JSST
Journal of Space Science & Technology

Vol. 9/ No. 3/ 2016

Approximate Solution of Required Velocity in Elliptical Earth Model Using Piecewise Linear Gravity Assumption

M. Dehghani Mohammad-Abadi[1] and S. H. Jalali-Naini[2]

1, 2. Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University

*Postal Code: 14117-13116, Tehran, IRAN

shjalalinaini@modares.ac.ir

In this paper, an approximate solution of required velocity with final position constraint is derived using a piecewise linear gravity assumption for elliptical earth model. In this approach, the total flight time is divided into several time intervals and the gravitational acceleration is assumed to be linear at each interval. The solution gives an explicit relation in terms of the current position vector, desired final position and flight time in three dimensions. The accuracy and computational burden of the method are obtained numerically in terms of the number of time intervals, and compared with linearized solution and Zarchan's iterative algorithm. Numerical solution shows that the present method has better accuracy than the two mentioned approaches with the same computational burden up to a range angle of 18 deg for minimum energy trajectory in an elliptical earth model. The presented method can be extended for two or multi-body problem and also for the computation of sensitivity matrix of required velocity.

Keywords: Required velocity, Elliptical earth, Piecewise linear gravity

1. Ph.D. Candidate
2. Assistant Professor (Corresponding Author)

Received: 2016.02.09 , Accepted: 2017.01.25

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۹ / شمارهٔ ۳/ پاییز ۱۳۹۵
ص. ص. ۱۲-۱

حل تقریبی سرعت لازم در مدل زمین بیضی‌گون با فرض شتاب گرانش تکه‌ای خطی

محسن دهقانی محمدآبادی[۱] و سیدحمید جلالی نائینی[۲*]

۱ و ۲- دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

*تهران، کدپستی: ۱۴۱۱۷-۱۳۱۱۶

shjalalinaini@modares.ac.ir

در این مقاله، حل تقریبی سرعت لازم با قید بردار موقعیت نهایی در مدل زمین بیضی‌گون با استفاده از فرض شتاب گرانش تکه‌ای خطی ارائه شده است. در این روش، زمان پرواز به چند بازهٔ زمانی تقسیم و شتاب گرانش در هر بازه به صورت خطی تقریب زده می‌شود. این روش حل به یک رابطهٔ صریح سه‌بعدی برحسب بردار موقعیت کنونی، بردار موقعیت نهایی مطلوب و زمان پرواز منجر خواهد شد. دقت و بار محاسباتی روش یادشده به ازای تعداد بازه‌های مختلف با استفاده از حل عددی مسئله به دست آمده و با دو روش تکرارپذیر زارچان و خطی‌سازی مقایسه شده است. این روش در مقایسه با دو روش یادشده، به ازای بار محاسباتی نسبتاً یکسان، در مدل زمین بیضی‌گون و مدار حداقل انرژی تا زاویهٔ بُرد ۱۸ درجه دقت بیشتری دارد. به علاوه، روش ارائه‌شده برای مسئلهٔ دو یا چند جسم و محاسبهٔ ماتریس حساسیت سرعت لازم قابل استفاده است.

واژه‌های کلیدی: سرعت لازم، زمین بیضی‌گون، شتاب گرانش تکه‌ای خطی

علائم و اختصارات

بردار شتاب گرانش	$\vec{g}$
تعداد تکرار	I
ثابت گرانش مرتبهٔ دوم	J_2
تعداد بازه‌های زمانی	N
تعداد نقاط میانی	n
بارمحاسباتی عملیات جذر	Q
بردار موقعیت نقطه خطی‌سازی	$\vec{R}$
شعاع زمین	Re
بردار موقعیت	$\vec{r}$
بارمحاسباتی توابع مثلثاتی	S
طول بازهٔ زمانی حل تکه‌ای	T
زمان	t
زمان نهایی	t_f
زمان باقیمانده تا زمان نهایی	t_{go}
بردار سرعت	$\vec{v}$
بردار سرعت لازم	$\vec{v}_R$
مختصات دستگاه اینرسی زمین‌مرکز	x, y, z
بردار خطای تلاش صفر	$\overrightarrow{\mathrm{ZEM}}$
ثابت گرانش زمین	μ

مقدمه

بردار سرعت لازم، یک کمیت اساسی در هدایت فضاپیماست. بردار سرعت لازم، بردار سرعتی فرضی برای رسیدن فضاپیما به شرایط نهایی مطلوب در زمان نهایی از پیش معلوم است؛ در صورتی که موتور پیشران فضاپیما خاموش بوده و فضاپیما تنها تحت تأثیر شتاب گرانش حرکت کند. برحسب اینکه شرایط نهایی چه باشد، مسئله متفاوت می‌شود. در اینجا قید بردار موقعیت نهایی در زمان نهایی (از پیش معلوم) مد نظر است که با فرض مدل زمین کروی به مسئلهٔ لامبرت مشهور است [۳-۱].

---

۱. دانشجوی دکتری
۲. استادیار (نویسنده مخاطب)

دریافت مقاله: ۹۴/۰۲/۱۹ ، تأیید مقاله ۹۵/۱۱/۰۶

مسئلهٔ بردار سرعت لازم با قید بردار موقعیت نهایی در زمان نهایی از پیش معلوم در مدل زمین تخت به حل تحلیلی صریح منجر می‌شود، اما در مدل زمین کروی، حل صریح به دست نیامده است. در منابع، حل‌های تقریبی، تکرارپذیر و بازگشتی برای مسئلهٔ لامبرت ارائه شده است. در روش‌های بازگشتی سعی می‌شود رابطهٔ زمان پرواز برحسب یک متغیر مستقل استخراج و با یک روش تکراری مناسب حل شود [۴]. مشهورترین روش بازگشتی، روش گوس است. دو ایراد عمدهٔ روش گوس، وجود نقطهٔ تکین برای زاویهٔ برد ۱۸۰ درجه و کندی سرعت همگرایی در زوایای بُرد کوتاه است. لاگرانژ، رابطهٔ زمان پرواز را برحسب متغیر مستقل متفاوتی (نسبت به روش گوس) به دست آورده است که هرچند بار محاسباتی آن بیشتر از روش گوس است، اما نسبت به روش‌های حل تکراری خوش‌رفتارتر است، بنابراین، در مرجع [۵]، روش لاگرانژ با روش گوس تلفیق شده است تا علاوه بر حفظ مزایا و سادگی روش گوس، سرعت همگرایی را افزایش دهد. در مرجع [۶]، با به کاربردن یک پارامتر آزاد در معادلات کپلر، با همان روش سادهٔ گوس، الگوریتم حلی ارائه شده است که دو ضعف یادشده (نقطهٔ تکین و همگرایی کند روش گوس) را بر طرف کرده است. در مراجع [۷] و [۸]، با پیشنهاد نقطهٔ شروع حل مناسب برای روش تکراری سادهٔ نیوتن ـ رافسون سرعت همگرایی روش گوس بهبود یافته است. حل مسئلهٔ لامبرت حداقل انرژی در مرجع [۹] و حل مسئلهٔ سرعت لازم حداقل انرژی برای هدف زیرمداری در مرجع [۱۰] ارائه شده است.

در روش‌های بازگشتی کلاسیک مانند روش گوس، رابطهٔ مستقیم و قابل درکی بین متغیر تکراری و حتی نتایج تکرار نسبت به متغیرهای فیزیکی برقرار نیست، بنابراین، در مرجع [۱۱] یک روش تکرارپذیر براساس رابطهٔ بردار سرعت لازم برحسب زاویهٔ مسیر اولیه، با متغیر تکراری زاویهٔ مسیر اولیه معرفی شده است. اخیراً نیز گرادیان زمان پرواز نسبت به زاویهٔ مسیر اولیه (متغیر تکراری) به دست آمده و با استفاده از آن الگوریتم تکراری با سرعت همگرایی بالاتری ارائه شده است [۱۲]. در مرجع [۱۳] برای مقداردهی اولیه برای حل مسئلهٔ لامبرت، از یک جدول استفاده شده است که سبب افزایش سرعت همگرایی می‌شود.

در روش‌های تقریبی، معادلات حرکت یا شتاب گرانش زمین به نحوی ساده شده و یک رابطهٔ صریح برای بردار خطای تلاش صفر یا بردار سرعت لازم برحسب زمان نهایی استخراج می‌شود. البته حل معادلات حرکت در مدل زمین کروی با کمک سری توانی برحسب ضرایب لاگرانژ در دسترس است [۲]، اما نمی‌توان رابطهٔ بردار سرعت لازم را به طور مستقیم از آن استخراج کرد. از جمله روش‌های تقریبی می‌توان به روش تخمین شتاب گرانش به صورت تابعی معلوم از زمان اشاره کرد. در روش اخیر، شتاب گرانش به صورت تابعی درجهٔ یک، دو یا درجه بالاتر از زمان در نظر گرفته می‌شود [۱۴]. به علاوه در مرجع [۱۴]، روش خطی‌سازی شتاب گرانش ارائه و براساس آن رابطهٔ بردار خطای تلاش صفر به دست آمده است. رابطهٔ خطای تلاش صفر در مرجع [۱۵] با استفاده از روابط نسبی و بسط نسبت فاصلهٔ هدف بر فاصلهٔ رهگیر استخراج شده است. در مرجع [۱۶] روش خطی‌سازی شتاب گرانش برای استخراج قانون هدایت نزدیک بهینه برای مسئلهٔ رهگیری خارج از جو استفاده شده است. این استخراج در مرجع [۱۷] با ساده‌سازی ماتریس سیستم انجام شده است.

در مرجع [۱۸] روش خطی‌سازی شتاب گرانش با خطی‌سازی حول نقاط مختلف توسعه داده شده است. در این مرجع نشان داده شده است که انتخاب مناسب نقطهٔ خطی‌سازی سبب افزایش دقت می‌شود و از پنج نقطهٔ خطی‌سازی مطالعه‌شده، نقطهٔ خطی‌سازی به صورت «میانگین سه پارامتر موقعیت موشک، موقعیت هدف و تخمین موقعیت برخورد» بیشترین دقت را دارد. همان‌طور که در مسائل خطی‌سازی حول یک نقطه انتظار می‌رود با افزایش فاصله نسبت به نقطهٔ خطی‌سازی، خطا افزایش می‌یابد. در مرجع [۱۹] حل تقریبی بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت، با قید بردار سرعت نهایی (و نه مسئلهٔ لامبرت) با فرض شتاب گرانش خطی بین موقعیت فعلی فضاپیما و موقعیت نهایی ارائه شده است. در مجموع می‌توان انتظار داشت، خطای روش خطی‌سازی شتاب گرانش با افزایش برد افزایش یابد و تنها برای بردهای نسبتاً کوتاه قابل استفاده باشد.

در روش‌های تقریبی، هرچه مدل در نظر گرفته‌شده به مدل واقعی نزدیک‌تر باشد، حل مسئله دقیق‌تر می‌شود؛ اما برای افزایش دقت حل، به اطلاعات کامل‌تر و در نتیجه افزایش بار محاسباتی نیاز است. یکی دیگر از روش‌های حل تقریبی، روش تکه‌ای خطی است که در مسائل مختلف به کار رفته است. به طور نمونه، روش تکه‌ای خطی برای حل عددی معادلات مرتبهٔ دوم غیر خطی [۲۰]، تعیین مدار تناوبیِ نوسانگرهای غیر خطی [۲۱]، کنترل نزدیک بهینه [۲۲] و هدایت و کنترل وسایل پرتابی بازگشتی [۲۳] استفاده شده است. اما در کاربرد محاسبهٔ بردار سرعت لازم، در مرجع [۲۴] از روش تکه‌ای خطی استفاده شده است. در مرجع اخیر با فرض شتاب گرانش تکه‌ای خطی، رابطهٔ بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت با قید بردار سرعت نهایی (و نه مسئلهٔ لامبرت) استخراج شده است. در روش شتاب گرانش تکه‌ای خطی، زمان پرواز به چند بازهٔ زمانی تقسیم شده و در هر بازه، شتاب گرانش بین دو نقطهٔ میانی به صورت خطی تقریب زده و سپس، دقت نتایج بررسی و مقایسه شده است. به علاوه، روش شتاب گرانش تکه‌ای خطی در مرجع [۲۴]، برای حل مسئلهٔ لامبرت نیز اعمال شده است؛ اما برای این حالت، تقریب مناسبی برای شتاب گرانش نقاط میانی استخراج نشده و لذا به دقت نتایج اشاره‌ای نشده است.

در این مقاله، روش تکه‌ای خطی مرجع [۲۴] در مسئلهٔ لامبرت، تکمیل و سه الگوریتم تقریبی برای محاسبهٔ شتاب گرانش نقاط میانی ارائه شده است. به علاوه، این روش برای مدل زمین بیضی‌گون تعمیم داده شده است. با توجه به بار محاسباتی و دقت حل مسئله، دو روش از سه روش یادشده انتخاب و با روش تکرارپذیر زارچان [۱۱] و خطی‌سازی مقایسه شده است.

بردار سرعت لازم

معادلهٔ حرکت وسیلهٔ پروازی که به صورت جرم نقطه‌ای مدل شده است مطابق رابطهٔ (۱) است:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g}(\vec{r}) \qquad (۱)$$

که در آن، $\vec{r}$ بردار موقعیت فضاپیما و $\vec{g}(\vec{r})$ بردار شتاب گرانش نسبت به مرجع اینرسی زمین‌مرکز (ECI) است. با دو بار انتگرال‌گیری از رابطهٔ (۱)، می‌توان نوشت:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0)\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t}(t - \xi)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, \xi)]d\xi \qquad (۲)$$

که پایین‌نویس "0" نمایانگر شرایط اولیه است. بنابراین، رابطهٔ بردار موقعیت نهایی در زمان نهایی t_f به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{r}(t_f) = \vec{r}_0 + (t_f - t_0)\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_f}(t_f - t)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t)]dt \qquad (۳)$$

با استفاده از رابطهٔ اخیر، بردار سرعت لازم با قید بردار موقعیت نهایی ($\vec{r}_f^*$) به دست می‌آید که با $\vec{v}_R$ نمایش داده می‌شود:

$$\vec{v}_R(t_0) = \frac{\vec{r}_f^* - \vec{r}_0}{t_f - t_0} - \frac{1}{t_f - t_0}\int_{t_0}^{t_f}(t_f - t)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_{R_0}, t)]dt \qquad (۴)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در حالت کلی عبارت داخل انتگرال نیز تابعی از سرعت لازم است. البته در حالت خاص، به طور نمونه با فرض شتاب گرانش ثابت، بردار سرعت لازم به صورت صریح به دست می‌آید:

$$\vec{v}_R(t_0) = \frac{\vec{r}_f^* - \vec{r}_0}{t_f - t_0} - \frac{1}{2}\vec{g}(t_f - t_0) \qquad (۵)$$

اما حل صریح و دقیق رابطهٔ (۴) با فرض مدل زمین کروی یا بیضی‌گون، دشوار بوده و تاکنون ارائه نشده است. یک روش تقریبی برای حل تحلیلی مسئلهٔ یادشده، استفاده از فرض شتاب گرانش تکه‌ای خطی است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

محاسبهٔ بردار سرعت لازم با فرض شتاب گرانش تکه‌ای خطی

برای حل تقریبی رابطهٔ (۴)، بازهٔ زمانی $[t_0, t_f]$ به N بازهٔ زمانی $[t_j, t_{j+1}]$ با طول بازهٔ $T_{j+1} = t_{j+1} - t_j$ $(j = 0,1,\dots,N-1)$ تقسیم و در هر بازه، شتاب گرانش به صورت یک رابطهٔ خطی بین نقطهٔ ابتدا و انتهای بازه در نظر گرفته می‌شود [۲۴]:

$$\vec{g}(\vec{r}(t)) = \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j}\vec{g}\left(\vec{r}(t_j)\right) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}\vec{g}\left(\vec{r}(t_{j+1})\right) \qquad (۶)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۶) در رابطهٔ (۴) و با فرض طول بازهٔ زمانی یکسان، $T = (t_f - t_0)/N$، رابطهٔ تقریبی بردار سرعت لازم برحسب مقادیر شتاب گرانش نقاط میانی مسیر به دست می‌آید [۲۴]:

$$\vec{v}_{R_0} = \frac{\vec{r}_f^* - \vec{r}_0}{t_f - t_0} - \frac{t_f - t_0}{6N^2}\left[(3N - 1)\vec{g}_0 + \vec{g}_f + 6\sum_{j=1}^{N-1}(N - j)\vec{g}_j\right] \qquad (۷)$$

همان‌طور که اشاره شد، برای محاسبهٔ بردار سرعت لازم از رابطهٔ (۷) به محاسبهٔ بردار شتاب گرانش در زمان‌های مختلف نیاز است که با فرض مدل زمین کروی از رابطهٔ (۸) و با فرض مدل زمین بیضی‌گون از رابطهٔ (۹) به دست می‌آید:

$$\vec{g}_j = -\frac{\mu\vec{r}_j}{r_j} \qquad (۸)$$

$$\vec{g}_j = -\frac{\mu}{r_j}\begin{bmatrix} k_e & 0 & 0 \\ 0 & k_e & 0 \\ 0 & 0 & k_p \end{bmatrix}\vec{r}_j \qquad (۹)$$

که در آن

$$k_e = 1 + \frac{3}{2}J_2\left(\frac{Re}{r_j}\right)^2\left(1 - 5\left(\frac{z_j}{r_j}\right)^2\right) + \cdots \qquad (۱۰)$$

$$k_p = 1 + \frac{3}{2}J_2\left(\frac{Re}{r_j}\right)^2\left(3 - 5\left(\frac{z_j}{r_j}\right)^2\right) + \cdots \qquad (۱۱)$$

که در آن، Re شعاع زمین در استوا، μ ثابت گرانش زمین، J_2 ثابت گرانش مرتبهٔ دوم ($J_2 = 1.082628 \times 10^{-3}$) و z مؤلفهٔ سوم بردار موقعیت در دستگاه ECI است. در این روابط برای به دست آوردن شتاب گرانش در نقاط میانی، به بردار موقعیت آنها نیاز است که در ادامه، روابطی تقریبی برای محاسبهٔ آن استخراج می‌شود.
ابتدا با استفاده از رابطهٔ (۲) موقعیت نقطهٔ میانی در زمان t_j نوشته می‌شود:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_0 + (t_j - t_0)\vec{v}_{R_0} + \int_{t_0}^{t_j}(t_j - t)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_{R_0}, t)]dt \qquad (۱۲)$$

یا

$$\vec{r}_j = \vec{r}_0 + (t_j - t_0)\vec{v}_{R_0} + \sum_{k=0}^{j-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_j - t)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_{R_0}, t)]dt \qquad (۱۳)$$

با استفاده از فرض مدل گرانش تکه‌ای خطی مطابق رابطۀ (۶)، عبارت آخر در سمت راست رابطۀ (۱۳) به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$6\sum_{k=0}^{j-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_j - t)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_{R_0}, t)]dt = T_1[3(t_j - t_0) - T_1]\vec{g}_0 + T_j^2\vec{g}_j + \sum_{k=1}^{j-1}[T_k^2 - T_{k+1}^2 + 3(T_k + T_{k+1})(t_j - t_k)]\vec{g}_k \qquad (۱۴)$$

رابطۀ (۱۴) با فرض طول بازۀ زمانی ثابت، $T = (t_f - t_0)/N$، ساده می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{j-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_j - t)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_{R_0}, t)]dt = \frac{(t_f - t_0)^2}{6N^2}\left[(3j-1)\vec{g}_0 + \vec{g}_j + 6\sum_{k=1}^{j-1}(j-k)\vec{g}_k\right] \qquad (۱۵)$$

با قرار دادن رابطۀ (۷) به جای $\vec{v}_R(t_0)$ و رابطۀ (۱۵) به جای عبارت آخر سمت راست رابطۀ (۱۳)، رابطۀ تقریبی بردار موقعیت نقاط میانی استخراج می‌شود ($2 \le j \le N-1$):

$$\vec{r}_j = \frac{1}{N}\left\{(N-j)\vec{r}_0 + j\vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{6N^2}\left[(N-j)\vec{g}_0 + j\vec{g}_f - N\vec{g}_j - 6N\sum_{k=1}^{j-1}(j-k)\vec{g}_k + 6j\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\vec{g}_k\right]\right\} \qquad (۱۶)$$

و به ازای $j = 1$:

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{N}\left\{(N-1)\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{6N^2}\left[(N-1)\vec{g}_0 + \vec{g}_f - N\vec{g}_1 + 6\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\vec{g}_k\right]\right\} \qquad (۱۷)$$

البته برای محاسبۀ روابط (۱۶) و (۱۷) به محاسبۀ شتاب گرانش نقاط میانی نیاز است که برای این منظور، چهار روش تقریبی پیشنهاد می‌شود:

۱- تقریب شتاب گرانش نقاط میانی برحسب نقطۀ ابتدایی و پایانی: در مرحلۀ اول این روش، شتاب گرانش نقاط میانی با توجه به فاصلۀ زمانی نقطۀ میانی از نقطۀ ابتدا و انتها با فرض شتاب گرانش خطی تخمین زده می‌شود:

$$\vec{g}_k = \frac{1}{N}\left[(N-k)\vec{g}_0 + k\vec{g}_f\right] \qquad (۱۸)$$

در مرحلۀ دوم، با استفاده از محاسبۀ شتاب‌های گرانش نقاط میانی مطابق رابطۀ (۱۸)، بردار موقعیت نقاط میانی از روابط (۱۶) و (۱۷) محاسبه می‌شود. در نهایت، شتاب گرانش نقاط میانی منتج از روابط (۱۶) و (۱۷)، از رابطۀ (۸) یا (۹) محاسبه خواهد شد که مقادیر آن در محاسبۀ سرعت لازم (۷) مورد نیاز است.

۲- محاسبۀ شتاب گرانش نقاط میانی با استفاده از سه نقطۀ ابتدایی، پایانی و میانه: در این روش، ابتدا تقریب نخست شتاب گرانش نقطۀ میانه ($\vec{g}_{m,1}$) از رابطۀ (۱۸) به ازای $N = 2$ و $k = 1$ به دست می‌آید:

$$\vec{g}_{m,1} = \frac{1}{2}(\vec{g}_0 + \vec{g}_f) \qquad (۱۹)$$

که در آن، عدد بعد از ویرگول در پایین‌نویس بردار شتاب گرانش، نمایانگر شمارۀ تخمین است. در مرحلۀ دوم، با جایگزینی رابطۀ اخیر در رابطۀ (۱۷) به ازای $N = 2$ و $j = 1$ می‌توان نوشت:

$$\vec{r}_m = \frac{1}{2}\left[\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{24}(\vec{g}_0 + \vec{g}_f + 4\vec{g}_{m,1})\right] \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری رابطۀ (۱۹) در رابطۀ (۲۰)، تقریب بردار موقعیت نقطۀ میانه حاصل می‌شود:

$$\vec{r}_m = \frac{1}{2}\left[\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{8}(\vec{g}_0 + \vec{g}_f)\right] \qquad (۲۱)$$

در ادامه با استفاده از رابطۀ (۸) برای مدل زمین کروی یا از رابطۀ (۹) برای مدل بیضی‌گون، تقریب دوم شتاب گرانش نقطۀ میانه به دست می‌آید که با $\vec{g}_{m,2}$ نمایش داده می‌شود.

در مرحلۀ سوم، اگر نقاط میانی بین دو نقطۀ ابتدا و میانه باشد، شتاب گرانش آنها با توجه به فاصلۀ زمانی آن نقطه از نقطۀ ابتدا و میانه با فرض شتاب گرانش خطی تخمین زده می‌شود. به همین ترتیب، اگر نقاط میانی بین دو نقطۀ میانه و پایانی باشد، شتاب گرانش آنها با توجه به فاصلۀ زمانی آن نقطه از نقطۀ میانه و پایانی با فرض شتاب گرانش خطی تخمین زده می‌شود. بنابراین:

$$\vec{g}_k = \frac{1}{N}\begin{cases}(N-2k)\vec{g}_0 + 2k\vec{g}_{m,2} & 0 \le k \le \frac{N}{2} \\ 2(N-k)\vec{g}_{m,2} + (2k-N)\vec{g}_f & \frac{N}{2} < k \le N\end{cases} \qquad (۲۲)$$

این تقریب برای محاسبۀ تقریبی بردار موقعیت نقاط میانی مطابق روابط (۱۶) و (۱۷) است. سپس، شتاب گرانش نقاط میانی منتج از روابط (۱۶) و (۱۷)، از روابط (۸) یا (۹) محاسبه می‌شود. در نهایت، با جایگذاری این شتاب‌های گرانش در رابطۀ (۷)، بردار سرعت لازم به طور تقریبی محاسبه می‌شود.

۳- تقریب شتاب گرانش نقاط میانی با استفاده از نقطۀ ابتدایی، پایانی و دو نقطۀ میانی اولیه: در این روش، ابتدا از رابطۀ (۲۱) بردار موقعیت نقطۀ میانه محاسبه و با استفاده از رابطۀ (۸) یا (۹) شتاب گرانش آن به دست می‌آید که با $\vec{g}_{m,2}$ نمایش داده می‌شود. سپس، تقریب نخست شتاب گرانشِ دو نقطۀ میانی اولیه ($\vec{g}_{m_{1,1}}$ و $\vec{g}_{m_{2,1}}$) از رابطۀ (۲۲) به ازای $N = 3$ و $k = 1,2$ به دست می‌آید:

$$\vec{g}_{m_{1,1}} = \frac{1}{3}\left(\vec{g}_0 + 2\vec{g}_{m,2}\right) \tag{۲۳}$$

$$\vec{g}_{m_{2,1}} = \frac{1}{3}\left(2\vec{g}_{m,2} + \vec{g}_f\right) \tag{۲۴}$$

در مرحلهٔ دوم، با جایگزینی دو رابطهٔ اخیر در روابط (۱۶) و (۱۷) به ازای $N = 3$ و $j = 1,2$، می‌توان نوشت:

$$\vec{r}_{m_1} = \frac{1}{3}\left[2\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{54}\left(2\vec{g}_0 + \vec{g}_f + 9\vec{g}_{m_{1,1}} + 6\vec{g}_{m_{2,1}}\right)\right] \tag{۲۵}$$

$$\vec{r}_{m_2} = \frac{1}{3}\left[\vec{r}_0 + 2\vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{54}\left(\vec{g}_0 + 2\vec{g}_f + 6\vec{g}_{m_{1,1}} + 9\vec{g}_{m_{2,1}}\right)\right] \tag{۲۶}$$

با جایگذاری روابط (۲۳) و (۲۴) در روابط (۲۵) و (۲۶)، تقریب بردار موقعیت نقاط میانی اولیه حاصل می‌شود:

$$\vec{r}_{m_1} = \frac{1}{3}\left[2\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{54}\left(5\vec{g}_0 + 10\vec{g}_{m,2} + 3\vec{g}_f\right)\right] \tag{۲۷}$$

$$\vec{r}_{m_2} = \frac{1}{3}\left[\vec{r}_0 + 2\vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{54}\left(3\vec{g}_0 + 10\vec{g}_{m,2} + 5\vec{g}_f\right)\right] \tag{۲۸}$$

در ادامه، با استفاده از رابطهٔ (۸) یا (۹)، تقریب دوم شتاب گرانشِ دو نقطهٔ میانی اولیه به دست می‌آید که با $\vec{g}_{m_{1,2}}$ و $\vec{g}_{m_{2,2}}$ نمایش داده می‌شود.

در مرحلهٔ سوم، با توجه به اینکه نقاط میانی بین کدام نقاط مرجع (ابتدایی، پایانی و دو نقطهٔ میانی اولیه) قرار می‌گیرد، از تقریب شتاب گرانش خطی با استفاده از دو نقطهٔ مرجع در طرفین آن استفاده می‌شود:

$$\vec{g}_k = \frac{1}{N}\begin{cases}(N - 3k)\vec{g}_0 + 3k\vec{g}_{m_{1,2}} & 0 \le k \le \frac{N}{3}\\ (2N - 3k)\vec{g}_{m_{1,2}} + (3k - N)\vec{g}_{m_{2,2}} & \frac{N}{3} < k \le \frac{2N}{3}\\ 3(N - k)\vec{g}_{m_{2,2}} + (3k - 2N)\vec{g}_f & \frac{2N}{3} < k \le N\end{cases} \tag{۲۹}$$

با استفاده از شتاب‌های گرانش نقاط میانی یادشده، بردار موقعیت نقاط میانی از روابط (۱۶) و (۱۷) محاسبه می‌شود. در نهایت، شتاب گرانش نقاط میانی منتج از روابط (۱۶) و (۱۷)، از رابطهٔ (۸) یا (۹)، محاسبه می‌شود که به مقادیر آن در محاسبهٔ بردار سرعت لازم (۷) نیاز است.

۴- تقریب شتاب گرانش نقاط میانی با استفاده از نقطهٔ ابتدایی، پایانی و سه نقطهٔ میانی اولیه: در این روش، ابتدا تقریب نخست شتاب گرانشِ سه نقطهٔ میانی اولیه ($\vec{g}_{q_{1,1}}$، $\vec{g}_{q_{2,1}}$ و $\vec{g}_{q_{3,1}}$) از رابطهٔ (۲۹) به ازای $N = 4$ و $k = 1,2,3$ به دست می‌آید:

$$\vec{g}_{q_{1,1}} = \frac{1}{4}\left(\vec{g}_0 + 3\vec{g}_{m_{1,2}}\right) \tag{۳۰}$$

$$\vec{g}_{q_{2,1}} = \frac{1}{2}\left(\vec{g}_{m_{1,2}} + \vec{g}_{m_{2,2}}\right) \tag{۳۱}$$

$$\vec{g}_{q_{3,1}} = \frac{1}{4}\left(3\vec{g}_{m_{2,2}} + \vec{g}_f\right) \tag{۳۲}$$

که در آن، $\vec{g}_{m_{1,2}}$ و $\vec{g}_{m_{2,2}}$ از روابط روش سوم محاسبه می‌شود. در مرحلهٔ دوم، با جایگزینی سه رابطهٔ اخیر در روابط (۱۶) و (۱۷) به ازای $N = 4$ و $j = 1,2,3$، تقریب بردار موقعیت نقاط میانی اولیه حاصل می‌شود:

$$\vec{r}_{q_1} = \frac{1}{4}\left[3\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{96}\left(3\vec{g}_0 + \vec{g}_f + 14\vec{g}_{q_{1,1}} + 12\vec{g}_{q_{2,1}} + 6\vec{g}_{q_{3,1}}\right)\right] \tag{۳۳}$$

$$\vec{r}_{q_2} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{96}\left(\vec{g}_0 + \vec{g}_f + 6\vec{g}_{q_{1,1}} + 10\vec{g}_{q_{2,1}} + 6\vec{g}_{q_{3,1}}\right)\right] \tag{۳۴}$$

$$\vec{r}_{q_3} = \frac{1}{4}\left[\vec{r}_0 + 3\vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{96}\left(\vec{g}_0 + 3\vec{g}_f + 6\vec{g}_{q_{1,1}} + 12\vec{g}_{q_{2,1}} + 14\vec{g}_{q_{3,1}}\right)\right] \tag{۳۵}$$

و یا

$$\vec{r}_{q_1} = \frac{1}{4}\left[3\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{192}\left(13\vec{g}_0 + 33\vec{g}_{m_{1,2}} + 21\vec{g}_{m_{2,2}} + 5\vec{g}_f\right)\right] \tag{۳۶}$$

$$\vec{r}_{q_2} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{192}\left(5\vec{g}_0 + 19\vec{g}_{m_{1,2}} + 19\vec{g}_{m_{2,2}} + 5\vec{g}_f\right)\right] \tag{۳۷}$$

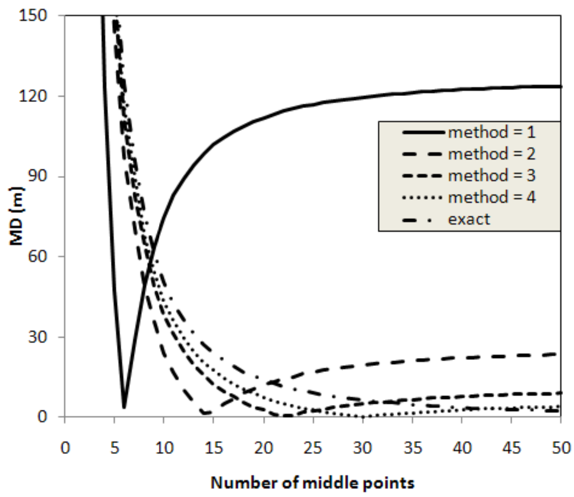
$$\vec{r}_{q_3} = \frac{1}{4}\left[\vec{r}_0 + 3\vec{r}_f^* - \frac{(t_f - t_0)^2}{192}\left(5\vec{g}_0 + 21\vec{g}_{m_{1,2}} + 33\vec{g}_{m_{2,2}} + 13\vec{g}_f\right)\right] \tag{۳۸}$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ (۸) یا (۹)، تقریب دوم شتاب گرانشِ سه نقطهٔ میانی اولیه مطابق روابط (۳۵) تا (۳۷) به دست می‌آید که با $\vec{g}_{q_{1,2}}$، $\vec{g}_{q_{2,2}}$ و $\vec{g}_{q_{3,2}}$ نمایش داده می‌شود.

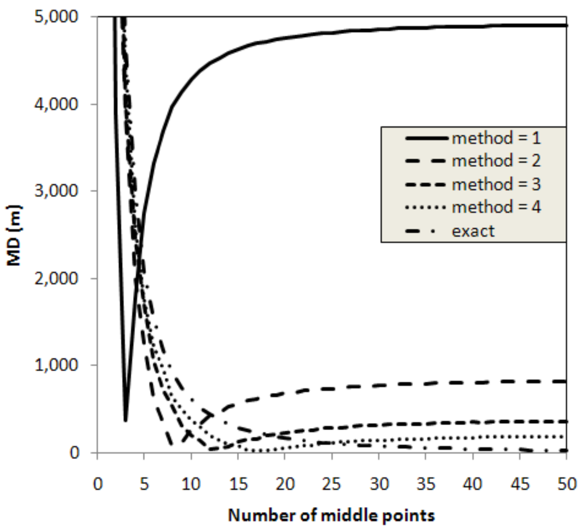
در مرحلهٔ سوم، با توجه به اینکه نقاط میانی بین کدام نقاط مرجع (ابتدایی، پایانی و سه نقطهٔ میانی اولیه) قرار می‌گیرد، از تقریب شتاب گرانش خطی با استفاده از دو نقطهٔ مرجع در طرفین آن استفاده می‌شود:

$$\vec{g}_k = \frac{1}{N}\begin{cases}(N - 4k)\vec{g}_0 + 4k\vec{g}_{q_{1,2}} & 0 \le k \le \frac{N}{4}\\ 2(N - 2k)\vec{g}_{q_{1,2}} + (4k - N)\vec{g}_{q_{2,2}} & \frac{N}{4} < k \le \frac{N}{2}\\ (3N - 4k)\vec{g}_{q_{2,2}} + 2(2k - N)\vec{g}_{q_{3,2}} & \frac{N}{2} < k \le \frac{3N}{4}\\ 4(N - k)\vec{g}_{q_{3,2}} + (4k - 3N)\vec{g}_f & \frac{3N}{4} < k \le N\end{cases} \tag{۳۹}$$

در ادامه، با استفاده از شتاب‌های گرانش نقاط میانی یادشده، بردار موقعیت نقاط میانی از روابط (۱۶) و (۱۷) محاسبه می‌شود. در نهایت، شتاب گرانش نقاط میانی منتج از روابط (۱۶) و (۱۷)، از رابطهٔ (۸) یا (۹) محاسبه می‌شود که مقادیر آن برای محاسبهٔ بردار سرعت لازم، رابطهٔ (۷)، نیاز است.



الف) زاویهٔ برد ۳ درجه



ب) زاویهٔ برد ۱۰ درجه

شکل ۱– فاصلهٔ خطا برحسب تعداد نقاط میانی برای روش‌های تقریبی اول تا چهارم برای مسیر حداقل انرژی برای زاویهٔ برد الف) ۳ درجه ب) ۱۰ درجه

به همین ترتیب می‌توان تقریب شتاب گرانش نقاط میانی را با افزایش تعداد نقاط میانی اولیه ادامه داد که البته سبب افزایش بار محاسباتی می‌شود. بنابراین، انتخاب تعداد نقاط میانی اولیه باید با توجه به دقت مورد نیاز و بار محاسباتی مجاز باشد. برای این منظور، خطای حاصل از روابط تقریبی بردار سرعت لازم در چهار روش مذکور برحسب تعداد نقاط میانی به ازای زوایای برد ۳ و ۱۰ درجه در شکل ۱ مقایسه شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود، لزوماً با افزایش نقاط میانی، دقت محاسبهٔ سرعت لازم افزایش نمی‌یابد؛ زیرا شتاب گرانش این نقاط با تقریب یک، دو یا سه نقطهٔ میانی اولیه (متناظر با روش‌های دوم تا چهارم) محاسبه شده است. اگر شتاب گرانش تمام نقاط میانی، به طور دقیق در دسترس باشد (نمودارهای خط نقطه در شکل ۱)، با افزایش تعداد این نقاط، دقت محاسبهٔ سرعت لازم افزایش می‌یابد، اما باز هم خطای آن صفر نمی‌شود، زیرا شتاب گرانش دیگر نقاط (بین نقاط میانی) با تقریب گرانش خطی محاسبه شده است. شایان ذکر است که نتایج شکل ۱ برای مدل زمین کروی و حرکت در خلأست و زمان نهایی پرواز برای مدار حداقل انرژی لحاظ شده است که برای زاویهٔ برد ۳ و ۱۰ درجه به ترتیب ۲۶۷/۰۱ و ۵۰۶/۳۶ ثانیه است، همچنین، فاصلهٔ اولیه فضاپیما و موقعیت نهایی مطلوب از مرکز زمین برابر ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر گرفته شده است.

افزایش تعداد نقاط میانی و همچنین، افزایش تعداد نقاط میانی اولیه برای تقریب شتاب گرانش سبب افزایش بار محاسباتی می‌شود. بنابراین، توجه به دقت مورد نیاز و بار محاسباتی در انتخاب روش بسیار مهم است. پس با توجه به شکل ۱، روش اول با سه نقطهٔ میانی یا روش دوم با هشت نقطهٔ میانی انتخاب شده است که در بخش بحث و نتایج، تحلیل کامل‌تری در این خصوص ارائه می‌شود.

در ادامه، روابط روش اول با سه نقطهٔ میانی ($N = 4$) خلاصه می‌شود. بنابراین، ابتدا طبق روابط (۱۶) و (۱۷)، بردار موقعیت نقاط میانی تقریب زده می‌شود:

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{4}\left[3\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{t_f^2}{32}\left(7\vec{g}_0 + 5\vec{g}_f\right)\right]$$

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{2}\left[\vec{r}_0 + \vec{r}_f^* - \frac{t_f^2}{8}\left(\vec{g}_0 + \vec{g}_f\right)\right] \qquad (۴۰)$$

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{4}\left[\vec{r}_0 + 3\vec{r}_f^* - \frac{t_f^2}{32}\left(5\vec{g}_0 + 7\vec{g}_f\right)\right]$$

سپس، شتاب گرانش نقاط میانی از رابطهٔ (۸) یا (۹) محاسبه و برای تقریب بردار سرعت لازم در رابطهٔ (۷) قرار داده می‌شود:

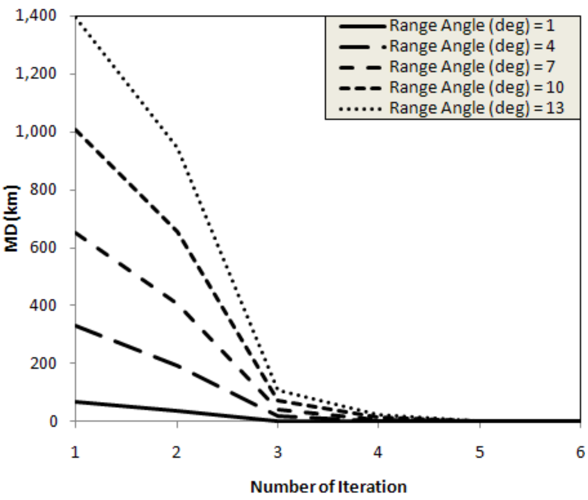
$$\vec{v}_R = \frac{\vec{r}_f^* - \vec{r}_0}{t_f} - \frac{t_f}{96}\left(11\vec{g}_0 + \vec{g}_f + 18\vec{g}_1 + 12\vec{g}_2 + 6\vec{g}_3\right) \qquad (۴۱)$$

بحث و نتایج

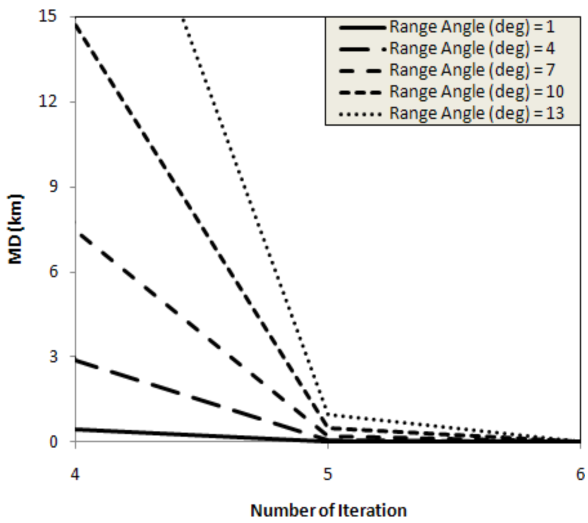
در این بخش با استفاده از نتایج حل عددی معادلات حرکت، دقت روش شتاب گرانش تکه‌ای خطی بررسی کامل‌تری می‌شود و با دو

روش مطرح در منابع شامل روش خطی‌سازی و روش تکرارپذیر زارچان از لحاظ دقت و بار محاسباتی مقایسه می‌شود.

در حل عددی، هدف به صورت یک جرم نقطه‌ای در نظر گرفته شده است که تنها تحت تأثیر شتاب گرانش در مسیر حداقل انرژی برای رسیدن به موقعیت اولیهٔ فضاپیما حرکت می‌کند. بردار موقعیت اولیهٔ فضاپیما $\vec{r}(0) = [6400 \quad 0]^T$ km و اندازهٔ بردار موقعیت اولیهٔ هدف ۶۴۰۰ کیلومتر نسبت به مرکز زمین و موقعیت زاویه‌ای آن با توجه به زاویهٔ برد در نظر گرفته می‌شود. زمان نهایی برای محاسبهٔ سرعت لازم فضاپیما برای مدار حداقل انرژی اعمال شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۲– فاصلهٔ خطای روش تکرارپذیر زارچان برای زوایای برد مختلف در مدل زمین کروی برحسب تعداد تکرار الف) در بازهٔ ۶-۱ ب) در بازهٔ ۶-۴

در مرجع [۱۱] یک روش تکرارپذیر کارآمد توسط زارچان برای حل مسئلهٔ لامبرت ارائه شده است. در این روش، حل عددی با تعداد تکرار نسبتاً کم، در مدل زمین کروی، به دقت قابل قبول همگرا می‌شود. در شکل ۲ که برای وضوح بیشتر در دو مقیاس نمایش داده شده است، فاصلهٔ خطا برحسب تعداد تکرار ترسیم شده است. البته مقادیر فاصلهٔ خطا تنها به ازای اعداد صحیح محور افقی، مقدار خواهد داشت و برای مقادیر غیر صحیح تنها برای نمایش بهتر به صورت خط پیوسته ترسیم شده است. با توجه به این شکل برای مقایسه با دو روش تقریب شتاب گرانش تکه‌ای خطی و خطی‌سازی، تعداد پنج تکرار برای روش زارچان انتخاب شده است تا از لحاظ از بار محاسباتی در یک محدودهٔ قابل قیاس قرار گیرد.

در روش خطی‌سازی از رابطهٔ تقریبی بردار سرعت لازم (۵۷) استفاده می‌شود که در پیوست (الف) با استفاده از روابط مراجع [۱۸-۱۴] استخراج شده است.

بار محاسباتی

بار محاسباتی معمولاً با شمارش اعمال اصلی جمع و تفریق با واحد فلاپس محاسبه می‌شود. بار محاسباتی عملیات‌های دیگر ریاضی مانند ضرب، تقسیم، جذر، توابع مثلثاتی و ... نسبت به بار محاسباتی اعمال اصلی سنجیده می‌شود که برحسب نوع پردازشگر متفاوت است. در مرجع [۲۵]، بار محاسباتی ضرب ۱ فلاپس، تقسیم و جذر ۱۰-۳۰ فلاپس و توابع مثلثاتی و نمایی ۵۰ فلاپس ذکر شده است. البته روند ساختار محاسباتی توابع طوری پیش رفته است که بار محاسباتی این نوع توابع به مقدار زیادی کاهش یافته است. به طور نمونه، مرجع [۲۶] به استاندارد بخش محاسبات پیشرفتهٔ ناسا ارجاع داده است که سازمان فضایی هند آن را در قالب مرجع و استاندارد بار محاسباتی الگوریتم‌ها و کدهای سامانه‌های خود استفاده می‌کند. در این استاندارد، بار محاسباتی ضرب، تقسیم، جذر و توابع سینوس و کسینوس به ترتیب ۱، ۴، ۴، ۸ و ۸ فلاپس مشخص شده است. در این مرجع، برای مقایسهٔ بار محاسباتی دو الگوریتم تخمین وضعیت ماهواره، دو رابطهٔ بار محاسباتی برحسب فلاپس به دست آمده است.

با توجه به اینکه بار محاسباتی توابع (مانند توابع مثلثاتی و جذر) در پردازنده‌ها متفاوت است، استخراج روابط بار محاسباتی برحسب این توابع (برحسب فلاپس) مزیت دارد، زیرا از این طریق تخمین زمان محاسبهٔ پردازشگر میسر خواهد بود. در صورتی که اگر زمان محاسبه به ازای یک پردازشگر در دسترس باشد، تخمین زمان محاسبه به ازای پردازشگر دیگر دشوار خواهد بود و به مشخصات هردو پردازشگر در زمان محاسبهٔ توابع مختلف نیاز است. به علاوه، با داشتن رابطهٔ بار محاسباتی الگوریتم برحسب بار محاسباتی توابع، انتخاب پردازندهٔ مناسب با توجه به نوع توابع میسر خواهد بود. همچنین، برای دستیابی به دقت خاص، در صورتی که سرعت پردازنده کافی نباشد، مشخصات پردازندهٔ مورد نیاز برای توسعه (مشخصات پردازنده درخصوص بار محاسباتی هر یک از توابع) به‌دست می‌آید.

در تحقیق حاضر، بار محاسباتی اعمال اصلی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) یک فلاپس، توابع مثلثاتی با S و جذر با Q نمایش داده می‌شود. بر این اساس، تقریب بار محاسباتی روش شتاب گرانش تکه‌ای خطی برای محاسبهٔ بردار سرعت لازم در مدل زمین کروی و حالت دو بعدی برحسب تعداد نقاط میانی (n) برای دو روش ۱ و ۲ به ترتیب طبق روابط (۴۲) و (۴۳) به دست می‌آید:

بار محاسباتی(فلاپس) $\simeq 38 + 26n + (2 + n)Q$ (۴۲)

بار محاسباتی(فلاپس) $\simeq 39 + 47n + (3 + n)Q$ (۴۳)

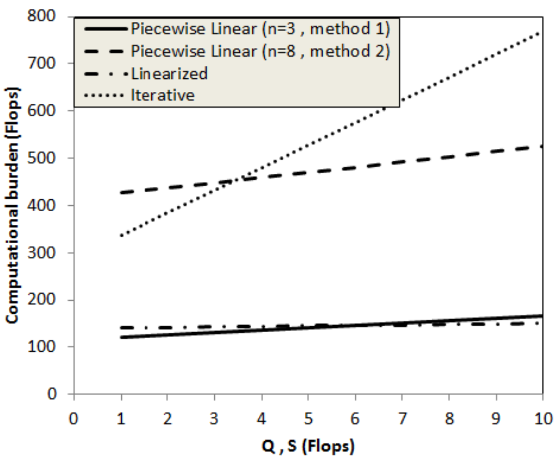
برای مقایسهٔ بار محاسباتیِ روش یادشده با روش خطی‌سازی (۵۷) و روش تکرارپذیر زارچان، بار محاسباتی دو روش اخیر به صورت تقریبی محاسبه شده است که به ترتیب عبارتست از:

بار محاسباتی(فلاپس) $\simeq 140 + Q$ (۴۴)

بار محاسباتی(فلاپس) $\simeq 93 + 39I + (6 + I)Q + (17 + 4I)S$ (۴۵)

که در آن، I تعداد تکرار در روش تکرارپذیر زارچان است. شایان ذکر است که بار محاسباتی در مدل زمین بیضی‌گون نیز در همین حدود است. بنابراین با توجه به دقت و بار محاسباتی، چهار روش زیر برای مقایسه انتخاب شده است:

۱. روش شتاب گرانشِ تکه‌ای خطی با سه نقطهٔ میانی (با بار محاسباتی Q۵+۱۱۶ فلاپس)
۲. روش شتاب گرانشِ تکه‌ای خطی با هشت نقطهٔ میانی (با بار محاسباتی Q۱۱+۴۱۵ فلاپس)
۳. روش خطی‌سازی حول نقطهٔ منتج از رابطهٔ (۵۵) (با بار محاسباتی ۱۴۰ + Q فلاپس)
۴. روش تکرارپذیر زارچان با پنج تکرار (با بار محاسباتی برابر با ۳۷S + ۱۱Q + ۲۸۸ فلاپس)



شکل ۳– بار محاسباتی روش تکه‌ای خطی، خطی‌سازی و تکرارپذیر زارچان در مدل زمین کروی برحسب بار محاسباتی پارامترهای Q و S ($Q = S$)

با توجه به بار محاسباتی Q و S که به نوع پردازشگر بستگی دارد، بار محاسباتی روش‌های یادشده متفاوت خواهد بود که با فرض بار محاسباتی برابر برای Q و S، این بارهای محاسباتی شکل ۳ ترسیم شده است. با توجه به این شکل، بار محاسباتی روش اولِ تقریب تکه‌ای خطی با سه نقطهٔ میانی، نسبت به روش خطی‌سازی در یک حدود و بار محاسباتی آن کمتر از یک‌سوم بار محاسباتی دو روش دیگر است. از طرف دیگر، اگر بار محاسباتی عملیات S بیشتر از ۳ فلاپس باشد، بار محاسباتی روش دومِ تقریب تکه‌ای خطی با هشت نقطهٔ میانی، از روش تکرارپذیر زارچان کمتر است. براساس معیار استاندارد بخش محاسبات پیشرفتهٔ ناسا [۲۶]، بار محاسباتی ۴ روش در نظر گرفته‌شده به ترتیب ۱۳۶، ۴۵۹، ۱۴۴ و ۶۲۸ فلاپس به دست می‌آید که با توجه به دقت، مزیت روش حل تکه‌ای نسبت به روش تکرارپذیر زارچان را نشان می‌دهد (البته با صرف‌نظر از بار محاسباتی علامت تساوی).

همچنین، زمان اجرای هریک از روش‌ها به زبان C و روی پردازشگر Intel Pentium M 725 اندازه‌گیری شده است که به ترتیب برابر ۰/۱۲۳، ۰/۲۳۹، ۰/۱۴۷ و ۰/۴۵۶ میلی‌ثانیه است. به علاوه، زمان اجرای روش‌های مذکور در نرم‌افزار متلب و روی پردازشگر Intel Pentium M 725، به ترتیب برابر ۰/۱۵۴، ۰/۲۹۱، ۰/۱۷۱ و ۰/۵۸۴ میلی‌ثانیه است.

در ادامه، دقت روش‌های معرفی‌شده، برای مدل زمین کروی و برای مدل زمین بیضی‌گون مقایسه شده است.

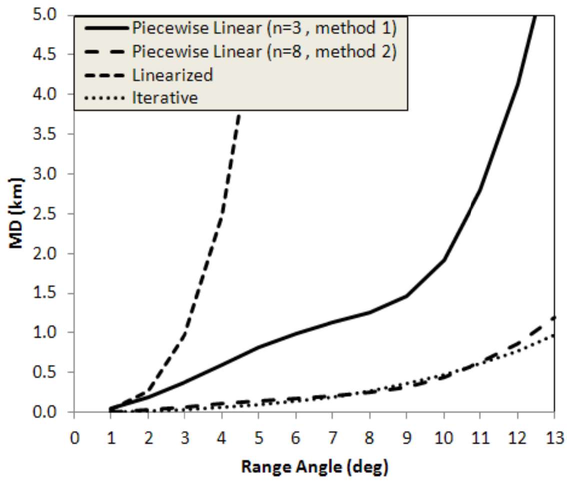
نتایج برای مدل زمین کروی

ابتدا، نتایج مقایسهٔ دقت و بار محاسباتی سه روش مطالعه‌شده برای مدل زمین کروی ارائه می‌شود. برای این منظور، فاصلهٔ خطا به ازای زاویهٔ برد ۱ تا ۱۳ درجه به دست آمده است. شایان ذکر است زاویهٔ برد، زاویهٔ طی‌شده توسط فضاپیماست. یعنی، زاویهٔ برد زاویهٔ بین بردار موقعیت اولیه و نهایی فضاپیما در مختصات اینرسی زمین‌مرکز در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه و انتخاب زمان نهایی پرواز در ابتدای بخش بحث و نتایج ذکر شده است.

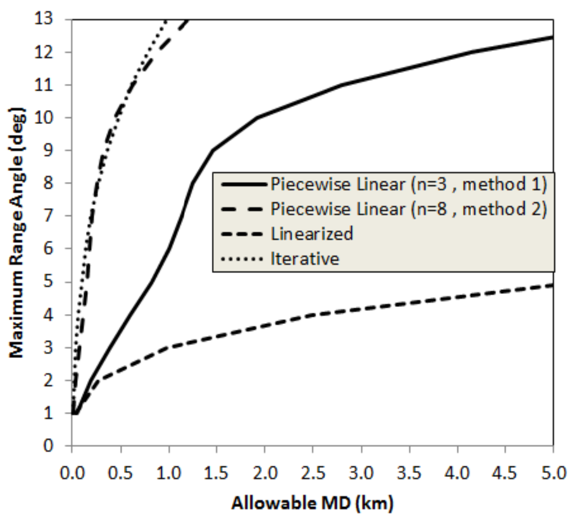
در شکل ۴، فاصلهٔ خطا برحسب زاویهٔ برد برای سه روش تکه‌ای خطی، خطی‌سازی و تکرارپذیر زارچان در مدل زمین کروی ترسیم شده است. البته نتایج برای روش تکه‌ای خطی به ازای روش اول تکه‌ای خطی با سه نقطهٔ میانی ($n = 3$) و روش دوم آن با هشت نقطهٔ میانی ($n = 8$) است. همان‌طور که از شکل ۴ ملاحظه می‌شود و همچنین، با توجه به بار محاسباتی روش‌ها که در قسمت قبل بحث شد، روش اول تکه‌ای خطی با سه نقطهٔ میانی، بار محاسباتی تقریباً یکسان با روش خطی‌سازی دارد، اما دقت آن از روش خطی‌سازی بیشتر است. برای نمونه، با توجه به شکل ۵ به ازای فاصلهٔ خطای

مجاز یک کیلومتر، روش تکه‌ای خطی تا زاویهٔ برد ۶ درجه و روش خطی‌سازی، تا زاویهٔ برد ۳ درجه قابل استفاده است.

همچنین، با توجه به شکل ۴، روش دومِ تقریب تکه‌ای خطی با هشت نقطهٔ میانی در مقایسه با روش تکرارپذیر زارچان با پنج تکرار، تا زاویهٔ برد ۱۱ درجه، دقت یکسانی دارد و مطابق شکل ۵، هردو روش به ازای فاصلهٔ خطای مجاز یک کیلومتر، تا زاویهٔ برد ۱۲ درجه قابل استفاده خواهد بود. اما بار محاسباتی روش تکه‌ای خطی، مقدار S ۳۷-۱۲۷ فلاپس بیشتر از روش تکرارپذیر زارچان است. در صورتی که بار محاسباتی هر عملیات S برابر ۴ فلاپس باشد، بار محاسباتی دو روش تقریباً برابر می‌شود.



شکل ۴- فاصلهٔ خطا برحسب زاویهٔ برد برای سه روش تکه‌ای خطی، خطی‌سازی و تکرارپذیر زارچان در مدل زمین کروی



شکل ۵- حداکثر زاویهٔ برد برحسب فاصلهٔ خطای مجاز برای سه روش تکه‌ای خطی، خطی‌سازی و تکرارپذیر زارچان در مدل زمین کروی

در مجموع در مدل زمین کروی، روش تکه‌ای خطی نسبت به روش خطی‌سازی ارجحیت دارد، اما نسبت به روش تکرارپذیر زارچان (به ازای بار محاسباتی یکسان) تا زاویهٔ برد ۱۱ درجه دقت یکسانی دارد.

نتایج برای مدل زمین بیضی‌گون

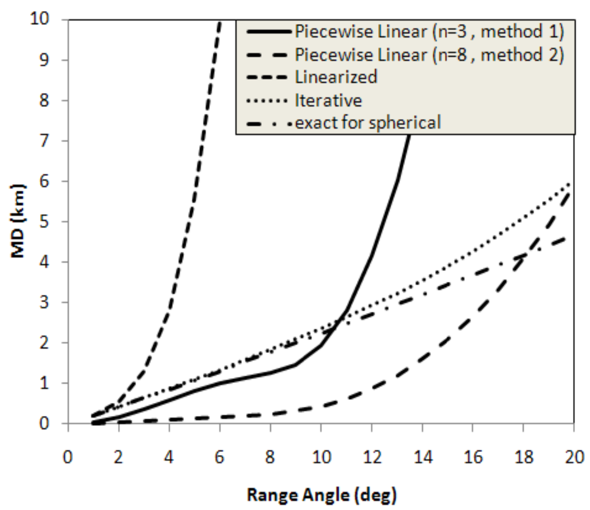
در این بخش ابتدا، دقت روش تکه‌ای خطی در مدل زمین بیضی‌گون نسبت به مدل زمین کروی مقایسه شده است که در مدل زمین بیضی‌گون تنها عبارت J_2 اعمال شده است. بنابراین، فاصلهٔ خطا برای زوایای برد مختلف، برای مدل زمین کروی و مدل زمین بیضی‌گون با/بدون اضافه کردن عبارت J_2 به رابطهٔ شتاب گرانش نقاط میانی در روش تکه‌ای خطی، به دست آمده و نمونه‌ای از نتایج در جدول ۱ فهرست شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج با اصلاح شتاب گرانش (اعمال ضریب J_2)، دقتی در حد مدل زمین کروی دارد. در صورت اصلاح نشدن شتاب گرانش، در اکثر بازه‌ها فاصلهٔ خطا افزایش می‌یابد. در بازه‌هایی که تقریب بردار سرعت لازم بدون اصلاح شتاب گرانش، دقت بهتری دارد، می‌توان از همان روابط اصلاح‌نشده استفاده کرد. این موضوع سبب افزایش دقت روش تکه‌ای خطی نیز می‌شود.

در شکل‌های ۶ و ۷، فاصلهٔ خطای روش تکه‌ای خطی با دو روش دیگر در مدل زمین بیضی‌گون، مقایسه شده است. نموداری که در شکل ۶ با خط‌نقطه ترسیم شده است، خطای ناشی از محاسبهٔ دقیق بردار سرعت لازم با فرض مدل زمین کروی است که نتیجهٔ آن در مدل زمین بیضی‌گون نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فاصلهٔ خطای روش خطی‌سازی برای زوایای بیش از ۲ درجه، افزایش شدیدی دارد و نسبت به روش‌های دیگر دقت بسیار کمی خواهد داشت. همچنین، روش دومِ تکه‌ای خطی با هشت نقطهٔ میانی، به ازای زوایای برد کوچک‌تر از ۲۰ درجه، نسبت به دو روش تکرارپذیر زارچان و خطی‌سازی، فاصلهٔ خطای کمتری دارد. نکتهٔ مهم این است که روش یادشده به ازای زوایای برد کوچک‌تر از ۱۸ درجه، از حل دقیق بردار سرعت لازم در مدل زمین کروی نیز خطای کمتری دارد. روش اولِ تکه‌ای خطی با سه نقطهٔ میانی نیز تا حدود زاویهٔ برد ۱۰/۵ درجه، فاصلهٔ خطای کمتری نسبت به روش تکرارپذیر زارچان دارد، به علاوه، بار محاسباتی آن S۳۷ + Q۶ + ۱۷۲ فلاپس کمتر از روش تکرارپذیر زارچان است. در شکل ۷، نتایج برحسب فاصلهٔ خطا مجاز ترسیم شده است. بنابراین، در مجموع در مدل زمین بیضی‌گون نیز، روش تکه‌ای خطی نسبت به روش خطی‌سازی کارآمدتر است و نسبت به روش تکرارپذیر زارچان (به ازای بار محاسباتی یکسان) تا زاویهٔ برد ۱۸ درجه دقت بیشتری دارد. مزیت دیگر روش تکه‌ای خطی این است که با استفاده از آن، استخراج

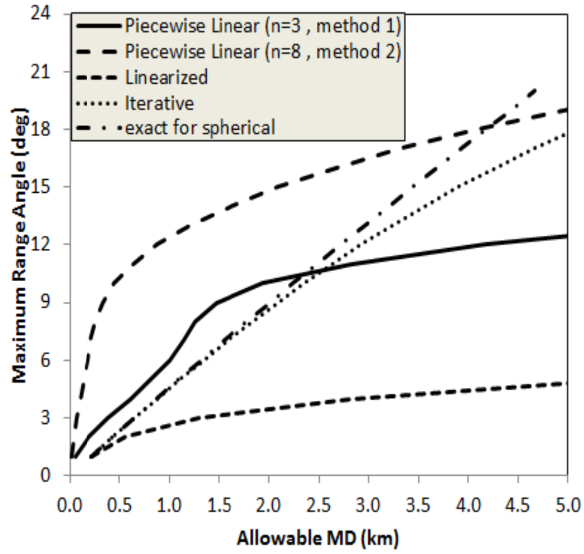
تقریبی ماتریس حساسیت امکان‌پذیر است؛ همان‌طور که در مرجع [۲۴] در مسئلهٔ بردار سرعت لازم با قید بردار سرعت نهایی استخراج شده است. به علاوه، روش تکه‌ای خطی برای مسئلهٔ چند جسم نیز کاربرد دارد. روش تکه‌ای خطی را می‌توان با تخمین بهتر نقاط میانی، کالیبراسیون مطابق روش مرجع [۱۹] و استفاده از بازه‌های زمانی غیر یکسان بهبود بخشید. همچنین، از روش تکه‌ای خطی می‌توان برای حدس اولیه روش‌های تکرارپذیر برای بردهای بلند استفاده کرد.

جدول ۱- فاصلهٔ خطا برای زاویای برد مختلف در روش تکه‌ای خطی برای دو مدل زمین کروی و زمین بیضی‌گون

زاویهٔ برد (درجه)	فاصلهٔ خطا (متر)		
	مدل زمین کروی	مدل زمین بیضوی با تقریب J_2	
		بدون اصلاح شتاب گرانش	با اصلاح شتاب گرانش
۱	۵۱	۱۶۰	۵۱
۴	۶۰۱	۳۰۳	۶۰۳
۷	۱۱۳۴	۹۱۱	۱۱۳۵
۱۰	۱۹۲۳	۳۱۲۸	۱۹۴۰
۱۳	۵۹۸۰	۸۴۰۰	۶۰۴۳
۱۶	۱۵۰۱۷	۱۸۳۴۹	۱۵۱۴۹
۱۹	۳۰۳۶۵	۳۴۵۳۴	۳۰۵۹۴



شکل ۶- فاصلهٔ خطا برحسب زاویهٔ برد برای سه روش تکه‌ای خطی، خطی‌سازی و تکرارپذیر زارچان در مدل زمین بیضی‌گون



شکل ۷- حداکثر زاویهٔ برد برحسب فاصلهٔ خطای مجاز برای سه روش تکه‌ای خطی، خطی‌سازی و تکرارپذیر زارچان در مدل زمین بیضی‌گون

نتیجه‌گیری

در این مقاله، روابطی تقریبی برای محاسبهٔ بردار سرعت لازم در حالت سه‌بعدی با قید بردار موقعیت نهایی برای مدل زمین کروی و بیضی‌گون با استفاده از فرض شتاب گرانش تکه‌ای خطی ارائه شده است. نتایج حل عددی نشان می‌دهد که این روش، نسبت به روش خطی‌سازی (با بار محاسبات برابر) دقت بیشتری دارد. همچنین، روش دومِ تکه‌ای خطی (با هشت نقطهٔ میانی براساس یک نقطهٔ میانه) در مدل زمین کروی نسبت به روش تکرارپذیر زارچان با بار محاسبات تقریباً برابر تا زاویهٔ برد ۱۱ درجه دقت تقریباً یکسانی دارد. اما روش دومِ تکه‌ای خطی در مدل زمین بیضی‌گون نسبت به روش تکرارپذیر زارچان با بار محاسباتی تقریباً یکسان تا زاویهٔ برد ۱۸ درجه دقت بیشتری خواهد داشت، طوری که به ازای فاصلهٔ خطای مجاز یک کیلومتر، روش تکه‌ای خطی دوم تا زوایای برد ۱۲ درجه و روش تکرارپذیر زارچان تا زوایای برد ۴/۵ درجه کارآمد است. البته نتایج یادشده به ازای مدار حداقل انرژی به دست آمده است. از مزایای دیگر روش تکه‌ای خطی، قابلیت استخراج روابط تقریبی ماتریس حساسیت سرعت لازم، استخراج روابط تقریبی برای مسئلهٔ سه جسم و امکان افزایش دقت با تخمین بهتر نقاط میانی، کالیبراسیون و استفاده از بازه‌های زمانی غیر یکسان است. به علاوه، از روش تکه‌ای خطی می‌توان برای حدس اولیه در روش‌های تکرارپذیر برای بردهای بلند استفاده کرد.

پیوست الف – روش خطی‌سازی

در این روش، برای محاسبهٔ بردار خطای تلاش صفر ($\overrightarrow{\mathrm{ZEM}}$)، معادلات حرکت حول یک نقطه (ابتدایی، پایانی، میانگین و ...) خطی‌سازی و حل شده است [۱۸-۱۴]:

$$\overrightarrow{\mathrm{ZEM}} = F_1(t_{go})(\vec{r}_{T_0} - \vec{r}_0) + F_2(t_{go})(\vec{v}_{T_0} - \vec{v}_0) \quad (۴۶)$$

که در آن، t_{go} زمان باقیمانده تا زمان نهایی ($t_{go} = t_f - t$)، $\vec{r}_{T_0}$ و $\vec{v}_{T_0}$ به ترتیب، بردار موقعیت و سرعت اولیهٔ هدف است. همچنین، توابع F_1 و F_2 مطابق روابط (۴۷) و (۴۸) استخراج می‌شود [۱۴، ۱۸]:

$$F_1(t_{go}) = I + \frac{E}{2!}t_{go}^2 + \cdots + \frac{E^{n_{max}}}{(2n_{max})!}t_{go}^{2n_{max}} \quad (۴۷)$$

$$F_2(t_{go}) = t_{go}I + \frac{E}{3!}t_{go}^3 + \cdots + \frac{E^{n_{max}}}{(2n_{max}+1)!}t_{go}^{2n_{max}+1} \quad (۴۸)$$

که $E = \partial\vec{g}/\partial(\vec{r}_T - \vec{r})$ است و برای محاسبهٔ آن، دو رابطهٔ تقریبی زیر به ترتیب در مراجع [۱۴] و [۱۸] در مدل زمین کروی پیشنهاد شده است:

$$E = \left[E_M I + \frac{E_T - E_M}{(\vec{r}_{T_0} - \vec{r}_0)^T \vec{r}_{T_0}}\vec{r}_{T_0}\vec{r}_{T_0}^T\right], E_M = -\frac{\mu}{r_0^3}, E_T = -\frac{\mu}{r_{T_0}^3} \quad (۴۹)$$

$$E = -\frac{\mu}{R_0^3}\left[I - 3\frac{\vec{R}_0\vec{R}_0^T}{R_0^2}\right] \quad (۵۰)$$

که در آن، $\vec{R}_0$ نقطه‌ای است که خطی‌سازی حول آن انجام شده است. در مرجع [۱۸]، نقاط زیر برای خطی‌سازی پیشنهاد شده است:

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_0 \quad (۵۱)$$

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_{T_0} \quad (۵۲)$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{2}(\vec{r}_0 + \vec{r}_{T_0}) \quad (۵۳)$$

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_f^* \quad (۵۴)$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{3}(\vec{r}_0 + \vec{r}_{T_0} + \vec{r}_f^*) \quad (۵۵)$$

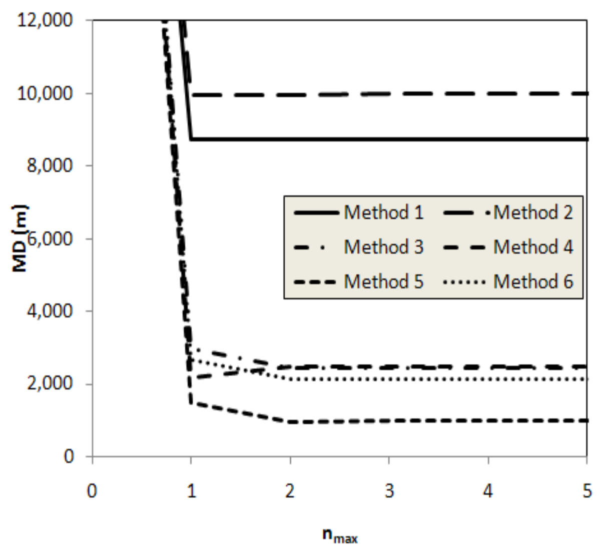
براساس رابطهٔ (۴۶)، می‌توان رابطهٔ بردار سرعت لازم را به صورت زیر به دست آورد:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{T_0} + F_2^{-1}(t_{go})F_1(t_{go})(\vec{r}_{T_0} - \vec{r}_0) \quad (۵۶)$$

البته رابطهٔ (۵۶) برای حالتی است که ماتریس E از رابطهٔ (۴۹) یا از رابطهٔ (۵۰) با نقطهٔ خطی‌سازی (۵۱) تا (۵۳) محاسبه شده باشد. دقت این تقریب به تعداد جملات در نظر گرفته‌شدهٔ روابط (۴۷) و (۴۸)، انتخاب تقریب ماتریس E، رابطهٔ (۴۹) یا (۵۰) و نقطهٔ خطی‌سازی بستگی دارد. افزایش تعداد جملات روابط (۴۷) و (۴۸) سبب افزایش بار محاسباتی می‌شود. پس، انتخاب تعداد جملات، تقریب ماتریس E و نقطهٔ خطی‌سازی باید با توجه به دقت مورد نیاز و بار محاسباتی مجاز باشد. بنابراین، خطای حاصل از رابطهٔ تقریبی بردار سرعت لازم (۵۶) برحسب تعداد جملات، برای شش روش بررسی شده است که شامل روش‌هایی است که در آنها از رابطهٔ (۵۰) برای تقریب ماتریس E و از نقاط روابط (۵۱) تا (۵۵) برای نقطهٔ خطی‌سازی استفاده شده است و به ترتیب با روش یک تا پنج نام‌گذاری و روشی که رابطهٔ (۴۹) را برای تقریب ماتریس E به کار برده است. در شکل ۸، خطای حاصل از روش‌های یادشده برحسب تعداد جملات ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل ۸ مشاهده می‌شود، روش پنجمِ خطی‌سازی که حول نقطهٔ رابطهٔ (۵۵) است، دقت بیشتری دارد. البته به ارجحیت روش پنجم در مرجع [۱۸] اشاره شده است، اما دقت روابط برحسب تعداد جملات در آن مرجع بررسی نشده است. با توجه به شکل ۸ برای روش خطی‌سازی، تنها از سه جملهٔ اول در روابط (۴۷) و (۴۸) استفاده می‌شود؛ یعنی:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{T_0} + \left[t_{go}I + \frac{1}{3!}Et_{go}^3 + \frac{1}{5!}E^2t_{go}^5\right]^{-1} \times \left[I + \frac{1}{2!}Et_{go}^2 + \frac{1}{4!}E^2t_{go}^4\right](\vec{r}_{T_0} - \vec{r}_0) \quad (۵۷)$$

شایان ذکر است که در این مسئله، $\vec{r}_f^*$ تابعی از سرعت لازم است و بنابراین، با خطی‌سازی حول نقاط حاصل از روابط (۵۴) و (۵۵) نمی‌توان به صورت صریح رابطهٔ سرعت لازم را مشابه رابطهٔ (۵۶) استخراج کرد. پس، برای خطی‌سازی حول نقاط روابط (۵۴) و (۵۵)، $\vec{r}_f^*$ به صورت عددی محاسبه و معلوم فرض شده است.



شکل ۸– فاصلهٔ خطا برحسب n_{max} برای روش‌های مختلف تقریب ماتریس E در روش خطی‌سازی برای زاویهٔ برد ۳ درجه و مدار حداقل انرژی ($r_0 = r_{T_0} =$ 6400 km, $t_f = 267.01$ s)

مراجع

[1] Pitman, G.R., *Inertial Guidance*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1962.

[2] Battin, R.H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, Revised Edition, AIAA Education Series, USA, 1999.

[3] Siouris, G.M., *Missile Guidance and Control Systems*, Springer-Verlag Inc., New York, 2004.

[4] Battin, R.H., "Space Guidance Evolution- A Personal Narrative," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 5, No. 2, 1982, pp. 97-110.

[5] Battin, R.H., "Lambert's Problem Revisited," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 5, 1977, pp. 707-713.

[6] Battin, R.H. and Vaughan, R.M., "An Elegant Lambert Algorithm," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 6, 1984, pp. 662-670.

[7] Avanzini, G., "A Simple Lambert Algorithm," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 6, 2008, pp. 1587-1594.

[8] Roshanian, J., "A Numerical Solution for Lambert's Problem," *Proceeding of the 24th Tsalkovski Conference,* Kaloug, Russia 1998.

[9] Leeghim, H., and Jaroux, B.A., "Energy-Optimal Solution to the Lambert Problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 33, No. 3, 2010, pp 1008-1010.

[10] Leeghim, H., Kim, D. and Turner, J., "Solution for Nonlinear Three-Dimensional Intercept Problem with Minimum Energy," *Mathematical Problems in Engineering,* Article ID 435725, 2013.

[11] Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 6th ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 239, AIAA, Reston, VA, 2012.

[12] Ahn, J. and Lee, S., "Lambert Algorithm Using Analytic Gradients," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 36, No. 6, 2013, pp. 1751-1761.

[13] Ahn, J., Bang, J.P. and Lee, S., "Acceleration of Zero-Revolution Lambert's Algorithms Using Table-Based Initialization," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 38, No. 2, 2015, pp 335-342.

[14] Newman, B., "Strategic Intercept Midcourse Guidance Using Modified Zero Effort Miss Steering," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 19, No. 1, 1996, pp. 107-112.

[15] Liwei, Z., Wuxing, J. and Jianying, Z., "Zero Effort Miss Formulation for Longer Range Targeting," *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*, Zhangjiajie, Hunan, China, July 26-31, 2007, pp. 414-417.

[16] Deihoul, A.R. and Massoumnia, M.A., "A Near Optimal Midcourse Guidance Law Based on Spherical Gravity," *Scientia Iranica*, Vol. 10, No. 4, October 2003, pp. 436-442.

[17] Liwei, Z. and Wuxing, J., "A Near Optimal Midcourse Guidance Law for Exoatmospheric Interceptor," *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*, Zhangjiajie, Hunan, China, July 26-31, 2007, pp. 502-506.

[18] Deihoul, A.R., Anti Ballistic Optimal Midcourse Guidance Law, (PhD Thesis), Sharif University of Technology, Tehran, Iran, 2003.

[19] Jalali-Naini, S.H., "Approximate Solution of Sensitivity Matrix with Final Velocity Constraint Using Linear Time-Varying Gravity Assumption," *Journal of Space Science & Technology,* Vol. 4, No. 3&4, 2011-2012, pp. 71-81. (in Persian)

[20] Ramos, J.I., "Piecewise-Linearized Methods for Initial-Value Problems with Oscillating Solutions," *Elsevier Applied Mathematics and Computation*, Vol. 181, 2006, pp. 123-146.

[21] Ramos, J.I., "Determination of Periodic Orbits of Nonlinear Oscillators by Means of Piecewise-Linearization Methods," *Chaos Solitions & Fractals*, Vol. 28, 2006, PP. 1306-1313.

[22] Hull, D.G., and Nowak, M.J., "Neighboring Suboptimal Control for Vehicle Guidance," *AAS/AIAA Space Flight Conference*, N93-2201, Pasadena, 1993.

[23] Bolender, M.A., Doman, D.B., and Oppenheimer, M.W., "Application of Piecewise Linear Control Allocation to Reusable Launch Vehicle Guidance and Control," *The 14th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2006.

[24] Jalali-Naini, S.H., "Approximate Solution of Sensitivity Matrix of Required Velocity Using Piecewise Linear Gravity Assumption," *Journal of Aerospace Science and Technology, Iranian Aerospace Society,* Vol. 9, No. 2, Fall 2012, pp. 25-32.

[25] Ueberhuber, C.W., *Numerical Computation 1: Methods, Software, and Analysis*, Springer Science & Business Media, 2012.

[26] Valpiani, J.M., and Palmer, P.L., "Nonlinear Geometric Estimation for Satellite Attitude," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 4, 2008, pp. 835-848.