Vol. 7/ No. 4/ 2014

JSST
Journal of Space Science & Technology

Attitude Control of Spacecraft by State Dependent Riccati Equation and Power Series Expansion of Riccati Methods

M. Navabi[1*], M. Tavana[2] and H. Mirzaei[3]

1- 3. Department of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University

*Postal Code: 1983963113, Tehran, Iran.

m_navabi@sbu.ir

Attitude control of spacecraft in order to nonlinear and high order dynamics is fundamental and challenging issue. With respect to these nonlinearities, linear control theories are not suitable choices and spacecraft may be unstable or lose performance. In this paper, State Dependent Riccati Equation (SDRE) method is utilized to 3-axis stabilization using four reaction wheels. State dependent Riccati equation method is systematic approach for optimal control of nonlinear systems which satisfies constraints of systems. In order to solve time consuming problem of this method in practical systems, Theta-D method is used. Results demonstrate the effectiveness of Theta-D in compare with Riccati method.

Keywords: Nonlinear optimal control, Quadratic regulator, State dependent riccati equation, Theta-D, Hamiltonian

1. Assistant Professor (Corresponding Author)
2. M. Sc.
3. M. Sc.

Recived: 2013.05.02 , Accepted: 2014.12.20

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۷ / شمارهٔ ۴/ زمستان ۱۳۹۳
ص. ص. ۴۹- ۳۹

کنترل وضعیت فضاپیما با استفاده از روش کنترل بهینهٔ غیرخطی ریکاتی وابسته به حالت و بسط سری توانی ریکاتی

محمد نوابی[۱*]، مینا توانا[۲] و حمیدرضا میرزایی[۳]

۱- ۳- دانشکدهٔ مهندسی فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی

* تهران، کد پستی: ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳

m_navabi@sbu.ac.ir

کنترل وضعیت فضاپیما با وجود معادلات فوق غیرخطی و مرتبهٔ بالا که نیازمند دقت و حساسیت بالایی در حل است، از جمله مسائل بسیار مهم و پیچیده در عصر حاضر است. از این‌رو روش‌های خطی با خطی‌سازی‌های بزرگ در حل سیستم‌های غیرخطی پیچیده، کاهش دقت و گاهی ناپایداری را به همراه خواهد داشت، که برای کنترل وضعیت فضاپیما با زوایای بزرگ و مانور مناسب نخواهدبود. در این مقاله، به‌منظور پایداری سه‌محوری فضاپیما با چهار چرخ عکس‌العملی از روش ریکاتی وابسته به حالت، بهره گرفته شده است. روش ریکاتی وابسته به حالت روشی سیستماتیک برای اعمال به سیستم‌های غیرخطی است که ضمن ارضای قیود حاکم بر سیستم، حل حلقه بسته بهینه‌ای را برای سیستم ارائه می‌دهد. اما زمان‌بر بودن این روش در مسائل آنلاین مشکل ساز خواهدشد، بنابراین، روش Thteta-D با بسط سری توانی معادلهٔ ریکاتی برای حل این مشکل ارائه می‌شود. براساس نتایج شبیه‌سازی روش Thteta-D با تفاوت اندکی از روش ریکاتی، نتایج مطلوب‌تری را ارائه خواهد داد.

واژه‌های کلیدی: کنترل غیرخطی بهینه، تنظیم‌کنندهٔ مربعی، معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت، تتا- دی، همیلتونین، حل پایدار خنثی

علائم و اختصارات

ماتریس‌های فضای حالت	A, B
پارامتر طراحی	a
بردار مومنتوم زاویه‌ای فضاپیما	h_B
مؤلفه‌های مومنتوم زاویه‌ای فضاپیما	h_{Bx}, h_{By}, h_{Bz}
مومنتوم زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی	h_{RWA}
ماتریس ممان اینرسی چرخ‌ها	I_ω
تابع هزینه	J
ممان اینرسی ماهواره	j
پارامتر طراحی	k
ماتریس‌های وزنی	Q, R
گشتاور اعمالی در دستگاه بدنی	T_{rwa}
مؤلفه‌های بردار گشتاور کنترلی	T_x, T_y, T_z
قانون کنترلی	u
بردار حالت‌های سیستم	x
ضریب خطا	ε
بسط سری توانی	λ
زوایای اولر	ψ, θ, ϕ
بردار سرعت زاویه‌ای فضاپیما در دستگاه بدنی	ω_B

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)
۲. کارشناس ارشد
۳. کارشناس ارشد

دریافت مقاله: ۹۲/۰۲/۱۲، تأیید مقاله: ۹۳/۰۹/۲۹

مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنی ω_x , ω_y , ω_z

مقدمه

یکی از مهم‌ترین مسائل در طراحی فضاپیما پایداری و کنترل وضعیت آن است. چنانکه نیازمندی‌های مأموریت فضاپیما گسترده و متغیر باشد، کنترل وضعیت فضاپیما نیز گسترده‌تر و پیچیده‌تر خواهدبود. کنترل فضاپیما معمولاً مترادف با کنترل وضعیت فضاپیماست، به عبارت دیگر نظم مهندسی، حفظ یک ماهواره در یک جهت صحیح است. زیرسیستم کنترل وضعیت فضاپیما یکی از مهم‌ترین زیرسیستم‌های فضاپیماست، به‌طوری‌که موفقیت‌آمیز بودن برخی مأموریت‌های فضاپیما بدون یک سیستم کنترل وضعیت مناسب امکان‌پذیر نخواهدبود. هدف این زیرسیستم، کنترل وضعیت فضاپیما براساس محاسبهٔ وضعیت زاویه‌ای ماهواره با استفاده از اندازه‌گیری دریافتی از حسگرهاست. از یک دیدگاه می‌توان پایداری و کنترل وضعیت ماهواره را به دو نوع تقسیم کرد، در روش‌های غیرفعال از مشخصات ذاتی ماهواره و شرایط محیطی برای قرار دادن آن در وضعیت خاص استفاده می‌شود. متقابلاً در روش‌های فعال با اعمال عکس‌العمل‌های متناسب به اختلالات وارد بر ماهواره، وضعیت آن در جهت دلخواه قرار داده می‌شود. این کار توسط عملگرها انجام می‌شود که عملگر منتخب در این مقاله چرخ‌های عکس‌العملی است.

برای کنترل ماهواره لازم است که در هر لحظه گشتاور مشخصی را به آن اعمال نماییم تا در طول زمان در وضعیت دلخواه قرار گیرد. مدل ریاضی که معمولاً برای کنترل وضعیت فضاپیما ارائه می‌شود، مدل فوق غیرخطی و مرتبهٔ بالاست. اگرچه مدل خطی از وضعیت فضاپیما می‌تواند در زوایای کوچک، الگوی مناسبی برای حل باشد، اما همین الگو در مسائلی با زوایای بزرگ یا همراه با مانور می‌تواند به خطاهای غیرقابل چشم‌پوشی منجر شود که سبب ناپایداری فضاپیما می‌شود.

از آنجا که تنظیم‌کنندهٔ مربعی‌خطی روشی شناخته و پایدار است، از این رو بسط روش تنظیم‌کنندهٔ مربعی خطی برای کنترل سیستم‌های غیرخطی مرتبهٔ بالا از جمله کنترل وضعیت فضاپیما، امری مؤثر و کارآمد خواهد بود.

دیدگاه‌های متعددی برای طراحی کنترل سیستم‌های غیرخطی در طی سال‌های اخیر معرفی شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. اکثر روش‌های کنترل غیرخطی معرفی شده برای حل مسئله همراه با محدودیت‌هایی بوده‌اند. چرا که گاهی با سیستم‌های غیرخطی روبه‌رو می‌شویم که با قیودی روی کنترل یا حالت سیستم همراه هستند یا به‌طور کلی سیستم غیرخطی ناپایدار است، در این‌صورت روش‌های غیرخطی معرفی شده در پاسخگویی ناتوان خواهند بود. به طور مثال در سیستم کنترل وضعیت ماهوارهٔ مورد نظر، میزان گشتاور کنترلی حاصل از چرخ‌های عکس‌العملی را می‌توان از قیود حاکم بر مسئله دانست. از این رو ارائهٔ یک روش سیستماتیک برای سیستم‌های غیرخطی پیچیده که بتواند ضمن ارضای قیود حاکم بر آن حل بهینهٔ حلقه بسته‌ای را برای سیستم ارائه دهد از جمله مباحث چالش‌برانگیز مهندسان بوده است [۱].

روش ریکاتی وابسته به حالت یک استراتژی شناخته شده و بسیار کاربردی در دهه‌های اخیر در زمینهٔ کنترلی به‌ویژه کنترل وضعیت فضاپیما به شمار می‌آید. در حقیقت این روش با ایجاد یک الگوریتم مؤثر برای کنترل‌های فیدبک غیرخطی ترکیبی، با وجود عوامل غیرخطی وابسته به حالت در حالی‌که یک طراحی منعطفی را برای سیستم در طی ماتریس‌های وزن‌دهی حالت ارائه می‌دهد، شرایط بهینه‌ای را در حل فراهم آورده است. در حقیقت بر اساس این وزن‌دهی می‌توان توازنی میان تلاش کنترلی و دقت حالت‌های سیستم و زمان همگرایی ایجاد کرد. برای مثال گاهی در حالت‌هایی از پرواز هستیم که نیاز است با سرعت به شرایط پایدار برسیم و در همان وضعیت باقی بمانیم به عبارتی میزان انحراف از وضعیت تعادل را در یک مقدار حداقل حفظ نماییم، مثلاً در یک ماهواره با مأموریت تصویربرداری این شرایط در حات تصویربرداری با دقت بالا صورت خواهد گرفت.

روش ریکاتی وابسته به حالت، اخیراً بسیار مورد توجه است و در زمینه‌های بسیاری استفاده می‌شود. بر اساس این تئوری، هر سیستم غیرخطی می‌تواند به شکلی پارامترسازی شود که ساختاری مشابه با ساختار یک سیستم خطی در فضای حالت داشته باشد [۲]. در روش ریکاتی وابسته به حالت، لازم است که معادلهٔ ریکاتی وابسته به حالت در هر بازه یا گام زمانی حل شود، بنابراین، حجم محاسبات در مسائل پیچیده بسیار بالا بوده و غیرقابل چشم‌پوشی است.
ورنیلی[4] و کوک[5] در سال ۱۹۷۵، به‌منظور برطرف کردن مشکل موجود در روش ریکاتی وابسته به حالت، از بسط سری توانی معادلهٔ ریکاتی برای سهولت در حل استفاده کردند. این مسئله از طریق معرفی یک متغیر میانی[6]، θ، صورت گرفت. بر اساس این متغیر میانی تابع هزینهٔ بهینهٔ سیستم یک سری توانی از θ بسط داده خواهد شد. در این صورت معادلهٔ همیلتونین- جاکوبی- بلمن که از بیان بهینهٔ مسئلهٔ غیرخطی ناشی می‌شود، به یک سری از معادلات جبری بازگشتی تقلیل خواهد یافت که با اضافه‌کردن اغتشاش به تابع هزینه و دست‌کاری این ترم‌ها به صورت مناسب، دست‌یابی به

4. Wernli
5. Cook
6. Intermediate variable

پایداری مجانبی نیمه‌کلی و غلبه بر مسئله با شرایط اولیهٔ بزرگ ممکن خواهدشد. در حقیقت این روش، به معرفی یک کنترل‌کنندهٔ غیرخطی مادون بهینه براساس حل تقریبی معادلهٔ همیلتونین– جاکوبی– بلمن می‌پردازد. برای کسب اطمینان از عملی‌بودن و توانایی روش‌های غیرخطی مورد نظر، از آن‌ها در جهت کنترل وضعیت فضاپیما بهره برده شده است [۳].

ماهوارهٔ بررسی‌شده، با چرخ‌های عکس‌العملی کنترل می‌شود که در یک پیکر هرمی شکل قرار گرفته‌اند. چهار چرخ عکس‌العملی به نحوی در این پیکر قرار گرفته‌اند که با محورهای بدنی زاویهٔ مشخصی را تشکیل می‌دهند. چرخ چهارم در زاویهٔ خاصی از سه محور دستگاه بدنی قرار گرفته است تا بتواند در راستای هر سه محور در صورت خرابی هر یک از سه چرخ قرار گرفته رو سه محور دستگاه بدنی، گشتاور کنترلی ایجاد کند. در مسئلهٔ بررسی‌شده دو چرخ عکس‌العملی خراب در نظر گرفته شده است و توانایی این چیدمان در ایجاد پایداری سه محوری با دو چرخ عکس‌العملی باقیمانده نشان داده خواهد شد.

از آنجاکه چرخ‌های عکس‌العملی همگی در یک شکل مورب به‌طوری‌که بردار رقص– محوری دو چرخ باقیمانده قرارگرفته در فضاپیما، با محورهای بدنی فضاپیما متعامد نباشند، قرار گرفته‌اند، می‌توانند بعضی شرایط کنترل یا پایداری سه محوری را فراهم کنند.

تعریف مسئله و معادلات حاکم بر سیستم

کنترل ایجادشده با چرخ‌های عکس‌العملی به‌علت چیدمان خاص چرخ‌ها بهترین و بیشترین بازده کنترلی را به ارمغان خواهد آورد. به علت خرابی دو چرخ ۱ و ۲، گشتاورهای اعمالی در دستگاه بدنی به‌صورت رابطهٔ (۱) محاسبه خواهد شد [۴].

$$T_{rwa} = [C_{rw\,2b}][0 \;\; 0 \;\; T_{rwa} \;\; T_{rwa}]^T \qquad (۱)$$

شایان توجه است، T_{rwa} که نمایانگر گشتاور اعمالی در دستگاه بدنی است با وجود دو چرخ از دست رفته، هنوز به‌صورت کامل المان غیرصفر دارد، به عبارت دیگر در راستای سه محور دستگاه بدنی گشتاور کنترلی وجود دارد. با استفاده از معادلهٔ (۱) با دو چرخ اجرایی ۳ و ۴، گشتاورهای کنترلی در دستگاه بدنی به صورت معادلهٔ (۲) بیان خواهد شد:

$$T_{rwa} = \begin{bmatrix} 0.67(T_{rw\,3} + T_{rw\,4}) \\ 0.53(T_{rw\,3} + T_{rw\,4}) \\ 0.53(-T_{rw\,3} + T_{rw\,4}) \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

در طول اجرای دو چرخ ۳ و ۴ در یک زمان مشخص، چرخ‌ها گشتاورهای برابری تولید نمی‌کنند. همان‌طور که در معادلهٔ (۲) مشاهده می‌شود، المان گشتاور صفری در دستگاه بدنی وجود ندارد، بنابراین، قادر است شرایط پایدار و کنترل‌پذیری را در راستای سه محور دستگاه بدنی فراهم آورد.

سینماتیک و دینامیک وضعیت غیرخطی فضاپیما در معادلات (۳) نشان داده شده است [۵]:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= [\omega_{by} \sin\phi + \omega_{bz} \cos\phi]\sec\theta \\ \dot{\theta} &= \omega_{by} \cos\phi - \omega_{bz} \sin\phi \\ \dot{\phi} &= \omega_{bx} + [\omega_{by} \sin\phi + \omega_{bz} \cos\phi]\tan\theta \end{aligned} \qquad (۳)$$

به‌طوری‌که $[\psi \;\; \theta \;\; \phi]^T$ زوایای اولر بوده و ترتیب چرخش ۳–۲–۱ برای مسئله درنظر گرفته شده‌است. دینامیک سیستم به‌صورت رابطهٔ (۴) نوشته می‌شود:

$$I_{SC}\,.\dot{\omega}_B = -\omega_B \times h_B - \omega_B \times h_{RWA} + T_{rwa} \qquad (۴)$$

به‌طوری‌که در رابطهٔ فوق I_{SC} ممان اینرسی فضاپیما و $\omega_B = [\omega_x \;\; \omega_y \;\; \omega_z]^T$ سرعت زاویه‌ای فضاپیما و $h_B = [h_{Bx} \;\; h_{By} \;\; h_{Bz}]^T$ و $h_{RWA} = [h_{RWAx} \;\; h_{RWAy} \;\; h_{RWAz}]^T$ به ترتیب مومنتوم زاویه‌ای فضاپیما و چرخ‌های عکس‌العملی هستند. شکل ماتریسی $\omega_B \times$ و $h_{RWA} \times$ در روابط فوق به ترتیب به صورت روابط (۵) و (۶) تعریف می‌شوند:

$$\omega_B \times \underline{\underline{\Delta}} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

$$\mathrm{h_{RWA}} \times \underline{\underline{\Delta}} \begin{bmatrix} 0 & -h_{RWAz} & h_{RWAy} \\ h_{RWAz} & 0 & -h_{RWAx} \\ -h_{RWAy} & h_{RWAx} & 0 \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

در این صورت دینامیک وضعیت فضاپیما می‌تواند در یک ساختار شبه خطی به صورت رابطهٔ (۷) بازنویسی شود [۵]:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_B &= I_{SC}^{-1}(-\tilde{\omega}_B h_B + \omega_B \tilde{h}_{RWA}) + I_{SC}^{-1} T_{rwa} = \\ & I_{SC}^{-1}(-\tilde{\omega}_B I_{SC} + \tilde{h}_{RWA})\omega_B + I_{SC}^{-1} T_{rwa} \end{aligned} \qquad (۷)$$

یک کنترل‌کنندهٔ پایدارکننده برای سیستم فوق می‌تواند به هدف حداقل کردن تابع هزینهٔ مربعی (۱۶) طراحی شود:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u)dt \qquad (۱۶)$$

به‌طوری‌که $B \in R^{n\times m}$، $f \in R^n$، $x \in R^n$، $Q \in R^{n\times n}$، $u \in R^m$، $R \in R^{m\times m}$ و $f(0) = 0$ برقرار باشد و ماتریس Q مثبت نیمه معین بوده و R معین مثبت است. فرضی که وجود دارد این است که $x \in \Omega_x$، که در آن Ω_x یک ناحیهٔ مشخص در R^n است که برای این تکنیک مورد نیاز است. فرض می‌شود که حل موجود برای مسئلهٔ

کنترل بهینه در معادلات بیان شدهٔ فوق وجود داشته و واحد باشد. حل بهینهٔ مسئلهٔ تنظیم‌کنندهٔ غیرخطی در فضای بی‌نهایت می‌تواند توسط معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همیلتونین- جاکوبی- بلمن (۱۷) صورت گیرد:

$$\frac{\partial V^T}{\partial x} f(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial V^T}{\partial x} B(x) R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} x^T Q x = 0 \qquad (۱۷)$$

به طوری‌که V(x) تابع هزینه است:

$$V(x) = \min_u \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \qquad (۱۸)$$

و شرایط $V(x) > 0$ و $V(0) = 0$ بر آن حاکم باشد. فرض می‌شود که $v(x)$ به صورت متوالی مشتق‌پذیر باشد. بنابراین، کنترل بهینه برای سیستم فوق به صورت (۱۹) مشخص می‌شود:

$$u = -R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} = -R^{-1} B^T(x) \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\theta)\theta^i x \qquad (۱۹)$$

معادلهٔ همیلتونین- جاکوبی- بلمن برای حل‌کردن بسیار دشوار است. به‌منظور گسترش یک حل تقریبی برای این مسئله، اغتشاشات به تابع هزینه اضافه می‌شوند، که در این صورت تابع هزینه به صورت رابطهٔ (۲۰) تغییر شکل می‌یابد:

$$j = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left\{ x^T \left[Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] x + u^T R u \right\} dt \qquad (۲۰)$$

به طوری‌که θ^i و D_i به نحوی انتخاب می‌شوند که $Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i$ مثبت نیمه معین باشد و شرط بیان شده در رابطهٔ (۲۱) برقرار باشد:

$$\|Q\|_2 > \left\| \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right\|_2 \qquad (۲۱)$$

معادلهٔ حالت اصلی به یک فرم شبیه به ساختار خطی رابطهٔ (۲۲) بازنویسی می‌شود:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u = A(x)x + B(x)u = \left\{ A_0 + \theta\left[\frac{A(x)}{\theta}\right] \right\} x + \left\{ g_0 + \theta\left[\frac{g(x)}{\theta}\right] \right\} u \qquad (۲۲)$$

به‌طوری‌که A_0 یک ماتریس ثابت است و (A_0, g_0) یک جفت پایدار شونده باشند، در این صورت $[\{A_0 + A(x)\}, \{g_0 + g(x)\}]$ به صورت تکه‌ای کنترل‌پذیر است. θ یک متغیر میانی به منظور بسط سری توانی است. رابطهٔ (۲۳) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad (۲۳)$$

با جایگذاری معادلات (۲۳) در معادلهٔ اغتشاش‌یافتهٔ همیلتونین- جاکوبی- بلمن، این معادله به‌صورت رابطهٔ (۲۴) بازنویسی خواهدشد:

$$\lambda^T f(x) - \lambda^T B(x) R^{-1} B(x)\lambda + \frac{1}{2} x^T [Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i] x = 0 \qquad (۲۴)$$

بسط سری توانی λ، بر اساس θ به قرار رابطهٔ (۲۵)خواهد بود:

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} T_i \theta^i x \qquad (۲۵)$$

در رابطهٔ فوق T_i یک ماتریس متقارن است. با قراردادن معادلهٔ (۲۵) در معادلهٔ (۲۴) و برابر قراردادن ضرایب توان‌های θ با صفر، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$T_0 A_0 + A_0^T T_0 - T_0 g_0 R^{-1} g_0^T T_0 = 0 \qquad (۲۶)$$

$$\begin{aligned}
&T_1(A_0 - g_0 R^{-1} g_0^T T_0) + (A_0^T - T_0 g_0 R^{-1} g_0^T) T_1 = \frac{T_0 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_0}{\theta} + \\
&T_0 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_0 - D_1 \\
&T_2(A_0 - g_0 R^{-1} g_0^T T_0) + (A_0^T - T_0 g_0 R^{-1} g_0^T) T_2 = \frac{T_1 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_1}{\theta} + \\
&T_0 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_1 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_1 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + \\
&T_1 g_0 R^{-1} g_0^T T_1 + T_1 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + T_1 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_0 - D_2 \\
&T_n(A_0 - g_0 R^{-1} g_0^T T_0) + (A_0^T - T_0 g_0 R^{-1} g_0^T) T_n = \frac{T_{n-1} A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_{n-1}}{\theta} + \\
&\sum_{j=0}^{n-2} T_j \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_{n-2-j} + \sum_{j=0}^{n-1} T_j [g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} + \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T] T_{n-1-j} + \\
&\sum_{j=1}^{n-1} T_j g_0 R^{-1} g_0^T T_{n-j} - D_n
\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

توجه کنید که معادلهٔ (۲۶) شامل ماتریس ضرایب ثابت و یک معادلهٔ جبری ریکاتی است. مابقی معادلات (۲۷) توابع لیاپانوف بوده که از نظر T_i خطی هستند. از آن جا که سمت راست این معادلات شامل, x θ است، می‌توان نتیجه گرفت T_i تابعی از θ , x است، در این صورت T_i را می‌توان به شکل $T_i(x,\theta)$ بازنویسی کرد. کنترل برحسب سری توانی برابر (۲۸) است:

$$u = -R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} = -R^{-1} B^T(x) \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\theta)\theta^i x \qquad (۲۸)$$

الگوریتم بدون ترم D_i، تقریب θ [۷] نامیده می‌شود. یکی از مشکلات تقریب θ در این است که شرایط اولیهٔ بزرگ منجر به افزایش مقدار کنترل خواهد شد. به‌منظور برطرف کردن این مشکل، D_i به صورت روابط (۲۹) برای حل بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&D_1 = k_1 e^{a_1 t}[-\frac{T_0 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_0}{\theta} + T_0 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_0] \\
&D_2 = k_2 e^{a_2 t}[-\frac{T_1 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_1}{\theta} + T_0 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_1 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_1 \\
&+ T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + T_1 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + T_1 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_0 + T_1 g_0 R^{-1} g_0^T T_1] \\
&D_n = k_n e^{a_n t}\{-\frac{T_{n-1} A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_{n-1}}{\theta} + \sum_{j=0}^{n-1} T_j [g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} - \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T] T_{n-j-1} \\
&+ \sum_{j=0}^{n-2} T_j \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_{n-2-i} + \sum_{j=0}^{n-1} T_j g_0 R^{-1} g_0^T T_{n-J}\}
\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

7.Theta-approximate

به‌طوری‌که k_i و$a_i > 0$ برای $i=1,2...n$ پارامترهای قابل تنظیم طراحی هستند. ایدهٔ تشکیل D_i در این روش براساس مشاهده است، که حالت‌های اولیهٔ بزرگ ممکن است به علت ترم وابسته به حالت $A(x)$ در سمت راست معادلات، موجب افزایش کنترل شود. اگر x اولیه بزرگ باشد به مقادیر بسیار بزرگی رشد می‌کنند. برای مثال، زمانی‌که $A(x)$ شامل ترم‌های مربعی باشد ممکن است، در صورتی که x دارای مقدار اولیهٔ بزرگی باشد، مقدار بزرگی را اختیار کند. همان‌طورکه در سمت چپ معادلات (۲۷) مشاهده می‌شود، یک مقدار بزرگ در $A(x)$ کاملاً در حل T_i منعکس می‌شود [۹]. از آنجا که T_i در معادلهٔ بعدی برای محاسبهٔ T_{i+1} مورد استفاده قرار خواهد گرفت، این مقدار بزرگ، تکثیر و تقویت خواهدشد و متعاقباً منجر به ورودی کنترل بزرگ فرمان یا ناپایداری خواهدشد. بنابراین، اگر D_i به طوری انتخاب شود که:

$$\begin{aligned}&\frac{T_{i-1}A(x)}{\theta}\frac{A^T(x)T_{i-1}}{\theta}+\sum_{j=0}^{i-2}T_j\frac{g(x)}{\theta}R^{-1}\frac{g^T(x)}{\theta}T_{i-2-j}+\sum_{j=0}^{i-1}T_j[g_0R^{-1}\frac{g^T(x)}{\theta}\\&+\frac{g(x)}{\theta}R^{-1}g^T{}_0]T_{i-1-j}+\sum_{j=1}^{i-1}T_jg_0R^{-1}g^T{}_0T_{i-j}-D_n\\&=\varepsilon_i(t)\left\{\begin{aligned}&\frac{T_{i-1}A(x)}{\theta}\frac{A^T(x)T_{i-1}}{\theta}+\sum_{j=0}^{i-1}T_j[g_0R^{-1}\frac{g^T(x)}{\theta}+\frac{g(x)}{\theta}R^{-1}g^T{}_0]T_{i-1-j}+\\&\sum_{j=0}^{i-2}T_j\frac{g(x)}{\theta}R^{-1}\frac{g^T(x)}{\theta}T_{i-2-j}+\sum_{j=1}^{i-1}T_jg_0R^{-1}g^T{}_0T_{i-j}\end{aligned}\right\}\end{aligned}\qquad(۳۰)$$

به‌طوری‌که ε_i به‌منظور جلوگیری از رشد این مقدار بزرگ در معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور خلاصه، سه عملکرد برای ε_i وجود دارد. اولین کاربرد برای جلوگیری از مقادیر بزرگ در کنترل است، دومین کاربرد در ارضای بعضی شرایط مورد نیاز در اثبات همگرایی و پایداری در الگوریتم $\theta - D$، سومین کاربرد برای مدوله‌کردن عملکرد گذرا توسط تنظیم پارامترهای a_i, k_i است. در طرف دیگر، ترم نمایی $e^{-a_i t}$ با $a_i > 0$ برای امکان حضور ترم‌های اغتشاشی در تابع هزینه و تقلیل معادلهٔ همیلتونین- جاکوبی- بلمن، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مسئله حل مجانبی این معادله را تضمین خواهد کرد. گام‌های اجرایی در روش $\theta - D$ به طور خلاصه در زیر آورده شده است:

۱. حل معادلهٔ ریکاتی جبری برای یکبار جهت به دست آوردن T_0 که در آن g_0, R, Q, A_0 محاسبه می‌شوند. توجه کنید که نتیجهٔ T_0 یک ماتریس ثابت معین مثبت است.
۲. حل اولین معادلهٔ خطی لیاپانوف برای به‌دست‌آوردن $T_i(x,\theta)$ به عنوان یک حل بسته
۳. حل مابقی معادلات لیاپانوف خطی توسط دنبال‌کردن فرایند، مشابه گام ۲. تعداد T_i مورد نیاز وابسته به مسئله است.

تئوری زیر همگرایی بسط سری $\sum_{i=0}^{\infty}T_i(x,\theta)\theta^i$ را توسط انتخاب مناسب از ماتریس D_i نشان می‌دهد.

فرض کنید که شرایط زیر برقرار باشد:

- $x \in \Omega$ به‌طوری‌که $\Omega \subset R^n$ یک مجموعه فشرده[۸] است.
- $f(x)$ به‌صورتی تقسیم‌بندی می‌شود که (A_0, g) کنترل‌پذیر باشد.
- $A(x)$ در تمام ناحیه $x \in \Omega$ پیوسته باشد.
- D_i بر اساس معادلات (۲۹) انتخاب شود.

سپس مجموعه‌ای از ماتریس‌های اغتشاش D_i موجود خواهد بود که سری‌های $\sum_{i=0}^{\infty}T_i(x,\theta)\theta^i$ ایجاد شده توسط معادلهٔ (۲۶) و (۲۷) سری‌های تکه‌ای همگرایی خواهند بود.

مثال عددی و شبیه‌سازی

پایداری سه محوری، هدف کنترلی فضاپیمای مورد نظر است. در ابتدا، معادلات دینامیک سیستم فضاپیما در فضای حالت بیان خواهد شد، چرا که برای اعمال روش‌های بیان شده این مسئله ضروری است. فضای حالت برای مسئلهٔ کنترل وضعیت به صورت رابطهٔ (۳۱) تعریف می‌شود [۴]:

$$x=[\ \phi\ \ \theta\ \ \psi\ \int\phi\ \int\theta\ \int\psi\ \omega_x\ \ \omega_y\ \ \omega_z\ ]^T \qquad (۳۱)$$

و کنترل ورودی :

$$u=T_{rwa}=[T_x\ \ T_y\ \ T_z\ ]^T \qquad (۳۲)$$

سه حالت انتگرالی از زوایای اولر در تقسیم‌بندی حالت سیستم، به‌منظور تقویت و بهبود بازدهی یا راندمان تعقیب قرار گرفته‌اند. بیان فضای حالت سیستم دینامیک وضعیت می‌تواند در ساختار شبه خطی وابسته به حالت تتا- دی (۳۳) بیان شود:

$$\dot{x}=f(x)+Bu=F(x)x+Bu=\left[A_0+\theta\frac{A(x)}{\theta}\right]x+Bu \qquad (۳۳)$$

در نتیجه با پارامترسازی معادلات دینامیک سیستم که در معادلهٔ (۳۳) بیان شده بود و با توجه به معادلات (۳) و (۷) خواهیم داشت:

$$F(x)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&A_{17}&A_{18}&A_{19}\\0&0&0&0&0&0&0&A_{28}&A_{29}\\0&0&0&0&0&0&0&A_{38}&A_{39}\\A_{41}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&A_{52}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&A_{63}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&A_{77}&A_{78}&A_{79}\\0&0&0&0&0&0&A_{87}&A_{88}&A_{89}\\0&0&0&0&0&0&A_{97}&A_{98}&A_{99}\end{bmatrix} \qquad (۳۴)$$

8. Compact set

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{71} & B_{72} & B_{73} \\ B_{81} & B_{82} & B_{83} \\ B_{91} & B_{92} & B_{93} \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

به‌طوری‌که مؤلفه‌های ماتریس‌های B, $F(x)$ به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &A_{17} = 1; A_{18} = \sin(\phi)\tan(\theta); A_{19} = \cos(\phi)\tan(\theta); \\ &A_{28} = \cos(\phi); A_{29} = -\sin(\phi); A_{38} = \sin(\phi)\sec(\theta); \\ &A_{39} = \cos(\phi)\sec(\theta); A_{41} = 1; A_{52} = 1; A_{63} = 1; \end{aligned} \quad (۳۶)$$

$$\begin{bmatrix} A_{77} & A_{78} & A_{79} \\ A_{87} & A_{88} & A_{89} \\ A_{97} & A_{98} & A_{99} \end{bmatrix} = I_{SC}^{-1}(-\tilde{\omega}_B I_{SC} + \tilde{h}_{RWA}) \quad (۳۷)$$

$$\begin{bmatrix} B_{71} & B_{72} & B_{73} \\ B_{81} & B_{82} & B_{83} \\ B_{91} & B_{92} & B_{93} \end{bmatrix} = I_{SC}^{-1} \quad (۳۸)$$

تابع هزینه به صورت تابع مربعی معادلهٔ (۳۹) انتخاب می‌شود:

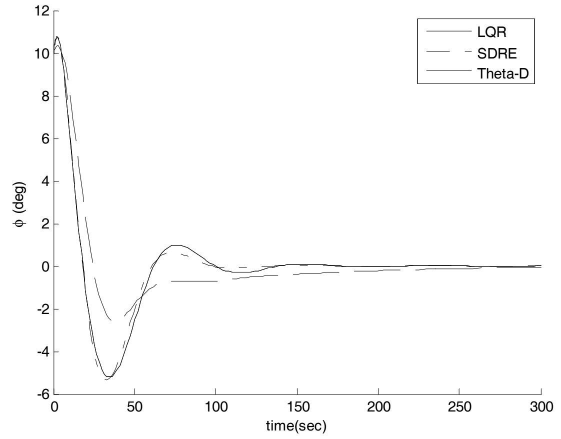
$$J = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}[x^T Q x + u^T R u]dt \quad (۳۹)$$

ماتریس ضرایب کنترل و حالت به ترتیب $R = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ و $Q = 0.05[10 \;\; 10 \;\; 10 \;\; 10 \;\; 10 \;\; 10 \;\; 0]^T$ در نظر گرفته شده‌اند و مقادیر اولیه سرعت زاویه‌ای و زوایای اولر به صورت روابط (۴۰) و (۴۱) فرض خواهند شد.

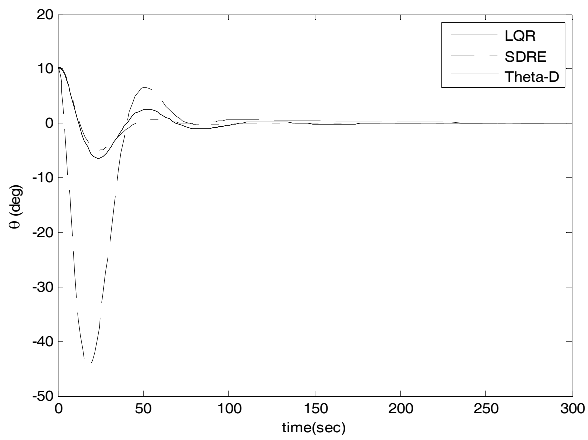
$$\omega = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix} .... \quad (۴۰)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^\circ \\ 10^\circ \\ 10^\circ \end{bmatrix} .... \quad (۴۱)$$

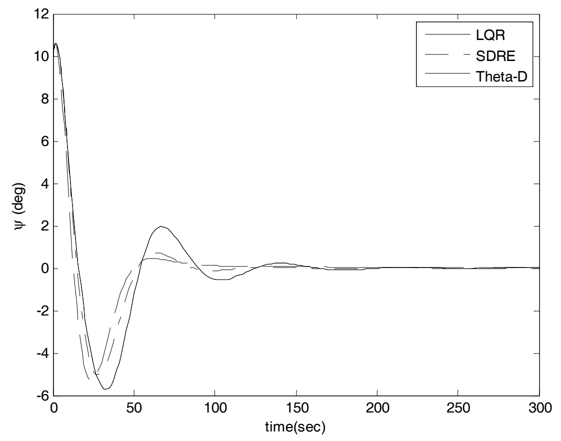
ممان اینرسی همهٔ چرخ‌ها $I_\omega = 0.01$ و ممان اینرسی ماهواره به‌صورت $j = diag[(80 \quad 40 \quad 60)]$ درنظر گرفته شده است. در این صورت نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی به صورت شکل‌های (۱) تا (۹) ارائه خواهد شد. در نهایت برای درک بهتر از روش‌های اعمالی و مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از هر سه روش کنترلی، نتایج هر پارامتر را در یک نمودار آورده‌ایم تا بر این اساس تفاوت عملکرد روش‌ها با دقت بهتری مشاهده شود. همان‌طورکه در نمودارهای (۱) تا (۳) نشان داده شده است، رفتار زاویای اولر بر اساس هر سه روش کنترلی وضعیت پایداری را در نهایت خواهند یافت.



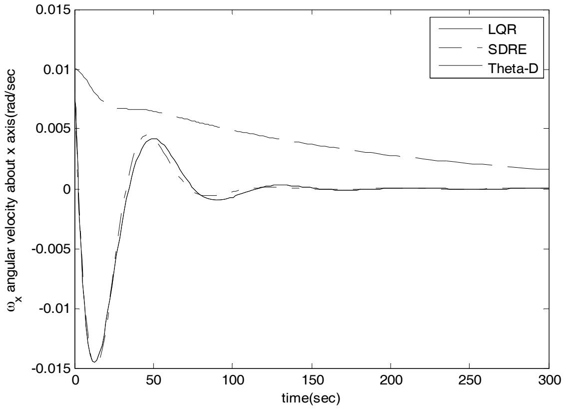
شکل ۱- رفتار زاویهٔ φ براساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D



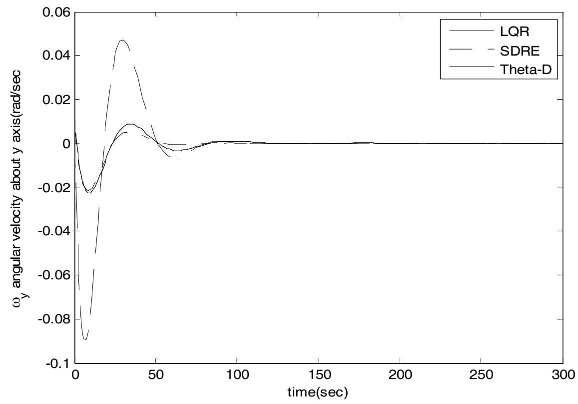
شکل ۲- رفتار زاویهٔ θ بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D



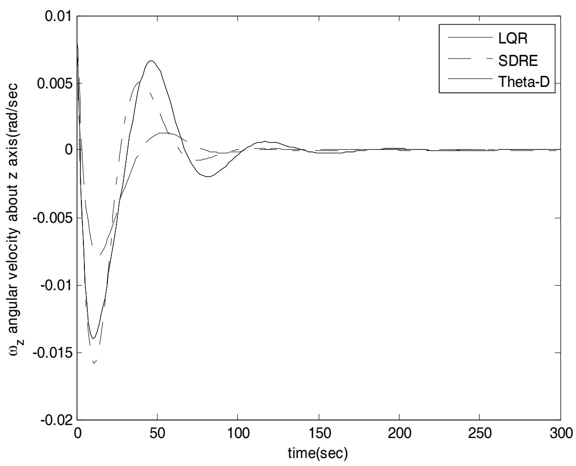
شکل ۳- رفتار زاویهٔ ψ بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D



شکل ۴– سرعت زاویه‌ای ω_x بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D



شکل ۵– سرعت زاویه‌ای ω_y بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

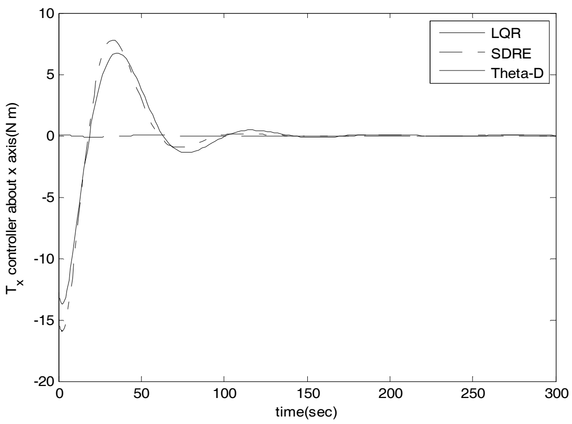


شکل ۶– سرعت زاویه‌ای ω_z بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

البته در روش تنظیم‌کنندهٔ مربعی خطی، نمودار تقریباً فراجهش اولیهٔ بزرگی نسبت به روش‌هـای غیـرخطی دارد، که این فراجهش در زاویهٔ θ به اوج خود رسیده است. اگرچه به سرعت به مقدار ثابت صفر همگرا شده است، این تغییرات ناگهانی در زوایای اولر مطلوب نیست.

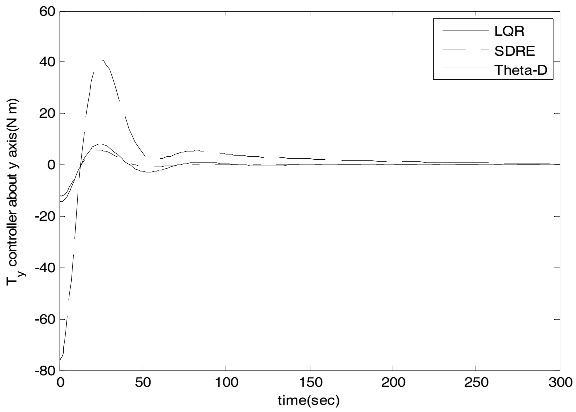
شکل‌های (۴) تا (۶) نشان‌دهندهٔ رفتار سرعت زاویه‌ای فضاپیما بر اساس هر سه روش کنترلی مورد نظر نشان داده شده است.

از نمودارهای فوق می‌توان مشاهده کرد؛ در هر سه روش کنترلی، سرعت زاویه‌ای فضاپیما به شرایط پایدار صفر همگرا شده و شرایط پایداری را فراهم خواهند کرد. رفتار سرعت زاویه‌ای فضاپیما براساس دو روش SDRE و Theta-D بسیار نزدیک به هم هستند. همان‌طورکه از شکل‌های (۷) تا (۹) مشاهده می‌شود، گشتاور کنترلی بر اساس هر سه روش معرفی شده به سمت صفر همگرا شده و شرایط پایداری را در جهت کنترل وضعیت فضاپیما فراهم آورده‌اند. از نتایج پیداست که روش‌های بهینهٔ به‌کار برده شده سبب تولید قوانین کنترلی هموار شده‌اند که تعقیب این فرامین توسط عملگرها ممکن خواهد بود. در ادامه، از روش کنترلی PID بهینه و ریکاتی خطی نیز برای کنترل وضعیت فضاپیما استفاده شده و از نظر اندازه و نوسانی‌بودن قوانین کنترلی تولیدی و سرعت همگرایی، حالت‌های سیستم به ورودی مرجع با روش‌های بهینهٔ به‌کاربرده شده مقایسه شده است.

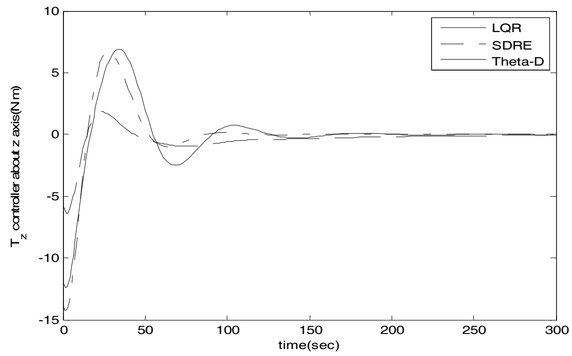


شکل ۷– گشتاور T_x براساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

در حقیقت میزان تلاش کنترلی تولیدشده همان میزان گشتاور تولیدی با دو چرخ‌های عکس‌العملی باقیمانده در فضاپیماست، که مسلماً با محدودیت‌هایی همراه است. از این رو تلاش کنترلی پارامتری حساس و قابل توجه در انتخاب روش کنترلی مورد نظر است. تلاش کنترلی در هر دو روش غیرخطی ریکاتی وابسته به حالت و تتا– دی تقریباً نزدیک به هم هستند و دامنه‌های یکسانی دارند. میزان دامنه و تلاش کنترلی در دو روش غیرخطی نامبرده معقول و قابل اجراست که این امر عملی و کاربردی بودن این دو روش را تأیید خواهد کرد. اما هزینهٔ کلی از جمله معیارهای اصلی در انتخاب روش‌های کنترلی در روش تنظیم‌کنندهٔ خطی با اختلاف تقریباً ۱۷۰۰۰۰ از مقادیر هزینهٔ کلی غیرخطی، حدود ۱۰ برابر هزینهٔ به‌دست آمده از آن‌هاست.

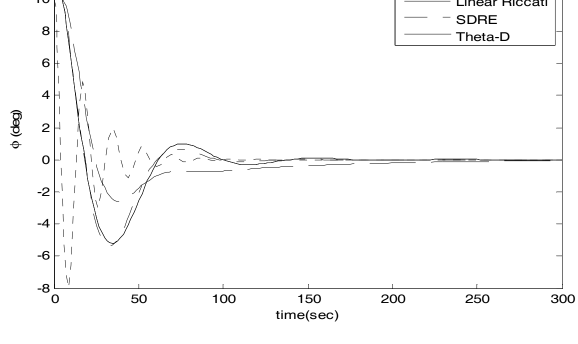


شکل ۸- گشتاور T_y بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

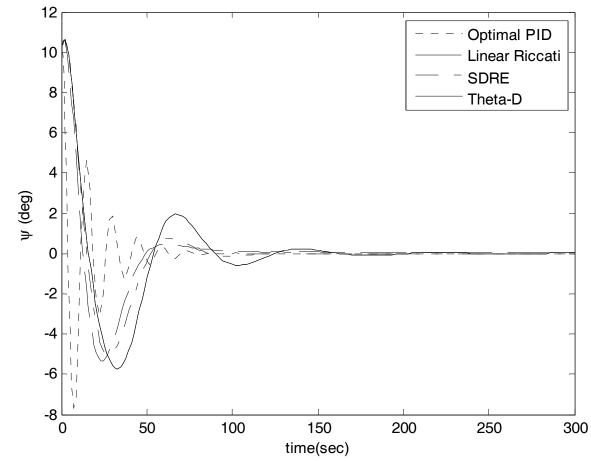


شکل ۹- گشتاور T_z بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

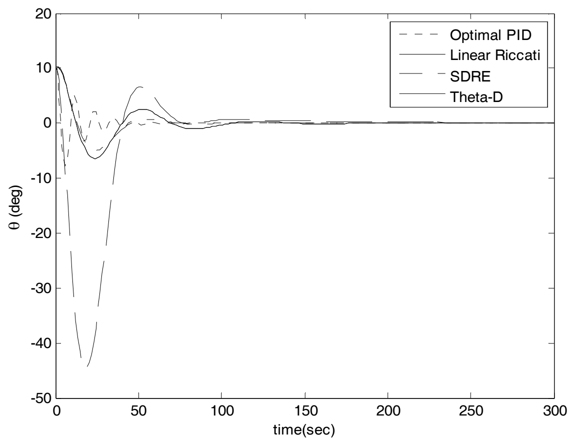
شکل‌های (۱۰) الی (۱۲) نشان‌دهندهٔ همگرایی سریع وضعیت سیستم به مقادیر ورودی مرجع برای روش PID بهینه و ریکاتی خطی هستند. اگرچه روش کنترلی PID بهینه سرعت بالایی در میان روش‌های SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی دارد، اما مطابق با شکل‌های (۱۳) تا (۱۵) سبب نوسانی‌شدن پاسخ سیستم و تلاش کنترلی و تحمیل قوانین کنترلی بزرگ به عملگرها خواهد شد که این مسئله مطلوب نخواهد بود. همچنین از شبیه‌سازی‌ها پیداست که روش ریکاتی خطی تلاش کنترلی کمتری نسبت به PID بهینه تولید می‌کند.



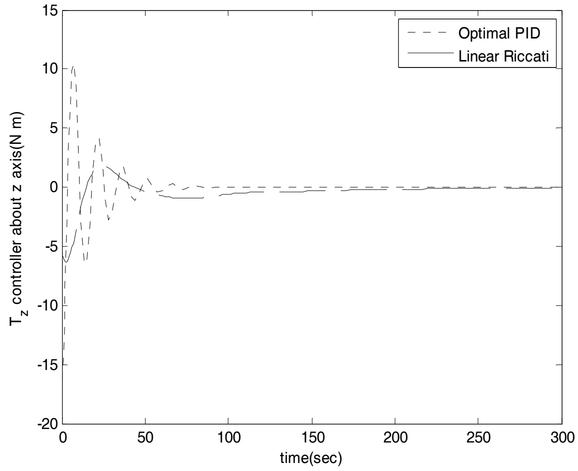
شکل ۱۰- رفتار زاویهٔ φ بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و PID بهینه و ریکاتی خطی



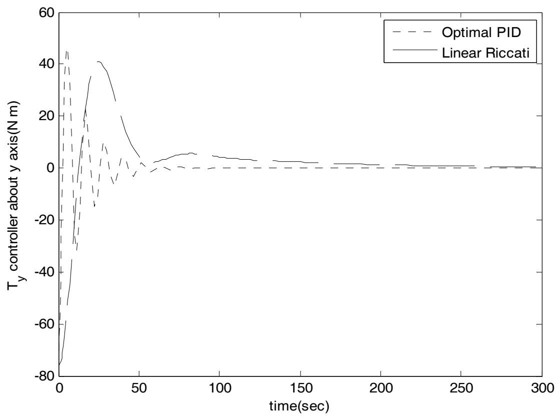
شکل ۱۱- رفتار زاویهٔ ψ بر اساس روش‌های SDRE و Theta-Dو PID بهینه و ریکاتی خطی



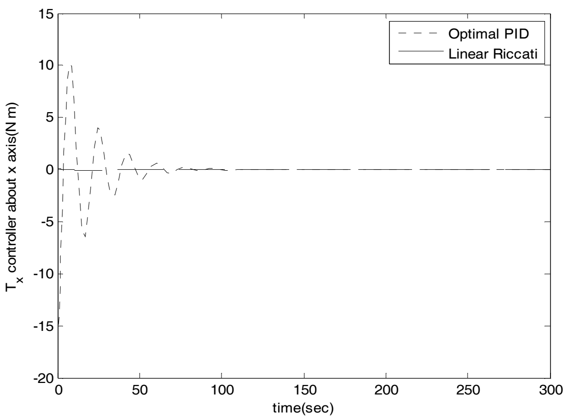
شکل۱۲- رفتار زاویهٔ θ بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و PID بهینه و ریکاتی خطی



شکل۱۳- گشتاور T_z براساس روش‌های PID بهینه و ریکاتی خطی



شکل ۱۴- گشتاور T_y براساس روش‌های PID بهینه و ریکاتی خطی



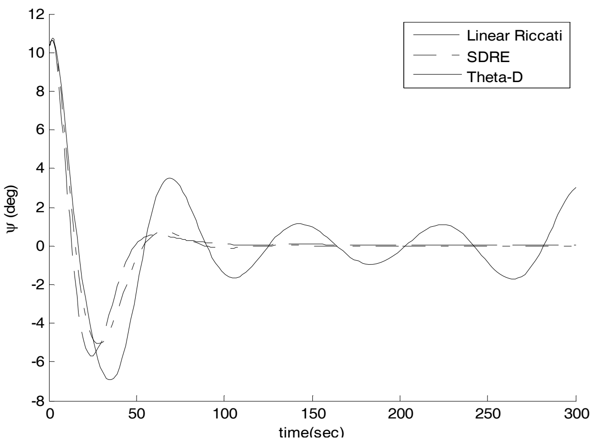
شکل ۱۵- گشتاور T_x براساس روش‌های PID بهینه و ریکاتی‌خطی

بررسی کارایی روش‌های کنترلی تحت تأثیر عدم قطعیت‌ها

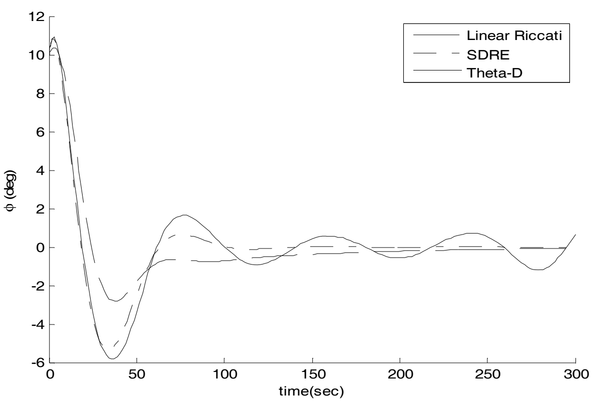
از آنجاکه فضاپیما در حین انجام مأموریت تحت تأثیر عدم قطعیت‌ها قرار می‌گیرد، بنابراین، برای سنجش مقاومت ذاتی سیستم‌های کنترلی در برابر این عدم قطعیت‌ها از نامعینی‌های جرمی کوچک و بزرگ در مقاله استفاده شده است. ابتدا، از یک نامعینی پارامتری کوچک برای مقایسهٔ سه روش ریکاتی خطی و SDRE و Thteta-D استفاده شده و در ادامه با ورود عدم قطعیت‌های پارامتری بزرگ به سیستم، دو روش ریکاتی خطی و SDRE مقایسه شده‌اند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل (۱۶) الی (۱۸) نشان داده شده است. روش Theta-D با اضافه‌کردن نامعینی پارامتری کوچکی، قادر به پایدارسازی سیستم نبوده و کنترلی بر روی وضعیت سیستم ندارد و این در حالی است که کنترلرهای مبتنی بر ریکاتی خطی و SDRE به‌راحتی قابلیت جبران عدم قطعیت‌های موجود در سیستم را دارند. با دانستن ضعف روش Theta-D در سیستم، بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی جبران عدم قطعیت‌های پارامتری کوچک، به بررسی مقاومت روش‌های SDRE و ریکاتی خطی در برابر عدم قطعیت‌های جرمی بزرگ پرداخته خواهد شد.

در این قسمت از عدم قطعیت پارامتری بزرگ برای سنجش مقاومت روش‌های ریکاتی خطی و SDRE استفاده شده است. شکل (۱۹) الی (۲۱) نشان می‌دهد که روش بهینه وابسته به حالت‌های سیستم مقاومت بسیار بهتری نسبت به نامعینی‌ها پارامتری بزرگ دارد و بعد از چند نوسان کوچک به مبدأ همگرا می‌شود که این مسئله به‌دلیل ذات سیستم کنترلی برای تولید قانون کنترلی جدید در هر لحظه است هرچند که پارامترهای جرمی سیستم دستخوش تغییر شده باشد.

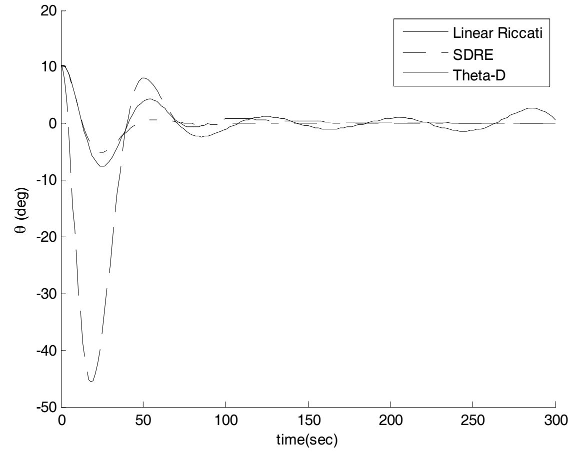
همان‌طورکه مشاهده شد، در میان سه روش کنترلی Theta-D و SDRE و ریکاتی خطی، تکنیک Theta-D کمترین مقاومت را در برابر عدم قطعیت‌های پارامتری دارد و روش SDRE به راحتی می‌تواند نامعینی‌های پارامتری بزرگ سیستم را جبران کند.



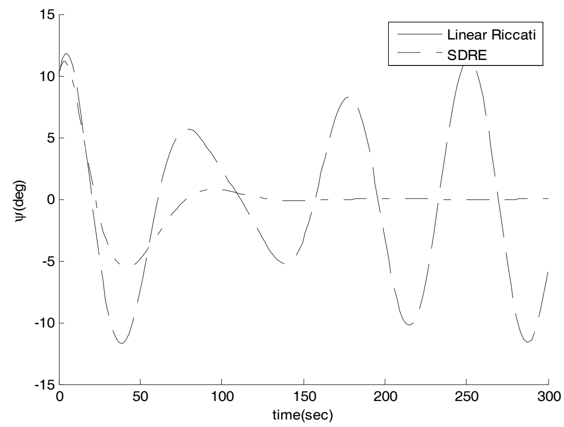
شکل ۱۶- رفتار زاویهٔ ψ با ورود عدم قطعیت پارامتری کوچک در SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی



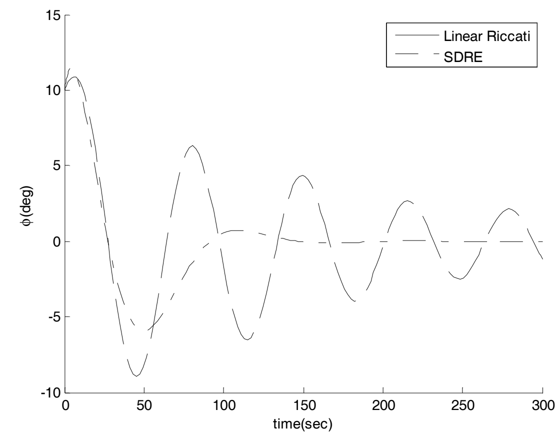
شکل ۱۷- رفتار زاویهٔ φ با ورود عدم قطعیت پارامتری کوچک در سیستم بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی



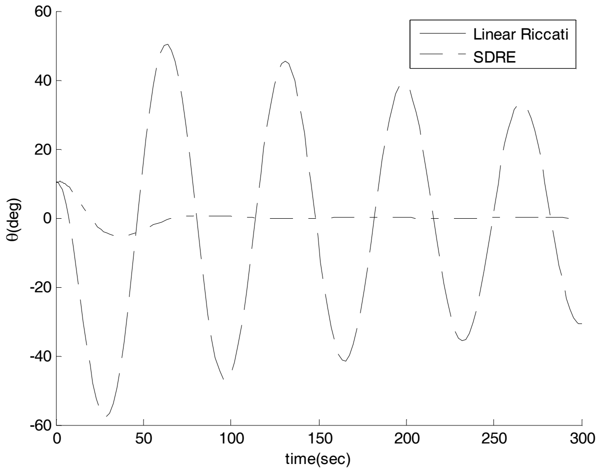
شکل ۱۸–رفتار زاویهٔ θ با ورود عدم قطعیت پارامتری کوچک در سیستم بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی



شکل ۱۹–رفتار زاویهٔ ψ با ورود عدم قطعیت پارامتری بزرگ در سیستم بر اساس روش‌های SDRE و ریکاتی خطی



شکل ۲۰–رفتار زاویهٔ φ با ورود عدم قطعیت پارامتری بزرگ در سیستم بر اساس روش‌های SDRE و ریکاتی خطی



شکل ۲۱–رفتار زاویهٔ θ با ورود عدم قطعیت‌های پارامتری بزرگ در سیستم براساس روش‌های SDRE و ریکاتی خطی

نتیجه‌گیری

از نتایج شبیه‌سازی استنتاج می‌شود که هر دو روش ریکاتی وابسته به حالت و تتا- دی، به خوبی توانستند شرایط مطلوبی را در جهت کنترل وضعیت فضاپیما با معادلات دینامیکی غیرخطی و با وجود شرایط اولیه در زوایای اولر فراهم کنند و وضعیت آن را به شرایط پایدار برسانند. اما زمان پاسخ‌دهی و همگرایی در روش Theta-D کمتر از روش کنترلی ریکاتی وابسته به حالت است که دلیل این مسئله به علت ساده‌سازی معادلهٔ ریکاتی از طریق بسط سری توانی آن است. روش‌های بیان شده بدون حذف المان‌های غیرخطی به کنترل وضعیت زیرسیستم فضاپیما پرداخته و حل نزدیک بهینه‌ای را برای سیستم نتیجه می‌دهند. از نتایج می‌توان دریافت روش تتا- دی روشی کارآمد در حل مسائلی است که زمان مهم‌ترین رکن در حل آن است. اما ورود عدم قطعیت‌های پارامتری عملکرد سیستم کنترلی را تحت تأثیر قرار داده و سبب افزایش زمان همگرایی حالت‌های سیستم به ورودی مرجع و ناپایداری سیستم حلقه بسته فضاپیما خواهد شد. در این میان، تنها روش کنترل بهینهٔ غیرخطی ریکاتی وابسته به حالت، به‌واسطهٔ داشتن یک الگوریتم مؤثر برای کنترل‌های فیدبک غیرخطی ترکیبی با وجود عوامل غیرخطی وابسته به حالت در خود، توانایی جبران عدم قطعیت‌های پارامتری کوچک و بزرگ را دارد.

مراجع

[1]Luiz, C., Souza, G.D. and Arena, M. R., "Using State-Dependent Riccati Equation and Kalman Filter Techniques to Design a Satellite Attitude Control Simulator," *AIAA Conference on Dynamics and Control of Space System*, 2012.

[2] Cimen, T., "State-Dependent Riccati Equation Control: A Survey," *Proceeding of the 17th World Congress*, Korea, 2008.

[3] Xin, M. and Balakrishnan, S. N., "Nonlinear H-infinity Missile Longitudinal Autopilot Design with Theta-D Method," *IEEE Conference*, Vol. 44, No. 1, 2008, pp. 408-413.

[4] Xin, M. and Lam, Q. M., "Preserving Spacecraft Attitude Control Accuracy Using Theta-D Controller Subject to Reaction Wheel Failures," *Proceeding of the AIAA InfoTech Conference*, 2010.

[5] Xin, M. and Lam, Q. M., "Robustness Evaluation of Theta-D Technique for Spacecraft Attitude Control Subject to Reaction Wheel Failures," *Proceeding of the AIAA InfoTech Conference*, 2010.

[6] Clotier, J. R. and Stansbery, D. T., "The Capability and Art of State-Dependent Riccati Equation-based Design," *American Control Conference*, Alaska, USA, 2002.

[7] Luiz, C., Souza, G. and Arena M. R., "Design of Satellite Attitude Control Algorithm Based on the SDRE Method Using Gas Jets and Reaction Wheels," *Journal of Engineering*, Vol. 29, No. 1, 2013, p. 8.

[8]Banks, H.T., Lewis B.M. and Tran H.T., "Nonlinear Feedback Controllers and Compensator: a State-Dependent Riccati Equation Approach," *Computational Optimization and Applications*, Vol. 37, Issue 2, 2007, pp. 177-218.

[9] Xin M. and Balakrishna, S.N., "A New Method for Suboptimal Control of a Classes of Nonlinear Systems," *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 26, No. 1, 2005, pp. 55-83.