

# Orbit Determination via a Deeply-Coupled UKF/GNSS Filter

M.A. Amiri Atashgah<sup>1\*</sup>, H. Gazerpour<sup>2</sup>, S.A. R. Roghangir<sup>3</sup>

1,2,3. Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran

\*Postal Code: 1561-14395, Tehran, IRAN

atashgah@ut.ac.ir

*This paper is dedicated to determining the orbit of a satellite by using Unscented Kalman Filter (UKF), in which, a GNSS is used as the observation sensor. During this goal, firstly we have simulated the satellite orbit; considering oblateness effect. Secondly, exploiting a nonlinear model of orbit dynamics, preliminary orbit determination is prepared via UKF algorithm. The range between the satellites and space vehicle as the parameter of observation in the filter is obtained. Afterwards, the estimated preliminary output data is corrected and more precise position of the GNSS satellite is determined based on predicted observations errors. Consequently, the outcomes of the research exhibits the acceptable satellite orbit determination error range.*

**Keywords:** Orbit estimation, GPS/GNSS, Unscented kalman filter (UKF), GNSS error prediction

---

1. Assistant Professor (Corresponding Author)

2. M. Sc.

3. M. Sc.

# تخمین مدار یک ماهواره با اتصال عمیق مشاهده گر GNSS در فیلتر کالمن خنثی (UKF)

محمدعلی امیری آتشگاه<sup>۱\*</sup>، حمید گازرپور<sup>۲</sup>، سید امیررضا روغن گیر<sup>۳</sup>  
۱، ۲، ۳- دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران

\*تهران، کدپستی: ۱۴۳۹۵-۱۵۶۱

atashgah@ut.ac.ir

این پژوهش به تخمین مدار یک ماهواره نوعی با استفاده از فیلتر کالمن خنثی (UKF) با اتصال عمیق یک مشاهده گر GNSS در حلقه آن می پردازد. در این راستا، ابتدا مدار ماهواره با لحاظ کردن اثرات ناهمگونی زمین شبیه سازی شده و اثرات تغییرات زمانی مدار نیز در حلقه تخمین اعمال گردید. سپس الگوریتم UKF با استفاده از مدل غیرخطی دینامیک مداری، پیش بینی اولیه را انجام می دهد. در ادامه با استفاده از یک مشاهده گر GPS که در آن مسافت بین ماهواره GPS و سیستم فضایی مورد مطالعه به عنوان پارامتر مشاهده گر فرض می شود (اتصال عمیق)، تصحیحات موقعیت ماهواره در فضا به همراه پیش بینی خطاهای مشاهدات GPS انجام می گردد. نتایج حاصل از این تحقیق، حاکی از تخمین مدار ماهواره با خطای قابل قبول در کاربردهای فضایی است.

واژه های کلیدی: تخمین مدار، GNSS/GPS، فیلتر کالمن خنثی (UKF)، پیش بینی خطاهای GPS

		علائم و اختصارات	
$\phi_I$	عرض جغرافیایی		
$i$	زاویه شیب مداری		
$\Omega$	زاویه بعد	$\vec{r}$	بردار مکان زباله فضایی
$e$	خروج از مرکزی	$\rho$	فاصله ماهواره GPS و گیرنده GPS روی ماهواره
$\omega$	زاویه حضیض زمینی	$\phi$	زاویه Declination
$\theta$	زاویه آنومالی	$\lambda$	زاویه Right Ascension
$\Gamma_p$	شعاع حضیض	$\vec{x}$	جهت $x$ محور مختصات ECI
$\Gamma_a$	شعاع اوج	$\vec{y}$	جهت $y$ محور مختصات ECI
$a$	نیم قطر بیضی	$\vec{z}$	جهت $z$ محور مختصات ECI
$c$	سرعت نور	$f$	ضریب لاگرانژ سری $f$
$H(k)$	ماتریس ژاکوبین معادله اندازه گیری	$g$	ضریب لاگرانژ سری $g$
$P_k^-$	ماتریس کواریانس خطای اندازه گیری	$h$	مومنوم زاویه ای
$k_k$	ماتریس گین	$X$	بردار حالت سیستم
$Y(k)$	معادله اندازه گیری	$q(k)$	نویز سفید گاوسین
$\Delta T_i$	خطای زمانی تروپوسفر	$C(Z)$	تابع استام ۱
$\Delta I_i$	خطای زمانی یونوسفر	$S(Z)$	تابع استام ۲
$\Delta v_i$	خطای زمانی نسبی		
$\Delta b_i$	خطای زمانی ساعت بایاس ماهواره		
$V(k)$	نویز اندازه گیری		

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)

۲. کارشناس ارشد

۳. کارشناس ارشد

GPS

GNSS  
UKF

Global Positioning System  
global navigation satellite system  
Unscented Kalman Filter

## مقدمه

توسعه روزافزون مأموریت‌های فضایی و ضرورت تأمین ایمنی و اعتمادپذیری سفرهای فضایی ایجاب می‌کند ماهواره‌ها با دقت بالایی در موقعیت مناسب خود قرار داشته باشند. استفاده از گیرنده‌های GNSS فضاگرد در مدار زمینی پایین برای فراهم کردن تقویم نجومی با زمان واقعی برای پردازش آنبرد<sup>۴</sup>، مثل هم زمانی دقیق، جهت‌یابی خودکار، تعیین و کنترل وضعیت و مسافت‌یابی نسبی دقیق بین فضاپیماها کاملاً رایج بوده است [۱]. علاوه بر این، گیرنده‌های GPS فضاگرد با پردازش زمینی مثل سیستم مسیریابی اولیه توسط ایستگاه زمینی، دقت تعیین مدار را افزایش می‌دهد [۲]. به طور خاص، تعیین مدار با زمان واقعی با استفاده از راه‌حل‌های موقعیت‌یابی و جهت‌یابی توسط GPS برای پردازش آنبرد، قدمی اساسی برای عملکرد و جهت‌یابی خودکار در ماهواره‌ها است. روش‌های موقعیت‌یابی با حضور GPS در حلقه تخمین، می‌تواند با در نظر گرفتن کمترین مجذورات متناسب با مشاهدات نرخ شبه دامنه‌ها که شامل خطاهای متفاوتی از قبیل بی‌دقتی مدار ماهواره GPS، تاثیرات نسبیتی، خطای گیرنده و بایاس ساعت گیرنده است، انجام شود [۳]. راه‌حل‌های خطی و خطی‌سازی شده موجود در موقعیت‌یابی توسط گیرنده‌های GPS، نوسانات بیشتر از ۴ کیلومتر را نیز تجربه می‌کنند که از دامنه‌ی خطای قابل قبول برای عملکرد فضایی تجاوز می‌نماید [۲]. این نوسانات دقت کنترل وضعیت و هم‌زمانی آنبرد را کاهش می‌دهند. در پژوهش [۴] خطاهای GPS نیز مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهدات GPS مانند هر مشاهده‌ی دیگر آلوده به خطاهای اتفاقی و سیستماتیک مختلفی مانند خطای مداری، خطای تراپوسفری، خطای یونوسفری، خطای ساعت ماهواره و گیرنده و... است و از آنجایی که سیگنال‌های ارسالی از ماهواره‌ها در مسیر خود از لایه‌های مختلف اتمسفر عبور می‌نماید بررسی تأثیر اتمسفر روی انتشار امواج ماهواره‌ای از اهمیت خاصی برخوردار است. در منبع [۵] روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته برای محاسبه بردار سرعت با استفاده از سری زمانی بردار موقعیت ماهواره معرفی و با روش مشتق‌گیری عددی نیوتن-رافسون که به منزله بهترین روش عددی در تحقیقات پیشین معرفی شده است، مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

در منبع [۶]، ابتدا مسیر حرکت ماهواره به دور زمین با استفاده از معادلات کاول تولید شده و سپس مشاهدات رادار اندازه‌گیر از این معادلات استخراج و به طور جداگانه به فیلترهای غیرخطی کالمن توسعه‌یافته و نمونه بردار اعمال می‌شود. در منبع [۷]، رویه پیش‌بینی موقعیت ماهواره بر اساس فیلتر کالمن توسعه‌یافته و با مد نظر قرار دادن ملاحظات سخت‌افزاری پیاده‌سازی و در عین حال حصول دقت مطلوب در فرآیند تعیین موقعیت ماهواره مورد بررسی قرار گرفته است.

مسئله اصلی مورد بررسی در این پژوهش، تخمین مدار یک ماهواره با استفاده از فیلتر کالمن خنثی است که برای این کار از یک گیرنده GNSS به عنوان مشاهده‌گر استفاده شده است و با محاسبه خطای مشاهده‌گر و وارد کردن آن در فیلترینگ، مدار ماهواره تخمین زده می‌شود. در واقع، UKF یک روش نمونه برداری توزیع غیرخطی است که از تعدادی محدود از نقاط سیگما برای ایجاد احتمال یک توزیع حالت از طریق دینامیک غیرخطی سیستم استفاده می‌کند. این نقاط سیگما برای بدست آوردن میانگین و کوواریانس حقیقی برای افزایش مجموعه‌های تیلور درجه دو برای یک سیستم غیرخطی انتخاب شده‌اند. در این پژوهش سعی بر این است که فرایند تخمین مدار یک ماهواره نوعی با استفاده از فیلتر کالمن خنثی (UKF) که از یک مشاهده‌گر GNSS در حلقه آن بهره‌گیری می‌شود، انجام گردد. در این راستا، ابتدا مدار ماهواره با لحاظ نمودن اثرات ناهمگونی زمین شبیه‌سازی شده و اثرات تغییرات زمانی مدار نیز در حلقه تخمین اعمال می‌گردد. سپس الگوریتم UKF با استفاده از مدل غیرخطی دینامیک مداری، پیش‌بینی اولیه را انجام می‌دهد. در ادامه مقادیر خروجی پیش‌بینی اولیه اصلاح شده و موقعیت ماهواره در فضا، با استفاده از این مشاهده‌گر که در آن مسافت بین ماهواره و سیستم فضایی مورد مطالعه به عنوان پارامتر مشاهده‌گر فرض می‌شود، بدست می‌آید. در مرحله آخر نیز مدار ماهواره تخمین زده شده و با مقایسه‌ی مدار تخمین زده شده با مدار شبیه‌سازی شده، مقدار خطاهای آن نیز استخراج می‌گردد.

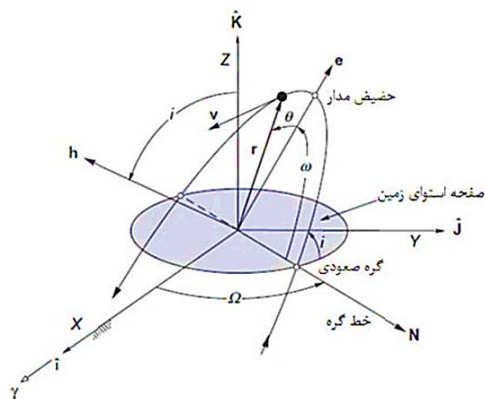
## بررسی روش‌های تعیین و تخمین مدار

یکی از اصلی‌ترین کاربردهای تخمین مدار، تشخیص و شناسایی ماهواره یا هر جسم فضایی است. برای این کار باید مدار ماهواره به دقت اندازه‌گیری شود. مدار فضایی با شش پارامتر مشخص می‌شود که این پارامترها برای تعیین مدار یکتایی با فرض مدل دو جسمی<sup>۵</sup>

5. Two body

4. On-board

نمایش داده می‌شود. مرجع محاسبه این زاویه از نقطه حضيض مدار است.



شکل ۲- مدار فضایی و شش المان کلاسیک مداری مورد استفاده [۹]

روش‌های متنوعی برای تخمین مدار وجود دارد. اما عمده این روش‌ها بر پایه دو تکنیک اندازه‌گیری می‌باشند. در ادامه به معرفی هر کدام از روش‌ها پرداخته می‌شود.

- بر پایه فاصله: با مشخص نمودن فاصله ماهواره از سنسور می‌توان مدار ماهواره را تخمین زد. روش‌های گیس و لمبرت از جمله روش‌هایی هستند که بر پایه‌ی فاصله می‌باشند.

- بر پایه زاویه: از روش‌های تخمین مدار با استفاده از زاویه‌های ساخته شده با سنسور، می‌توان بردارهای سرعت و مکان را بدست آورد. از جمله این روش‌ها گوس و لاپلاس است.

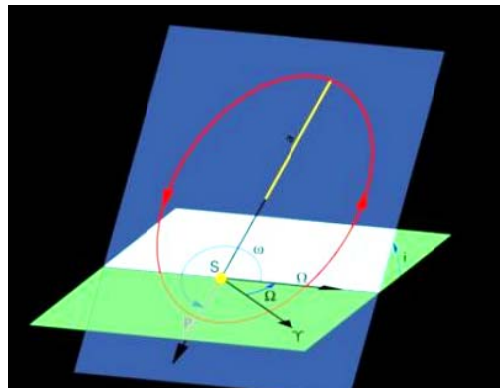
### تأثیرات ناهمگونی زمین

زمین مانند هر سیاره در حال چرخش دیگر، به علت نیروی گریز از مرکز در قسمت استوا دچار پخش‌شدگی است. شعاع زمین در قسمت استوا ۲۱ کیلومتر بیشتر از شعاع قطب آن است. این تورفتگی<sup>۶</sup> در قطب ناهمگونی<sup>۷</sup> نامیده می‌شود که از رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$\text{Oblateness} = \frac{\text{Equatorial radius} - \text{polar radius}}{\text{Equatorial radius}} \quad (1)$$

زمین یک کره پخ شده و فاقد یک تقارن کامل کروی است (یک توپ بسکتبال با نشستن بر روی آن تبدیل به یک کره پخ می‌شود). این عدم تقارن کروی به این معنی است که نیروی جاذبه وارد بر جسم گردنده از طرف زمین مستقیم به طرف مرکز زمین نیست. اگر چه میدان گرانشی سیاره کاملاً کروی فقط بستگی به

نقطه‌ای، پیرو قانون‌های حرکت نیوتن و قانون عکس مربع گرانش استفاده می‌شود [۸] و [۹]. در شکل ۱ و ۲، شش المان مداری نشان داده شده است.



شکل ۱- مدار فضایی و المان‌های مورد استفاده [۸].

دو پارامتری که شکل و اندازه مدار را مشخص می‌کنند، خروج از مرکزیت  $e$  و نیم قطر بزرگ  $a$  است. دو پارامتر زاویه شیب مدار  $i$  و طول گره صعودی  $\Omega$  جهت صفحه مداری را مشخص می‌کنند. آرگمان نقطه حضيض، جهت مدار را مشخص می‌کند و  $\theta$  آنومالی متوسط، موقعیت مداری جرم را بر روی بیضی مشخص می‌کند. تخمین مدار عبارتست از فعالیتی که در طی آن پارامترهای کلاسیک مدار و بردار موقعیت و سرعت محاسبه می‌شوند. با داشتن زمان و معلوم بودن بردارهای موقعیت و سرعت ماهواره، می‌توان حالت ماهواره را مشخص کرد. فرض بر این است که مدل گرانشی در این پژوهش دو جسمی است. در این قسمت به معرفی المان‌های مداری کلاسیک پرداخته می‌شود که هر کدام از این المان‌ها معرف خاصیتی از مدار ماهواره هستند و مجموع این المان‌ها بیانگر یک مدار منحصر به فرد است. مدارهای مورد بررسی در این پژوهش بیضی و دایروی هستند. نیم قطر بیضی، بیانگر نصف اندازه قطر اصلی بیضی است و با  $a$  نشان داده می‌شود که واحد آن بر حسب کیلومتر است. خروج از مرکزیت، مقداری بی بعد است که نشانگر میزان دایروی بودن شکل مدار است. مقدار آن بین صفر (برای دایره) تا یک (برای بیضی) متغیر است و با  $e$  نمایش داده می‌شود. زاویه شیب مداری، با قرار دادن صفحه استوای زمین به عنوان مرجع (شیب مداری صفر)، شیب مداری سایر مدارها با این صفحه سنجیده می‌شود که با  $i$  نمایش داده می‌شود. زاویه بعد، زاویه بین جهت مثبت محور  $X$  و بردار گره صعودی است و با  $\Omega$  نمایش داده می‌شود. این زاویه می‌تواند مقادیر صفر تا ۳۶۰ درجه را اختیار کند. زاویه آرگمان حضيض برای مشخص کردن حضيض مدار استفاده و با  $\omega$  نمایش داده می‌شود. زاویه آنومالی، پارامتر زاویه‌ای دیگر است که برای مشخص کردن مکان ماهواره در مدار مورد نیاز است و با  $\theta$

6. Flattening  
7. Oblateness

$$\dot{\Omega}_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\Omega} dt \quad (9)$$

که T پریود مدار است. با جایگذاری رابطه (۶) در (۷) داریم:

$$\dot{\Omega} = - \left[ \frac{3 \sqrt{\mu} j_2 R^2}{2 (1-e^2)^2 a^2} \right] \cos i \quad (10)$$

عبارات R و  $\mu$  شعاع و پارامتر گرانشی زمین می‌باشند. عبارات e و i به ترتیب نیم قطر بیضی، خروج از مرکزیت و زاویه شیب مداری است. توجه شود اگر زاویه شیب مداری بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد،  $\dot{\Omega}$  کوچک‌تر از صفر خواهد بود، در نتیجه برای مدارهای پیش‌رونده، خط گره<sup>۱۳</sup> گرایش به سمت غرب دارد. اگر زاویه بعد به کاهش خود ادامه دهد، سبب بوجود آمدن پدیده‌ای به نام عقب‌نشینی گره‌ها<sup>۱۴</sup> خواهد شد. اگر زاویه شیب مداری بین ۹۰ تا ۱۸۰ درجه باشد، خواهیم دید مشتق زاویه بعد بیشتر از صفر خواهد بود و در نتیجه خط گره مدارهای پس‌رونده تمایل به حرکت به سمت شرق خواهند داشت. برای مدارات قطبی که زاویه شیب مداری برابر با ۹۰ درجه دارند، خط گره ثابت خواهد ماند.

به صورت مشابه نرخ تغییرات زاویه حضیض زمینی نسبت به زمان طبق رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود.

$$\dot{\omega} = - \left[ \frac{3 \sqrt{\mu} j_2 R^2}{2 (1-e^2)^2 a^2} \right] \left( \frac{5}{2} \sin^2 i - 2 \right) \quad (11)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اگر  $0 < i \leq 63.4$  یا  $180 < i \leq 116.6$  باشد، در نتیجه  $\dot{\omega}$  مثبت خواهد بود که به معنی پیش‌روی اوج در جهت حرکت ماهواره است. به این پدیده پیش‌روی اوج می‌گویند. اگر  $63.4 < i \leq 116.6$  اوج در خلاف جهت حرکت عقب‌نشینی می‌کند. دو تساوی  $i = 63.4$  و  $i = 116.6$  زوایای شیب مداری بحرانی می‌باشند که در آن‌ها خط اپس<sup>۱۵</sup> حرکتی نمی‌کند. رابطه ۱۲ نرخ تغییرات زوایای بعد و حضیض زمینی بر حسب زمان را نشان می‌دهد:

$$\dot{\omega} = \dot{\Omega} \frac{\frac{5}{2} \sin^2 i - 2}{\cos i} \quad (12)$$

تأثیر ناهمگونی بر نرخ تغییرات زوایای بعد و حضیض زمینی مدارهایی با زاویه شیب مداری کمتر، بیشتر است. با فاصله گرفتن مدار از زمین، تأثیر ناهمگونی نیز کمتر خواهد شد. میانگین نرخ تغییرات خروج از مرکزی، زاویه شیب مداری و نیم قطر بیضی بر اثر ناهمگونی زمین برابر صفر است [۹].

### تخمین با رویکرد کالمن

فیلتر کالمن یک فیلتر بازگشتی کارآمد است که حالت یک سیستم پویا را از یک سری اندازه‌گیری‌ها همراه با خطا برآورده و به همراه

فاصله جسم از مرکز سیاره دارد، پخ زدگی باعث تغییر گرانش با تغییر عرض از مبدأ<sup>۸</sup> که فاصله زاویه‌ای از استوا (یا قطب) است نیز می‌شود. به این پدیده تغییرات زونال<sup>۹</sup> می‌گویند.  $J_2$  پارامتری بی بعد است که نشان دهنده عمده ناهمگونی بر مدار است. هارمونیک زونال دوم<sup>۱۰</sup>  $J_2$  یک ثابت جهانی نیست و برای هر سیاره‌ای، مقدار مختص به آن را دارد. این مقدار برای سیاره زمین معادل  $0.00108263$  است. شتاب گرانشی (نیرو بر واحد وزن) ناشی از یک سیاره ناهمگون مطابق رابطه (۲) است.

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\mu}{r^2} \hat{\mathbf{U}}_r + \mathbf{p} \quad (2)$$

ترم اول شتاب مطلق و ترم دوم  $\mathbf{P}$  شتاب اغتشاشی ناشی از ناهمگونی است که بسیار کوچکتر از  $\frac{\mu}{r^2}$  است. این شتاب اغتشاشی به اجزا زیر تقسیم می‌شود:

$$\mathbf{P} = p_r \hat{\mathbf{U}}_r + p_{\perp} \hat{\mathbf{U}}_{\perp} + p_h \hat{\mathbf{h}} \quad (3)$$

که بردارهای یکه شعاعی، انتقالی و عمود متصل به ماهواره می‌باشند.  $\hat{\mathbf{U}}_r$  در جهت بردار موقعیت شعاعی  $\mathbf{r}$  بردار  $\hat{\mathbf{h}}$  یکه عمود بر صفحه مدار و  $\hat{\mathbf{U}}_{\perp}$  عمود بر  $\mathbf{r}$  خوابیده بر صفحه مدار و در جهت حرکت می‌باشند. اجزای اغتشاش  $p_r$ ،  $p_{\perp}$  و  $p_h$  همگی به  $J_2$  بستگی دارند و همچنین توابعی از پارامترهای مداری و شعاع زمین می‌باشند که به شرح زیر است:

$$p_r = - \frac{\mu}{r^2} \frac{3}{2} j_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 [1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta)] \quad (4)$$

$$p_{\perp} = - \frac{\mu}{r^2} \frac{3}{2} j_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \sin^2 i \sin [2(\omega + \theta)] \quad (5)$$

$$p_h = - \frac{\mu}{r^2} \frac{3}{2} j_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 [1 - 3 \sin 2i \sin(\omega + \theta)] \quad (6)$$

این روابط توسط پروسینگ<sup>۱۱</sup> و کانوی<sup>۱۲</sup> در سال ۱۹۹۳ به دست آمده‌اند. همچنین آن‌ها نشان داده‌اند که چگونه  $p_r$ ،  $p_{\perp}$  و  $p_h$  باعث تغییر پارامترهای مداری می‌شوند که این تغییرات به صورت روابط ۷ و ۸ است:

$$\dot{\Omega} = \frac{h}{\mu \sin i (1 + \cos \theta)} p_h \quad (7)$$

$$\dot{\omega} = - \frac{r \cos \theta}{eh} p_r + \frac{(2 + \cos \theta) \sin \theta}{eh} p_{\perp} - \frac{r \sin(\omega + \theta)}{h \tan i} p_h \quad (8)$$

مشخصات تغییرات زاویه بعد نسبت به زمان فقط بستگی به نیروی اغتشاش عمود بر صفحه مدار دارد در حالی که تغییرات زاویه حضیض زمینی تحت تأثیر تمام پارامترهای اغتشاش قرار دارد.

انتگرال‌گیری از  $\dot{\Omega}$  در طی یک دور کامل مدار، نرخ میانگین تغییرات را می‌دهد:

8. Latitude
9. Zonal variation
10. Second zonal harmonic
11. Prussing
12. Conway

13. Node line

14. Regression of nodes

15. Apse line

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} m \\ \mu_U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & C_U \\ C_U^T & S_U \end{pmatrix} \right) \quad (13)$$

بنابراین انتقال به صورت زیر انجام می‌شود:

$$1- \text{محاسبه‌ی } 2n+1 \text{ نقطه سیگما از ستون‌های ماتریس} \\ \sqrt{(n+\lambda)P}$$

$$x^{(0)} = m \quad (14)$$

$$x^{(i)} = m + \sqrt{(n+\lambda)P} \cdot i, i = 1, \dots, n \quad (15)$$

$$x^{(i)} = m - \sqrt{(n+\lambda)P} \cdot i, i = n+1, \dots, 2n \quad (16)$$

و وزن‌های مربوط به آنها به صورت زیر است:

$$W_m^{(0)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} \quad (17)$$

$$W_c^{(0)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (18)$$

$$W_m^{(i)} = \frac{1}{2(n+\lambda)}, i = 1, \dots, 2n \quad (19)$$

$$W_c^{(i)} = \frac{1}{2(n+\lambda)}, i = 1, \dots, 2n \quad (20)$$

پارامتر  $\lambda$  پارامتر مقیاس است که به صورت زیر است:

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n \quad (21)$$

ثابت‌های مثبت  $\alpha$ ,  $\beta$  و  $\kappa$  به عنوان پارامترهای روش استفاده می‌شوند.

۲- پراکنی کردن غیر خطی هر کدام از نقاط سیگما

$$y^{(i)} = g(x^{(i)}), i = 0, \dots, 2n \quad (22)$$

۳- محاسبه‌ی میانگین و کوواریانس برای  $y$

$$\mu_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_m^{(i)} y^{(i)} \quad (23)$$

$$S_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} (y^{(i)} - \mu_U)(y^{(i)} - \mu_U)^T \quad (24)$$

۴- محاسبه کوواریانس ضربی بین  $x$  و  $y$

$$C_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} (x^{(i)} - m)(y^{(i)} - \mu_U)^T \quad (25)$$

ریشه دوم ماتریس مثبت بی‌نهایت  $P$  به صورت  $A = \sqrt{P}$  بیان می‌شود که:

$$P = AA^T \quad (26)$$

برای محاسبه‌ی ماتریس  $A$  می‌توان به عنوان مثال از ماتریس پایین مثلثی چولسکی<sup>۱۷</sup> که بوسیله تابع "chol" در نرم‌افزار متلب محاسبه می‌شود، استفاده نمود [۱۳].

### فرم ماتریسی UT

انتقال خنثی که در بالا بیان شد به فرم ماتریسی نیز بیان می‌شود که به صورت زیر است:

$$X = [m \dots m] + \sqrt{c} [0 \sqrt{P} \sqrt{P}] \quad (27)$$

یک تنظیم کننده خطی مرتبه دوم، مسائل کنترل گاوسین خطی مرتبه دوم را حل می‌کند. فیلتر کالمن یکی از بهترین راه‌حل‌هایی است که برای اساسی‌ترین مسائل تئوری کنترل، ابداع شده است. به عنوان مثال، در رادار، اطلاعات موقعیت، سرعت و شتاب هدف با حجم عظیمی از پارازیت در هر لحظه اندازه‌گیری می‌شود. فیلتر کالمن از پویایی هدف بهره می‌گیرد به این صورت که سیر تکاملی آن را کنترل می‌کند تا تأثیرات پارازیت را از بین ببرد و یک بر آورد خوب از موقعیت هدف در زمان حال (تصفیه کردن) و در آینده (پیش‌بینی) و یا در گذشته (الحاق یا هموارسازی) ارائه دهد. یک نسخه ساده‌شده فیلتر کالمن، فیلتر آلفا بتا، که عموماً از ثابت‌های وزنی استاتیک به جای ماتریس‌های کواریانس استفاده می‌کند، است [۱۰]. تخمین مدار مستقل ماهواره فرآیند پیچیده ایست که از روش فیلترینگ برای انتگرال گرفتن از معادلات دینامیک مدار و تخمین موقعیت و سرعت ماهواره استفاده می‌کند. فیلتر کالمن گسترش یافته، فیلتر کالمن خنثی و فیلتر جزئی خنثی روش‌های پر کاربرد فیلترینگ هستند [۱۱]. فیلتر جزئی، کاربرد گسترده‌ای در سیستم‌های غیرخطی و غیرگاوسی دارد. نمونه‌گیری مجدد یکی از قدم‌های مهم در فیلتر جزئی می‌باشد. به هر حال فیلتر جزئی که از نمونه‌گیری مجدد معمول استفاده می‌کند، حل متفاوت و اشتباهی خواهد داشت، چرا که با یک سیستم چند بعدی در ارتباط است. یک راه حل موثر به جای نمونه‌گیری مجدد، نمونه‌گیری مجدد جزئی منطبق شونده می‌باشد که برای ماهواره‌هایی که از سنسور مغناطیس سنج سود می‌برند، مناسب خواهد بود. این روش با استفاده از فیلتر کالمن UKF به همراه نمونه‌گیری مجدد معمول می‌باشد [۱۲].

### انتقال خنثی

همانند تقریب بر اساس سری تیلور، انتقال خنثی نیز برای فرم تقریب گوسی انتقال توزیع متغیرهای تصادفی  $x$  و  $y$  می‌تواند استفاده گردد. در  $UT^{16}$  بطور دقیق و یقین تعداد ثابتی نقاط سیگما انتخاب می‌شود که لحظه‌ی مطلوب توزیع  $x$  را ضبط می‌کند. سپس نقاط سیگما بوسیله تابع غیر خطی  $g$  توزیع شده و متغیرهای انتقال داده شده تخمین زده می‌شود. مزیت  $UT$  بر سری تیلور این است که  $UT$  در ضبط کردن لحظه‌های درجات بالا به سبب انتقال غیر خطی بهتر است. همچنین ماتریس‌زاکوبین و هسیان دیگر لازم نیست. بنابراین فرایند تخمین با استفاده از  $UT$  به طور کلی آسان‌تر و خطای کمتری دارد [۱۳].

انتقال خنثی می‌تواند برای فراهم کردن تقریب گوسی و متصل کردن توزیع متغیرهای  $x$  و  $y$  استفاده شود.

$$S_k = Y_k^- W [Y_k^-]^T + R_k \quad (43)$$

$$C_k = X_k^- W [Y_k^-]^T \quad (44)$$

سپس بهره فیلتر  $K_k$  و میانگین حالت بروز رسانی شده  $m_k$  و کوواریانس  $P_k$  به صورت زیر است [۱۳]:

$$K_k = C_k S_k^{-1} \quad (45)$$

$$m_k = m_k^- + K_k [y_k - \mu_k] \quad (46)$$

$$P_k = P_k^- - K_k S_k K_k^T \quad (47)$$

### موقعیت یابی ماهواره‌ای

سیستم موقعیت یاب جهانی (GPS)، با تعریف سنتی آن، منظومه‌ای از ۲۴ ماهواره است که در هر مدار ۴ ماهواره عملیاتی قرار دارد. البته تعدادی ماهواره کمکی در هر مدار وجود دارند که در صورت خرابی جایگزین می‌شوند. به این ماهواره‌ها نوستار<sup>۱۸</sup> نیز گفته می‌شود. این ماهواره‌ها از محاسبات ریاضی ساده‌ای برای پخش اطلاعات استفاده می‌کنند که به عنوان طول و عرض و ارتفاع جغرافیایی، توسط گیرنده‌های زمین ترجمه شده‌اند. اولین ماهواره GPS در سال ۱۹۷۸ با موفقیت به فضا پرتاب شد. هدف اصلی و اولیه از طراحی این سیستم، اهداف نظامی بوده، اما از سال ۱۹۸۰ به بعد برای استفاده‌های غیرنظامی نیز در دسترس قرار گرفت. با استفاده از حداقل سه ماهواره یا بیشتر، موقعیت یاب می‌تواند طول و عرض جغرافیایی مکان خود را تعیین نماید (که آن را تعیین دو بعدی می‌نامند) و با تبادل با چهار (و یا بیشتر) ماهواره می‌تواند موقعیت سه بعدی خود را تعیین نماید که شامل طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع است. با تکرار این محاسبات، موقعیت یاب می‌تواند سرعت و جهت حرکت خود را نیز به دقت مشخص نماید. هر قدر تعداد ماهواره‌های قابل مشاهده بیشتر شود معادلات اساسی تعیین موقعیت بیشتر خواهند شد و بنابراین زمان لازم برای تعیین موقعیت یک نقطه کاهش یافته و دقت تعیین موقعیت نیز افزایش خواهد یافت. موقعیت یاب اطلاعات موقعیتی را توسط اعداد و در یک سیستم مختصاتی بیان می‌کند. امروزه پر کاربردترین سیستم‌های مختصاتی<sup>۱۹</sup> Lat-Lon و<sup>۲۰</sup> UTM هستند [۱۴]. گیرنده‌های GPS هوابرد برای ناوبری آنلاین توسط تعداد زیادی از ماهواره‌های مدار کم ارتفاع (LEO) استفاده می‌شوند. در شکل ۳ نمای جایگیری ماهواره‌های GPS و در شکل ۴ شماتیک نحوه کار سیستم GPS نشان داده شده است.

$$Y = g(X) \quad (28)$$

$$\mu_U = Y W_m \quad (29)$$

$$S_U = Y W Y^T \quad (30)$$

$$C_{U=XY^T} \quad (31)$$

که  $X$  ماتریس نقاط سیگما، تابع  $g(0)$  بر هر ستون ماتریس ارتقا داده شده بطور مجزا اعمال شده‌است،  $c = \alpha^2(n+k)$  و بردار  $W_m$  و ماتریس  $W$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$W_m = [W_m^{(0)} \dots W_m^{(2n)}]^T \quad (32)$$

$$W = (I - [W_m \dots W_m]) \times \text{diag}(W_c^{(0)} \dots W_c^{(2n)}) \times (I - [W_m \dots W_m])^T \quad (33)$$

### فیلتر کالمن خنثی

فیلتر کالمن خنثی با استفاده از انتقال خنثی که در بالا بیان شد برای دادن تخمین گوسی و فیلتر کردن مسائل فیلترسازی بهینه غیرخطی استفاده می‌شود که به صورت زیر است:

$$X_k = f(X_{k-1}, k-1) + q_{k-1} \quad (34)$$

$$Y_k = h(X_k, k) + r_k \quad (35)$$

که  $X_k \in R^n$  بردار حالت،  $Y_k \in R^m$  بردار اندازه‌گیری،  $q_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$  نویز عملکرد گوسی و  $r_k \sim N(0, R_k)$  نویز اندازه‌گیری گوسی است. با استفاده از انتقال خنثی مراحل تخمین و بروز رسانی فیلتر کالمن خنثی به صورت زیر است:

### تخمین

محاسبه میانگین حالت تخمین زده شده  $m_k^-$  و کوواریانس تخمین زده شده  $P_k^-$  به صورت زیر است:

$$X_{k-1} = [m_{k-1} \dots m_{k-1}] + \sqrt{C} [0 \sqrt{P_{k-1}} - \sqrt{P_{k-1}}] \quad (36)$$

$$\hat{X}_k = f(X_{k-1}, k-1) \quad (37)$$

$$m_k^- = \hat{X}_k W_m \quad (38)$$

$$P_k^- = \hat{X}_k W [\hat{X}_k]^T + Q_{k-1} \quad (39)$$

### بروزرسانی

محاسبه میانگین تخمین زده شده  $\mu_k$ ، کوواریانس اندازه‌گیری  $S_k$  و کوواریانس ضربی بردار حالت و اندازه‌گیری  $C_k$  به صورت زیر است:

$$X_k^- = [m_k^- \dots m_k^-] + \sqrt{C} [0 \sqrt{P_k^-} - \sqrt{P_k^-}] \quad (40)$$

$$Y_k^- = h(X_k^-, k) \quad (41)$$

$$\mu_k = Y_k^- W_m \quad (42)$$

18. Navstar

19. Latitude-Longitude

20. Universal Transverse Mercator

امواج GPS شامل اطلاعاتی از خطاهای تقویم نجومی (موقعیت ماهواره) و نرخ انحراف ساعت برای ماهواره‌های منتشرکننده سیگنال است. داده‌های خطاهای تقویم نجومی ممکن است مدل دقیقی از حرکت واقعی ماهواره یا نرخ انحراف ساعت نباشد. انحراف سیگنال به سبب نویز اندازه‌گیری نیز باعث افزایش خطای موقعیت می‌گردد. اختلاف در داده‌های تقویم نجومی می‌تواند سبب ۱ تا ۵ متر خطا، اختلاف انحراف ساعت سبب ۰ تا ۱/۵ متر خطا و نویز اندازه‌گیری می‌تواند سبب ۰ تا ۱۰ متر خطا گردد.

### ۳- چند راهی<sup>۲۱</sup>

یک موج GPS با پرش و انتشار توسط یک سطح بازتاب‌کننده اولیه سبب رسیدن به آنتن دریافت‌کننده می‌شود که این موضوع چند راهی عنوان می‌شود. به دلیل دشوار بودن اصلاح خطای چندراهی، بخصوص در GPSهای دقت بالا خطای چند راهی نگرانی جدی برای کاربر است.

با توجه به موارد فوق، مسافت اندازه‌گیری شده برابر مسافت واقعی بعلاوه فاکتورهای مختلف اغتشاش از منابع خطا است که به صورت رابطه (۴۸) است:

$$\rho_i = \rho_{Ti} + c(\delta_i^s - \delta_R) = \rho_{Ti} - c\delta_R + c(\Delta T_i + \Delta I_i + \Delta v_i + \Delta b_i) \quad (48)$$

که:

$\Delta T_i$ : خطای تروپوسفر

$\Delta I_i$ : خطای یونسفر

$\Delta v_i$ : اصلاح خطای زمان نسبی

$\Delta b_i$ : خطای ساعت بایاس ماهواره

در این پژوهش تنها خطاهای اتمسفری و انحراف ساعت مورد بررسی قرار می‌گیرد که به صورت زیر است:

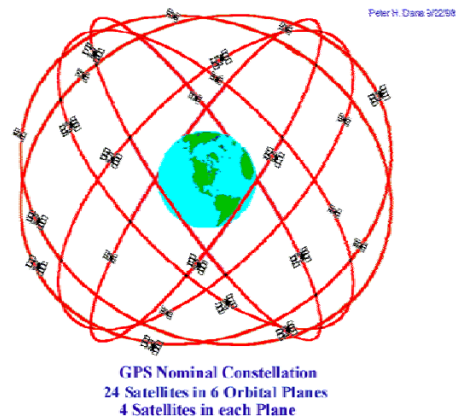
### خطای یونسفر

زمانی که امواج ماهواره GPS از یونسفر گذر می‌کند، به سبب مقدار نسبت تعداد یون‌های مواجهه با سیگنال، دچار تأخیر می‌شود. چگالی یون تابعی از زمان محلی، عرض مغناطیسی، چرخه لکه خورشیدی و دیگر فاکتورها است. کلبوچار<sup>۲۲</sup> یک مدل تحلیلی ساده برای تأخیر زمانی یونسفر را توسعه داد که در این‌جا از این مدل استفاده می‌شود. الگوریتم این مدل نیازمند طول و عرض هندسی تقریبی کاربر، زاویه فراز و آزیموت هر ماهواره GPS است. فرآیند اصلاح به صورت زیر است:

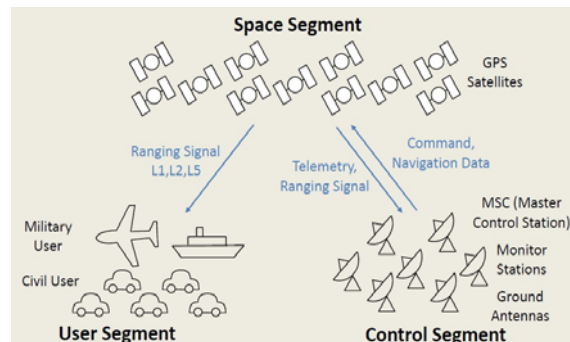
۱- محاسبه‌ی زاویه مرکز زمین

$$\Psi = \frac{0.0137}{E+0.11} - 0.022 \quad (\text{شبه دایره}) \quad (49)$$

21. Multipath  
 22. Klobuchar



شکل ۳- نمایه سنتی ماهواره‌های GPS و طرز قرارگیری آنها [۱۵]



شکل ۴- شماتیک چگونگی کارکرد GPS [۱۵]

به طور کلی، دقت موقعیت و سرعت از طریق ناوبری GPS بدون فیلترهای پویا حدود ۲۵ متر و ۰/۵ متر بر ثانیه است. در اینجا از فیلتر کالمن خنثی (UKF) به منظور بهبود عملکرد استفاده خواهد شد. چرا که فیلتر کالمن خنثی این توانایی را دارد که میانگین خلفی و کواریانس را بوسیله بسط مرتبه دوم سری تیلور از طریق نقاط سیگمای نمونه به‌وسیله‌ی سیستم غیر خطی با دقت بالا بدست آورد.

### خطاهای ناوبری ماهواره‌ای

ناوبری ماهواره‌ای جهانی، تا آنجایی که ممکن است دقیق طراحی شده است ولی هنوز خطاهایی دارد. مجموع خطاها می‌تواند سبب انحراف ۵ تا ۱۰۰ متری گردد. تعدادی منابع خطا وجود دارد که مهم‌ترین آنها به قرار زیر است [۱۶]:

۱- شرایط اتمسفر

یونسفر و تروپوسفر هر دو سبب شکست امواج ماهواره می‌شوند چرا که سرعت سیگنال در یونسفر و تروپوسفر با سرعت سیگنال در فضا متفاوت است لذا مسافت اندازه‌گیری شده از سرعت و زمان رسیدن سیگنال با مسافت واقعی آن متفاوت خواهد بود.

۲- خطاهای تقویم نجومی/انحراف ساعت/ نویز اندازه‌گیری



$$k_w = -0.282 \times \frac{p_{vap}}{T_{amb} + 273.16} + 8307.2 \times \frac{p_{vap}}{(T_{amb} + 273.16)^2} \quad (59)$$

با ضرب بیشترین تأخیر در تابع نقشه برای اصلاح زاویه فراز کمتر از ۹۰ درجه و اضافه نمودن مؤلفه تصحیح، تأخیر تروپوسفر به صورت رابطه (۶۰) است:

$$\Delta T = \frac{k_d}{\sin(\sqrt{El^2 + 1.904E-3})} + \frac{k_w}{\sin(\sqrt{El^2 + 0.6854E-3})} \quad (60)$$

که  $El$  زاویه فراز بر حسب رادیان است.

### خطای ساعت ماهواره

کاربر دریافت کننده نیازمند اصلاح ساعت ماهواره GPS است. اصلاح ساعت ماهواره با استفاده از ضرایب و انتشار از ماهواره بعد از بارگذاری بوسیله قسمت کنترل GPS انجام می‌شود. زمان GPS برای حل مکان کاربر  $t_{sv} = t - \Delta t_{sv}$  است که  $t_{sv}$  فاز کد نویز، زمان ارسال داده است که به سادگی از طریق گیرنده‌ی GPS قابل محاسبه است. اصلاح ساعت ماهواره بطور تقریبی به صورت رابطه (۶۱) است:

$$\Delta t_{sv} = af_0 + af_1(t - t_{oc}) + af_2(t - t_{oc})^2 + \Delta t_R - T_{gd} \quad (61)$$

که  $af_0$ ،  $af_1$  و  $af_2$  ضرایب تصحیح مربوط به خطای فاز، خطای فرکانس و خطای نرخ تغییرات فرکانس هستند.  $\Delta t_R$  تصحیح نسبی،  $t_{oc}$  زمان مرجع برای اصلاح ساعت و  $T_{gd}$  تأخیر گروه است.

تصحیح نسبی باید توسط کاربر محاسبه شود و به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\Delta t_R = F_e \sqrt{A} \sin(E_k) \quad (62)$$

که در آن:

$$F_e = -4.442807633E - 10 \text{ s/m}$$

$E_k$ : آنومالی خروج از مرکزیت مدار ماهواره

$A$ : نیم محور اصلی مدار ماهواره

لازم به توضیح است که خطای ساعت گیرنده نیز بعنوان مجهول چهارم در کنار مؤلفه‌های موقعیت به‌راحتی قابل محاسبه است.

### پیاده‌سازی مسئله

در ادامه روش‌های پیاده‌سازی مسئله شرح داده شده است.

#### شبیه‌سازی مدار

از مرجع [۹] یک مدار ماهواره با پارامترهای مداری بیان شده در جدول ۱ انتخاب شده است. اثرات ناهمگونی زمین را به صورت زیر در مسئله لحاظ می‌کنیم:

$$\ddot{X} = -\frac{\mu}{r^3} r + p \quad (63)$$

که  $p$  شتاب ناشی از ناهمگونی زمین است که مؤلفه‌های آن به صورت معادله (۶۴) است. تغییرات زاویای حضيض و بعد که از

#### ۲- محاسبه‌ی عرض جغرافیایی زیر یونسفر

$$\phi_I = \phi_U + \psi \cos A \quad (\text{شبه دایره}) \quad (50)$$

که اگر  $\phi_I \geq 0.416$  آنگاه  $\phi_I = 0.416$  و اگر  $\phi_I \leq -0.416$  آنگاه  $\phi_I = -0.416$  است.

#### ۳- محاسبه‌ی طول جغرافیایی زیر یونسفر

$$\lambda_I = \lambda_U + (\psi \frac{\sin A}{\cos \phi_I}) \quad (\text{شبه دایره}) \quad (51)$$

۴- بدست آوردن عرض ژئومغناطیس مکان زیر یونسفری که هر ماهواره GPS بطور مستقیم دیده می‌شود که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$t = 4.32 \times 10^4 \lambda_1 + \text{Time}_{GPS} \quad (52)$$

۵- بدست آوردن زمان محلی  $t$  در نقطه‌ی زیر یونسفر

$$\phi_m = \phi_I + 0.064 \cos(\lambda_I - 1.617) \quad (53)$$

اگر  $t > 86400$  آنگاه  $t = t - 86400$  و اگر  $t < -86400$  آنگاه  $t = t + 86400$  است.

۶- برای تبدیل تأخیر زمانی شیب، فاکتور شیب به صورت رابطه (۵۴) محاسبه می‌شود.

$$F = 1 + 16(0.53 - E)^3 \quad (54)$$

۷- محاسبه‌ی تأخیر زمانی یونسفر  $T_{iono}$  بوسیله محاسبه اولین  $x$ :

$$Fx = \frac{2\pi(t-50400)}{\frac{\sum_{n=0}^3 \beta_n \phi_m^n}{PER}} \quad (55)$$

اگر  $PER < 72000$  آنگاه  $PER = 72000$  است.

۸- اگر  $|x| > 1.57$  آنگاه:

$$T_{iono} = F \times (5 \times 10^{-9}) \quad (56)$$

در غیر این صورت:

$$T_{iono} = F \times \left[ 5 \times 10^{-9} + \sum_{n=0}^3 \alpha_n \phi_m^n \times \frac{1-x^{22}+x^{424}}{2} \right] \quad (57)$$

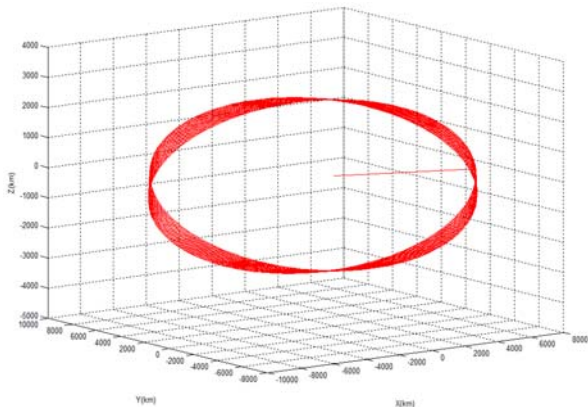
### خطای تروپوسفر

هدف اصلی سیستم تحلیلی تروپوسفر تخمین تأخیر رطوبت تروپوسفری است که می‌تواند به تجمعی از بخار آب تبدیل شود که به عنوان ورودی ارزشمند در مدل آب و هوایی بکار می‌رود. به همین دلیل، مدل هپفیلد<sup>۲۳</sup> تخمین و مدل‌سازی تأخیر تروپوسفر را بیان می‌کند. هپفیلد تأخیر تروپوسفر را به دو قسمت سهم اتمسفر خشک و خیس تقسیم می‌کند. بیشترین تأخیر سهم اتمسفر خشک به صورت رابطه (۵۸) است:

$$k_d = 1.55208E - 4 \times p_{amb} \times (40136 + 148.72 \times T_{amb}) / (T_{amb} + 273.16) \quad (58)$$

که  $T_{amb}$  دمای محصور و  $p_{amb}$  فشار هوای محصور است. بیشترین تأخیر اتمسفر خیس به صورت رابطه (۵۹) است:

در ادامه با استفاده از روابط ذکر شده در بخش ۳ با توجه به پارامترهای مداری، مدار ماهواره مورد نظر شبیه سازی می شود که مدار شبیه سازی شده در شکل ۷ قابل ملاحظه است.



شکل ۷- مدار شبیه سازی شده با در نظر گرفتن اثرات ناهمگونی

لازم به ذکر است که مدار شبیه سازی شده همان خروجی حل عددی معادلات حرکت مداری می باشد که با اضافه نمودن خطاها و اعداد تصادفی به آن بعنوان ورودی فیلتر از داده های آن استفاده می شود. مدار تخمین زده شده نیز همان خروجی فیلتر کالمن خواهد بود.

### شبیه سازی GPS و خطاهای آن

با استفاده از تقویم نجومی و داده های ماهواره های GPS، مدار ماهواره های GPS شبیه سازی شدند که در شکل ۸ مدارها و ماهواره های شبیه سازی شده مشاهده می شود.

### تخمین مدار با استفاده از UKF بدون دخالت دادن خطای GPS در فیلتر

در این حالت بدون در نظر گرفتن و دخالت خطای GPS و با استفاده از خطای تصادفی، مدار تخمین زده شده است که مدل حالت و مشاهده گر سیستم به صورت زیر است:

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ p_x - x \times \frac{\mu}{r^3} \\ p_y - y \times \frac{\mu}{r^3} \\ p_z - z \times \frac{\mu}{r^3} \end{bmatrix} \times dt + X_k \quad (65)$$

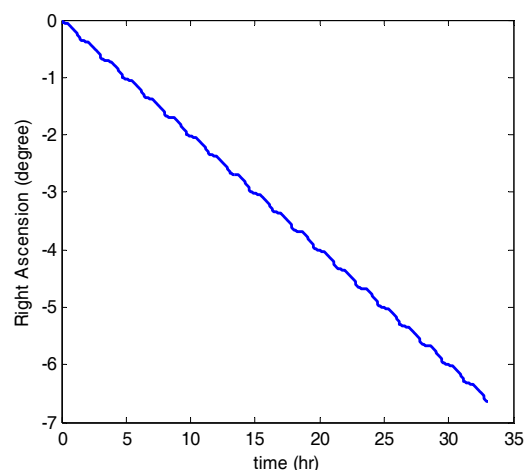
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_{s1} - x)^2 + (y_{s1} - y)^2 + (z_{s1} - z)^2} + sd * randn \\ \sqrt{(x_{s2} - x)^2 + (y_{s2} - y)^2 + (z_{s2} - z)^2} + sd * randn \\ \sqrt{(x_{s2} - x)^2 + (y_{s2} - y)^2 + (z_{s2} - z)^2} + sd * randn \end{bmatrix} \quad (66)$$

شبیه سازی مدار با اثرات ناهمگونی زمین بدست آمده اند، برای مدت زمان سی و سه ساعت در شکل های ۵ و ۶ آورده شده است

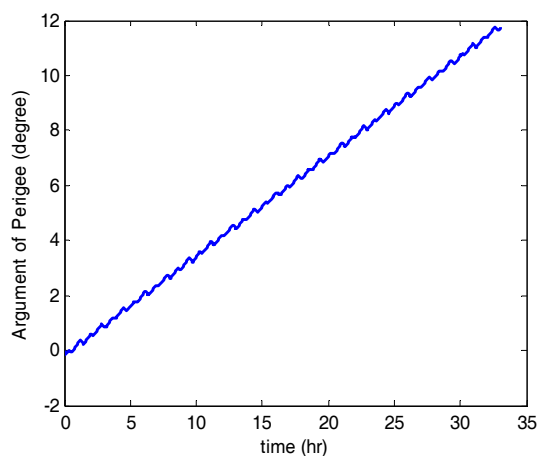
$$p = 1.5 * j_2 * \mu * \frac{R^2}{r^4} * \left( \frac{x}{r} * 5 * \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{i} + 1.5 * j_2 * \mu * \frac{R^2}{r^4} * \left( \frac{y}{r} * 5 * \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{j} + 1.5 * j_2 * \mu * \frac{R^2}{r^4} * \left( \frac{z}{r} * 5 * \frac{z^2}{r^2} - 3 \right) \hat{k} \quad (64)$$

جدول ۱- پارامترهای مدار انتخابی

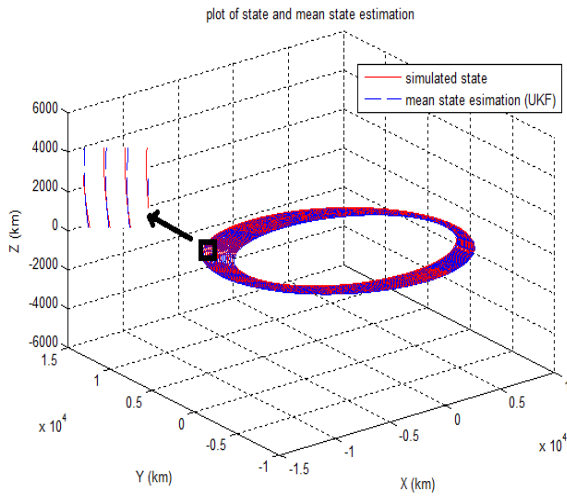
ردیف	پارامتر مداری	مقدار	واحد
۱		۶۶۷۸	
۲		۹۴۴۰	
۳		۴۵	degree
۴		۲۸	degree
۵		۳۰	degree
۶		۴۰	degree



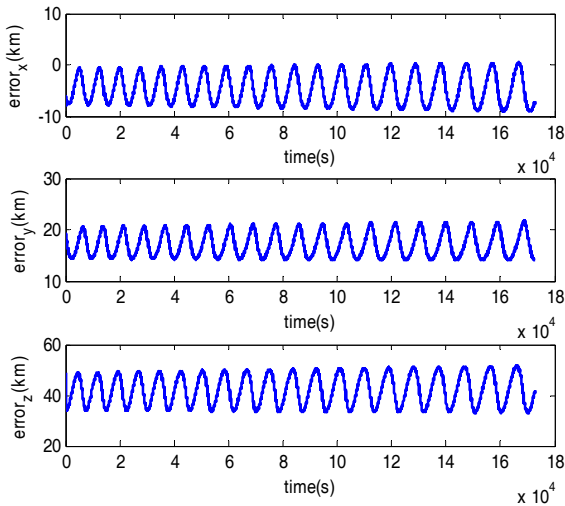
شکل ۵- تغییرات زاویه بعد در طول ۲ روز بر اثر ناهمگونی زمین



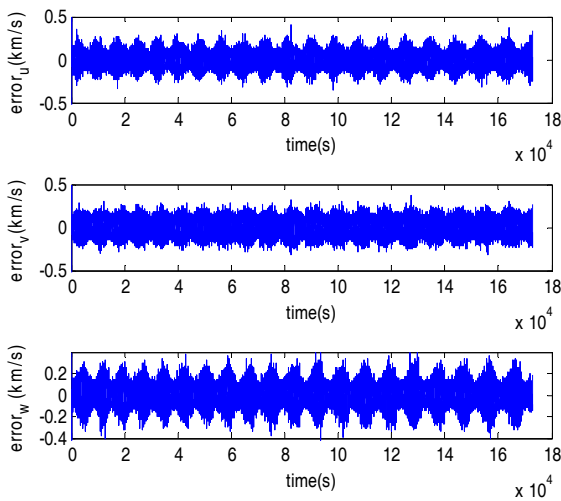
شکل ۶- تغییرات حضیض در طول ۲ روز بر اثر ناهمگونی زمین



شکل ۱۰- مدار شبیه‌سازی شده و مدار تخمین زده شده



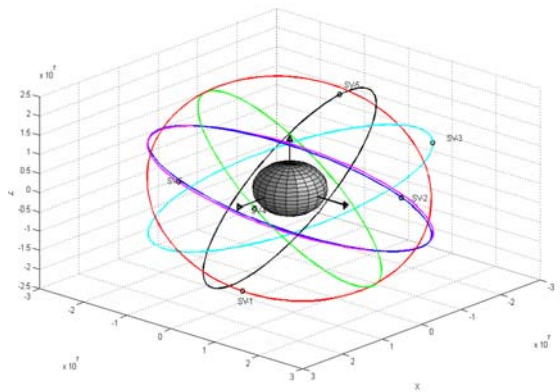
شکل ۱۱- اختلاف موقعیت مدار تخمین زده شده با مکان اولیه



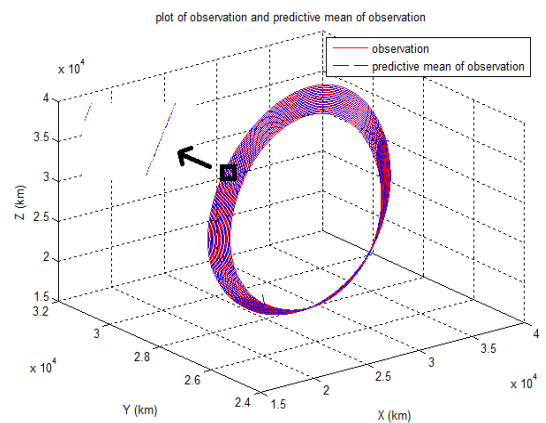
شکل ۱۲- اختلاف سرعت مدار تخمین زده شده با مدار شبیه‌سازی شده.

که:  $x_{s1}$   $x_{s2}$   $x_{s1}$   
 $y_{s1}$   $y_{s2}$   $y_{s2}$   
 $z_{s1}$   $z_{s3}$   $z_{s3}$

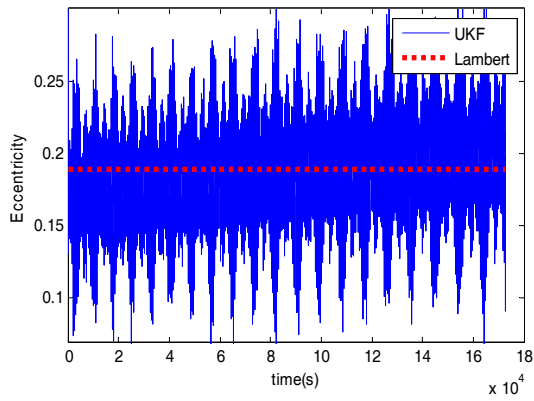
۳ و ۲ GPS و  $sd$  انحراف معیار که برابر  $0.2$  در نظر گرفته شده است.  $randn$  نیز عدد تصادفی است. حال با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن خنثی، نمودار مشاهده‌گر (فاصله بین ماهواره GPS تا ماهواره) در شکل ۹ و مدار تخمین زده شده در شکل ۱۰ آورده شده است. در نمودارهای شکل ۱۱ اختلاف موقعیت مدار شبیه‌سازی شده با مدار تخمین زده شده نشان داده شده است که همانطور که مشاهده می‌شود خطا به صورت نوسانی است و بیشترین آن برای مؤلفه در جهت  $Z$  محور اینرسی زمین، حدود  $6/5$  کیلومتر است. همچنین مقدار اختلاف سرعت در مدار شبیه‌سازی شده با مدار تخمین زده شده در شکل ۱۲ آورده شده است که همانطور که مشاهده می‌شود مقدار آن بطور میانگین تقریباً صفر است. کوواریانس خطای موقعیت نیز در شکل ۱۳ آورده شده است. شکل ۱۴ تغییرات مونتومم زاویه‌ای و اشکال ۱۵ تا ۲۰ تغییرات المان‌های مداری را نشان می‌دهند.



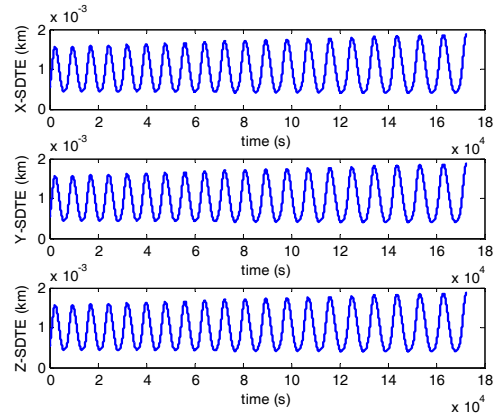
شکل ۸- مدارها و ماهواره‌های GPS شبیه‌سازی شده



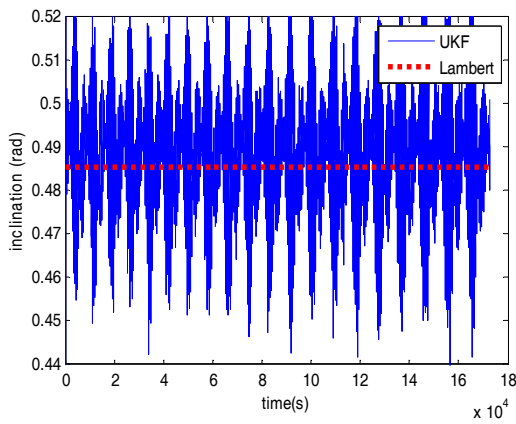
شکل ۹- مشاهده‌گر و میانگین مشاهده‌گر پیش‌بینی شده



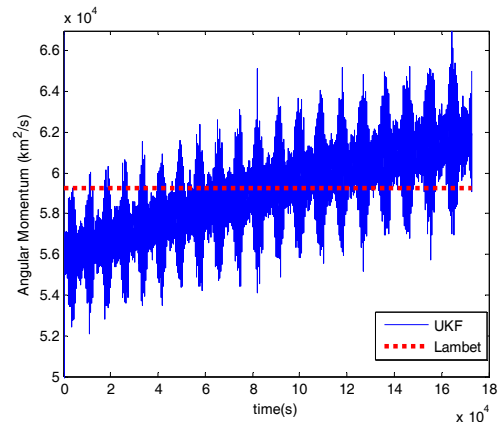
شکل ۱۶ - تغییرات خروج از مرکزیت مدار تخمین زده شده



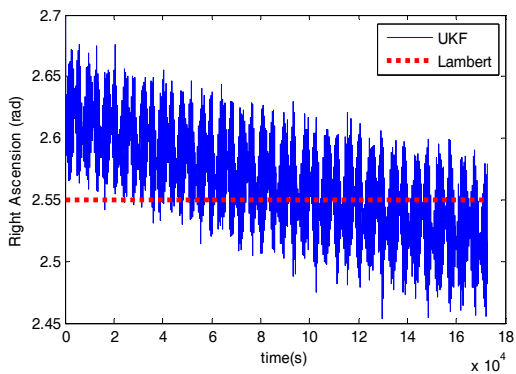
شکل ۱۳ - کوواریانس خطای موقعیت



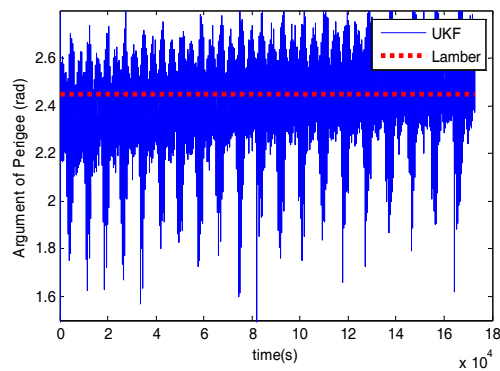
شکل ۱۷ - تغییرات شیب مدار تخمین زده شده.



شکل ۱۴ - تغییرات ممنتوم زاویه ای مدار تخمین زده شده

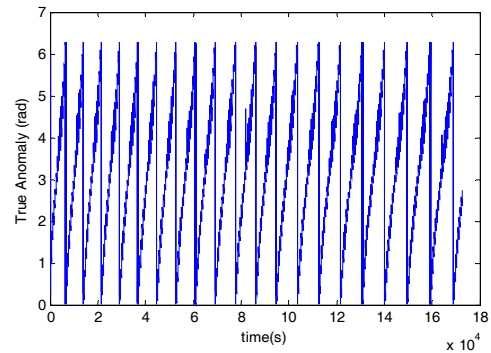


شکل ۱۸ - تغییرات گرهِ صعود مدار تخمین زده شده.

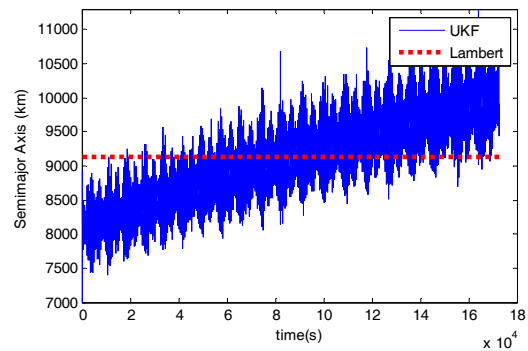


شکل ۱۵ - تغییرات آرگمان نقطه حضیض مدار تخمین زده شده

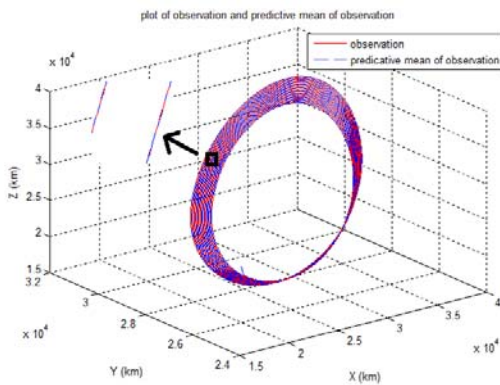
بدون در نظر گرفتن اثرات ناهمگونی مقدار مومنتوم زاویه‌ای برابر  $km^2/s$  حاصل شده است. شکل ۲۷ تغییرات آرگمان نقطه حیض مدار تخمین زده شده، طی ۲ روز را نشان می‌دهد که همراه با نوسانات و افزایش آرگمان نقطه حضیض است. همچنین از روش لمبرت مقدار آن برابر  $۲/۴۵$  رادیان حاصل شده است که در محدوده نوسانات است. شکل ۲۸ تغییرات خروج از مرکزیت مدار تخمین زده شده طی ۲ روز را نشان می‌دهد که نوساناتی با شیب خیلی کم بطور افزایشی دارد. از روش لمبرت مقدار خروج از مرکزیت (بدون اثرات  $J_2$ ) تقریباً برابر  $۰/۱۹$  حاصل شده است که تقریباً با میانگین نوسانات مطابقت دارد. شکل ۲۹ تغییرات شیب مدار تخمین زده شده طی ۲ روز را نشان می‌دهد که با نوساناتی همراه است ولی سرانجام میانگین آن برابر روش لمبرت و برابر  $۰/۴۹$  رادیان است. شکل ۳۰ تغییرات گره صعود مدار تخمین زده شده طی ۲ روز را نشان می‌دهد که به مرور زمان کاهش می‌یابد. از روش لمبرت بدون در نظر گرفتن اثرات  $J_2$  مقدار گره صعود مدار برابر  $۲/۵۶$  رادیان است. شکل ۳۱ تغییرات آنومالی واقعی مدار تخمین زده شده طی ۲ روز را نشان می‌دهد که به صورت متناوب است. در شکل ۳۲ تغییرات نیم محور اصلی مدار تخمین زده شده طی ۲ روز را نشان می‌دهد که با افزایش زمان مقدار آن افزایش می‌یابد. از روش لمبرت، بدون اثر دادن  $J_2$  مقدار نیم محور اصلی برابر  $۹۱۰۰$  کیلومتر حاصل شده است.



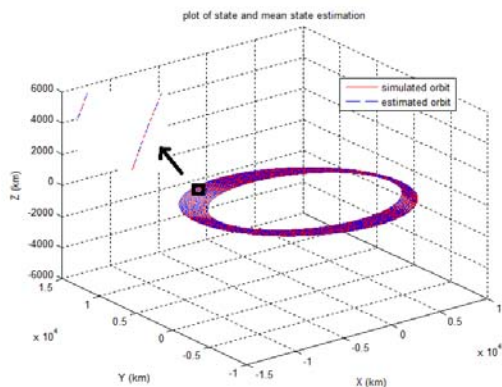
شکل ۱۹- تغییرات آنومالی واقعی مدار تخمین زده شده



شکل ۲۰- تغییرات نیم محور اصلی مدار تخمین زده شده



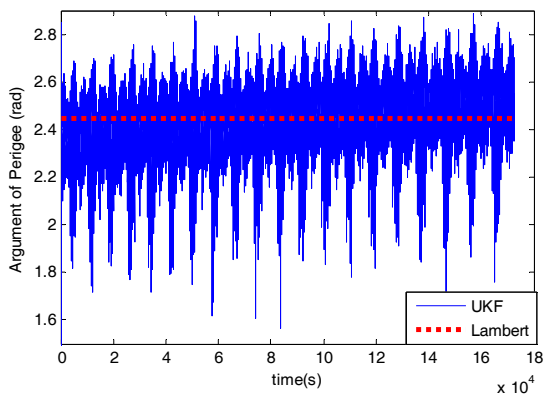
شکل ۲۱- مشاهده گر و میانگین مشاهده گر پیش بینی شده



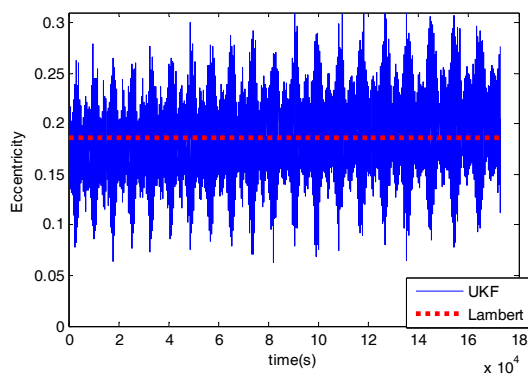
شکل ۲۲- مدار شبیه‌سازی شده و مدار تخمین زده شده

### تخمین مدار با استفاده از UKF

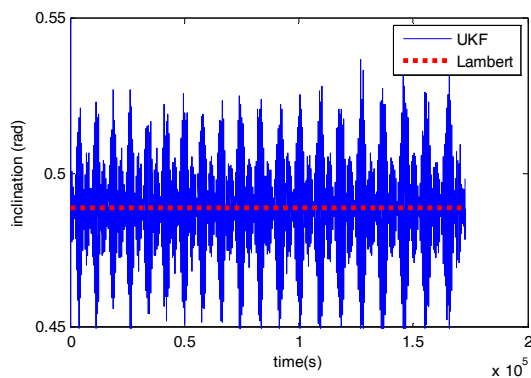
در این حالت در مدل مشاهده‌گر، خطای GPS اعمال می‌شود. بدین صورت که خطای GPS با خطای تصادفی جمع می‌شود. نتایج حاصل از تخمین مدار در ادامه قابل مشاهده است. در شکل مشاهده‌گر و میانگین مشاهده‌گر پیش‌بینی شده، با رنگ قرمز و آبی رسم شده است. در شکل ۲۲ مدار شبیه‌سازی شده و مدار تخمین زده شده با رنگ قرمز و آبی رسم شده است که تقریباً منطبق بر یکدیگرند. همچنین همانطور که ملاحظه می‌شود، فیلتر داده‌ها توانسته است اثرات ناهمگونی زمین را هم پوشش دهد و مدار را تخمین بزند. در نمودارهای شکل ۲۳ مقدار اختلاف موقعیت مدار تخمین زده شده با مدار شبیه‌سازی شده آورده شده است که روند نوسانی دارد ولی میانگین آن تقریباً برابر صفر است. در نمودارهای شکل ۲۴ مقدار اختلاف سرعت مدار تخمین زده شده با مدار شبیه‌سازی شده آورده شده است که روند نوسانی دارد ولی میانگین آن تقریباً برابر صفر است. در شکل ۲۵ کوواریانس خطای موقعیت بر حسب زمان رسم شده است که رفتار تناوبی و پایدار دارد. شکل ۲۶ تغییرات مومنتوم زاویه‌ای مدار تخمین زده شده طی ۲ روز را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود مومنتوم زاویه‌ای، بر اثر اثرات ناهمگونی زمین افزایش می‌یابد. با تخمین مدار از روش لمبرت



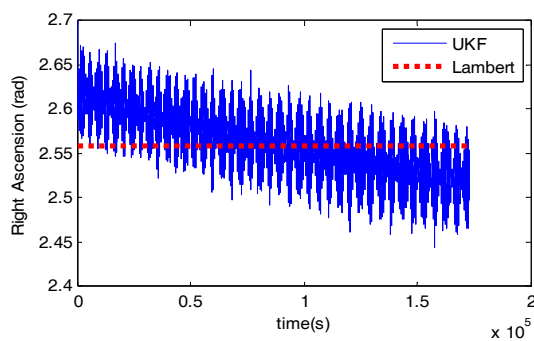
شکل ۲۷- تغییرات آرگمان نقطه حیض مدار تخمین زده شده



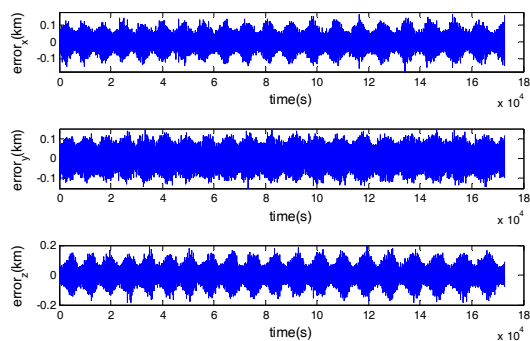
شکل ۲۸- تغییرات خروج از مرکزیت مدار تخمین زده شده



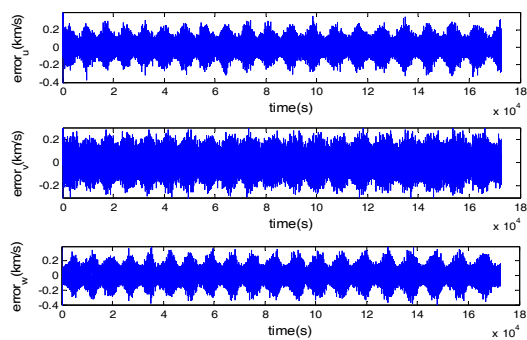
شکل ۲۹- تغییرات شیب مدار تخمین زده شده



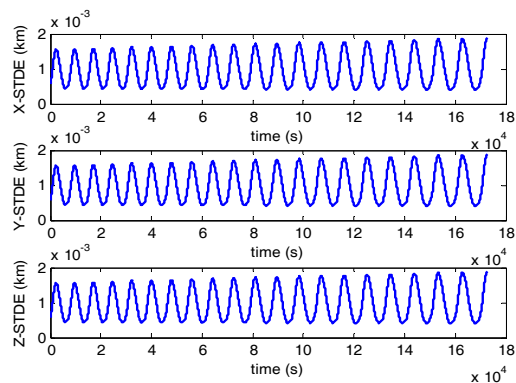
شکل ۳۰- تغییرات گره صعود مدار تخمین زده شده



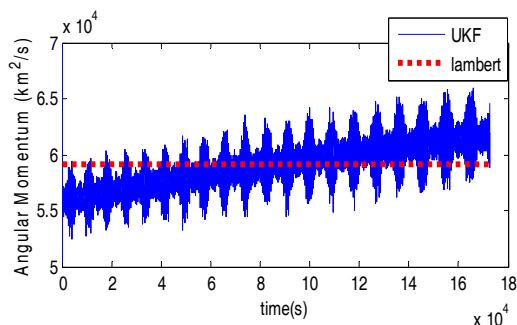
شکل ۲۳- اختلاف موقعیت مدار تخمین زده شده و مدار شبیه سازی شده



شکل ۲۴- اختلاف سرعت مدارهای تخمین زده شده و شبیه سازی شده



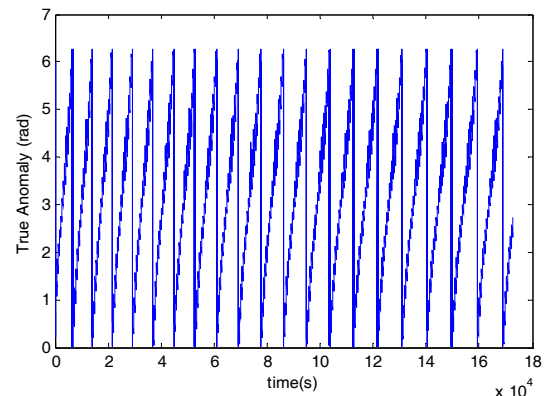
شکل ۲۵- کوواریانس خطای موقعیت



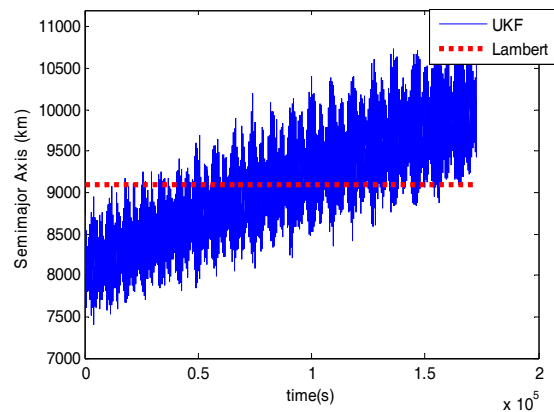
شکل ۲۶- تغییرات ممتموم زاویه ای مدار تخمین زده شده

## مراجع

- [1] Kalman, S.U., GPS-Based Real-Time Orbit Determination of Artificial Satellites Using Kalman, Particle, Unscented Kalman and H-Infinity Filters, (Ph.D. Thesis), Middle East Technical University, 2011.
- [2] Sunny, L. and Montenbruck, O., "Real-time navigation of Formation-Flying Spacecraft using Global-Positioning-System Measurements," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No.2, 2005, pp. 226-235.
- [3] Misra, P. and Enge, P., *Global Positioning System: Signals, Measurements and Performance Second Edition*. Lincoln, MA: Ganga-Jamuna Press, 2006.
- [4] Azmudeh, A.R. and Marzieh, B., "Ionospheric Error Modeing with Correcting of Components of Coordinate and velocity vector." *Journal of Engineering Faculty of University of Tehran*, V. 38, n. 6, 1383, pp. 823-830. (in Persian)
- [5] Safari, A., Sharifi, M., Farzaneh, S. "Kinematic Velocity Determination for the Low-Earth-Orbit Satellites using the Extended Kalman Filter: a Case Study, the GRACE twin satellites" *Earth and Space Physics Journal*, Vol. 38, No. 4, 1393, pp. 67-82. (in Persian)
- [6] Salem, J., Zeighami, M. and Alavi S. M., "Modelling of LEO Satellites Trajectories and Their Tracking With Extended Kalman Filter (EKF) & Unscented Kalman Filter (UKF)" *Journal of Radar*, Vol. 2, No. 2, 1393, pp. 39-48 (in Persian)
- [7] Bolandi, H., Ashtari, M. H., Esmailzadeh, M. and Haghparast M., "Increasing Accuracy of Satellite Position Prediction with Considering Harmonics of Potential Function of the Earth." *Journal of Space Science & Technology*, Vol. 6, No. 3, 1392, pp. 27-38 (in Persian).
- [8] Available, [on line]: [http://www.nasa.gov/worldbook/artificial\\_satellites\\_worldbook.htm](http://www.nasa.gov/worldbook/artificial_satellites_worldbook.htm)
- [9] Howard, C., *Orbital mechanics for engineering students*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [10] Giannitrapani, A. and et al. "Comparison of EKF and UKF for Spacecraft Localization Via Angle Measurements," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on* Vol. 47, No.1, 2011, pp. 75-84.
- [11] Gomes, Vivian M., Helio K. Kuga, and Ana Paula M. Chiaradia, "Real Time Orbit Determination using GPS Navigation Solution," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 29, No. 3, 2007, pp. 274-278.
- [12] Wu, Jinjie, et al. "Particle Filter using a New Resampling Approach Applied to LEO Satellite Autonomous Orbit Determination with a Magnetometer," *Acta Astronautica*, Vol. 81, No. 2, 2012, pp. 512-522.
- [13] Hartikainen, J., Solin, A. and Särkkä, S., "Optimal Filtering with Kalman Filters and Smoothers a Manual for the Matlab Toolbox EKF/UKF Version 1.3.", 2011.
- [14] *Global Positioning System Overview*, Peter H. Dana. Available [on line]: [http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps\\_f.html](http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html).
- [15] Available [on line]: [page:www.en.wikipedia.org/wiki/Global\\_Positioning\\_System](http://page:www.en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System).
- [16] Mehrtash, M., "GPS Navigation Toolbox," *Engineering and Computer Science*, 2008.



شکل ۳۱- تغییرات آنومالی واقعی مدار تخمین زده شده



شکل ۳۲- تغییرات نیم محور اصلی مدار تخمین زده شده

## نتیجه گیری

بر اساس نتایج این تحقیق برای مدلی که اثرات ناهمگونی زمین در آن لحاظ شده است، اثرات اغتشاشات در قالب یک شتاب در معادلات وارد می‌شود و با گذشت زمان پارامترهای مدار تغییر می‌کند، به طوری که گره صعود کاهش و آرگمان نقطه حضیض افزایش می‌یابد که در مدار تخمین زده شده نیز این رفتار دیده می‌شود. در قسمت شبیه سازی GPS، بیشترین خطای GPS مربوط به خطای ساعت بایاس ماهواره است و دیگر خطاها نسبت به خطای بایاس مقدار ناچیزی دارند. در قسمت تخمین مدار با استفاده از فیلتر کالمن، زمانی که خطای GPS در مدل مشاهده‌گر اضافه شد، مدار تخمین زده شده دقیق‌تر شد به طوری که میانگین خطای موقعیت ۰/۰۳۵ کیلومتر گردید. برای ارزیابی تحلیل‌ها نتایج حاصل از تخمین مدار با استفاده از فیلتر کالمن خنثی با نتایج تخمین مدار با استفاده از روش لمبرت مقایسه شد که در واقع میانگین مقادیر حاصل شده برای پارامترهای مدار تقریباً با مقدار به‌دست آمده از روش لمبرت تطابق دارد.