

Optimal Trajectory Design of an Upper Stage for Satellite Injection into Geostationary Orbit Using Limited Thrust

M. Alavipour^{1*}, A.A. Nikkhah² and J. Roshanian³

1,2 and 3. Department of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of Technology

*Postal Code: 16569-83911, Tehran, IRAN

malavipour@mail.kntu.ac.ir

In this research, the problem of optimal trajectory design of an upper stage is considered for satellite injection into Geostationary orbit in 3-Dimensional space. The optimal multi-burn trajectory is obtained based on Euler-Lagrange theory with minimum fuel consumption criteria. Instead of using switch function for obtaining the switching times, which complicates the numerical solution of the optimal control problem, the presented algorithm uses a simple and optimal process to find the burn and coast times. To solve the two point boundary value problem, an improved indirect shooting method with high performance is used which in addition to having higher precision, converges very fast to the desired condition.

Keywords: Optimal trajectory, Upper stage, Geostationary orbit, Multiple burn

1. PhD Student (Corresponding Author)
2. Associate Professor
3. Professor

طراحی مسیر بهینه یک بلوک انتقال مداری جهت تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ با پیشرانس محدود

مجتبی علوی پور^{۱*}، امیر علی نیکخواه^۲ و جعفر روشنیان^۳

۱، ۲ و ۳- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

*تهران، کد پستی: ۱۶۵۶۹-۸۳۹۱۱

malavipour@mail.kntu.ac.ir

در این تحقیق، مسئله طراحی مسیر بهینه یک بلوک انتقال مداری جهت تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ در فضای سه بعدی مورد نظر می باشد. مسیر بهینه چند سوزشی براساس تئوری اویلر-لاگرانژ با معیار حداقل مصرف سوخت به دست می آید. جهت تعیین زمان های روشن و خاموشی موتور، به جای استفاده از تابع سویچ که سبب پیچیدگی محاسبات می شود، از یک روش ساده و بهینه استفاده شده تا زمان های سویچ از فازهای فعال به غیرفعال و بالعکس تعیین شوند. برای حل مسئله شرط مرزی در چند نقطه از یک روش پرتابی غیرمستقیم بهبود یافته با کارایی بالا استفاده شده است که علاوه بر تأمین دقت بالا، با سرعت بسیار خوبی نیز به شرایط مرزی مورد نظر همگرا می شود.

واژه های کلیدی: مسیر بهینه، بلوک انتقال مداری، مدار زمین آهنگ، سوزش چندگانه

ψ زاویه پیشرانس در خارج از صفحه پرواز
 i زاویه شیب مداری
 v سرعت
 \vec{h} بردار اندازه حرکت زاویه ای
 H تابع همیلتونین

مقدمه

مسئله طراحی مسیره های فضایی بهینه به منظور کاهش مصرف سوخت یا تزریق حداکثر جرم محموله به مدار، یکی از موضوعات بسیار مهم و مرتبط با موضوعات هوافضایی از سال ۱۹۵۰ بوده

علائم و اختصارات

r فاصله شعاعی جسم از مرکز زمین در هر لحظه
 x, y, z مؤلفه های بردار موقعیت جسم در هر لحظه
 μ پارامتر جاذبه ای زمین
 T اندازه نیروی پیشرانس
 C سرعت مشخصه سیستم پیشرانس
 m جرم لحظه ای جسم
 ϕ زاویه پیشرانس در صفحه پرواز

۱. دانشجوی دکتری (نویسنده مخاطب)

۲. دانشیار

۳. استاد

روش سریع‌ترین سقوط^{۱۰} و یا روش SQP^{۱۱} برای تعیین مسیرها و کنترل بهینه، با ارضای شرایط بهینگی کوهن- تاکر^{۱۲} به کار می‌روند. همچنین از روش‌های جستجوی غیر گرادینانی مانند الگوریتم ژنتیک یا الگوریتم اجتماع پرندگان^{۱۳} نیز می‌توان برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده نمود. معمولاً مسئله بهینه‌سازی غیرخطی حاصله بسیار بزرگ بوده و عموماً با استفاده از بهینه‌سازهای تجاری موجود حل می‌شوند. حل نهایی به دست آمده از روش‌های مستقیم احتمالاً بهینه است و به نحوه گسسته‌سازی متغیرهای حالت و کنترل و تطبیق آن با مسئله اصلی بستگی دارد. از آنجاکه در فرایند حل روش‌های مستقیم از متغیرهای شبه‌حالت استفاده نمی‌شود، نتایج نهایی حاوی یک تضمین تحلیلی از بهینگی نمی‌باشد. بالعکس، روش‌های غیرمستقیم، نیازی به پارامتری نمودن کمیت‌های متغیر با زمان ندارد و به لحاظ عددی بسیار دقیق‌تر است و بهینگی محلی را تضمین می‌کنند. مشروط بر اینکه یک حدس اولیه مناسب صورت گیرد که این کار نسبتاً چالش برانگیز است، زیرا مقادیر اولیه متغیرهای شبه‌حالت غیر شهودی است و یک مجموعه پارامترهای مجهول را تشکیل می‌دهند که باید حدس زده شوند. ولی روش‌های مستقیم از لحاظ همگرایی مقاوم هستند و قادرند حتی با یک حدس اولیه ضعیف، به نتایج دلخواه همگرا شوند. در طول چند دهه گذشته، روش‌های مختلفی برای طراحی مسیر و هدایت فاز فعال سیستم‌های حامل ماهواره مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته و توسعه یافته‌اند. براون^{۱۴} و همکاران در سال ۱۹۶۹ اولین تلاش‌ها را برای دستیابی به هدایت حلقه بسته در فاز خلأ انجام دادند [۱]. مسئله مسیر بهینه به‌عنوان یک مسئله مقدار مرزی برای یافتن قوانین هدایت بهینه جهت مأموریت‌های تزریق مداری و ملاقات مداری، حل شد. براون و همکاران در سال ۱۹۷۰ راستای بهینه بردار پیشران را با استفاده از شرایط بهینگی به دست آوردند [۲] و از یک روش پرتابی^{۱۵} بهبود یافته برای حل مسئله مقدار مرزی در دو نقطه استفاده نمودند. کالیس^{۱۶} در سال ۲۰۰۰ یک روش ترکیبی بهبود یافته برای بهینه‌سازی مسیر فاز فعال سیستم حامل ارائه داد [۳]. در این تحقیق از یک الگوریتم تحلیلی/عددی برای بهینه‌سازی مسیر فاز فعال به همراه یک فاز غیرفعال بهینه، استفاده شده است که در آن زمان‌های انتهایی آزاد بوده و آرگومان حضیض مدار نهایی به‌عنوان یک قید نهایی اضافه شده است که

است. پیشگامان این حوزه افرادی مانند لاودن^۴، لیتمن^۵، میل^۶ و ادلبوم^۷ بوده‌اند. مسئله طراحی مسیر و هدایت یک حامل فضایی جهت تزریق ماهواره به مدارهای با ارتفاع بالا در سه مرحله صورت می‌گیرد. مرحله اول از لحظه برخاستن موشک حامل شروع می‌شود و تا زمان عبور آن از جو غلیظ ادامه می‌یابد. در این مرحله علاوه بر نیروها و گشتاورهای جاذبه زمین و پیشران، نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی هم به ماهواره بر وارد و معمولاً هدایت سیستم حامل در این مرحله به صورت حلقه باز انجام می‌شود. مرحله دوم پس از عبور سیستم حامل از جو غلیظ شروع می‌شود و تا زمان تزریق فضاپیما در یک مدار با ارتفاع پایین با عنوان مدار پارک ادامه می‌یابد. در این مرحله از نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی صرف‌نظر می‌شود و صرفاً نیروها و گشتاورهای جاذبه زمین و پیشران مورد نظر قرار می‌گیرد. هدایت حامل ماهواره در این مرحله به صورت حلقه بسته انجام می‌شود. مرحله سوم پس از قرار گرفتن فضاپیما در مدار پارک شروع می‌شود و تا زمان تزریق ماهواره در مدار هدف، که می‌تواند یک مدار خورشید آهنگ یا یک مدار زمین آهنگ باشد، ادامه یابد. معمولاً مراحل اول و دوم یعنی پرتاب تا قرار دادن فضاپیما در مدار پارک توسط سیستم حامل انجام می‌شود و مرحله سوم یعنی انتقال از مدار پارک تا مدار نهایی هدف، توسط بلوک انتقال مداری صورت می‌گیرد. بلوک‌های انتقال مداری^۸ در مراحل فوقانی موشک‌های حامل قرار می‌گیرند. مسیر حرکت این بلوک‌ها خارج از جو است و وظیفه آنها تزریق ماهواره به مدار یا انتقال ماهواره به مدارهای مأموریت نهایی است.

طراحی مسیر بهینه در خارج از جو عموماً براساس تئوری کنترل بهینه پایه‌ریزی می‌شود. حل مسیر بهینه نیازمند حل مسئله بسیار مشکل شرایط مرزی در دو نقطه است. روش‌های مختلفی برای حل مسئله کنترل بهینه در مراجع ارائه شده است که در حالت کلی می‌توان آن‌ها را به روش‌های غیر مستقیم، مستقیم و ترکیبی تقسیم‌بندی نمود. روش‌های غیر مستقیم براساس حل سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند که به‌عنوان مسئله مقدار مرزی همیلتونین مطرح است و عموماً به کمک حساب تغییرات بیان می‌شوند. از سوی دیگر، در روش‌های مستقیم، مسئله کنترل بهینه به یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی که مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی^۹ نامیده می‌شود، تبدیل می‌شود. روش ترکیبی از مزایای هر دو روش مذکور بهره می‌برد. روش‌های جستجوی گرادینانی مانند

10. Steepest descent

11. Sequential Quadratic Programming

12. Karush-Kuhn-Tucker

13. Particle Swarm Optimization

14. Brown

15. Shooting method

16. Calise

4. Lawden

5. Leitmann

6. Miele

7. Edelbaum

8. Upper Stages

9. Nonlinear Programming Problem

غیرفعال می‌شود. همچنین، نشان داده شده که بردار اصلی و تابع سوئیچ مستقل از دستگاه مختصات به کار رفته می‌باشد [۱۴]. پن و همکاران در سال ۲۰۱۲ حل تحلیلی متغیرهای شبه‌حالت در طول فاز غیرفعال بهینه را در حالت سه‌بعدی ارائه نمودند. در این تحقیق نشان داده شده که طول بهینه فاز غیرفعال برای مدارهای بیضوی برابر با ریشه‌های یک چند جمله‌ای مرتبه ۵ بر حسب آنومالی حقیقی می‌باشد و برای مدارهای دایره‌ای، برابر با ریشه‌های یک چند جمله‌ای مرتبه ۴ خواهد بود. این نتایج را می‌توان در طراحی مسیرهای بهینه چند سوزشی به کار برد [۱۶]. هرناندز و همکاران در سال ۲۰۱۳ برای مسئله انتقال مداری پیشران محدود به مدارهای دایره‌ای استوایی، با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، یک حل تحلیلی ارائه کردند. در این تحقیق از مدل تبدیل $K-S^{23}$ برای مسئله دو جسم استفاده شد که در آن معادلات حرکت غیر اغتشاشی معادل با یک حرکت نوسانی ساده می‌باشد. روش هدایتی در دو فاز ارائه شده است: ابتدا انطباق با نیم قطر اصلی^{۲۴} مدار هدف با استفاده از پیشرانس پیوسته فضایی محقق شده است. سپس انطباق با شیب و خروج از مرکز مدار هدف به وسیله مانور کمان های فعال/غیرفعال^{۲۵} انجام شده است [۱۷]. اولیویرا^{۲۶} و همکاران در سال ۲۰۱۳ برای مسئله انتقال مداری با پیشرانس پیوسته و با معیار حداقل مصرف سوخت، یک الگوریتم بهینه‌سازی مسیر را ارائه دادند. در این تحقیق، برای مانور یک فضایی با پیشرانس پایین، ضمن ارائه یک الگوریتم بهینه‌سازی مسیر با معیار حداقل مصرف سوخت، اثرات خطاهای ناشی از اندازه پیشرانس نیز بررسی شده است [۱۸]. علی حیدری و همکاران در سال ۲۰۱۳ مسئله طراحی مسیر و انتقال مداری با عملگرهای on-off را با استفاده از یک روش تحلیلی برای تابع سوئیچ بهینه ارائه دادند. در این تحقیق با استفاده از روش برنامه‌ریزی دینامیکی و به کارگیری شبکه عصبی برای آموزش سیستم، یک حل تحلیلی برای تابع سوئیچ بهینه ارائه شده است [۱۹]. برتانوفسکی^{۲۷} و همکاران در سال ۲۰۱۳ برای مسئله تزریق بهینه یک ماهواره در مدار زمین آهنگ با استفاده از تعداد سوزش محدود موتور و با معیار حداقل مصرف سوخت، یک الگوریتم بهینه‌سازی مسیر را ارائه دادند. در این تحقیق حل یک مسئله ترکیبی پیوسته-گسسته با استفاده از ویژگی‌های سیستم‌های کنترل گسسته از نوع اتوماتا^{۲۸} محقق شده است. همچنین، سکوتس‌های پروازی بهینه با لحاظ کردن معیار حداقل مصرف

برای صعود به یک مدار انتقالی زمین آهنگ^{۱۷} مناسب است. داکمن^{۱۸} در سال های ۲۰۰۲ و ۲۰۰۳ الگوریتمی را توسعه داد که در آن پیشرانس مقدار مرزی در دو نقطه پس از خاموشی موتور اصلی آغاز می‌شود [۴، ۵]. در این تحقیق نشان داده شده که روش پرتابی چندگانه^{۱۹} یک روش عددی مؤثر برای حل مسئله مذکور می‌باشد. لو و همکاران، در سال ۲۰۰۳ با استفاده از روش اختلاف محدود مسئله شرط مرزی در دو نقطه را برای هدایت بهینه، حل نمودند. از لحاظ تئوری استفاده از یک سکوتس چند سوزشی از نظر مصرف سوخت بسیار کارا تر از یک تزریق مستقیم تک سوزشی است [۶]. بسیاری از مسائل انتقال مداری نیازمند به کارگیری چند فاز فعال است که با فازهای غیرفعال نسبتاً طولانی از یکدیگر جدا شده‌اند. بنابراین یک سری از فعالیت‌های تحقیقاتی انجام شده مربوط به مسئله هدایت در خلأ چند سوزشی است. براون و همکاران در سال ۱۹۷۲ تحقیقات اولیه در خصوص بهینه‌سازی مسیر چند سوزشی را انجام دادند و در مسائل واقعی هدایت استفاده کردند [۷، ۸]. ژوزفسکی^{۲۰} در سال ۱۹۷۲ کارهای قبلی را توسعه داد و از تقریب جاذبه خطی برای بهبود کارایی محاسباتی استفاده کرد [۶]. کالیس در سال ۲۰۰۱، قابلیت بهینه‌سازی چند سوزشی برای یک الگوریتم هدایت ترکیبی را توسعه دادند [۱۰، ۱۱]. کالیس و همکاران در سال ۲۰۰۳ شکل جدیدی از شرایط سوئیچ را توسعه دادند که برای بسیاری از شرایط نهایی قابل به کارگیری است. لو و همکاران در سال ۲۰۰۸ مسئله طراحی و هدایت بهینه چند سوزشی فاز خارج از جو را ارائه کردند. در این تحقیق راهکاری سریع و مطمئن با استفاده از روش پرتابی چندگانه برای طراحی مسیر بهینه خارج از جو یک حامل ماهواره، شامل دو فاز فعال و یک فاز غیرفعال بهینه بین فازهای فعال، پیشنهاد شده است [۱۲]. آنها همچنین در سال ۲۰۰۹، حل مسئله بهینه‌سازی چند سوزشی را با روش پرتابی چندگانه به صورت تحلیلی ارائه دادند. در این تحقیق نشان داده شده که حتی اگر تعداد سوزش‌ها را به اندازه کافی بزرگ در نظر بگیریم، الگوریتم بهینه‌سازی به حل بهینه با تعداد سوزش صحیح همگرا می‌شود [۱۳]. جامینسون^{۲۱} و همکاران در سال ۲۰۱۰ مسئله بردار اصلی^{۲۲} و تابع سوئیچ انتقال مداری را به صورت تحلیلی بررسی کردند. در این تحقیق رفتار تابع سوئیچ برای مسئله دو جسم بررسی و نشان داده شده که استفاده از یک عبارت تحلیلی برای تابع سوئیچ سبب کاهش عمده زمان محاسباتی مورد نیاز جهت تعیین زمان فازهای

23. KustaanheimoStiefel
24. Semi Major Axis
25. Burn/Coast Arcs
26. Oliveira
27. Bortakovskii
28. Automaton-type

17. Geo-synchronous Transfer Orbit
18. Dukeman
19. Multiple Shooting Method
20. Jezewski
21. Jaminson
22. Primer Vector

مسئله به حالت سه بعدی توسعه داده و نتایج با یکدیگر مقایسه می شود.

هدف مسئله کنترل بهینه، یافتن تابع کنترل مجاز $u^*(t)$ است که یک سیستم را از هر حالت اولیه x_0 در زمان اولیه t_0 به حالت نهایی x_f در زمان نهایی t_f با دنبال کردن مسیر بهینه $x^*(t)$ منتقل نماید به گونه ای که معیار عملکرد J که به صورت زیر تعریف می شود، بهینه شود.

$$J(x(t), u(t), t) = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2)$$

بردار حالت $x(0)$ در R^n و بردار کنترلی $u(0)$ در R^m تعریف می شوند.

مینیمم سازی معیار عملکرد رابطه (۲) مشروط به قیود دینامیکی سیستم تحت کنترل است که به صورت رابطه (۳) تعریف می شود:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3)$$

شرایط مرزی، $\phi(\cdot)$ در حالت کلی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = 0 \quad (4)$$

قیود را هم می توان بر روی مرزهای مسیره های مجاز به صورت نامساوی زیر در نظر گرفت:

$$C(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad (5)$$

برای مسئله کنترل بهینه تعریف شده، یک فرایند حل عمومی براساس حساب تغییرات به دست می آید. ضرایب لاگرانژ $\mu(t) \in R^c$ و $\lambda(t) \in R^n, v \in R^q$ معرفی می شوند تا همراه با شرایط مرزی، قیود دینامیکی و قیود مسیر به تابع هزینه اضافه شوند. تابع هزینه افزوده J_a به صورت زیر به دست می آید:

$$J_a = \Phi(x(t_f), t_f) - v^T \phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), u(t), t) - \lambda^T(t) [\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)] - \mu^T C(x(t), u(t), t) \right\} dt \quad (6)$$

حال همبالتونین را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), \mu(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) - \mu^T(t) C(x(t), u(t), t) \quad (7)$$

با به دست آوردن اولین تغییرات J_a و جایگذاری در رابطه (۷) همراه با مشتقات جزئی H_x, H_λ, H_u و با ساده سازی، شرایط لازم برای ارضاء حل مینیمم، صرف نظر از شرایط مرزی به صورت رابطه (۸-۱۰) به دست می آید:

- معادلات حالت

$$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda} (x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), \mu^*(t), t) \quad (8)$$

سوخت و برآورده کردن قید تعداد روشن و خاموشی موتور، به دست آمده است [۲۰].

در این مقاله، تمرکز بر روی طراحی مسیر بهینه سه بعدی برای یک بلوک انتقال مداری با قابلیت سوزش چندگانه است. طراحی مسیر بهینه براساس تئوری کنترل بهینه و مسئله حساب تغییرات است. برای حل مسئله شرایط مرزی در چند نقطه، یک روش پرتابی غیرمستقیم با کارایی و دقت بسیار بالا طرح ریزی و مورد استفاده قرار گرفته است. فرایند حداقل سازی شامل روشن شدن موتور در نقاط حوضی یا اوج مدارهای انتقالی است. در این مقاله سکونتهای پروازی مختلف برای تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ در حالت سه بعدی بررسی و با نتایج حالت دو بعدی مقایسه می شود.

دینامیک سیستم در حالت سه بعدی

معادلات حرکت یک بلوک انتقال مداری در یک دستگاه مختصات اینرسی راست گرد کارترزین بیان می شود. بلوک انتقال مداری به عنوان یک سامانه با مدل جرم نقطه ای لحاظ و منجر به معادلات حرکت سه درجه آزادی سیستم می شود که از قانون دوم نیوتن تبعیت می کند. معادلات دیفرانسیل بیان کننده دینامیک سیستم فضایی فوق در دستگاه مختصات اینرسی عبارتند از [۲۱]:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3} x + \frac{T}{m} \cos \psi \cos \phi \quad (1-الف)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3} y + \frac{T}{m} \cos \psi \sin \phi \quad (1-ب)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3} z + \frac{T}{m} \sin \psi \quad (1-ج)$$

$$\dot{m} = \frac{-T}{c} \quad (1-د)$$

متغیرها را با پارامترهای کانونی بی بعد می کنیم. در واحدهای کانونی، ثابت جاذبه μ برابر واحد است، شعاع اولیه با واحد مسافت بی بعد می شود و سرعت مدار دایره ای اولیه برابر با واحد مسافت تقسیم بر واحد زمان است. همچنین، جرم اولیه فضاییما نیز بر حسب واحد جرم بیان می شود.

فرمولاسیون کنترل بهینه و روش حل آن

برای فرمولاسیون مسئله کنترل بهینه جهت بهینه سازی مسیر با حداقل مصرف سوخت از روش استاندارد حساب تغییرات استفاده و روابط حاصله به معادلات حرکت فضاییما تحت تأثیر پیشرانس ثابت در دستگاه مختصات اینرسی اعمال می شود. در مرجع [۲۲] مسئله انتقال مداری در حالت دو بعدی حل شده است و در این مقاله حل

مسیرهای بیشتری باید تولید شود که مقادیر اولیه متغیرهای شبه‌حالت آنها تغییر یافته باشند. با استفاده از ماتریس ژاکوبین، تأثیر مقادیر اولیه متغیرهای شبه‌حالت بر مقادیر متغیرهای حالت نهایی بررسی می‌شود و در نهایت با تکرار فرایند، می‌توان مقادیر اولیه مناسب را برای متغیرهای شبه‌حالت تقریب زد. جزئیات روش پرتابی، در مرجع [۲۲] ارائه شده است. معمولاً غیرخطی بودن فرایند سبب می‌شود که از یک حدس اولیه ضعیف نتوان به جواب نهایی مطلوب همگرا شد. بنابراین، لازم است یک روش مناسبی برای حدس اولیه متغیرهای شبه‌حالت توسعه داد. در مرجع [۲۳] مکان هندسی متغیرهای شبه‌حالت بهینه استخراج شده و برای ناحیه‌ای از مکان که در آن تغییر شعاع مداری کمتر از یک چهارم چرخش کامل مداری باشد، روش تحلیلی برای تقریب متغیرهای شبه‌حالت اولیه استخراج شده است. روش مذکور برای انتقال تک سوزشی از یک مدار دایره‌ای به مدار دیگر ارائه شده است که در این مقاله از نتایج آن استفاده می‌شود و برای شرایط انتقال چند سوزشی از یک مدار بیضوی یا دایره‌ای به مدارهای بیضوی یا دایره‌ای دیگر نیز توسعه داده شده است.

به کارگیری شرایط بهینگی و الگوریتم حل مسئله

برای دستیابی به مسیری با کیفیت مطلوب، تابع معیار لازم است. در مسئله بهینه‌سازی مسیر، تابع هدف عبارتست از حداقل نمودن مصرف سوخت که در اینجا با مسئله حداقل نمودن زمان پرواز معادل است و به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$J = t_f \quad (۱۲-الف)$$

که در آن، t_f زمان نهایی است. برای تزریق یک ماهواره به مدار زمین آهنگ، شرایط اولیه و نهایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

در زمان اولیه $t_0 = 0$ متغیرهای حالت سیستم معلوم هستند.

$$\begin{aligned} m(t_0) &= 22170 [kg], \\ v(t_0) &= 7784.2 \left[\frac{m}{s} \right], \\ r(t_0) &= 6578137 [m], \\ i(t_0) &= 55^\circ, 28.5^\circ. \end{aligned} \quad (۱۲-ب)$$

شرایط نهایی را هم می‌توان برای نقاط انتهایی به کار برد. قیود نهایی متناظر با مدار هدف عبارتند از:

$$\begin{aligned} v(t_f) &= 3074.66 \left[\frac{m}{s} \right], \\ r(t_f) &= 42164137 [m], \\ i(t_f) &= 0^\circ. \end{aligned} \quad (۱۲-ج)$$

برای مسئله کنترل بهینه (۱) و (۱۲) از اصل ماکزیمم استفاده می‌شود. با تشکیل همیلتونین خواهیم داشت:

- معادلات شبه‌حالت

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), \mu^*(t), t) \quad (۹)$$

- معادلات کنترل

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), \mu^*(t), t) \quad (۱۰)$$

از این معادله، پاسخ کنترل بهینه به صورت توابعی از متغیرهای حالت و شبه‌حالت به دست می‌آید. این شرط برای کنترل نامقید صادق است. در صورت مقید بودن کنترل، برای انتخاب کنترل‌های مجاز $u^*(t)$ لازم است از اصل مینیمم پانتریاگین^{۲۹} استفاده شود. شرایط لازم با استفاده از اصل مینیمم پانتریاگین ایجاب می‌کند که برای کلیه کنترل‌های مجاز $u(t) \in U$ باید داشته باشیم:

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), \mu^*(t), t) \leq H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), \mu^*(t), t) \quad (۱۱)$$

معادلات فوق شرایط بهینگی را ارائه می‌دهد. شرایط بهینگی و معادلات شبه‌حالت یک نتیجه بسیار قوی تئوری اویلر- لاگرانژ می‌باشند. این نتیجه می‌تواند منجر به تعیین قانون کنترل بهینه برای یک فضایی با پیشرانش ثابت شود. در حالت کلی، حل تحلیلی سیستم معادلات دیفرانسیل مذکور فقط برای مسایل خیلی ساده وجود دارد. این معادلات عموماً معادلات غیرخطی کوپل شده هستند که حل تحلیلی برای آنها وجود ندارد. بنابراین، روش‌های عددی برای حل بیشتر مسائل کنترل بهینه لازم و ضروری است. برای حل عددی معادلات حالت و شبه‌حالت لازم است شرایط اولیه آنها مشخص باشد. برای متغیرهای حالت فیزیکی، می‌توان شرایط اولیه و نهایی را تعیین نمود، اما برای متغیرهای شبه‌حالت هیچ روش تضمین شده‌ای برای تعیین صحیح شرایط مرزی بهینه وجود ندارد. علاوه بر این، معادلات شبه‌حالت در عمل نسبت به شرایط اولیه بسیار حساس می‌باشند. روش پرتابی نیاز به شرایط اولیه متغیرهای شبه‌حالت دارد که باید به صورت منطقی انتخاب شوند. زیرا اگر آنها از مقادیر صحیح خیلی دور باشند، روش پرتابی شکست می‌خورد.

روش پرتابی یک روش غیر مستقیم برای حل مسئله شرط مرزی در دو نقطه است که با مغشوش نمودن عددی یک مسیر مرجع حاصل می‌شود. با اعمال این روش به مسئله فضایی با پیشرانش ثابت، معادلات دیفرانسیل حاکم بر متغیرهای حالت و شبه‌حالت به صورت عددی انتگرال‌گیری می‌شوند تا مسیر مرجع را تشکیل دهند. چون مقادیر اولیه متغیرهای شبه‌حالت مجهول هستند، آنها را باید حدس زد. اگرچه مسیر حاصله شرایط بهینگی را ارضاء می‌کند اما این نتیجه منجر به برآورده شدن شرایط نهایی مطلوب برای متغیرهای حالت فضایی نمی‌شود. برای تصحیح آن

می‌کنند. بردار اندازه حرکت زاویه‌ای و مؤلفه‌های آن را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{r} \times \vec{v} \\ h_x &= y\dot{z} - z\dot{y} \\ h_y &= z\dot{x} - x\dot{z} \\ h_z &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned} \quad (17)$$

اگر اندازه حرکت زاویه‌ای و سرعت به درستی با یکدیگر مطابقت داشته باشند، آنگاه رابطه بین آنها مقدار صحیح موقعیت را تضمین می‌کند.

برای مسئله انتقال مداری با پیشرانش به وزن اولیه بزرگ یا نسبت شعاع مدار نهایی به شعاع اولیه کوچک، مسئله را می‌توان با یک فضای بدون جاذبه تقریب زد. همچنین، به لحاظ تجربی ثابت شده که تغییرات جرم فضاپیما تأثیر کمی بر مکان هندسی متغیرهای شبه‌حالت اولیه دارد [۲۳]. بنابراین اگر در معادلات حرکت از دو فرض ساده‌کننده جرم ثابت و فضای بدون جاذبه استفاده شود، می‌توان از معادلات حرکت به صورت تحلیلی انتگرال‌گیری کرد. در نتیجه برای متغیرهای مجهول، مسئله روابط تحلیلی برحسب پارامترهای پیشرانش به وزن اولیه و نسبت شعاع نهایی به شعاع اولیه به دست آورد.

$$\begin{aligned} t_f &= 2\sqrt{\frac{(R-1)}{f}} \\ \lambda_{\dot{x}0} &= \sqrt{\frac{(R-1)}{f}} \\ \lambda_{\dot{y}0} &= \frac{(R-1)}{f} \\ f &= \frac{T}{m} \\ R &= \frac{r_f}{r_0} \end{aligned} \quad (18)$$

برای صحنه‌گذاری روابط فوق، یک مسئله انتقال مداری برای اجتناب از برخورد ضد ماهواره با یک ماهواره در مدار GEO با روش فوق حل شده که پارامترهای مسئله و شرایط اولیه متغیرهای شبه‌حالت و زمان سوزش در حالت‌های تحلیلی و عددی در جدول (۱) ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با استفاده از نتایج حل تحلیلی، روش حل عددی پس از چهار بار تکرار به شرایط نهایی همگرا شده است. مسیر بهینه حاصله نیز در شکل (۱) ارائه شده است.

جدول ۱- پارامترها و شرایط اولیه مسئله اجتناب از ضد ماهواره

شعاع (کیلومتر)	دبی (کیلوگرم بر ثانیه)	تراست (نیوتن)	جرم اولیه (کیلوگرم)
۴۲۱۷۸	۰/۰۰۰۰۶۹	۱/۳	۲۴۰۰
تعداد تکرار	λ_{v0}	λ_{u0}	زمان سوزش
۱ (جواب تحلیلی)	۰/۱۳۸۴۵۴	۰/۴۷۲۰۹۴۷	۰/۷۴۴۱۸۹۳
۴ (جواب نهایی)	۰/۱۱۸۱	۰/۳۳۸۹	۰/۷۳۷۹

$$\begin{aligned} H &= 1 + \lambda_x \dot{x} + \lambda_y \dot{y} + \lambda_z \dot{z} \\ &+ \lambda_x \left(-\frac{\mu}{r^3} x + \frac{T}{m} \cos \psi \cos \phi \right) \\ &+ \lambda_y \left(-\frac{\mu}{r^3} y + \frac{T}{m} \cos \psi \sin \phi \right) \\ &+ \lambda_z \left(-\frac{\mu}{r^3} z + \frac{T}{m} \sin \psi \right) \end{aligned} \quad (13)$$

شرایط بهینگی منجر به دو قانون کنترلی برای زوایای بردار پیشرانش شده که به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\tan \phi = \frac{-\lambda_y}{-\lambda_x} \quad (14)$$

$$\tan \psi = \frac{-\lambda_z}{-(\lambda_x \cos \phi + \lambda_y \sin \phi)} \quad (15)$$

معادلات شبه‌حالت با استفاده از تئوری اولر-لاگرانژ به صورت

زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= \frac{\mu}{r^5} [\lambda_x (y^2 + z^2 - 2x^2) - 3x(\lambda_y y + \lambda_z z)] \\ \dot{\lambda}_y &= \frac{\mu}{r^5} [\lambda_y (x^2 + z^2 - 2y^2) - 3y(\lambda_x x + \lambda_z z)] \\ \dot{\lambda}_z &= \frac{\mu}{r^5} [\lambda_z (x^2 + y^2 - 2z^2) - 3z(\lambda_x x + \lambda_y y)] \\ \dot{\lambda}_x &= -\lambda_x \\ \dot{\lambda}_y &= -\lambda_y \\ \dot{\lambda}_z &= -\lambda_z \end{aligned} \quad (16)$$

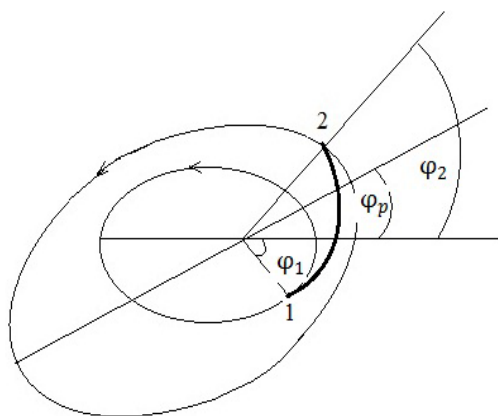
متغیرهای حالت مسئله شامل بردار موقعیت $[x, y, z]^T$ ، بردار سرعت $[v_x, v_y, v_z]^T$ و همچنین جرم جسم m هستند. متغیرهای شبه‌حالت نیز شامل $[\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]^T$ و $[\lambda_{\dot{x}}, \lambda_{\dot{y}}, \lambda_{\dot{z}}]^T$ می‌باشند. اکنون معادلات حالت و شبه‌حالت استخراج شده‌اند و باید قبل از انتگرال‌گیری شرایط اولیه آنها مشخص باشد. شرایط اولیه متغیرهای حالت معلومند، اما شرایط اولیه متغیرهای شبه‌حالت لاگرانژ مجهولند. اما تعداد متغیرهای شبه‌حالت اولیه مستقل را می‌توان کاهش داد. هریک از متغیرهای شبه‌حالت را می‌توان با تقسیم نمودن همیلتونین به یکی از متغیرهای شبه‌حالت اولیه به مقدار واحد نرمال نمود، به عبارت دیگر $\lambda_x(0) = 1$. متغیرهای شبه‌حالت متناظر با موقعیت و سرعت z در زمان اولیه مجهول هستند، اما می‌توان آنها را در زمان اولیه برابر با صفر در نظر گرفت. این یک فرض منطقی است زیرا هر دو متغیر در شرایط انتقال مدار صفحه‌ای همواره برابر با صفر می‌باشند. در مرجع [۲۲] نشان داده شده که مقادیر متغیرهای شبه‌حالت اولیه $\lambda_x(0)$ و $\lambda_y(0)$ با هم برابرند. بنابراین، چهار متغیر شبه‌حالت اولیه و زمان نهایی مجهول می‌باشند که باید توسط روش پرتابی به دست آیند. در مسئله سه‌بعدی، پنج شرط مرزی نهایی وجود دارد. اگر سه مؤلفه بردار اندازه حرکت زاویه‌ای همراه با مؤلفه‌های شعاعی و مماسی سرعت به کار روند، جمعاً پنج شرط مرزی ایجاد می‌شود. این کمیت‌ها به صورت یکتا یک مدار دایره‌ای با شیب مداری و گره صعودی دلخواه را تعیین

که در آن n و e ثابت‌های مداری هستند، E آنومالی خروج از مرکز λ_0 و t زمان انتشار است. عموماً معادلهٔ ضمنی (۲۱) با کمک یک روش تکراری نیوتن برای متغیر آنومالی خروج از مرکز حل می‌شود، که به وسیلهٔ آن موقعیت زاویه‌ای بلوک انتقال مداری در زمان t بر روی مدار تعیین می‌شود. برای حرکت مداری، یک تغییر زاویه α وجود دارد که برای مدت زمان مشخص Δt معادله زیر را برآورده می‌کند:

$$k[\alpha, \Delta t] = 0 \quad (22)$$

اگر برای انتشار مداری، تغییر زمان معلوم باشد، باید یک معادله جبری ضمنی را با استفاده از روش‌های تکرار شونده حل نمود. از سوی دیگر، اگر برای انتشار مداری، تغییر زاویه، مشخص و معلوم فرض شود، دیگر نیازی به روش تکراری نمی‌باشد.

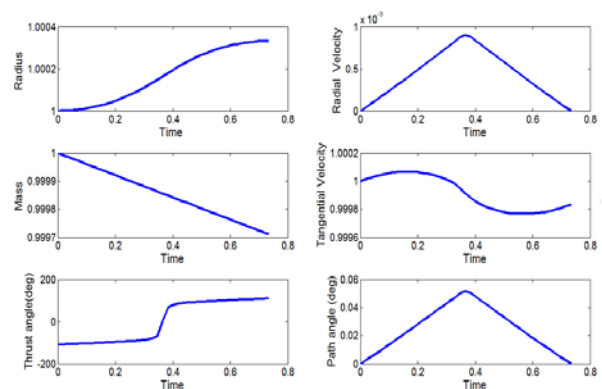
در شکل (۲) بخش فعال مسیر در همسایگی نقطهٔ حضیض مدار به وسیلهٔ خط پرننگ ۱-۲ نشان داده شده است. این مسیر مدار بیضوی قدیم ۱ را به مدار بیضوی جدید ۲ متصل می‌کند. اگر t_b مدت زمان فاز فعال و p_1 و e_1 پارامترهای کانونی و خروج از مرکز مدار قدیم باشد و p_2 و e_2 نیز پارامترهای متناظر مدار جدید خواهد بود. برای کاهش چرخش زاویه‌ای محور مدار بیضوی جدید، ϕ_p ، بخش فعال مسیر را به طور متقارن حول نقطهٔ حضیض مدار قدیم قرار می‌دهیم و زمان شروع فاز فعال را با $t_1 = -0.5 * t_b$ مشخص می‌نماییم. به عبارت دیگر، زمان روشن شدن موتور در فاز فعال حرکت برابر با $\frac{t_b}{2}$ قبل از عبور از نقطهٔ حضیض است.



شکل ۲- مسیر بهینه فاز فعال در همسایگی نقطهٔ حضیض

در گام اول با مشخص بودن پارامترهای مدار بیضوی قدیم و زمان کارکرد موتور، پارامترهای فضایی در ابتدای فاز فعال مشخص می‌شوند. شرایط اولیه متغیرهای شبه‌حالت هم به صورت زیر به دست می‌آیند:

طراحی مسیر بهینه یک بلوک انتقال مداری جهت تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ با پیشرانش محدود



شکل ۱- مسیر بهینه برای اجتناب از برخورد ضد ماهواره با یک ماهواره در مدار GEO

حل مسئله برای حالت چند سوزشی

روابط بخش قبل برای یک مسئلهٔ انتقال مداری تک سوزشی از یک مدار دایره‌ای به مدار دیگر با فرضیات مربوطه مناسب می‌باشد. حال برای شرایط انتقال چند سوزشی از یک مدار بیضوی یا دایره‌ای به مدارهای بیضوی یا دایره‌ای دیگر لازم است روابط فوق اصلاح شوند. یک انتقال مداری چند سوزشی شامل فازهای فعال و غیرفعال متناوب است و می‌توان نشان داد که فازهای فعال در همسایگی نقاط اوج و حضیض هستند [۲۰]. در این بازه‌ها موتور با حداکثر پیشرانش کار می‌کند و در سایر زمان‌ها موتور خاموش است. در طول فاز غیرفعال مسیر، نیروی پیشرانش اعمال نمی‌شود و معادلات حرکت به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3} x \quad (19-f)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3} y \quad (19-b)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3} z \quad (19-c)$$

$$\dot{m} = 0 \quad (19-d)$$

معادلات دیفرانسیل (۱۹) دارای حل تحلیلی است. بنابراین با داشتن متغیرهای حالت در زمان t_0 می‌توان با حل تحلیلی آنها را در زمان t_1 به دست آورد. به عبارت دیگر، این انتشار یک نگاشت غیرخطی بین متغیرهای حالت را در زمان‌های مذکور تعریف می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

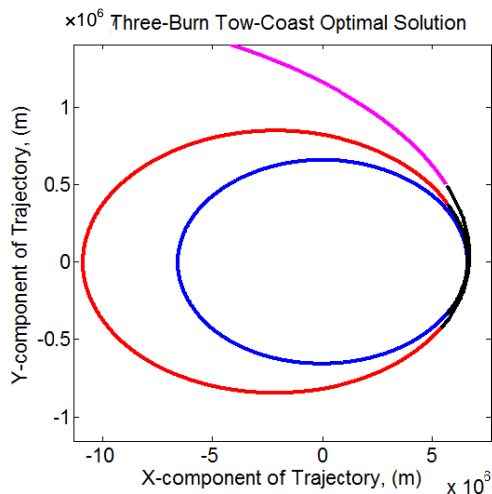
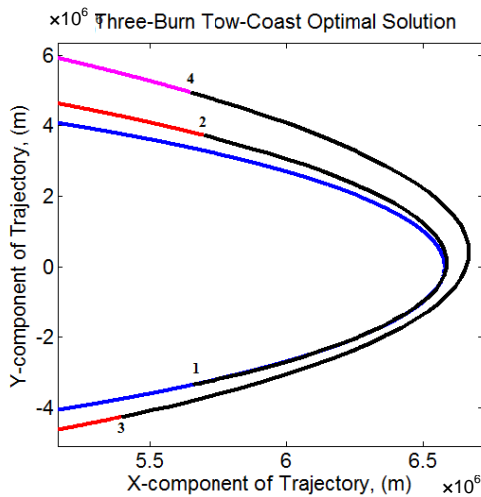
$$\begin{bmatrix} \vec{r}(t_1) \\ \vec{V}(t_1) \end{bmatrix} = P[\vec{r}(t_0), \vec{V}(t_0)] \quad (20)$$

کپلر حدود صد سال پیش این مسئله را حل کرد. در این بخش حل تحلیلی مسئله و گسترش آن از یک زمان تا زمان دیگر، با جزئیات بیان می‌شود. برای انتشار از یک زمان تا زمان دیگر، لازم است که مسئله کپلر را حل نماییم [۲۴]:

$$n(t - t_0) = E - e \sin E \quad (21)$$

مرکز مدار را به مقدار صفر بر روی مدار نهایی زمین آهنگ کاهش داد. در خصوص تغییر شیب مداری نیز بخش کوچکی از تغییر زاویه شیب مداری در نقاط حضیض انجام می‌شود ولی بخش عمده آن در نقطه اوج صورت می‌گیرد. بنابراین، تزریق بهینه ماهواره به مدار ژئوسنکرون شامل سکوتیسی از فازهای فعال در نقاط حضیض و اوج است.

برای یک سکوتیسی پروازی سه سوزشی، دو سوزش در نقطه حضیض و یک سوزش در نقطه اوج در نظر می‌گیریم. در شکل (۳) دو فاز فعال در همسایگی نقطه حضیض و یک فاز غیرفعال بین فازهای فعال نشان داده شده است. در سوزش اول، فاز فعال مسیر حرکت از نقطه ۱ واقع در همسایگی نقطه حضیض مدار بیضوی قدیم شروع شروع شده و در نقطه ۲ از مدار بیضوی جدید پایان می‌یابد. همچنین برای سوزش دوم، فاز فعال مسیر حرکت از نقطه ۳ واقع در همسایگی نقطه حضیض مدار بیضوی قدیم شروع شده و در نقطه ۴ از مدار بیضوی جدید پایان می‌یابد. فاز غیرفعال حرکت بین دو فاز فعال بوده که از نقطه ۲ شروع و در نقطه ۳ پایان می‌یابد.



شکل ۳- مسیر بهینه برای دو فاز فعال در همسایگی نقطه حضیض

$$t_f = 2\sqrt{\frac{(R_f - R_0)}{f}}$$

$$\lambda_{u0} = \sqrt{\frac{(R_f - R_0)}{f}}$$

$$\lambda_{v0} = \frac{(R_f - R_0)}{f} \quad (23)$$

$$f = \frac{T}{m}$$

$$R_f = \frac{r_f}{r_0}$$

$$R_0 = \frac{(P_1 / (1 + e_1 \cos \theta_1))}{r_0}$$

در گام دوم با داشتن شرایط اولیه متغیرهای حالت و شبه‌حالت در زمان t_1 ، نقطه ۱ شکل (۲)، مسئله کنترل بهینه را حل نموده و در نقطه انتهایی فاز فعال در زمان $t_2 = t_1 + t_b$ ، نقطه ۲ شکل (۲)، متغیرهای حالت جدید به دست می‌آیند. در گام سوم با داشتن متغیرهای حالت در انتهای فاز فعال، پارامترهای مدار بیضوی جدید مطابق رابطه (۲۴) تعیین می‌شوند.

$$h_2 = r_2 v_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(u_2^2 + v_2^2)}{2} - \frac{\mu}{r_2}$$

$$a_2 = \frac{-\mu}{2\varepsilon_2} \quad (24)$$

$$P_2 = \frac{h_2^2}{\mu}$$

$$e_2 = \sqrt{1 - \frac{P_2}{a_2}}$$

زمان مورد نیاز برای حرکت از نقطه حضیض تا نقطه ۲ بر روی مدار بیضوی جدید از رابطه (۲۵) به دست می‌آید:

$$t_2 - t_p = 2\sqrt{\frac{a_2^3}{\mu}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{(1-e_1)}{(1+e_1)}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \sqrt{\frac{P_2}{\mu}} \left(\frac{a_2 e_2 \sin \theta}{1 + e_2 \cos \theta} \right) \quad (25)$$

که در آن θ آنومالی حقیقی در نقطه ۲ است که از رابطه (۲۶) به دست می‌آید:

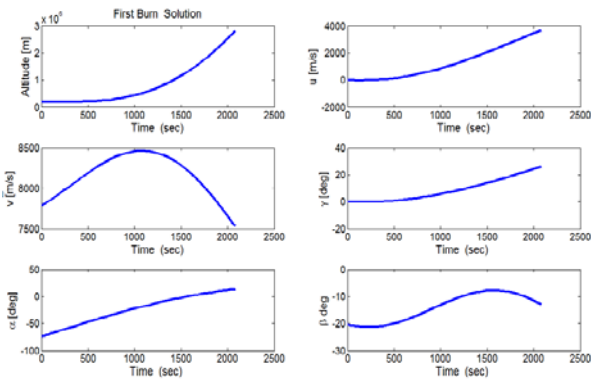
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{P_2 u_2}{v_2 (P_2 - r_2)} \right) \quad (26)$$

در اینجا فرایند انتقال ماهواره از یک مدار به مدار دیگر با استفاده از یک فاز فعال خاتمه می‌یابد. این فرایند سه گامی برای هر فاز فعال تکرار می‌شود.

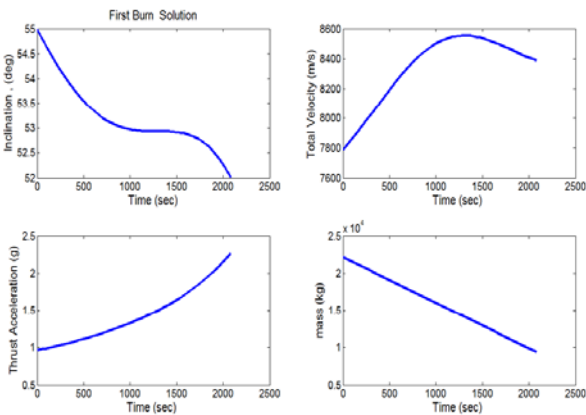
هر سکوتیسی پروازی بهینه به وسیله تعداد، مدت زمان فازهای فعال و زاویه بهینه پیشرانش تعیین می‌شود. فاز فعال در همسایگی حضیض، خروج از مرکز مدار را افزایش می‌دهد و فاز فعال در همسایگی نقطه اوج، خروج از مرکز مدار را کاهش می‌دهد. برای تزریق ماهواره به مدار ژئو سنکرون لازم است با انجام یک یا چند مانور در همسایگی نقاط حضیض، خروج از مرکز مدار را از مقدار اولیه صفر به مقدار ماکزیمم آن بر روی مدار میانی افزایش و پس از آن نیز با انجام یک یا چند مانور در همسایگی نقاط اوج، خروج از

نتایج عددی طراحی مسیر بهینه

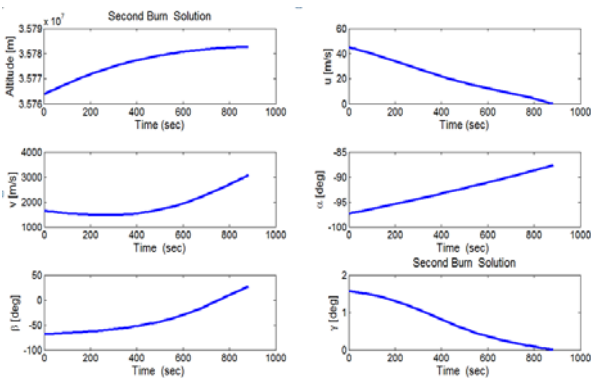
ژئوسفرون برای تغییر زاویه شیب ۲۸/۵ و ۵۵ درجه به ترتیب در جداول (۲) و (۳) ارائه شده است. همچنین مقایسه نتایج سه بعدی و دو بعدی در انتقال دو سوزشی برای تغییر زاویه شیب ۲۸/۵ و ۵۵ درجه به ترتیب در جداول (۴) و (۵) ارائه شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، برای تغییر شیب مداری به اندازه ۵۵ درجه زمان‌های سوزش اول و دوم نسبت به حالت دوبعدی به ترتیب ۲۰۲۷ درصد و ۳۷/۸ درصد افزایش می‌یابد. در جدول (۶) نیز نتایج انتقال دو سوزشی با زوایای شیب ۵۵ و ۲۸/۵ درجه با یکدیگر مقایسه شده است.



شکل ۴- مسیر بهینه برای سوزش اول یک انتقال دو سوزشی در حالت سه‌بعدی

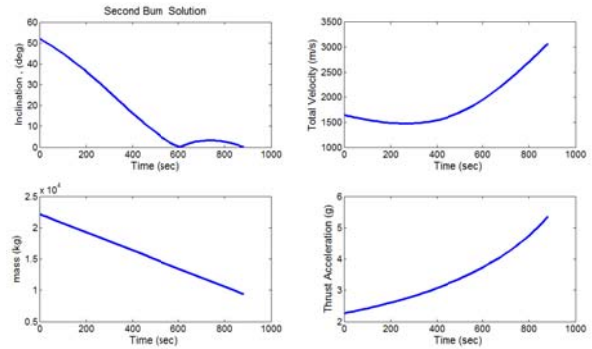
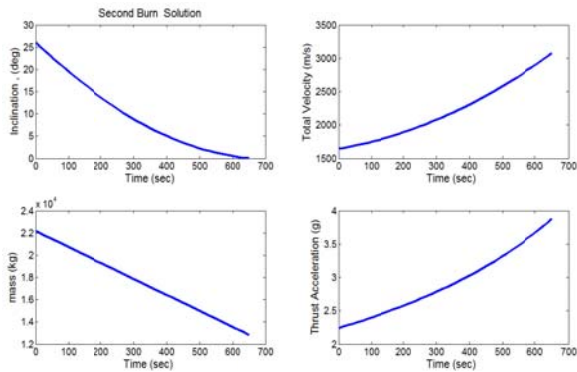


شکل ۵- مسیر بهینه برای سوزش اول یک انتقال دو سوزشی در حالت سه‌بعدی



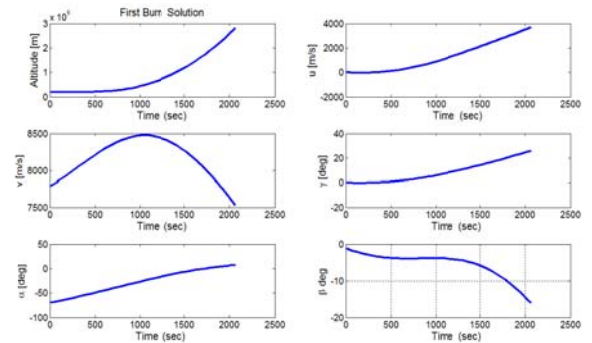
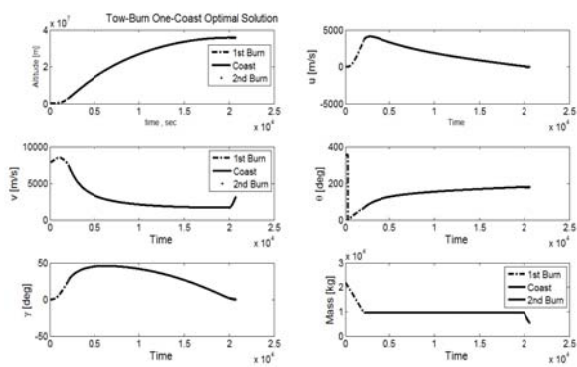
شکل ۶- مسیر بهینه برای سوزش دوم یک انتقال دو سوزشی در حالت سه‌بعدی

در این بخش نتایج عددی مسیر بهینه طراحی شده برای بلوک انتقال مداری بریز ام^{۳۱} در حالت سه‌بعدی ارائه و نتایج با حل دوبعدی مقایسه می‌شود. بلوک انتقال مداری مذکور جهت انتقال ماهواره از یک مدار پارک دایره‌ای با ارتفاع ۲۰۰ کیلومتر از سطح زمین و با زوایای شیب مداری ۵۵ و ۲۸/۵ درجه به یک مدار زمین آهنگ با ارتفاع ۳۶۷۸۶ کیلومتر و شیب مداری صفر درجه به کار می‌رود. برای این انتقال مداری سکوتس‌های پروازی مختلف در نظر گرفته شده است. هر سکوتس پروازی جداگانه بررسی و برای هر یک از آنها مسیر بهینه استخراج شده است. در شکل‌های (۴) الی (۷) نتایج عددی مسیر بهینه برای یک سکوتس پروازی دو سوزشی و با شیب اولیه ۵۵ درجه نشان داده شده است. در شکل‌های (۴) و (۶) مسیر بهینه به ترتیب برای سوزش‌های اول و دوم یک سکوتس پروازی دو سوزشی در دستگاه مختصات قطبی رسم شده است که شامل پارامترهای ارتفاع، سرعت‌های شعاعی و مماسی، زوایای پیشرانش در صفحه و خارج از صفحه پرواز و زاویه مسیر پرواز می‌باشند. شکل‌های (۵) و (۷) نیز شامل پارامترهای زاویه شیب، اندازه سرعت کلی، جرم جسم و اندازه شتاب پیشرانش به ترتیب برای سوزش‌های اول و دوم یک سکوتس پروازی دو سوزشی می‌باشند. در شکل‌های (۸) الی (۱۱) نتایج عددی مسیر بهینه برای یک سکوتس پروازی دو سوزشی و با شیب اولیه ۲۸/۵ درجه نشان داده شده است. در شکل‌های (۸) و (۱۰) مسیر بهینه به ترتیب برای سوزش‌های اول و دوم یک سکوتس پروازی دو سوزشی در دستگاه مختصات قطبی رسم شده است که شامل پارامترهای ارتفاع، سرعت‌های شعاعی و مماسی، زوایای پیشرانش در صفحه و خارج از صفحه پرواز و زاویه مسیر پرواز می‌باشند. شکل‌های (۹) و (۱۱) نیز شامل پارامترهای زاویه شیب، اندازه سرعت کلی، جرم جسم و اندازه شتاب پیشرانش به ترتیب برای سوزش‌های اول و دوم یک سکوتس پروازی دو سوزشی می‌باشند. در شکل (۱۲) نیز، مسیر بهینه برای یک سکوتس پروازی دو سوزشی کامل، شامل سکوتس فعال-غیرفعال-فعال برای پارامترهای فوق رسم شده است. در شکل (۱۳) مسیر پرواز متناظر با سکوتس دو سوزشی در دستگاه مختصات کارتزین در صفحه مداری رسم شده است که شامل مدارهای دایره‌ای اولیه و نهایی، یک فاز فعال در همسایگی نقطه حضیض مدار انتقالی، یک فاز غیرفعال بیضوی و یک فاز فعال در همسایگی نقطه اوج مدار انتقالی می‌باشند. پارامترهای مدارهای اولیه، میانی و نهایی و مدت زمان بهینه فازهای فعال برای سکوتس پروازی دو سوزشی برای انتقال ماهواره به مدار



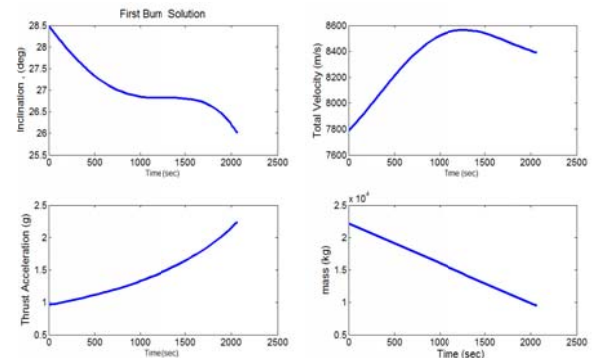
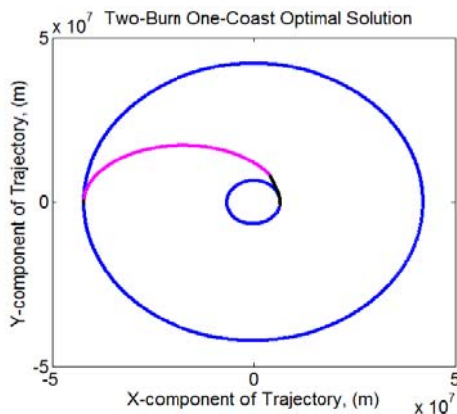
شکل ۱۱- مسیر بهینه برای سوزش دوم یک انتقال دو سوزشی در حالت سه بعدی

شکل ۷- مسیر بهینه برای سوزش دوم یک انتقال دو سوزشی در حالت سه بعدی



شکل ۱۲- مسیر بهینه برای یک سکونس پروازی فعال - غیرفعال - فعال

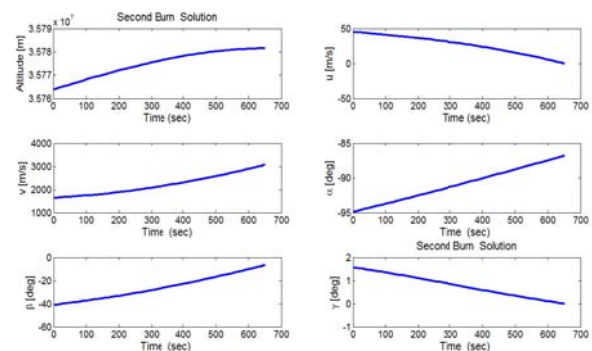
شکل ۸- مسیر بهینه برای سوزش اول یک انتقال دو سوزشی در حالت سه بعدی



شکل ۱۳- مسیر بهینه برای یک سکونس پروازی دو سوزشی

شکل ۹- مسیر بهینه برای سوزش اول یک انتقال دو سوزشی در حالت سه بعدی

جدول ۲- انتقال دو سوزشی به مدار زمین آهنگ با زاویه شیب اولیه $28/5^0$



نوع مدار	پارامترهای مداری					فازهای فعال	
	نیم قطر اصلی (کیلومتر)	خروج از مرکز	شیب مداری (درجه)	مکان سوزش	زمان سوزش (ثانیه)	سخت مصرفی (کیلوگرم)	
اولیه	۶۵۷۸/۱	۰	۲۸.۵	حضیض	۲۰۶۵/۶	۱۲۶۸۳	
انتقالی	۲۴۵۸۸	۰/۷۱۴۲	۲۶	اوج	۶۶۶/۴	۴۰۹۱/۹	
نهایی	۴۲۱۶۴	۰	۰	جمع	۲۷۳۲	۱۶۷۷۵	

شکل ۱۰- مسیر بهینه برای سوزش دوم یک انتقال دو سوزشی در حالت سه بعدی

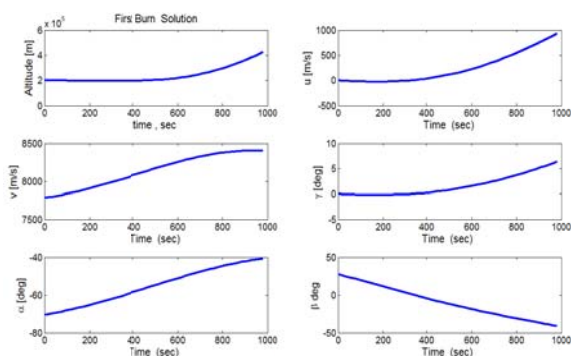
برای سوزش‌های اول و دوم یک سکونتس پروازی سه سوزشی هستند. در شکل (۲۰) نیز، مسیر بهینه برای یک سکونتس پروازی سه سوزشی کامل، شامل فازهای فعال و غیرفعال رسم شده است. پارامترهای مدارهای اولیه، میانی و نهایی و مدت زمان بهینه فازهای فعال برای سکونتس پروازی سه سوزشی برای انتقال ماهواره به مدار زمین آهنگ برای تغییر زاویه شیب مداری به اندازه ۲۸.۵ درجه در جدول (۷) ارائه شده است. همچنین مقایسه نتایج سه بعدی و دو بعدی در انتقال دو سوزشی برای تغییر زاویه شیب ۲۸/۵ درجه در جدول (۸) ارائه شده است.

جدول ۳- انتقال دو سوزشی به مدار زمین آهنگ با زاویه شیب اولیه ۵۵°

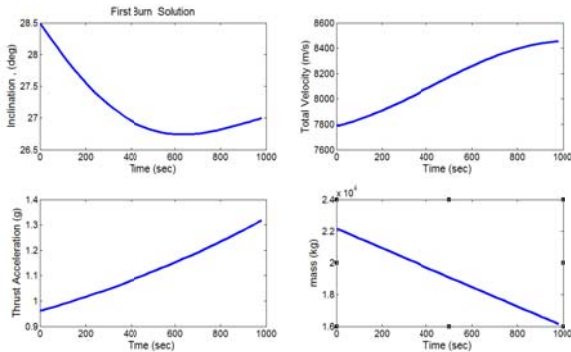
نوع مدار	پارامترهای مداری				
	شیب مداری (درجه)	مکان سوزش	زمان سوزش (ثانیه)	مصرفی (کیلوگرم)	نیم قطر اصلی (کیلومتر)
اولیه	۵۵	حوض	۲۰۸۰/۲	۱۲۷۷۲	۶۵۷۸/۱
انتقالی	۵۲	اوج	۹۱۸/۳	۵۶۳۸/۴	۲۴۵۸۸
نهایی	۰	جمع	۲۹۹۸/۵	۱۸۴۱۱	۴۲۱۶۴

جدول ۴- مقایسه نتایج سه‌بعدی و دو بعدی در انتقال دو سوزشی با زاویه شیب اولیه ۵/۲۸°

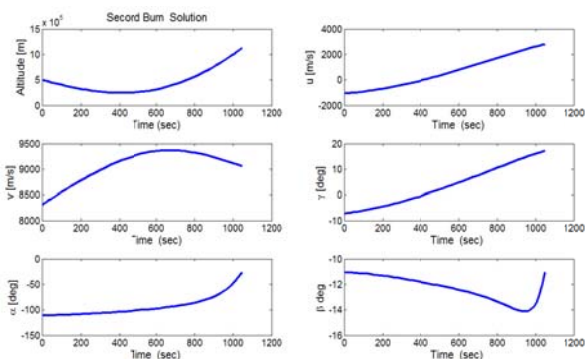
شماره سوزش	نتایج دو بعدی		نتایج سه‌بعدی	
	زمان سوزش (ثانیه)	مصرفی (کیلوگرم)	زمان سوزش (ثانیه)	مصرفی (کیلوگرم)
سوزش اول	۲۰۲۳	۱۲۴۸۰	۲۰۶۵/۶	۱۲۶۸۳
سوزش دوم	۵۶۲	۳۴۵۱	۶۶۶/۴	۴۰۹۱/۹
جمع	۲۵۹۵	۱۵۹۳۱	۲۷۳۲	۱۶۷۷۵



شکل ۱۴- مسیر بهینه برای سوزش اول یک سکونتس سه سوزشی



شکل ۱۵- مسیر بهینه برای سوزش اول یک سکونتس سه سوزشی



شکل ۱۶- مسیر بهینه برای سوزش دوم یک سکونتس سه سوزشی

جدول ۵- مقایسه نتایج سه‌بعدی و دو بعدی در انتقال دو سوزشی با زاویه شیب اولیه ۵۵°

شماره سوزش	نتایج دو بعدی		نتایج سه‌بعدی	
	زمان سوزش (ثانیه)	مصرفی (کیلوگرم)	زمان سوزش (ثانیه)	مصرفی (کیلوگرم)
سوزش اول	۲۰۲۳	۱۲۴۸۰	۲۰۸۰/۲	۱۲۷۷۲
سوزش دوم	۵۶۲	۳۴۵۱	۹۱۸/۳	۵۶۳۸/۴
جمع	۲۵۹۵	۱۵۹۳۱	۲۹۹۸/۵	۱۸۴۱۱

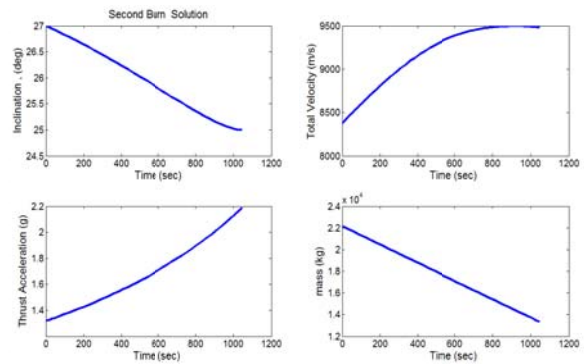
جدول ۶- مقایسه نتایج انتقال دو سوزشی با زاویه شیب ۵۵° و ۲۸/۵°

شماره سوزش	انتقال ۲۸/۵°		انتقال ۵۵°	
	زمان سوزش (ثانیه)	مصرفی (کیلوگرم)	زمان سوزش (ثانیه)	مصرفی (کیلوگرم)
سوزش اول	۲۰۶۵/۶	۱۲۶۸۳	۲۰۸۰/۲	۱۲۷۷۲
سوزش دوم	۶۶۶/۴	۴۰۹۱/۹	۹۱۸/۳	۵۶۳۸/۴
جمع	۲۷۳۲	۱۶۷۷۵	۲۹۹۸/۵	۱۸۴۱۱

در شکل‌های (۱۴) تا (۱۹) نتایج عددی مسیر بهینه برای یک سکونتس پروازی سه سوزشی و با شیب اولیه ۲۸/۵ درجه نشان داده شده است. در شکل‌های (۱۴)، (۱۶) و (۱۸) مسیر بهینه به ترتیب برای سوزش‌های اول، دوم و سوم یک سکونتس پروازی سه سوزشی در دستگاه مختصات قطبی رسم شده است که شامل پارامترهای ارتفاع، سرعت‌های شعاعی و مماسی، زوایای پیشرانش در صفحه و خارج از صفحه پرواز و زاویه مسیر پرواز هستند. شکل‌های (۱۵)، (۱۷) و (۱۹) نیز شامل پارامترهای زاویه شیب، اندازه سرعت کلی، جرم جسم و اندازه شتاب پیشرانش به ترتیب

جدول ۷- انتقال سه سوزشی به مدار زمین آهنگ با زاویه شیب اولیه $28/5^\circ$

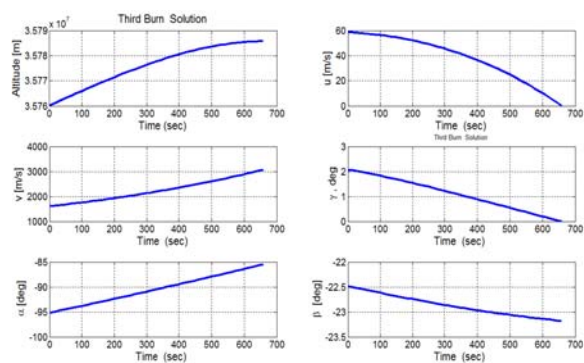
نوع مدار	پارامترهای مداری					فازهای فعال	
	نیم قطر اصلی (کیلومتر)	خروج از مرکز	شیب مداری (درجه)	مکان سوزش	زمان سوزش (ثانیه)	سوخت مصرفی (کیلوگرم)	
اولیه	۶۵۷۸/۱	۰	۲۸/۵	حضیض	۹۸۰/۸	۶۰۲۲/۴	
انتقالی	۸۷۳۳/۱	۰/۲۴۵۶	۲۷	حضیض	۱۰۴۷/۲	۶۴۲۹/۸	
انتقالی	۲۴۴۲۸	۰/۷۲۴۷	۲۵	اوج	۶۵۸/۶	۴۰۴۳/۶	
نهایی	۴۲۱۶۴	۰	۰	جمع	۲۶۸۶/۶	۱۶۴۹۶	



شکل ۱۷- مسیر بهینه برای سوزش دوم یک سکونت سه سوزشی

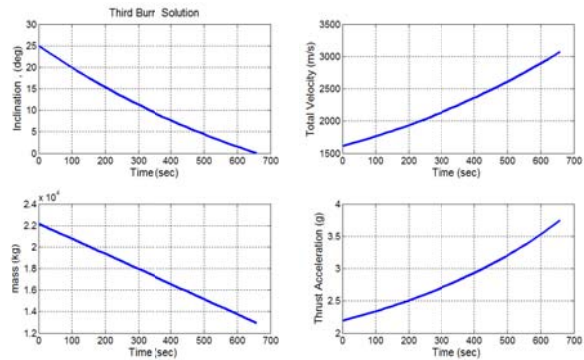
جدول ۸- مقایسه نتایج سه بعدی و دو بعدی در انتقال سه سوزشی با زاویه شیب اولیه $28/5^\circ$

شماره سوزش	نتایج دو بعدی		نتایج سه بعدی		درصد خطا
	زمان سوزش (ثانیه)	سوخت مصرفی (کیلوگرم)	زمان سوزش (ثانیه)	سوخت مصرفی (کیلوگرم)	
سوزش اول	۹۰۵	۵۵۵۴/۶	۹۸۰/۸	۶۰۲۲/۴	۷/۷۲
سوزش دوم	۱۰۴۷/۰	۶۴۲۹/۵	۱۰۴۷/۲	۶۴۲۹/۸	۰/۰۱
سوزش سوم	۶۰۰/۶	۳۶۸۷/۸	۶۵۸/۶	۴۰۴۳/۶	۸/۸
جمع	۲۵۵۲/۴	۱۵۶۷۲	۲۶۸۶/۶	۱۶۴۹۶	۵/۰



شکل ۱۸- مسیر بهینه برای سوزش سوم یک سکونت سه سوزشی

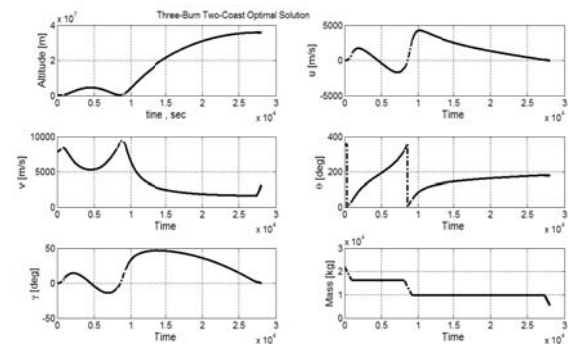
با بررسی نتایج روش ارائه شده در این مقاله ملاحظه می‌شود که هر فاز فعال با ۵ الی ۱۵ تکرار، به شرایط مرزی مورد نظر همگرا می‌شود که نشان‌دهنده سرعت همگرایی مطلوب است. بنابراین روش ارائه شده در این مقاله علاوه بر تأمین دقت بسیار خوب، از سرعت همگرایی بالایی نیز برخوردار است.



نتیجه گیری

در این مقاله، مسئله طراحی مسیر بهینه یک بلوک انتقال مداری جهت تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ با پیشران محدود و قابلیت خاموش و روشن مجدد در فضای سه بعدی مورد بررسی قرار گرفت. مسئله با استفاده از تئوری کنترل بهینه فرموله شد و زوایای بهینه بردار پیشران، با معیار حداقل مصرف سوخت تعیین شد. سکونت‌های پروازی مختلف با سوزش‌های چندگانه، با استفاده از یک بلوک انتقال مداری با پیشران شیمیایی و پیشران متوسط بررسی و برای هر یک از آنها مسیر بهینه، زمان‌های استارت موتور و مدت زمان بهینه هر یک از مانورهای بلوک انتقال مداری استخراج شد. برای حل مسئله شرط مرزی در چند نقطه از یک روش پرتابی غیرمستقیم با کارایی بالا استفاده شده که علاوه بر دقت بالا، با سرعت بسیار خوبی به شرایط مرزی مورد نظر همگرا می‌شود. نتایج مسیر بهینه سه بعدی و دو بعدی در انتقال‌های دو

شکل ۱۹- مسیر بهینه برای سوزش سوم یک سکونت سه سوزشی



شکل ۲۰- مسیر بهینه برای یک سکونت پروازی سه سوزشی

سوزشی و سه سوزشی مقایسه و ملاحظه شد که تفاوت زمان سوزش کلی حدود پنج درصد است.

مراجع

- Control and Dynamics*, Vol. 31, No. 6, 2008, pp. 1656-1664.
- [13] Pan, B. and Lu, P., "Rapid Optimization of Multiburn Rocket Trajectories Revisited", *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 10-13 August 2009.
- [14] Jaminson, B. R. and Coverstone, V., "Analytical Study of the Primer Vector and Orbit Transfer Switching Function," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 33, No. 1, 2010, pp. 235-245.
- [15] Stephen, W., Thrasher, J. and Thomas J. F., "Orion's Exoatmospheric Burn Guidance Architecture and Algorithm," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2011.
- [16] Pan, B., Lu, P. and Chen, ZH., "Three-Dimensional Closed-form Costate Solutions in Optimal Coast," *Elsevier Science Direct Acta Astronautica*, Vol. 30, No. 77, 2012, pp. 156-166.
- [17] Hernandez, S. and Akella, M. R., "Finite-Thrust Orbit Transfers to any Circular-Equatorial Orbit using Lyapunov-based Feedback Control," *Fifth International Conference on Spacecraft Formation Flying Missions and Technologies*, 2013.
- [18] Oliveira, T. C. and Rocco, E. M., "Minimum Fuel Low-Thrust Transfers for Satellites Using a Permanent Magnet Hall Thruster," *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*, Feb 25, 2013.
- [19] Heydari, A. and Blakrishnan, S.N., "Optimal Orbit Transfer with on-off Actuators Using a Closed Form Optimal Switching Scheme," *Guidance, Navigation and Control and Co-Located Conferences*, 2013.
- [20] Bortakovskii, A. S. and Konovalova, A. A., "Optimal Injection of a Satellite into Geostationary Orbit Using a Limited Number of Thruster Firings," *Journal of Computer and Systems Sciences*, No. 52, 2013, pp. 938-948.
- [21] Bryson A. E. and Ho, Y., *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Corporation, Bristol, PA, Revised Printing Edition, CRC Press, 1975.
- [22] Alavipour, M., Nikkhah, A. A. and Roshanian, J., "Optimal Multiple-Burn Injection of a Satellite into Geostationary orbit using an Upper Stage," *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, 2017, pp. 157-167 (In Persian).
- [23] Thorne, J. D. and Hall, C. D., "Approximate Initial Lagrange Costates for Continuous-Thrust Spacecraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 2, 1996, pp. 283-288.
- [24] Curtis, H.D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [1] Brown, K. R., and Johnson, G. W., "Real-Time Optimal Guidance", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-12, No. 5, 1967, pp. 501-506.
- [2] Brown, K. R., Harrold, E. F., and Johnson, G. W., "Some New Results on Space Shuttle Atmospheric Ascent Optimization", *AIAA Paper NO. 70-978*, 1970.
- [3] J. Calise, "Further improvements to a Hybrid Method for Launch Vehicle Ascent Trajectory Optimization," *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2000, 14-17.
- [4] Dukeman, G.A., "Atmospheric Ascent Guidance for Rocket-Powered Launch Vehicles," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, AIAA-2002-4559, Monterey, CA, August 5-8, 2002.
- [5] Dukeman, G. A., and Calise, A. J., "Enhancements to an Atmospheric Ascent Guidance Algorithm," *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, AIAA-2003-5638, Austin, TX, August 11-14, 2003
- [6] Zhang, L., A Fixed-point Framework for Launch Vehicle Ascent Guidance, (Ph.D. Thesis), Iowa State University, 2006.
- [7] Brown, K. R., Harrold, E. F. and Johnson, G. W., "Some New Results on Space Shuttle Atmospheric Ascent Optimization," *AIAA Paper No. 70-978*, 1970.
- [8] Cohen, A.O., and Brown, K.R., "Real-Time Optimal Guidance for Orbital Maneuvering", *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 5, 1972, pp. 680-685.
- [9] Jezewski, D.J., "Optimal Analytical Multiburn Trajectories," *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 9, 1973, pp. 1266-1272.
- [10] Calise, A. J., "Further Improvements to a Hybrid Method for Launch Vehicle Ascent Trajectory Optimization," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, AIAA-2000-4261, Denver, CO, August 14-17, 2000.
- [11] Gath, P. F., and Calise, A. J., "Optimization of Launch Vehicle Ascent Trajectories with Path Constraints and Coast Arcs," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 2, 2001, pp. 296-304.
- [12] Lu, P. and Griffen, B. J., "Rapid Optimal Multiburn Ascent Planning and Guidance," *Journal of Guidance*,