

Development of an Integrated Design Environment for Optimal Ascent Trajectory Planning

S.H. Pourtakdoust^{1,*}, M. Fakhri¹ and N. Assadian¹

1. Aerospace Eng. Dept., Sharif Univ. of Tech.

* Aerospace Eng. Dept., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran
pourtak@sharif.edu

Current practical methods of pitch programming design for multi-stage launch and ballistic vehicles suffer from several deficiencies. For many applications they are often determined for various phases of ascent trajectory utilizing simplified dynamics that results in non-optimal trajectories. Trial-and-error design techniques coupled with flight simulation usually results in a more accurate pitch program, but that may not satisfy all the required constraints simultaneously and is also very time consuming. In this study, an integrated design environment is developed which enables a novice designer to generate optimal pitch program for the whole part of the ascent trajectory while satisfying all the required flight path constraints as well as the final time boundary conditions. Since, the preset guidance program is naturally known as an open-loop steering program, this method utilizes optimal control theory using full nonlinear system state equations together with a functional performance index to determine the optimal steering command. Evaluation of the proposed technique is demonstrated through application on a typical two stage ballistic vehicle, for which the resulting trajectory fully satisfies all the flight related and final time constraints.

Keywords: Multi-stage flight vehicle, Pitch program, Optimal design, Optimal control theory

توسعه محیط طراحی یکپارچه برای برنامه‌ریزی مسیر صعود بهینه

س.ح. پورتاکدوست^{۱*}، م. فخری^۱ و ن. اسدیان^۱

۱. دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا

* تهران، خ. آزادی، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا

pourtak@sharif.edu

روش‌های کاربردی فعلی طراحی برنامه‌های فراز سیستم‌های پرتاب و بالستیک چندمرحله‌ای از چند جهت دارای نقصان هستند. برای بسیاری از کاربردها، برنامه‌های فراز غالباً برای فازهای مختلف مسیر صعود به صورت جداگانه براساس دینامیک ساده‌سازی شده سیستم تعیین می‌گردد، که منجر به مسیرهای غیربهبوده خواهد شد. همچنین، روش‌های طراحی سعی و خطا به کمک برنامه‌های شبیه‌سازی نیز اگرچه دقیق‌اند، اما ارضای همزمان همه محدودیت‌ها و قیود در آنها بسیار وقت‌گیر است. در این تحقیق محیطی فراهم آمده است که یک طراح مبتدی را قادر می‌سازد که برنامه‌های فراز را به صورت یکپارچه برای تمامی مسیر صعود در سناریوهای مختلف، با ارضای همزمان محدودیت‌های مسیر و قیود مرزی انتهایی تولید کند. از آنجا که برنامه‌های هدایت پیش‌تنظیم به‌عنوان یک برنامه‌های حلقه‌باز شناخته شده است، روش پیشنهاد شده از تئوری کنترل بهینه مبتنی بر حساب تغییرات، با لحاظ کردن دینامیک غیرخطی به همراه یک تابع عملکرد برای تعیین فرمان بهینه فراز استفاده می‌کند. ارزیابی روش پیشنهاد شده از طریق کاربرد آن روی یک سیستم دومرحله‌ای بالستیک صورت گرفته است، که نتایج آن کلیه قیدهای پروازی و انتهایی مسیر را ارضا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: سیستم چندمرحله‌ای، برنامه‌های فراز، طراحی بهینه، تئوری کنترل بهینه

مقدمه

یکی از مراحل مهم در طراحی موشک‌های هدایت‌شونده بالستیک و یا پرتابگر، طراحی برنامه‌های فراز است. طراحی برنامه‌های فراز در بسیاری از اوقات براساس معیارهایی از قبیل کمترین زوایای اختلال (زوایای حمله) در زمان‌های گذر صوت، فشار دینامیکی ماکزیمم و جدایش مراحل؛ سرعت زوایای صفر در زمان جدایش مراحل؛ رساندن موشک در انتهای فاز فعال به شرایط لازم ... در یک فرایند سعی و خطا با استفاده از نرم‌افزارهای شبیه‌سازی صورت

می‌گیرد. این روش، اگرچه دقیق است، ولی در آن ارضای همزمان تمامی قیود حاکم بر مسیر و شرایط مرزی، ناممکن و یا بعضاً بسیار زمان‌بر خواهد بود. روش‌های به کار رفته اغلب مهندسی بوده و برای بخشی از مسیر پرواز کاربرد دارند و یا براساس دینامیک ساده‌سازی شده سیستم عمل می‌کنند. روش چرخش گرانشی نیز که در بیشتر مراجع نام برده شده است تنها در جو غلیظ به ارضای برخی از محدودیت‌های برنامه‌های فراز می‌پردازد.

آنچه هدف این مقاله است، معرفی یک فرایند خودکار طراحی بهینه برنامه‌های فراز برای تمامی مسیر صعود است که بتواند با رعایت قیود ذکر شده از طریق به‌کارگیری تئوری کنترل بهینه، برای سناریوهای مختلف پرواز موشک‌ها برنامه‌های فراز بهینه را برای استفاده

1. Ballistic
2. Launcher
3. Pitch Program

جدایش مرحله اول

پس از اتمام سوخت مرحله اول، جدایش مرحله اول عموماً در حالی باید انجام شود که زاویه حمله و سرعت زاویه‌ای موشک، هر دو نزدیک صفر باشند. برای این منظور بسته به نوع فرمان سیستم هدایت که دستور سرعت زاویه‌ای فراز یا زاویه فراز می‌تواند باشد، این فرمان‌ها در بازه‌ای حول زمان جدایش صفر یا مقدار ثابت خواهد بود. با ارضای محدودیت سرعت زاویه‌ای صفر در بازه زمانی حول زمان جدایش، زاویه حمله به دلیل وجود شتاب جاذبه افزایش خواهد یافت، بنابراین برای ارضای حداقلی این محدودیت باید سعی شود که در بازه زمانی جدایش، زاویه حمله حتی‌الامکان از صفر بگذرد.

پرواز مراحل بعد

پس از جدایش مرحله اول در ارتفاعی غالباً بالاتر از جو غلیظ، مرحله دوم پرواز بدون محدودیت روی زاویه حمله و نگرانی از بار جانبی وارد بر سازه آغاز می‌شود. بنابراین قیود موجود در این مرحله از پرواز عمدتاً ارضای شرایط مرزی انتهایی خواهد بود. به‌عنوان مثال، در یک موشک دومرحله‌ای رسیدن بردار سرعت در انتهای مرحله دوم به سرعت لازم یک قید اساسی خواهد بود.

جدایش مراحل بعد

جدایش مراحل بعدی پرواز نیز مانند جدایش مرحله اول برای جلوگیری از وارد شدن اختلال در فرایند جدایش باید در سرعت زاویه‌ای صفر انجام شود؛ اما با توجه به رقیق بودن جو در این مراحل، دیگر محدودیت روی زاویه حمله وجود نخواهد داشت.

جمع‌بندی محدودیت‌ها و قیود برنامه فراز

در زیر با توجه به مطالب عنوان‌شده، به جمع‌بندی محدودیت‌های برنامه فراز می‌پردازیم و بعداً براساس آن در شکل‌دهی تابع هزینه عمل خواهیم کرد:

۱. زاویه حمله در زمان گذر از سرعت صوت و فشار دینامیکی ماکزیمم نزدیک صفر باشد.
۲. زاویه حمله در زمان جدایش اول در مجاورت صفر باشد.
۳. سرعت زاویه‌ای در زمان جدایش مراحل صفر باشد.
۴. بار جانبی وارد بر سازه در حد مجاز باشد.
۵. شرایط مرزی انتهایی ارضا گردد. به‌عنوان مثال، برای موشک بالستیک بردار سرعت در انتهای زمان سوزش نهایی برابر بردار سرعت لازم باشد و یا برای موشک ماهواره‌بر ارتفاع نیز برابر مقدار مطلوب آن باشد.

در کامپیوتر پرواز تولید کند. در ادامه به ترتیب به معرفی بخش‌های مختلف پرواز در مسیر صعود موشک‌های چندمرحله‌ای، روش چرخش گرانشی، روش سعی و خطا به کمک برنامه شبیه‌سازی و در انتها به ارائه روش حاصل از این تحقیق در طراحی برنامه فراز خواهیم پرداخت.

مراحل مسیر صعود موشک‌های چندمرحله‌ای و محدودیت‌های آن

در این قسمت بخش‌های مختلف مسیر صعود که در طراحی برنامه فراز نقش دارند به طور مختصر معرفی می‌شود.

پرواز عمودی

عموماً پرتابگرها و موشک‌های بالستیک پرواز خود را با زاویه فراز ۹۰ درجه آغاز می‌کنند. این امر علاوه بر کنترل‌پذیری آسان در ابتدای پرواز، به دلیل عدم تحمل پوسته سازه در مقابل تنش واردشده از سیستم پرتاب در حالت پرتاب غیرعمودی است [۱]. پس از شروع پرواز، موشک چند ثانیه‌ای را با همین زاویه فراز طی خواهد کرد؛ مدت زمان این مرحله نیز با توجه به مشخصات طراحی، نحوه آزمایش‌بندی و برد، متغیر است. اگر روش آزمایش‌بندی بر مبنای استفاده از سیستم کنترل باشد، این زمان برابر زمانی خواهد بود که سیستم کنترل بتواند اختلاف زاویه آزمایش‌مورد نظر و آزمایش اولیه موشک را به‌عنوان یک زاویه غلت اولیه به صفر برساند که در مرتبه زمان نشست ردیابی سیستم کنترل خواهد بود [۲]. اگر آزمایش‌بندی به کمک سیستم پرتاب قبل از پرواز انجام شود این زمان قبل از پرواز تعیین می‌شود. برای برد بیشینه این زمان بایستی حداقل باشد.

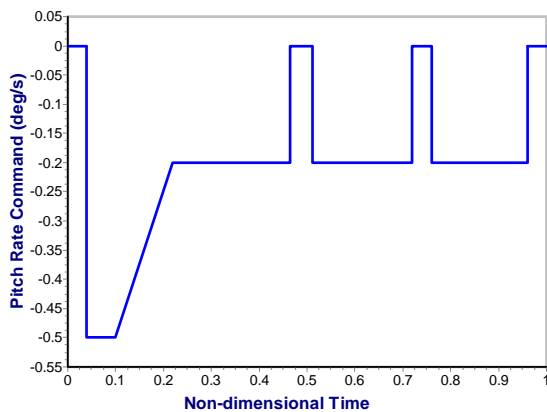
پرواز مرحله اول

پس از اتمام پرواز عمودی، برنامه فراز پیش‌تنظیم آغاز می‌شود. با توجه به وجود جو غلیظ در این مرحله، برنامه فراز با ملاحظه جدی روی کوچک بودن زاویه حمله آغاز می‌گردد. با توجه به تغییرات شدید نیروها و گشتاورهای آیرودینامیک در ناحیه گذر صوت و وقوع شوک در این مرحله، برنامه فراز بایستی به گونه‌ای باشد که زاویه حمله در زمان گذر از صوت نزدیک صفر باشد. همچنین کوچک بودن زاویه حمله در زمان فشار دینامیکی ماکزیمم نیز به‌عنوان یک محدودیت روی برنامه فراز به حساب می‌آید [۲].

غیربهبینه است. برای برد بیشینه این روش به هیچ‌وجه مناسب نخواهد بود.^۱

طراحی برنامه‌فراز به روش سعی و خطا

اغلب اوقات طراحی برنامه‌فراز با رعایت قیود مطرح‌شده در یک فرایند سعی و خطا و به کمک برنامه‌های شبیه‌سازی انجام می‌شود. به‌عنوان مثال، دستور سرعت زاویه‌ای در این فرایند را نوعاً می‌توان متشکل از یک مجموعه دستورهای خطی (با زمان) دانست که با جابه‌جایی نقاط گوشه می‌توان برنامه‌دستور زاویه‌ای را تغییر داد (شکل ۱). سپس با شبیه‌سازی بر مبنای این دستورات در یک فرایند سعی و خطا، می‌توان برنامه‌نهایی را تولید کرد. در این روش امکان ارضای محدودیت‌ها و قیود ذکرشده در طول مسیر و در نقطه انتهایی (که می‌تواند متعدد باشد) به طور همزمان، اگر غیرممکن نباشد، بسیار زمان‌بر خواهد بود.



شکل ۱. روند نمونه برنامه‌فراز زاویه‌ای یک موشک سه‌مرحله‌ای در روش سعی و خطا

حل مسئله طراحی برنامه‌فراز به کمک تئوری کنترل بهینه

در این تحقیق به ارائه روشی برای طراحی برنامه‌فراز با ارضای قیود ذکرشده می‌پردازیم که طراحی را برای سناریوهای مختلف پروازی (هر برد دلخواه، برد بیشینه، مسیرهای با حساسیت کمتر، مسیر انتقال به مدار و ...) بدون نیاز به فرایند سعی و خطا انجام دهد. برای این کار از تئوری کنترل بهینه مبتنی بر حساب تغییرات بهره خواهیم گرفت. به کمک این تئوری می‌خواهیم ورودی کنترلی u را طوری تعیین کنیم تا سیستم غیرخطی:

برخلاف بردهای کوتاه، در بردهای بلند و به‌ویژه برد ماکزیمم، ارضای همزمان محدودیت‌های بار سازه از یک طرف و انجام مانور سریع برای طی کردن برد بیشتر در فاز فعال و رسیدن به زاویه‌ی مسیر بهینه γ^* از طرف دیگر، چندان آسان نخواهد بود، به طوری که دستور سرعت زاویه‌ی بزرگ برای بیشتر شدن برد مطلوب خواهد بود؛ اما برای بار وارد بر سازه مشکل در پی خواهد داشت. این، مسئله بهینه‌سازی را به وجود می‌آورد که به آن خواهیم پرداخت.

روش‌های طراحی برنامه‌فراز

چرخش گرانشی

روش‌ی که در اکثر مراجع [۸-۱] از آن به‌عنوان برنامه‌فراز در جو غلیظ و عموماً در مرحله اول موشک‌های چندمرحله‌ای ذکر می‌شود، روش چرخش گرانشی است. برای جلوگیری از وارد شدن نیروی آیرودینامیکی غیرمجاز بر سازه، اساس این روش بر مبنای حرکت با زاویه‌ی حمله صفر در طول پرواز است. اگر بار عمودی وارد بر سازه را به صورت رابطه (۱) بنویسیم U نسبت مستقیم با سه پارامتر زیر خواهد داشت:

$$F_N = \bar{q} S C_{N_\alpha} \alpha \propto \bar{q} C_{N_\alpha} \alpha \quad (1)$$

۱. فشار دینامیکی (\bar{q})

۲. ضریب نیروی عمودی آیرودینامیکی (C_{N_α})

۳. زاویه‌ی حمله (α)

پارامتر فشار دینامیکی در طی پرواز تغییرات بسیار شدیدی دارد و در زمان مشخصی به مقدار بیشینه خود رسیده و با کاهش چگالی هوا در ارتفاعات بالاتر به سمت صفر کاهش خواهد یافت. ضریب C_{N_α} نیز به طور ذاتی در زمان مشخصی که زمان رسیدن به ماخ ۱ است به مقدار بیشینه خود رسیده و دوباره کاهش می‌یابد. بنابراین زاویه‌ی حمله تنها پارامتر کنترل‌کننده این نیروست. از آنجا که زاویه‌ی حمله نتیجه اجتناب‌ناپذیر مانور (سرعت زاویه‌ای) است با توجه به توضیحات فوق بهتر است در زمان‌هایی که دو عامل دیگر در مقدار بیشینه خود قرار دارند، مانور به گونه‌ای باشد که زاویه‌ی حمله کوچک شود. این در حالی است که روش چرخش گرانشی در تمام لحظات سعی در کوچک نگاه داشتن آن دارد که محافظه‌کارانه و

۱. به‌علاوه مسئله شدت مانور چرخش ناگهانی که قبل از شروع برنامه‌چرخش گرانشی (بعد از پرواز قائم) انجام می‌شود خود مجهولی است که باید با سعی و خطا به دست آید.

$$\dot{x}_5 = \frac{x_1 \cos x_2 \sin x_7}{x_4 \cos x_6} \quad (۸)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{x_1 \cos x_2 \cos x_7}{x_4} \quad (۹)$$

$$\dot{x}_7 = \frac{x_1}{x_4} \cos x_2 \sin x_7 \tan x_6 - 2\omega_e (\tan x_2 \cos x_7 \cos x_6 - \sin x_6) \quad (۱۰)$$

در معادلات فوق C_{L_α} ، C_{D_α} ، C_{D_0} ، m ، T ، نیروی تراست، جرم و ضرایب آیرودینامیکی است که در هر لحظه زمانی به عنوان ورودی و به کمک جداول مربوط در اختیار خواهند بود. ρ ، s ، g و ω_e نیز به ترتیب چگالی هوا، سطح مرجع، شتاب جاذبه و سرعت زاویه‌ای حرکت زمین است. متغیرهای حالت x_1 تا x_7 به ترتیب پارامترهای اندازه سرعت (زمینی)، زاویه مسیر، زاویه حمله، شعاع حامل (فاصله تا مرکز زمین)، طول جغرافیایی، عرض جغرافیایی و زاویه آزیموت است.

با توجه به اینکه شروع طراحی برنامه فراز از حالت عمودی آغاز می‌شود، مقادیر اولیه زاویه مسیر و حمله به ترتیب ۹۰ و ۰ درجه خواهد بود. مقدار اولیه سرعت نیز با توجه به زمان پرواز عمودی مشخص خواهد بود. مقادیر اولیه بقیه متغیرهای حالت نیز به عنوان شرایط پرتاب در اختیار خواهد بود. مقادیر نهایی متغیرهای حالت نیز در فرمولاسیون مسئله کنترل بهینه آزاد در نظر گرفته می‌شود.

۲. تابع هزینه

تابع هزینه به صورت یکپارچه برای تمام مسیر در فاز فعال به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J = W_v (x_1 - x_{1req})^2 \Big|_{t_f} + W_\gamma (x_2 - x_{2req})^2 \Big|_{t_f} + W_h (x_4 - x_{4req})^2 \Big|_{t_f} + \frac{W_m}{x_1} \Big|_{t_f} + \int_{t_{tr}}^{t_f} (W_\alpha x_3^2 + W_g w^2 + W_i \frac{1}{2} \rho s x_1^2 C_{N_\alpha} |x_3| - W_r x_1 \cos x_2) dt \quad (۱۱)$$

ابتدا به معرفی ترم‌های خارج انتگرال می‌پردازیم. در طراحی برنامه فراز برای موشک بالستیک برای برد دلخواه قید انتهایی روی متغیر حالت زاویه مسیر γ (ترم دوم) و برای طراحی برد بیشینه روی سرعت (ترم آخر) نیز خواهد بود. در طراحی برنامه فراز موشک ماهواره‌بر، قید انتهایی روی متغیر حالت ارتفاع نیز وجود

$$\dot{X} = a(X, u, t) \quad (۲)$$

مسیر بهینه X^* را به گونه‌ای طی کند که تابع عملکرد زیر حداقل شود:

$$J = h(X) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} g(X, u, t) dt \quad (۳)$$

بنابراین در ادامه این مطالعه، فرمولاسیون مسئله در الگوی کنترل بهینه تشریح خواهد شد [۹-۱۱].

۱. معادلات حالت

یکی از فازهای مهم در طراحی کنترل بهینه، انتخاب مناسب معادلات حالت (معادلات حرکت) است. با توجه به قیود مطرح شده، زاویه حمله، زاویه مسیر و سرعت زاویه‌ای فراز، پارامترهای کلیدی در طراحی برنامه فراز هستند. به همین منظور معادلات حالتی که از آنها استفاده خواهیم کرد معادلات حرکت در دستگاه سرعت خواهند بود که در آنها سرعت، زاویه مسیر و زاویه حمله متغیر حالت هستند. پارامتر سرعت زاویه‌ای فراز نیز متغیر کنترلی خواهد بود. با توجه به اینکه زاویه سرش جانبی و زاویه غلت در مسیر صعود نزدیک صفر هستند، معادلات ۶ درجه آزادی حرکت با در نظر گرفتن چرخش زمین به معادلات ۴ درجه آزادی حرکت به صورت زیر تبدیل خواهد شد [۱۲، ۱۳]:

$$\dot{x}_1 = \frac{T}{m} \cos x_3 - g \sin x_2 - \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho s x_1^2 (C_{D_0} + C_{D_\alpha} x_3) \quad (۴)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{T}{m x_1} \sin x_3 - \frac{g}{x_1} \cos x_2 + \frac{1}{m x_1} \frac{1}{2} \rho s x_1^2 C_{L_\alpha} x_3 + \frac{x_1}{x_4} \cos x_2 + 2\omega_e \sin x_7 \cos x_6 \quad (۵)$$

$$\dot{x}_3 = u - \frac{T}{m x_1} \sin x_3 + \frac{g}{x_1} \cos x_2 - \frac{1}{m x_1} \frac{1}{2} \rho s x_1^2 C_{L_\alpha} x_3 - \omega_e \cos x_3 \sin x_7 \quad (۶)$$

$$\dot{x}_4 = x_1 \sin x_2 \quad (۷)$$

۱. با توجه به تغییرات اندک زاویه آزیموت در فاز فعال، برای کاهش محاسبات می‌توان آن را ثابت در نظر گرفت.

$$\gamma_{req} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{V^2 - X}{X}} \quad (18)$$

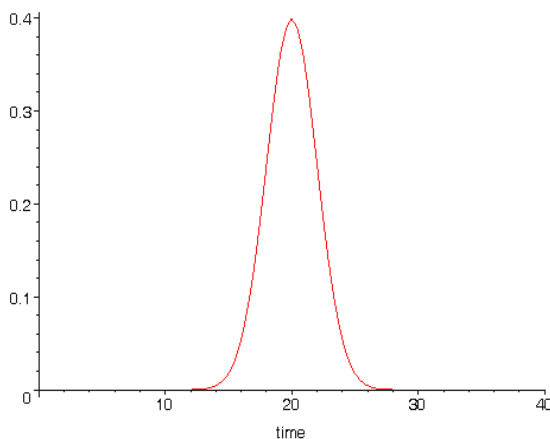
همان‌طور که اشاره شد γ_{req} هم‌اکنون به صورت یک تابع تحلیلی از بردار موقعیت موشک و هدف و مقدار سرعت موشک، همگی در انتهای زمان عملکرد موتور قابل محاسبه است. با توجه به اینکه روش حل عددی، روش بهینه‌سازی از نوع مستقیم است (روش بیشترین شیب)، مقادیر پارامترهای مذکور پس از هر بار حل معادلات حالت، موجود خواهد بود و با همگرایی این روش، مقدار γ_{req} نیز به مقدار دقیق خود همگرا خواهد شد.

در داخل انتگرال تابع هزینه نیز به ترتیب محدودیت‌های زاویه حمله، سرعت زاویه‌ای، بار وارد بر سازه و در صورت لزوم برد بیشینه در فاز فعال ملحوظ گردیده است. در معیار عملکرد فوق، ضرایب وزنی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

- W_γ ضریب وزنی زاویه مسیر که همیشه و در زمان انتهایی اعمال می‌شود.

- W_m ضریب وزنی برای بیشینه‌سازی سرعت در انتهای فاز فعال است که در طراحی برد بیشینه اعمال خواهد شد.

- W_α ضریب وزنی زاویه حمله را در بازه‌ای حول زمان‌هایی که می‌خواهیم در آنها زاویه حمله صفر باشد اعمال می‌کنیم. همان‌طور که گفته شد این زمان‌ها عبارتند از: زمان رسیدن سرعت به ماخ ۱، فشار دینامیکی ماکزیمم و زمان جدایش. برای جلوگیری از شکستگی دستور سرعت زاویه‌ای، فاکتور وزنی زاویه حمله غیرثابت و به صورت یک تابع گوسی حول نقاط مورد نظر به کار گرفته خواهد شد (شکل ۲).



شکل ۲. منحنی ضریب وزنی برای پارامتر زاویه حمله

خواهد داشت (ترم سوم). در صورتی که موتور مرحله آخر موشک ماهواره‌بر بدون مکانیزم قطع تراست فرض شود، قید روی اندازه سرعت نیز می‌تواند وجود داشته باشد (ترم اول).

همان‌طور که گفته شد برای طراحی مسیر بالستیک ارضای سرعت لازم با رسیدن زاویه مسیر به γ_{req} انجام می‌شود. این ترم به صورت یک تابع تحلیلی از بردار موقعیت موشک و هدف و مقدار سرعت انتهایی، از معادله سرعت لازم (۱۲) قابل محاسبه است:

$$V^2 = \frac{\frac{\mu}{r_0}(1 - \cos \theta)}{\frac{r_0}{R_E} \cos^2 \gamma - \cos(\theta + \gamma) \cos \gamma} \quad (12)$$

در این رابطه V اندازه سرعت وسیله، r_0 شعاع حامل، γ زاویه مسیر، θ برد زاویه‌ای - همه در لحظه t - بوده و μ ثابت جاذبه زمین و R_E شعاع زمین است. اگر اندازه سرعت لازم را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} V^2 &= V_x^2 + V_y^2 = V_x^2 + V_x^2 \tan^2 \gamma \\ &= V_x^2 (1 + \tan^2 \gamma) = \frac{V_x^2}{\cos^2 \gamma} \end{aligned} \quad (13)$$

با جاگذاری در رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{V_x^2}{\cos^2 \gamma} &= \frac{\frac{\mu}{r_0}(1 - \cos \theta)}{\frac{r_0}{R_E} \cos^2 \gamma - \cos \theta \sin \theta \sin \gamma \cos \gamma} \\ \Rightarrow V_x^2 &= \frac{\frac{\mu}{r_0}(1 - \cos \theta)}{\frac{r_0}{R_E} - \cos \theta + \sin \theta \tan \gamma} \\ \Rightarrow V_x^2 \left(\frac{r_0}{R_E} - \cos \theta + \sin \theta \frac{\sqrt{V^2 - V_x^2}}{V_x} \right) &= \frac{\mu}{r_0}(1 - \cos \theta) \\ \Rightarrow V_x^2 (V^2 - V_x^2) \sin^2 \theta &= \left(\frac{\mu}{r_0}(1 - \cos \theta) - V_x^2 \left(\frac{r_0}{R_E} - \cos \theta \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

با تعریف:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\mu}{r_0}(1 - \cos \theta) \\ X &= V_x^2 \end{aligned} \quad (15)$$

از معادله (۱۴) خواهیم داشت:

$$AX^2 + BX + C^2 = 0 \quad (16)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{r_0}{R_E} - \cos \theta \right)^2 + \sin^2 \theta \\ B &= -2C \left(\frac{r_0}{R_E} - \cos \theta \right) - V^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (17)$$

با حل معادله درجه دو (۱۶)، برای X به دو جواب ممکن برای زاویه لازم خواهیم رسید:

که P بردار متغیرهای شبهحالت است. با انتخاب معادلات حالت و تعریف تابع هزینه، تابع همیلتونین مسئله کنترل بهینه به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 H = & W_0 x_3^2 + W_0 u^2 + W_1 \frac{1}{2} \rho x_1^2 C_{N_0} |x_3| \\
 & - W_1 x_1 \cos x_2 + p_1 \left(\frac{T}{m} \cos x_3 - g \sin x_2 \right. \\
 & \left. - \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho s x_1^2 (C_{D_0} + C_{D_0} x_3) \right) \\
 & + p_2 \left(\frac{T}{m x_1} \sin x_3 - \frac{g}{x_1} \cos x_2 + \frac{1}{m x_1} \frac{1}{2} \rho s x_1^2 C_{L_0} x_3 \right. \\
 & \left. + \frac{x_1}{x_4} \cos x_2 + 2\omega_e \sin x_7 \cos x_6 \right) \\
 & + p_3 \left(u - \frac{T}{m x_1} \sin x_3 + \frac{g}{x_1} \cos x_2 \right. \\
 & \left. - \frac{1}{m x_1} \frac{1}{2} \rho s x_1^2 C_{L_0} x_3 - \omega_e \cos x_3 \sin x_7 \right) \\
 & + p_4 (x_1 \sin x_2) \\
 & + p_5 \left(\frac{x_1 \cos x_2 \sin x_7}{x_4 \cos x_6} \right) \\
 & + p_6 \left(\frac{x_1 \cos x_2 \cos x_7}{x_4} \right)
 \end{aligned} \quad (20)$$

تمام ترم‌های فوق در تابع همیلتونین، که بعداً در شکل‌دهی معادلات شبهحالت به کار خواهند رفت، اثر یکسان ندارند به طوری که می‌توان ترم‌های مربوط به چرخش زمین را حذف کرد و در طراحی مسیر موشک بالستیک سه ترم آخر نیز که مربوط به معادلات موقعیت هستند به دلیل عدم قید روی موقعیت انتهایی به کلی قابل حذف هستند.

۴. معادلات شبهحالت

صورت کلی معادلات شبهحالت از معادله همیلتونین به صورت زیر قابل استخراج است:

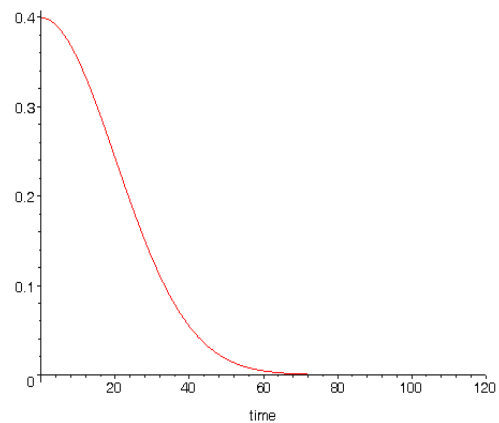
$$\dot{p}_1 = - \frac{\partial H}{\partial X} \quad (21)$$

معادلات شبهحالت به راحتی از معادله همیلتونین استخراج گردیده که برای متغیرهای شبهحالت اندازه سرعت، زاویه مسیر و زاویه حمله به شکل زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1 = & - \frac{\partial H}{\partial x_1} = -W_1 \rho C_{N_0} |x_3| x_1 + W_1 \cos x_2 \\
 & + \frac{p_1}{m} \rho s x_1 (C_{D_0} + C_{D_0} x_3) \\
 & + \frac{1}{m x_1^2} (T \sin x_3 - mg \cos x_2 + \frac{1}{2} \rho s x_1^2 C_{L_0} x_3) (p_2 - p_3) \\
 & - \frac{p_2}{x_4} \cos x_2 - p_4 \sin x_2 - \frac{p_5 \cos x_2 \sin \chi}{x_4 \cos x_6} - \frac{p_6}{x_4} \cos x_2 \cos \chi
 \end{aligned} \quad (22)$$

– W_l ضریب وزنی بار سازه (نیروی جانبی) که در طول مسیر اعمال می‌شود. این فاکتور برای برد بیشینه اهمیت بیشتری خواهد داشت و در بردهای کوتاه که نیروی جانبی کوچک است (به دلیل زاویه حمله کوچک) می‌تواند صفر در نظر گرفته شود.

– W_r ضریب وزنی برد در فاز فعال برای وقتی است که می‌خواهیم طراحی را برای برد بیشینه انجام دهیم که در طول مسیر برای جلوگیری از تضاد با قید زاویه مسیر به صورت یک تابع نیم‌زنگوله اعمال می‌شود و در غیر این صورت صفر خواهد بود (شکل ۳).



شکل ۳. منحنی ضریب وزنی برای پارامتر برد

– W_q ضریب وزنی دستور سرعت زاویه‌ای حول زمان‌های جدایش که به صورت ثابت در نظر گرفته خواهد شد. یادآوری می‌شود که تمام فاکتورهای وزنی برای یک سیستم طراحی شده، فقط یک بار به عنوان ضرایب هم‌مرتب‌ساز تنظیم می‌شود و پس از آن طراحی برای هر سناریوی پروازی به صورت کاملاً خودکار انجام خواهد شد.

قابل توجه است که می‌توان با اعمال فاکتور وزنی روی بار سازه‌ای، وزن‌های زاویه حمله در دو زمان ماخ ۱ و فشار دینامیکی ماکزیمم را صفر در نظر گرفت چراکه این فاکتور به طور خودکار زاویه حمله را در زمان‌های گفته شده کوچک خواهد کرد به طوری که با افزایش این ضریب، همچون روش چرخش گرانشی، زاویه حمله در طول زمان پرواز در جو غلیظ نزدیک صفر خواهد بود.

۳. تابع همیلتونین

شکل کلی تابع همیلتونین براساس معادلات (۲) و (۳) به صورت زیر است:

$$H = g(X, u, t) + P^T a \quad (19)$$

۵. حل عددی مسئله

واضح است که برای مسئله فوق حل تحلیلی وجود نخواهد داشت. هرچند حل تحلیلی و حلقه‌بسته برای این مسئله بسیار مفید خواهد بود اما چون در موشک‌های چندمرحله‌ای، برنامه فراز یک تاریخچه حلقه‌باز دستور است که به دلیل عدم صدور فرمان‌های بزرگ در جو غلیظ از قبل طراحی و به صورت پیش‌تنظیم اعمال می‌شود، بنابراین بدون سعی در ساده‌سازی، مسئله غیرخطی مطرح‌شده را با تمامی قیود موجود به صورت عددی حل خواهیم کرد. روش حل عددی که به کار خواهیم برد یک روش بهینه‌سازی مستقیم بیشترین شیب است که بر مبنای یک حدس اولیه و اصلاح آن عمل می‌کند. حدس اولیه بدون هیچ حساسیتی می‌تواند یک تاریخچه ثابت دستور سرعت زاویه‌ای باشد که به کمک رابطه زیر در فرایند همگرایی حل مسئله اصلاح خواهد شد:

$$u_{new} = u_{old} - \eta \frac{\partial H}{\partial u} = u_{old} - \eta (p_3 + 2W_q u_{old}) \quad (35)$$

در رابطه فوق ضریب η یک مقدار ثابت کوچک است. با اعمال درست این ضریب و ضرایب وزنی، همگرایی حل عددی برای تمامی سناریوهای پروازی قابل حصول است.

۶. نتایج شبیه‌سازی

جزئیات روش طراحی خودکار بهینه برنامه فراز با قابلیت ارضای قیدهای مختلف بیان شد. اصولاً پرواز موشک‌ها (بالستیک یا حامل ماهواره) در دو فاز داخل و خارج جو شکل می‌گیرد. در موشک‌های چندمرحله‌ای عموماً فاز داخل جو در مرحله اول به پایان می‌رسد و مراحل بعدی در خارج از جو پرواز می‌کنند. بنابراین بدون کاستن از عمومیت مسئله می‌توان یک موشک دومرحله‌ای را به‌عنوان نمونه مورد بررسی قرار داد. در این قسمت نتایج طراحی برنامه فراز از روش ارائه‌شده را در شبیه‌سازی ۶ درجه برای یک برد مشخص ارائه می‌کنیم. موشک انتخابی، میان‌برد و از نوع سوخت جامد است. تنها ورودی‌های سیستمی برنامه طراحی، رفتار زمانی تراست و جرم و جدول ضرایب آیرودینامیک است. در شکل‌های (۴-۵) به ترتیب دستور سرعت زاویه‌ای فراز طراحی‌شده و رفتار زاویه حمله منتج از آن برحسب زمان بی‌بعد $\tau = \frac{t}{t_f}$ آمده است. همان‌طور که

در شکل ۵ مشاهده می‌شود زاویه حمله در زمان‌های بحرانی ماخ ۱ (زمان $\tau = 0.2$)، فشار دینامیکی ماکزیمم (زمان $\tau = 0.35$) و زمان جدایش اول (زمان $\tau = 0.52$) به صفر نزدیک شده

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = p_1 g \cos x_2 + \frac{g}{x_1} \sin x_2 (p_3 - p_2) - W_r x_1 \sin x_2 + \frac{p_2}{x_4} x_1 \sin x_2 - p_4 x_1 \cos x_2 \quad (33)$$

$$+ \frac{p_5 x_1 \sin \chi \sin x_2}{x_4 \cos x_6} + \frac{p_6 x_1 \cos \chi \sin x_2}{x_4}$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -2W_\alpha x_3 + \frac{p_1}{m} (T \sin x_3 + \rho s x_1 C_{D_\alpha}) + \frac{T}{m x_1} \cos x_3 (p_3 - p_2) - \frac{1}{2} W_L \rho C_{N_\alpha} x_1^2 \frac{|x_3|}{x_3} \quad (34)$$

و برای معادلات شبه‌حالت موقعیت خواهیم داشت:

$$\dot{p}_4 = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = \frac{x_1 \cos x_2}{x_4^2} \left(p_2 + \frac{p_5 \sin \chi}{\cos x_6} + p_6 \cos \chi \right) \quad (35)$$

$$\dot{p}_5 = -\frac{\partial H}{\partial x_5} = 0 \quad (36)$$

$$\dot{p}_6 = -\frac{\partial H}{\partial x_6} = -\frac{p_5 x_1 \cos x_2 \sin \chi \sin x_6}{x_4 \cos^2 x_6} + \omega \sin \chi \sin x_6 (2p_2 - p_3) \quad (37)$$

با توجه به اینکه شرایط نهایی حالت‌ها در فرمولاسیون مسئله کنترل بهینه آزاد در نظر گرفته شده است، مقدار انتهایی شبه‌حالت‌ها از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$P(t_f) = \frac{\partial h}{\partial X} \quad (38)$$

که برای شش متغیر شبه‌حالت خواهیم داشت:

$$p_1(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x_1} = 2W_V (x_1 - V_{req}) - \frac{W_m}{x_1^2} \quad (39)$$

$$p_2(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 2W_\gamma (x_2 - \gamma_{req}) \quad (40)$$

$$p_3(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \quad (41)$$

$$p_4(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x_4} = 2W_h (x_4 - h_{req}) \quad (42)$$

$$p_5(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x_5} = 0 \quad (43)$$

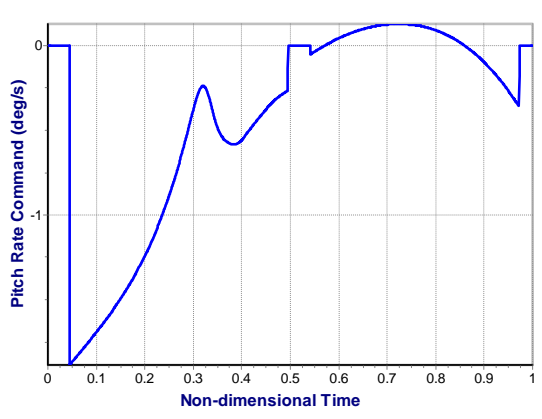
$$p_6(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x_6} = 0 \quad (44)$$

۲. مسیر با برد بیشینه که در آن در زمان خاموشی، اندازه بردار سرعت را به مقدار بیشینه و زاویه آن را به مقدار γ^* می‌رساند.

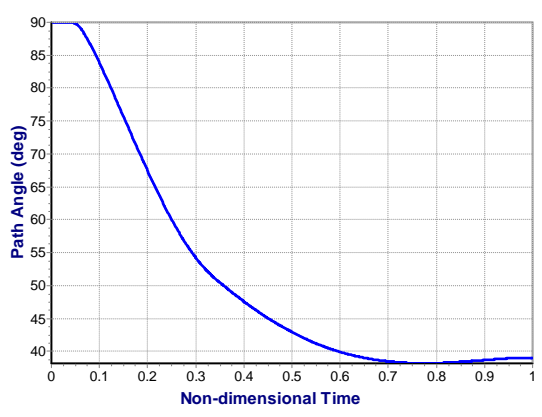
۳. مسیر با سرعت می‌نیم که برای هر برد، بردار سرعت لازم را در انتهای زمان سوزش با اندازه سرعت کمینه و زاویه مسیر γ^* تشکیل می‌دهد. در این مسیر حساسیت برد به زاویه بردار سرعت صفر است.

۴. مسیر برای قرار گرفتن در مدار که در آن علاوه بر اندازه بردار سرعت و زاویه آن، ارتفاع نیز در زمان خاموشی مقید است.

در اینجا نتایج طراحی برای برد بیشینه نیز می‌آید. برای نتایج مسیرهای دیگر و توضیحات بیشتر خواننده می‌تواند به مرجع [۱۱] مراجعه کند. در شکل ۶ برنامه دستور سرعت زاویه‌ای فراز و در شکل ۷ زاویه مسیر در برد بیشینه آمده است. چنانکه مشاهده می‌شود زاویه مسیر در یک مانور نسبتاً شدید به مقدار بهینه خود رسیده و در همان مقدار حفظ شده است.

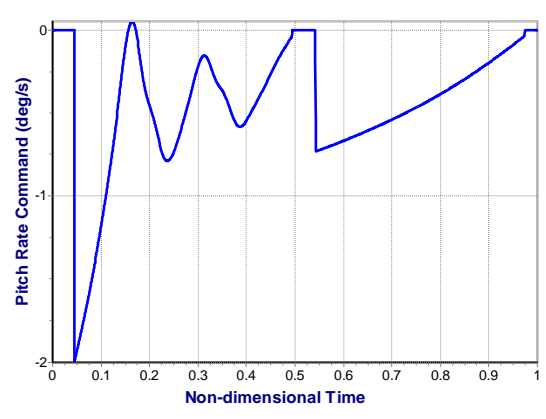


شکل ۶. برنامه سرعت زاویه‌ای فراز برد بیشینه

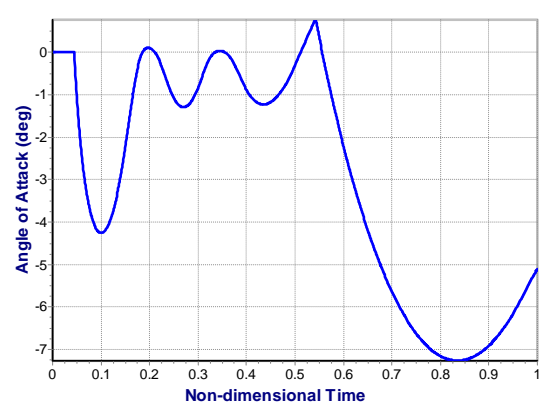


شکل ۷. زاویه مسیر در برد بیشینه

است. سرعت زاویه‌ای فراز نیز در زمان جدایش‌ها (زمان‌های $\tau = 0.52$ و $\tau = 1.0$) به صفر گراییده است.



شکل ۴. برنامه سرعت زاویه‌ای فراز بهینه



شکل ۵. رفتار زاویه حمله در مقابل زمان بی‌بعد

همچنین با ارضای شرط سرعت لازم، خطای برخورد به مقدار کمتر از ۱ کیلومتر می‌رسد که در صورت لزوم برای برخورد دقیق می‌تواند به راحتی به عنوان یک خطای بایاس در برد در اصلاح برنامه فراز مد نظر قرار گیرد.

مسیر طراحی شده در نتایج فوق یک مسیر با زاویه بلند بود. با توجه به توضیحاتی که درباره تابع هزینه آمد می‌توان مسیرهای دیگری را نیز به کمک روش ارائه شده طراحی کرد. این مسیرها عبارتند از:

۱. مسیر با زاویه کوتاه که در آن زاویه مسیر انتهایی برابر جواب دوم (جواب کوچک‌تر) خود در معادله (۱۶) است. این مسیر نسبت به مسیر با زاویه بلند دارای مزایا و معایبی است.

1. Over-lofted Trajectory
2. Under-lofted Trajectory

4. Cornilise J.W., H.F.R. Schoyer, and K.F. Wakker, *Rocket Propulsion and Spacecraft Dynamics*, Pitman Publications, London, 1979.
5. Pitman G.R., *Inertial Guidance*, John-Wiley & Sons, 1962.
6. Walter Markl A., "An Initial Guess Generator for Launch and Reentry Vehicle Trajectory Optimization", PhD Thesis, Stuttgart University, 2001.
۷. اصغری س.، "بهینه‌سازی مسیر حرکت یک موشک بالستیک جهت رسیدن به برد ماکزیمم"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۷۷.
۸. آقاجان س.م.، "بهینه‌سازی مسیر راکت‌های چندمرحله‌ای"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۷۸.
9. Kirk Donald E.; *Optimal Control Theory*, Englewoods Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1970.
10. Bryson A.E., and Y.C. Ho, *Applied Optimal Control*, Hemisphere, New York, 1975.
۱۱. فخری نوشابادی م.، "طراحی برنامه فرآز بهینه به روش ترکیبی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۴.
12. Berend N., and C. Takbot; "Overview of Some Optimal Control Methods Adapted to Expendable and Reusable Launch Vehicle Trajectories", *Aerospace Science and Technology*, 10, 2006, 222-232.
۱۳. فخری نوشابادی م.، "تعیین محدوده برخورد وسیله بازگشت به جو با L/D کوچک به کمک شبیه‌سازی ۶ درجه آزادی"، پایان‌نامه کارشناسی، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۲.

نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از اشاره به مراحل پرواز موشک‌های بالستیک و حامل ماهواره، به محدودیت‌ها و قیود موجود در طراحی برنامه فرآز این موشک‌ها اشاره شد. همان‌طور که در تشریح قیود آمد در طراحی برنامه فرآز لازم است که قیود حاکم بر مسیر و قیود حاکم بر شرایط مرزی زمان خاموشی که ممکن است متعدد نیز باشد، به طور همزمان ارضا شوند. این در حالی است که در فرایند طراحی به روش سعی و خطا به کمک برنامه شبیه‌سازی این امر بسیار دشوار و وقت‌گیر است. روشی که در این مطالعه برای طراحی برنامه فرآز با ارضای همزمان تمامی قیود حاکم بر مسیر پیشنهاد گردید روشی است مبتنی بر تئوری قدرتمند کنترل بهینه که به صورت خودکار، سریع و دقیق توانایی طراحی برنامه فرآز را برای کلیه سناریوهای پرواز داراست. اعمال این روش روی یک سیستم نمونه نتایج بسیار مطلوبی را از خود نشان داده است.

مراجع

۱. فتودوسف وای.، مقدمه‌ای بر طراحی موشک، ترجمه جعفر روشیان، حسن کریمی مزرعه‌شاهی، و مهران میرشمس، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۷۸.
2. Malyshev Veniamin V., *Aerospace Vehicle Control, Modern Theory and Application*, from Instituto de Aeronautica e Espaco, Brazil, 1996.
3. Siouris George M., *Missile Guidance and Control Systems*, Springer-Verlag New York, 2004.