delta e|$  در جهت زمین پدید می‌آید. بنابراین، مرکز این بیضی در نقطه  $(a_0 \Delta \dot{M}, \frac{2a_0 D}{3n_0})$  خواهد بود.
- اگر پارامتری به شکل  $\beta_e = \cos^{-1}(\Delta e_x / |\Delta e|)$  تعریف شود، با در نظر گرفتن تصویر مدار نسبی در صفحه  $x-z$  می‌توان نشان داد که در موقعیت  $u_1 - \beta_e = 2k\pi$ ، ماهواره تعقیب‌گر در نزدیک‌ترین نقطه نسبت به زمین است. همچنین در شرایط  $u_1 - \beta_e = (2k+1)\pi$ ، ماهواره تعقیب‌گر در دورترین نقطه نسبت به زمین است.

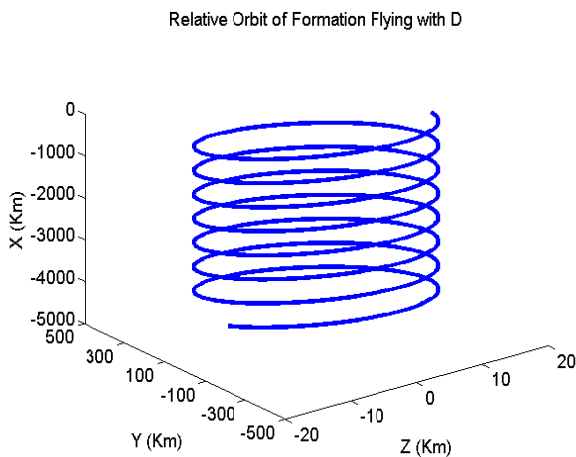




شکل ۴- تغییرات سرعت نسبی در بازه زمانی ۱۲ ساعته و در شرایط  $D=0$

شبه‌سازی فوق، علاوه بر اینکه برای حالت  $D = 0$  نیز انجام شد، برای حالتی که  $D \neq 0$  نیز است، مطالعه شده‌است. اگر نتوان از تفاضل سرعت زاویه‌ای مدارهای ماهواره‌های تعقیب‌گر و پیشرو نسبت به نیم قطر اصلی، صرف نظر کرد؛ مدار نسبی، تابعی پریودیک و متغیر با زمان خواهد بود. این حالت، عملاً برقراری یک آرایش پرواز پایدار را برای انجام مأموریت‌های فضایی فراهم نمی‌کند. در شکل (۸)، مشاهده می‌شود که مدار نسبی به‌رغم عدم جابه‌جایی در صفحه  $Y-Z$ ، در راستای  $X$  با سرعت در حال تغییر است. بر طبق آنچه در توضیحات روابط بردار موقعیت نسبی پس از رابطه (۳۱) بیان شد، مرکز بیضی باید با سرعت  $D a_0$  جابه‌جا شود.

با توجه به روابط استخراج شده، در حالت  $D \neq 0$ ، بردار سرعت نسبی دو ماهواره فقط در راستای  $X$  با حالتی که  $D = 0$  است، تفاوت خواهد داشت و در سایر راستاها یکسان است. همچنین بردار سرعت، باید رفتار پریودیک خود را حفظ کند. در شکل (۹)، بردار موقعیت سرعت نمایش داده شده‌است. ملاحظه می‌شود که سرعت فقط در راستای  $X$  با حالت قبل متفاوت است.

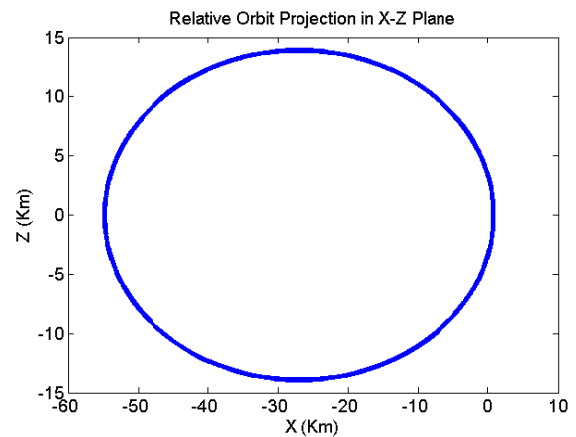


شکل ۸- مدار نسبی ماهواره‌های پیشرو و تعقیب‌گر در شرایط  $D \neq 0$

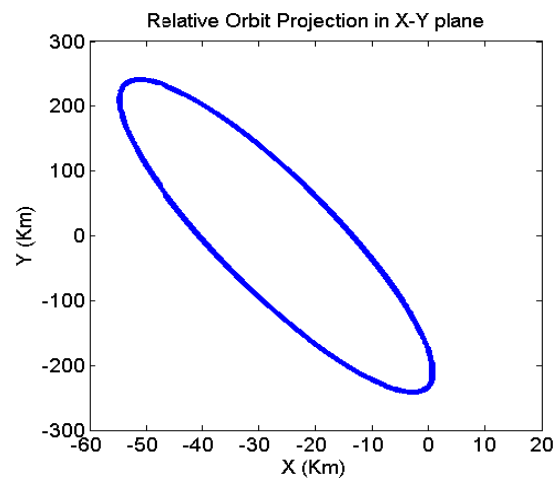
می‌آید. در واقع برای داشتن یک پرواز آرایش‌مند پایدار،  $D$  باید به صفر نزدیک باشد.

در شکل (۵) و (۶) به ترتیب، تصویر بردار نسبی در صفحات  $X-Y$  و  $X-Z$  مشخص شده‌است. همان‌طور که در توضیحات پس از رابطه (۳۱) اشاره شده‌است، مرکز تصویر مدار نسبی در صفحه  $X-Z$ ، یک بیضی با مرکزیت  $(a_0 \Delta \dot{M}, \frac{2a_0 D}{3n_0})$  خواهد بود که با توجه به صفر بودن پارامتر  $D$  مرکز بیضی در  $z = 0$  قرار گرفته‌است.

انتظار می‌رود که بردار سرعت نسبی دو ماهواره نیز با توجه به رابطه (۳۱)، رفتاری پریودیک داشته باشد. با توجه به تعریف دستگاه مختصات افقی محلی و همچنین آرایش پرواز مورد نظر که در آن فقط  $a, e, i$  تغییر می‌یابد، مشخص است که بیشترین تغییرات سرعت نسبی مربوط به محور  $Y$  است.

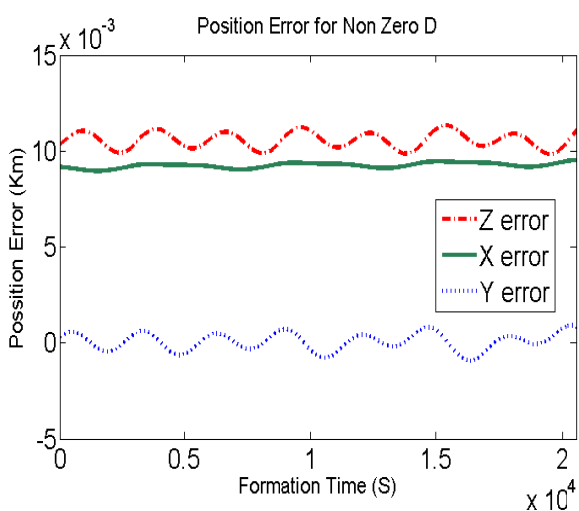


شکل ۵- تصویر مدار نسبی در صفحه  $X-Z$  و در شرایط  $D=0$



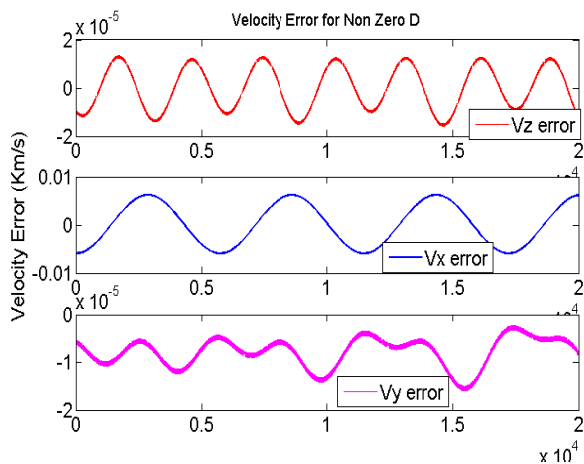
شکل ۶- تصویر مدار نسبی در صفحه  $X-Y$  و در شرایط  $D=0$

رسیدن به آرایش پایدار، باید این ترم به صفر نزدیک باشد. در شکل (۱۰)، میزان خطای بردار موقعیت نسبی در راستاهای  $X$ ،  $Y$ ،  $Z$  خروجی STK مقایسه شده است. اندازه خطا برای بردار  $X$  و  $Z$  نسبی در مرتبه متر است. شرایط برای بردار  $Y$  بسیار بهتر بوده، زیرا اندازه خطا از مرتبه  $10^{-5}$  کیلومتر است.

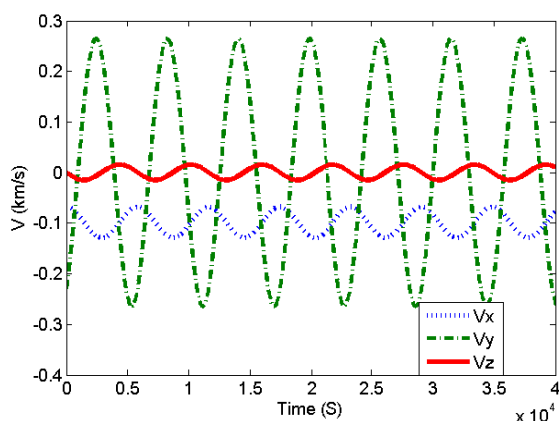


شکل ۱۰- میزان خطای بردار موقعیت نسبی ماهواره در مقایسه با شبیه‌سازی STK

برای بردار سرعت نسبی نیز، اختلاف اندازه سرعت در راستاهای مختلف در شکل (۱۱) ارائه شده است. اندازه خطا برای بردار سرعت نسبی در راستای  $Y$  و  $Z$  بسیار کوچک و از مرتبه  $10^{-5}$  کیلومتر بر ثانیه است. خطای سرعت نسبی ماهواره در راستای  $X$  نیز در بازه  $\pm 0.007$  کیلومتر بر ثانیه، تغییرات دارد. البته یادآوری می‌شود که بردار سرعت در راستای  $X$ ، تنها مؤلفه‌ای است که تحت اثر ضریب  $D$  قرار دارد.



شکل ۱۱- میزان خطای بردار سرعت نسبی ماهواره در مقایسه با شبیه‌سازی STK



شکل ۹- تغییرات سرعت نسبی در بازه زمانی ۱۲ ساعته و در شرایط  $D \neq 0$

## تحلیل خطا

با توجه به فرضیات استفاده شده در مسئله و تعریف پارامترهای مداری مختص مدار زمین‌آهنگ، دقت مدل‌سازی انجام شده بررسی شود. در این تحقیق، شش پارامتر مداری، که برای کنترل موقعیت ماهواره‌های زمین‌آهنگ مورد استفاده قرار می‌گیرد، با فرض نزدیک بودن دو ماهواره پیشرو و تعقیب‌گر و همچنین شبه دایروی بودن مدار نسبی، مختصات موقعیت و سرعت نسبی را در دستگاه افقی محلی متصل به ماهواره پیشرو مشخص می‌سازد. برای تحلیل خطا، نتایج به دست آمده از این مدل‌سازی با مدل شبیه‌سازی نرم‌افزار STK مقایسه شده است. برای این منظور، دو ماهواره با مشخصات مداری ارائه شده در جدول شماره (۲)، یک پرواز آرایش مند را با در نظر گرفتن اثر شتاب جاذبه  $J_2$  شکل داده و موقعیت و سرعت نسبی آن‌ها نتایج حاصل از روش ارائه شده در این مقاله، مقایسه شده است. شبیه‌سازی خطا برای مدت زمان ۶ ساعت از شکل‌گیری آرایش پرواز، انجام شده است.

جدول ۲- مشخصات مداری ماهواره‌ها برای شبیه‌سازی در نرم‌افزار STK

مدار ماهواره پیشرو	تغییرات مدار ماهواره تعقیب‌گر
$a = 6298.14 \text{ Km}$	$\delta a = 100 \text{ m}$
$e = 0.0005$	$\delta e = 0.0002$
$i = 1 \text{ deg}$	$\delta i = 0.1 \text{ deg}$
$\omega = 30 \text{ deg}$	$\delta \omega = 0$
$\Omega = 30 \text{ deg}$	$\delta \Omega = 0$
$M = 0 \text{ deg}$	$\delta M = 0$

برای مقایسه خطا برای موقعیت نسبی، از شکل کامل معادلات که در آن ضریب  $D$ ، غیر صفر است، استفاده شده است. البته برای

پرواز با استفاده از این پارامترهای مداری برای تحقیقات بعدی، پیشنهاد می‌شود.

## مراجع

- [1] Hill, G.W., "Researches in the Lunar Theory," *American Journal of Mathematics*, Vol. 1, No. 1, 1878, pp. 5-26.
- [2] Clohessy, W.H. and Wiltshire, R.S. "Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous," *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 27, No.9, 1960, pp. 653-658.
- [3] Tschauner, J. and Hempel, P., "Optimale Beschleunigungsprogramme Für Das Rendezvous-Manöver", *Journal of AstronauticaActa*, Vol. 10, No.296, 1964, pp. 339-343,
- [4] Carter, T. E. and Humi, M., "Fuel-Optimal Rendezvous Near a Point in General Keplerian Orbit," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 6, Nov.-Dec. 1987, pp. 567-573.
- [5] Carter, T. E., "New Form for the Optimal Rendezvous Equations Near a Keplerian Orbit," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 1, 1990, pp. 183-186.
- [6] Melton, R. G., "Time-Explicit Representation of Relative Motion Between Elliptical Orbits," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No.4, 2000, pp. 604-610.
- [7] Inalhan, G. and How, J., "Relative Dynamics and Control of Spacecraft Formations in Elliptic Orbits," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No.1, 2002, pp. 48-59.
- [8] Gurfil, P., Idan, M. and Kasdin, N.J., "Neural Adaptive Control for Deep-Space Formation Flying," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No.3, 2003, pp. 491-501.
- [9] Gurfil, P., "Relative Motion Between Elliptic Orbits: Generalized Boundedness Conditions and Optimal Formation Keeping," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No.4, 2005, pp. 761-767.
- [10] Vallado, D.A., "Fundamentals of Astrodynamics and Applications," 2<sup>nd</sup> Edition, Microcosm Press, Segundo, CA, 2002.
- [11] Gim, D. and Alfriend, K. "The State Transition Matrix of Relative Motion for the Perturbed Non-Circular Reference Orbit," *Proceedings of the AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Santa Barbara, CA, 2001.
- [12] Schaub, H., and Alfriend, K.T., "J2 Invariant Relative Orbits for Spacecraft Formations," *Journal of Celestial Mechanics and Dynamical Astronom*, Vol.79, Issue 2, 2001, pp. 77-95.
- [13] Scheeres, D. J., Hsiao, f. Y. and Vinh, N., "Stabilizing Motion Relative to an Unstable Orbit: Applications to Spacecraft Formation Flight," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 1, 2003, pp. 62-73.
- [14] Koon, W.S., Marsden, J.E. and Murray, R.M. "J2 Dynamics and Formation Flight," *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Montreal, Quebec, 2001.
- [15] Schweighart, S.A. and Sedwick, R.J., "High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight",

شایان ذکر است که مدل شبیه‌سازی شده در STK یک مدل با دقت بالا و با استفاده از نتایج پروازی یک آرایش ماهواره عملیاتی بوده که در آن شتاب جاذبه زمین بیضوی و اثرات اتمسفر نیز در نظر گرفته شده‌است. بدین ترتیب مشخص است که میزان خطا در طول زمان، روند افزایشی خواهد داشت. با توجه به اینکه روش تحلیلی ارائه شده، یک حل حلقه بسته بر پایه معادلات خطی شده هیل (HCW) است، از مقایسه نتایج به دست آمده با مدل غیرخطی STK که تمامی اغتشاشات در آن در نظر گرفته شده‌است، تصویر روشنی از محدوده مناسب برای استفاده از معادلات ترسیم می‌شود. در بسیاری از منابع مشخص شده‌است که معادلات هیل برای مانورهای با مدت زمان محدود، دقت مناسبی دارد و برای مطالعه رفتار آرایش پرواز در بلندمدت، باید از معادلات غیرخطی استفاده کرد [۴-۱]، [۱۷ و ۱۴، ۱۲، ۱۰]. در هر صورت، با توجه به تحلیل‌های انجام شده، برای مطالعه آرایش پرواز در چند روز اول شکل‌گیری و همچنین مدار نسبی با خروج از مرکز کوچک و زوایای شیب پایین، این معادلات دقت بسیار بالایی دارند. علت دقت قابل ملاحظه این روابط در زوایای شیب پایین، مدل‌سازی مسئله با استفاده از پارامترهای مداری مختص مدار زمین‌آهنگ است که در آن زوایای شیب نزدیک به صفر است. همچنین از این معادلات برای یافتن شرایط اولیه با دقت بالا برای تحلیل دینامیک مداری معادلات غیرخطی استفاده می‌شود.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، رابطه‌ای تحلیلی برای تعیین بردار موقعیت و سرعت نسبی دو ماهواره پیشرو و تعقیب‌گر در یک آرایش پرواز با استفاده از پارامترهای مداری مختص مدار زمین‌آهنگ ارائه شده‌است. این روابط برای دستگاه مختصات محلی افقی تعریف شده‌است که متصل به ماهواره پیشرو است. این روابط برای مدارهای نزدیک به دایروی و حالتی که فاصله دو ماهواره از یکدیگر زیاد نیست، با تقریب بسیار خوبی صادق است.

پس از مدل‌سازی دینامیک مسئله و مطالعه ترم‌های مختلف روابط نمایانگر موقعیت و سرعت نسبی، ترم نسبت اختلاف سرعت زاویه‌ای مدارهای دو ماهواره به نیم‌قطر اصلی، نقش مهمی در برقراری یک آرایش پرواز با ماندگاری بالا ایفا می‌کند. اگر سرعت زاویه‌ای دو ماهواره اختلاف کمی با یکدیگر داشته باشند، این ترم بسیار کوچک می‌شود و آرایش پرواز ایجاد شده پایدار است. البته با دو فرض نزدیک به دایروی بودن مدارها و نزدیکی نسبی ماهواره‌ها به هم، عملاً این ترم قابل صرف‌نظر کردن است. با توجه به مدل‌سازی این مسئله، طراحی کنترلر برای مانورهای مختلف آرایش

- Motion Orbits”, *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, AAS Paper 02-143, 2002.
- [20] Vaddi, S. S., Alfriend, K. T., Vadali, S. R. and Sengupta, P., “Formation Establishment and Reconfiguration Using Impulsive Control,” *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 28, No. 2, 2005, pp. 262-268.
- [21] Vadali, S. R., Vaddi, S. S. and Alfriend, K. T., “A New Concept for Controlling Formation Flying Satellite Constellations,” *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, AAS Paper 01-218, 2001.
- [22] Vadali, S. R., Vaddi, S. S., Naik, K. S. and Alfriend, K. T. “Control of Satellite Formations,” *AIAA Paper 2001-4028*, 2001.
- [23] Mattias Soop, E. *Handbook of Geostationary Orbits*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 6, 2002, pp. 1073–1080.
- [16] Ross, I.M. “Linearized Dynamic Equations for Spacecraft Subject to  $J_2$  Perturbations,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 4, 2003, pp. 657–659.
- [17] Mishne, D., “Formation Control of LEO Satellites Subject to Drag Variations and  $J_2$  Perturbations,” *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Monterey, California 5-8, August, 2002.
- [18] Alfriend, K.T., Schaub, H. and Gim, D.W., “Gravitational Perturbations, Nonlinearity and Circular Orbit Assumption Effects on Formation Flying Control Strategies,” *23<sup>rd</sup> Annual AAS Guidance and Control Conference*, AAS Paper 00-012, 2000.
- [19] Alfriend, K.T. D.W. Gim and S.R. Vadali, “The Characterization of Formation Flying Satellite Relative