

Robust Guidance Algorithm for Reentry Vehicles based on PLS Regression in the Presence of Initial Parameter Uncertainties

A.Hoseinzadeh¹, A.H.Adami^{2*} and A.Ebrahimi³

1, 2, 3. Department of Aerospace University Complex, MalekAshtar University of Technology

*Postal Code: 1774-15875, Tehran, IRAN

Aha.aerospace@aut.ac.ir

The atmospheric re-entry phase is one of the most significant mission steps in the space missions; hence, the guidance and control of reentry vehicles in this phase of mission is important. In this article, a reentry vehicle guidance algorithm has been proposed which has suitable robustness in the presence of initial reentry parameters uncertainties. Here, it has been tried to minimize the landing errors at terminal point using Nonlinear Quadratic Tracking (NQT) and chasing a reference trajectory. In order to define several trajectories with different initial states using evolutionary genetic algorithm with changes in weighting matrices Q and R , it has been tried to reduce the errors of landing at terminal point. The reentry position of the reentry vehicles may be different from the desired ones with respect to several events. In this situation, reentry vehicles start to move in a new trajectory which is not suitable. Therefore, the reentry vehicles should be guided to come back into the desired trajectory or a new optimum trajectory needs to be redesigned to have the same target position on the ground. To do this, we need optimum weighting matrices R and Q for every new trajectory. In this article, this problem has been resolved using partial least squares regression; meanwhile, obtaining the optimal matrices by genetic algorithms needed many times. Also, it is shown that using this method, in the presence of reentry uncertainties, weighting matrices for each new initial condition has been quickly derived. Additionally, through the matrices obtained and the nonlinear quadratic tracking controller, reentry vehicle was directed to the target with a good accuracy. The Monte Carlo analysis has been used to evaluate the performance of the proposed algorithm. According to the results, the proposed algorithm has a suitable accuracy level and it can generate the online optimum trajectory.

Keywords: Re-entry vehicles, Optimal guidance, Robust guidance, Uncertainty, Nonlinear quadratic tracking (NQT), Regression, Partial least squares (PLS)

1.M. Sc.

2.Assistant Professor (Corresponding Author)

3.Assistant Professor

هدایت مقاوم وسایل بازگشت‌پذیر مبتنی بر رگرسیون PLS در حضور عدم قطعیت پارامترهای ورود

عاطفه حسین‌زاده، امیرحسین آدمی* و اصغر ابراهیمی

۱، ۲ و ۳- مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

*تهران، لویزان، کدپستی: ۱۵۸۷۵-۱۷۷۴

Aha.aerospace@aut.ac.ir

هدف این مقاله ارائه یک الگوی هدایت و کنترل بهینه برای وسایل بازگشت‌پذیر است که در برابر عدم قطعیت در پارامترهای ورودی مقاوم باشد. روش‌های مختلفی برای طراحی مسیر بهینه و یا کنترل بهینه وسایل بازگشت‌پذیر ارائه شده است، ولی تعداد کمی قابلیت استفاده بر خط را داراست. روش‌هایی نیز که مدعی دارا بودن قابلیت استفاده برخط می‌باشند، عموماً از ساده‌سازی و راه‌حل‌های نزدیک بهینه درون خود استفاده نموده‌اند. در این مقاله سعی شده است تا با استفاده تلفیقی از روش کنترل بهینه غیرخطی، روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک و روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی، الگوریتمی بهینه و مقاوم برای وسایل بازگشت‌پذیر ارائه شود که قابلیت استفاده برخط را داشته باشد. براساس نتایج استخراج شده، نشان داده می‌شود که با استفاده از این روش پیشنهادی، در صورت وجود عدم قطعیت در پارامترهای ورود، ماتریس‌های کنترلی متناسب با هر شرایط اولیه جدید استخراج و با استفاده از روش کنترلی غیرخطی کوادراتیک، وسیله بازگشت‌پذیر با دقت خوبی به سمت هدف هدایت می‌شود. نتایج آنالیز مونت کارلو نشان می‌دهد که خطای برخورد نسبت به کنترل بهینه غیرخطی کلاسیک ۸۸٪ بهبود یافته است.

واژه‌های کلیدی: وسایل بازگشت‌پذیر، هدایت بهینه، هدایت مقاوم، عدم قطعیت، کنترل غیرخطی مرتبه دوم، رگرسیون، رگرسیون حداقل مربعات جزئی (PLS)

علائم و اختصارات

a_x, a_y, a_z	مؤلفه‌های شتاب کارترین		
B	ماتریس ورودی سیستم شامل متغیرهای وضعیت و کنترل سیستم		
C_D	ضریب پسا	α	زاویه حمله
C_{D_0}	ضریب پسای مستقل از زاویه حمله و سرش جانبی	β	زاویه سرش جانبی
C_{D_α}	ضریب پسای وابسته به زاویه حمله	σ	انحراف معیار
C_{D_β}	ضریب پسای وابسته به زاویه سرش جانبی	λ	طول جغرافیایی
C_L	ضریب برآ	φ	عرض جغرافیایی
C_{L_α}	ضریب برآی وابسته به زاویه حمله	ψ	زاویه آزیموت
C_{L_β}	ضریب برآی وابسته به زاویه سرش جانبی	γ	زاویه مسیر پرواز
D	نیروی پسا	ρ	چگالی
DCM	ماتریس کسینوس‌های هادی (ماتریس انتقال)	A	ماتریس حالت سیستم شامل متغیرهای وضعیت سیستم
F_x, F_y, F_z	مؤلفه‌های نیرو در مختصات کارترین		
g	شتاب جاذبه‌ی زمین		
H	تابع همپلتونین		
h	ارتفاع از سطح زمین		

۱. کارشناس ارشد

۲. استادیار (نویسنده مخاطب)

۳. استادیار

الگوریتم هدایت و کنترل وسایل بازگشت‌پذیر تلاش‌های بسیاری شده است [۳-۱]، ولی مقیدبودن مسئله و نیازمندی‌های مختلف کارایی مانع از ارائه یک الگوریتم کامل و یکتا شده است.

بهینه‌سازی مسیر بازگشت با وجود قیود مختلف، مستلزم استفاده از روش‌های تکرارشونده و عددی است. دو دسته کلی در هدایت و کنترل بهینه وسایل بازگشت‌پذیر می‌توان در نظر گرفت که عبارتند از:

۱. بهینه‌سازی مسیر با روش‌هایی نظیر پیش‌بینی و تصحیح [۴-۶] یا استفاده از روش‌های مستقیم نظیر هم‌نشانی و

همواری دیفرانسیلی [۷، ۸]

۲. کنترل بهینه که تمرکز بر استخراج پارامترهای کنترلی

مطابق با تابع هزینه در نظر گرفته شده دارد [۹-۱۱]

هر یک از روش‌های فوق دارای نقاط قوت و ضعف مخصوص به خود است. اما، مقایسه روش‌ها از دیدگاه قابلیت استفاده به صورت برخط^۴، تمرکز بر ساده‌سازی به‌جای دقت را در دستور کار کلیه روش‌ها و الگوریتم‌ها قرار داده است. براساس این نیازمندی، استفاده از الگوریتم‌ها مبتنی بر ناوبری تناسبی و مشتقات آن و یا استفاده از کنترلر مرتبه دوم بیشتر از دیگران در تحقق این موضوع موفق بوده است. البته، تلاش‌هایی برای چابک نمودن روش‌های مستقیم با استفاده از منحنی‌های برازش مختلف و یا همواری دیفرانسیلی نیز انجام شده است که در ادامه به اختصار ارائه می‌شود.

مرجع [۱۲] با استفاده از تئوری اغتشاشات تکین به ارائه یک روش هدایتی بهینه برای اجسام بازگشت‌پذیر پرداخته است. در مرجع [۱۳] بهینه‌سازی مسیر با استفاده از روش مستقیم و با رویکردی جدید انجام پذیرفته است که در این روش از همواری دیفرانسیلی و هم‌نشانی استفاده شده است. مرجع [۱۴] با استفاده از الگوریتم ناوبری تناسبی و کنترل بهینه، روشی ترکیبی برای هدایت و کنترل وسایل بازگشت‌پذیر ارائه نموده و خطای برخورد در حضور نویز و عدم قطعیت ارزیابی شده است. مرجع [۱۵] به توسعه روش‌های بهینه‌سازی مسیر برای استفاده برخط پرداخته که الگوریتم ارائه شده برای وسایل بازگشت‌پذیر مورد ارزیابی قرار گرفته است.

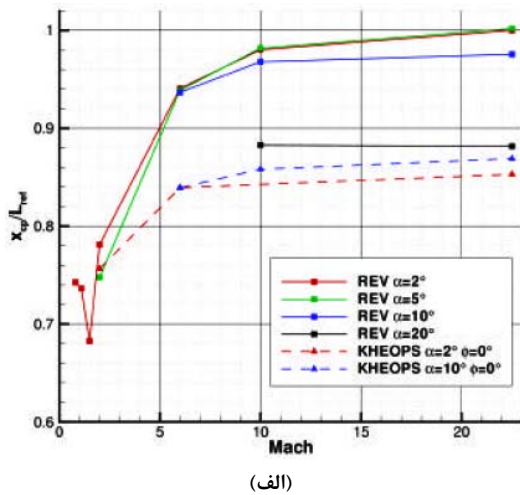
با وجود همه تلاش‌های صورت گرفته، همچنان بهینه‌سازی مسیر و یا بهینه‌سازی کنترل برای وسایل بازگشت‌پذیر نیازمند تلاش‌های تکرارشونده است. در این مقاله سعی شده است که با افزایش حجم کار برون‌خط^۵، بتوان روشی کاربردی برای استفاده برخط ارائه کرد که توانایی مقابله با عدم قطعیت در پارامترهای ورود (ارتفاع، سرعت و غیره) را داشته باشد.

K	ضریب کنترل
L	نیروی برآ (نیروی بالابرنده)
L	تابع هدف لاگرانژ
M	جرم
Mach	عدد ماخ
N	ثابت ناوبری (نرخ ناوبری، نرخ مؤثر ناوبری، ضریب ناوبری) که یک عدد مثبت بی‌بعد است
P	بردار کمک و وضعیت (بردار ضرایب لاگرانژ)
Q	ماتریس وزنی متغیرهای وضعیت
R	ماتریس وزنی متغیرهای کنترل
R	فاصله از مرکز زمین
R_x, R_y, R_z	مؤلفه‌های موقعیت در مختصات کارترین
Re	شعاع زمین
S	سطح مقابل جریان (m^2)
S	نیروی جانی
T	نیروی پیشرانش
t	زمان
U	بردار کنترل سیستم
V	سرعت جریان هوا
V_x, V_y, V_z	مؤلفه‌های سرعت کارترین
W	نیروی وزن
X(t)	بردار متغیرهای وضعیت سیستم (شامل موقعیت و سرعت)
North-East-Down (NED)	دستگاه افق محلی
Nonlinear Quadratic Controller (NQT)	کنترلر غیرخطی کوآدراتیک
linear Quadratic Regulator (LQR)	تنظیم‌کننده مرتبه دوم خطی
Partial Least Squares (PLS)	حداقل مربعات جزئی
Circular Error Probable (CEP)	دایره احتمال خطا

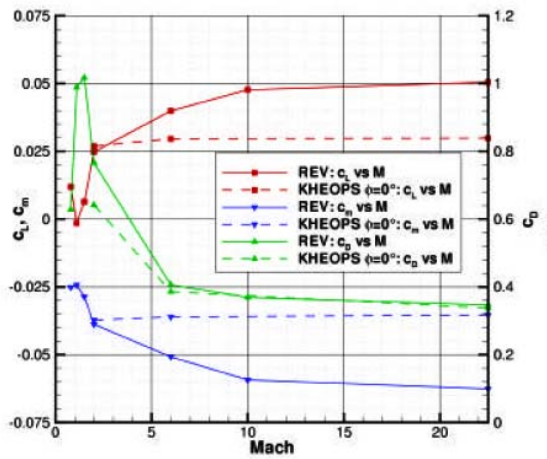
مقدمه

فاز بازگشت اتمسفریک وسایل فضایی به عنوان یکی از پرچالش‌ترین فازهای هر مأموریت فضایی خصوصاً مأموریت‌های فضایی سرنشین‌دار شناخته می‌شود. وجود پدیده‌های ناشناخته و پیچیده در این فاز باعث شده است که مدل‌های خیلی دقیق از رفتار سیستم نیز دارای عدم قطعیت باشد. وجود قیود مختلف حرکتی و محیطی نظیر گرمایش آیرودینامیکی، ضریب بار وارد بر سازه، خطای مجاز فرود و محدودیت زاویه‌ای باعث پیچیده شدن مسئله بهینه‌سازی مسیر برای چنین وسایلی شده است. برای مقاوم‌سازی

4. online
5. offline



(الف)



(ب)

شکل ۲- الف و ب) نمودارهای تغییرات ضرایب آیرودینامیکی وسیله در زاویه حمله ۲ درجه با عدد ماخ [۶]

جدول ۱- نتایج شبیه‌سازی مسیر بالستیک

سرعت برخورد به زمین (متر بر ثانیه)	زمان پرواز (ثانیه)	برد طولی (متر)	برد عرضی (متر)	برد کل (متر)
۱۷۲/۸۶۸۴	۱۴۹/۹۰۰۰	۱/۶۹۶۹×۱۰ ^۵	۰	۱/۶۹۶۹×۱۰ ^۵

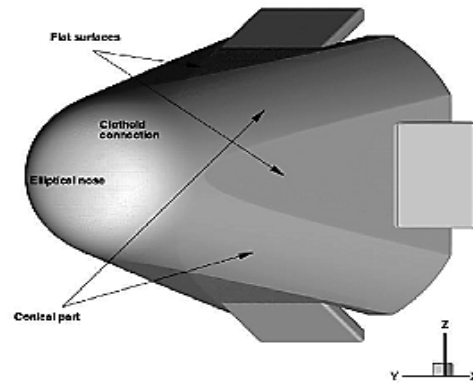
استخراج معادلات حرکت

انتخاب دستگاه‌های مختصات و توسعه معادلات حرکت نقشی تعیین‌کننده در کارایی یک الگوریتم هدایتی دارد. در این مقاله از توسعه برداری معادلات حاکم بر حرکت استفاده شده است. نیروهای برآ، پسا و جانبی، نیروهای وارد بر وسیله در دستگاه باد می‌باشند که به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha^2 + C_{D_\beta} \beta^2) \quad (۳)$$

معرفی وسیله و مدل دینامیکی مورد استفاده

وسیله بازگشت‌پذیر مورد بررسی کپسول زیستی اکسپرت^۶ Kheops Revision 4.2 است که مدل ویژه آزمایشی سازمان فضایی اروپاست (شکل ۱).



شکل ۱- شماتیک وسیله بازگشت‌پذیر اکسپرت [۶]

ضرایب آیرودینامیکی این وسیله مطابق با شکل (۲) در نظر گرفته شده است که در آن به ازای زاویه حمله ۲ درجه، ضرایب C_L و C_D نمایش داده شده است.

اطلاعات جرمی و هندسی و آیرودینامیکی وسیله مطابق با رابطه (۱) است. روابط ارائه شده برای ضرایب C_L و C_D براساس تقریبی مناسب از نمودار شکل (۲) است [۱۶].

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 436 \text{ kg} \\ S = 1.1978 \text{ m}^2 \\ C_{L_\alpha} = ((1.5892^{-3}) \times \log(\text{Mach})) + (1.176^{-2}) \\ C_{L_\beta} = -C_{L_\alpha} \\ C_{D_0} = \begin{cases} (1.7 \times \text{Mach}) - 0.662 & \text{Mach} < 1 \\ 1.038 \times \text{Mach}^{-0.438} & \text{Mach} \geq 1 \end{cases} \\ C_{D_\alpha} = 0.001 \\ C_{D_\beta} = C_{D_\alpha} \\ C_L = C_{L_\alpha} \times \alpha \\ C_B = C_{L_\beta} \times \beta \\ C_D = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \times \alpha^2 + C_{D_\beta} \times \beta^2 \end{array} \right. \quad (۱)$$

مسیری که وسیله بازگشتی به جو در عدم حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها و بدون اعمال هدایت و کنترل (زاویه حمله و سرش جانبی صفر) طی می‌نماید به عنوان مسیر مرجع در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه (پارامترهای اولیه بازگشت) به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته شده است:

$$V = 3000 \frac{\text{m}}{\text{s}}, h = 90 \text{ km}, \alpha = 0 \text{ deg}, \beta = 0 \text{ deg} \quad (۲)$$

فرضیات در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی مسیر بالستیک عبارتند از: زمین کروی، زمین ثابت (به دلیل کوتاه بودن زمان ورود به جو) و ناوبری ایده‌آل. نتایج شبیه‌سازی حرکت بالستیک وسیله در جدول (۱) خلاصه شده است.

$$\vec{R} = \vec{V} = \frac{\vec{F}_{Inertial}}{m} \quad (15)$$

طراحی کنترلر غیرخطی کوادراتیک NQT

روش‌های مختلفی برای هدایت و کنترل وسیله بازگشتی وجود دارد. در این مقاله برای کنترل وسیله بازگشتی مورد مطالعه، کنترلر غیرخطی کوادراتیک (NQT) توسعه یافته و از آن برای هدایت بهینه وسیله استفاده می‌شود. قانون کنترلی NQT در نتیجه حل مسئله کنترل بهینه با دو شرط مرزی و فرض تغییرات خطی متغیرهای کمک حالت با متغیرهای حالت سیستم می‌باشد. این فرض در نهایت منجر به تشکیل معادله ماتریسی دیفرانسیلی ریکاتی می‌شود که با حل آن در هر لحظه از زمان، سیگنال کنترلی بهینه تولید می‌شود.

متغیرهای کنترلی سیستم شامل زاویه حمله α و زاویه سرش β می‌باشند. زاویه حمله برای تنظیم برد طولی جاری وسیله روی برد طولی نامی و زاویه سرش جانی برای تنظیم برد عرضی جاری روی برد عرضی نامی به کار می‌روند. خطا عبارتست از اختلاف بین سه مؤلفه بردار موقعیت و سه مؤلفه بردار سرعت مسیر جاری و مسیر مرجع که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Error = [r_{x_{cur}} - r_{x_{ref}}, r_{y_{cur}} - r_{y_{ref}}, r_{z_{cur}} - r_{z_{ref}}, v_{x_{cur}} - v_{x_{ref}}, v_{y_{cur}} - v_{y_{ref}}, v_{z_{cur}} - v_{z_{ref}}] \quad (16)$$

فرض می‌کنیم سیستم کنترل شونده به صورت یک سیستم خطی متغیر با زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{X}(t)_{[n \times 1]} = A(t)_{[n \times n]}X(t) + B(t)_{[n \times r]}U(t)_{[r \times 1]} \quad (17)$$

رابطه (۱۷) معادله وضعیت سیستم است که در آن $X(t)$ بردار متغیرهای وضعیت سیستم، $A(t)$ ماتریس وضعیت، $B(t)$ ماتریس کنترل و $U(t)$ بردار متغیرهای کنترلی سیستم است. برای کنترل مسئله به روش تنظیم یا LQR، تابع معیار به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۷]:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t)F(t)x(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^t [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt \quad (18)$$

ماتریس R و Q مقارن بوده و $R > 0$ و $Q \geq 0$ نیمه معین هستند. تابع معیار به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$J = \int_{t_0}^t [\|x(t) - r(t)\|^2 \times Q(t) + \|u(t)\|^2 \times R(t)]dt \quad (19)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تابع هدف فوق دارای ترم‌های مربع از مقدار خطا یا اختلاف متغیرهای وضعیت $X(t)$ و کنترل $U(t)$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L\alpha}\alpha) \quad (4)$$

$$S = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L\beta}\beta) \quad (5)$$

بردار نیروهای وارد بر وسیله در دستگاه باد به صورت رابطه (۶) است:

$$F_{Wind} = DCM_{Body2Wind}F_{Body} + \begin{bmatrix} -D \\ S \\ -L \end{bmatrix} \quad (6)$$

حال نیروی وارده بر جسم در دستگاه NED که نیروی وزن می‌باشد با نیروی منتقل شده از دستگاه باد جمع جبری می‌شوند و با استفاده از ماتریس انتقال رابطه (۷) نیروها در دستگاه NED به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید.

$$DCM_{Wind2NED} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma)\cos(\psi) & -\sin(\psi) & \cos(\psi)\sin(\gamma) \\ \cos(\gamma)\sin(\psi) & \cos(\psi) & \sin(\gamma)\sin(\psi) \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$F_{NED} = DCM_{Wind2NED}F_{Wind} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (8)$$

برای محاسبه ماتریس انتقال، به زوایای مسیر پرواز و آرموت نیاز است که از روابط (۹) و (۱۰) به دست می‌آیند:

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{V_{y_{NED}}}{V_{x_{NED}}}\right) \quad (9)$$

$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{-V_{z_{NED}}}{V}\right) \quad (10)$$

منظور از V اندازه بردار سرعت می‌باشد.

برای محاسبه برآیند نیروها باید نیروهای محاسبه شده در دستگاه NED را به دستگاه اینرسی منتقل کنیم و در این مرحله نیاز به محاسبه طول و عرض جغرافیایی داریم. از آنجاکه مؤلفه‌های موقعیت در دستگاه اینرسی را در هر لحظه از حرکت جسم داریم، زوایای طول و عرض جغرافیایی توسط روابط (۱۱) و (۱۲) قابل محاسبه هستند.

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad (11)$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{R_z}{R}\right) \quad (12)$$

پس از محاسبه طول و عرض جغرافیایی، ماتریس انتقال از دستگاه NED به دستگاه اینرسی محاسبه شده (رابطه ۱۳) و سپس از طریق رابطه (۱۴) برآیند نیروها در دستگاه اینرسی را به دست می‌آوریم.

$$DCM_{NED2Inertial} = \begin{bmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\phi) & -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda)\cos(\phi) \\ -\sin(\lambda)\sin(\phi) & \cos(\lambda) & -\cos(\phi)\sin(\lambda) \\ \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$F_{Inertial} = DCM_{NED2Inertial}F_{NED} \quad (14)$$

و در نهایت معادلات دیفرانسیل حرکت از رابطه (۱۵) محاسبه می‌شوند.

که شعاع زمین و g_0 شتاب گرانش می باشد. ماتریس B به صورت رابطه (۲۵) بازنویسی می گردد.

$$B = k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \\ B_5 & B_6 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = -\frac{R_y}{R_{xy}}(k_4 c d_\alpha \alpha + k_8) - \frac{R_x}{RI}(k_6 c d_\alpha \alpha - V_{xy} c l_\alpha - R_x R_z R_{xy} R I k_5 c d_\alpha \alpha + k_{10})$$

$$B_2 = -\frac{R_y}{R_{xy}}(k_4 c d_\beta \beta - k_7) - \frac{R_x}{RI}(k_6 c d_\beta \beta) - \frac{R_x R_z}{R_{xy} R I}(k_5 c d_\beta \beta + k_9)$$

$$B_3 = \frac{R_x}{R_{xy}}(k_4 c d_\alpha \alpha + k_8) - \frac{R_y}{RI}(k_6 c d_\alpha \alpha - V_{xy} c l_\alpha - R_y R_z R_{xy} R I k_5 c d_\alpha \alpha + k_{10})$$

$$B_4 = \frac{R_x}{R_{xy}}(k_4 c d_\beta \beta - k_7) - \frac{R_y}{RI}(k_6 c d_\beta \beta) - \frac{R_y R_z}{R_{xy} R I}(k_5 c d_\beta \beta + k_9)$$

$$B_5 = \frac{R_{xy}}{RI}(k_5 c d_\alpha \alpha + k_{10}) - \frac{R_z}{RI}(k_6 c d_\alpha \alpha - V_{xy} c l_\alpha)$$

$$B_6 = \frac{R_{xy}}{RI}(k_5 c d_\beta \beta + k_9) - \frac{R_z}{RI}(k_6 c d_\beta \beta)$$

متغیرهای $k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}$ و V_{xy} که در ماتریس B آمده، بدین صورت تعریف می شوند:

$$V_{xy} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$k_3 = \frac{\rho V S}{2 m}$$

$$k_4 = \left(\frac{V_x R_y}{R_{xy}} - \frac{V_y R_x}{R_{xy}} \right)$$

$$k_5 = \left(\frac{V_x R_x R_z}{R_{xy} R I} - \frac{V_z R_{xy}}{R I} + \frac{V_y R_y R_z}{R_{xy} R I} \right)$$

$$k_6 = \left(\frac{V_x R_x}{R I} + \frac{V_y R_y}{R I} + \frac{V_z R_z}{R I} \right)$$

$$k_7 = k_5 c l_\beta \frac{V}{V_{xy}}$$

$$k_8 = k_4 k_6 \frac{c l_\alpha}{V_{xy}}$$

$$k_9 = k_4 c l_\beta \frac{V}{V_{xy}}$$

$$k_{10} = k_5 k_6 \frac{c l_\alpha}{V_{xy}}$$

در نهایت فرم خطی معادلات غیرخطی حرکت به صورت ذیل خواهد بود:

$$\dot{X} = A(X)X + B(X, U)U \quad (27)$$

جاری با مرجع می باشد، به همین دلیل کوآدراتیک^۸ نامیده می شود. با حداقل و حداکثر سازی تابع هدف می توان سیگنال کنترلی بهینه را به سیستم هدایت و کنترل ارسال نمود.

با دنبال نمودن اصل کنترل بهینه پونتریاگین^۹ و با استفاده از حساب تغییرات در نهایت می توان جواب بهینه را پیدا کرد [۱۸]:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) + Q(t) - \\ S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) &= 0 \\ \dot{S}(t) = -S(t)A(t) - A^T(t)S(t) - Q(t) + \\ S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) \end{aligned} \quad (20)$$

مقدار کنترل بهینه را می توان از ماتریس S و یا با تعریف ضریب k از طریق روابط زیر به دست آورد:

$$k = R^{-1}(t)B^T(t)S(t) \quad (21)$$

$$u(t) = -k(x_T(t) - x(t)) \quad (22)$$

که k را اصطلاحاً ماتریس فیدبک (پسخور) و یا ضریب کنترل می نامند. بنابراین، اگر ماتریس های A, B, Q و R ثابت باشند و زمان به سمت بی نهایت میل کند، ماتریس k نیز ثابت خواهد بود. شاید به همین دلیل است که با ثابت فرض نمودن k در تمامی طول مسیر مشاهده می شود که باز هم برخورد با دقت صورت خواهد گرفت.

برای استفاده از مزایای کنترل بهینه مرتبه دوم باید ماتریس های سیستمی A و B در حالت غیرخطی به طور مناسب استخراج شوند. با استفاده از نتایج مرجع [۱۸] نهایتاً خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{xy}}(R_x^2 RI + \frac{R_x^2 R_z^2}{RI}) - \frac{R_z^2}{RI} & k & 0 \\ k & -\frac{1}{R_{xy}}(R_x^2 RI + \frac{R_x^2 R_z^2}{RI}) - \frac{R_z^2}{RI} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RI}(R_{xy}^2 + R_z^2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

متغیرهای k_1, k_2, k و R_{xy} و RI که در ماتریس A آمده، بدین صورت تعریف می شوند:

$$R_{xy} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad RI = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$k_1 = -\frac{g_0 R e^2}{R I^3}, \quad k_2 = \frac{\rho V S C D_0}{2 m R I}$$

$$k = \frac{R_x R_y}{R_{xy}^2} \left(RI - \frac{R_{xy}^2}{RI} - \frac{R_z^2}{RI} \right) \quad (24)$$

8. Quadratic
 9. Pontryagin's Minimum Principle

دیگری قرار داده و با جاگذاری در رابطه رگرسیون، ماتریس ثابتی به‌دست آید که با داشتن آن ماتریس، می‌توان پاسخ هر ورودی جدید را محاسبه نمود. بنابراین، شرایط اولیه مسیریهای نمونه در ماتریس ورودی (ماتریس X) و به‌طور مشابه پاسخ‌ها را در ماتریس پاسخ‌ها (ماتریس Y) قرار می‌گیرد. چون ماتریس S یک ماتریس 6×6 است و به‌صورت بردار نیست، نمی‌توان ماتریس پاسخ را با استفاده از ماتریس S تشکیل داد. برای رفع این مشکل، به جای ماتریس S ، از برداری متشکل از درایه‌های قطر اصلی ماتریس‌های وزنی R و Q استفاده می‌شود. رابطه رگرسیون خطی به‌صورت رابطه (۱۸) است:

$$Y_{15 \times 8} = X_{15 \times 6} \beta_{6 \times 8} \quad (28)$$

در رابطه فوق ماتریس X و Y به ترتیب ماتریس ورودی و ماتریس پاسخ‌ها است. برای استخراج ماتریس β هر دو طرف معادله را از سمت چپ در ترانهاده ماتریس X ضرب می‌شود، یعنی:

$$X^T Y = X^T X \beta \quad (29)$$

اکنون هر دو طرف معادله را از سمت چپ در معکوس $X^T X$ ضرب کرده تا ماتریس β به‌دست آید.

$$(X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T X \beta \quad (30)$$

$$(X^T X)^{-1} X^T Y = \beta \quad (31)$$

ابعاد ماتریس β 6×8 است. اکنون با استفاده از رابطه (۲۸)، با واردکردن هر بردار شرایط اولیه جدیدی در X ، بردار پاسخ آن (Y) یعنی ماتریس‌های وزنی R و Q به‌دست می‌آید.

$$Y_{1 \times 8} = X_{1 \times 6} \beta_{6 \times 8}$$

این روش مشکل زمان‌بر بودن یافتن ماتریس‌های وزنی بهینه از طریق الگوریتم ژنتیک را به‌صورت خیلی خوبی حل می‌کند. اما، نیاز به افزایش دقت در پاسخ‌ها می‌باشد تا نتایج بهتری حاصل شود. در واقع تقریب خطی دقت مناسب را دارا نیست.

(۴) در نهایت روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی (PLS) مورد آزمایش قرار گرفت. با استفاده از این روش، پاسخ‌ها با دقت بسیار خوبی به‌دست می‌آیند. روش حداقل مربعات جزئی، روشی در آمار است که برای حل دستگاه معادلاتی به کار می‌رود که تعداد معادله‌هایش بیش از تعداد مجهول‌هایش است. حداقل مربعات جزئی در واقع روشی برای برازش^{۱۱} داده‌هاست. در این روش بهترین مدل برازش‌شده بر مجموعه‌ای از داده‌ها، مدلی است که در آن مجموع مربع باقی‌مانده‌ها کمینه باشد. برای استفاده از روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی، همان‌طور که توضیح داده شد،

با استخراج ماتریس‌های سیستمی A و B باید ماتریس‌های کنترلی Q و R نیز مشخص شوند تا بتوان از طریق اطلاعات در دسترس، معادله ریکاتی را در هر لحظه حل نمود. تنظیم دقیق ماتریس‌های Q و R از طریق اعمال تغییرات در آنها به‌نحوی حاصل می‌شود که نسبت این دو ماتریس و ضرایب آنها منجر به بهینه شدن تابع هدف شود. ماتریس‌های Q و R با استفاده از روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک استخراج می‌شوند. برای توضیحات بیشتر می‌توان به مرجع [۱۸] مراجعه کرد.

استخراج ماتریس‌های کنترلی R و Q وابسته به شرایط ابتدایی و انتهایی مسئله هستند. در اصل برای هر مسئله یک جفت ماتریس کنترلی استخراج خواهد شد. واضح است که ماتریس‌های استخراج شده فقط برای همان مسیر بهینه هستند و در صورت تغییر مسئله (وجود عدم قطعیت) دیگر این جفت ماتریس کنترلی، مسیر بهینه را ارائه نمی‌دهند و باید مجدداً با الگوریتم ژنتیک ماتریس‌های بهینه استخراج شود. همان‌طور که واضح است، این موضوع نیازمند صرف زمان است و قابلیت بر خط بودن را نخواهد داشت. در این مقاله تلاش شده است که روشی برای هدایت بهینه و استخراج مسیر بهینه مربوطه ارائه شود که قابلیت استفاده بر خط را با کمترین ساده‌سازی داشته باشد. برای این منظور از رگرسیون که نوعی درون‌یابی و تخمین چند بعدی است، استفاده می‌شود.

استخراج روابط مناسب برای مقاوم‌سازی الگوریتم

برای یافتن بهترین مجموعه از ورودی‌ها و خروجی‌ها تلاش زیادی در این پژوهش انجام شده است که خلاصه آن به شرح زیر است:

(۱) در ابتدا ماتریس‌های وزنی بهینه چندین شرایط اولیه مختلف استخراج شد. سپس، برای هر شرایط اولیه جدیدی که بین دو نمونه از شرایط اولیه‌های مفروض قرار داشت، از طریق میانگین‌گیری بین ماتریس‌های وزنی، ماتریس‌های وزنی بهینه مربوط به شرایط اولیه جدید به‌دست آمد. این روش منجر به خطای زیاد می‌شود.

(۲) در مرحله بعد، به منظور یافتن رابطه‌ای بین شرایط اولیه و ماتریس کمکی S به ابعاد 6×6 تلاش شد. در ابتدا به منظور جمع‌آوری داده‌های اولیه، ماتریس S بهینه متناظر با هر شرایط اولیه با استفاده از الگوریتم ژنتیک استخراج شد. سپس، رابطه بین تک تک درایه‌های ماتریس S (دارای ۳۶ درایه) و تک تک مؤلفه‌های بردار شرایط اولیه از طریق برازش غیرخطی به‌دست آمد. این روش نسبت به روش قبلی خطای کمتری داشت، ولی به پردازش حجم زیادی از اطلاعات نیازمند بود. خطای این روش نیز قابل ملاحظه است.

(۳) در مرحله سوم، روش رگرسیون خطی مورد استفاده قرار گرفت تا رابطه‌ای بین شرایط اولیه و ماتریس S استخراج شود. در این روش باید داده‌های ورودی را در یک ماتریس و پاسخ‌ها را در ماتریس

۳) اگر معکوس یک ماتریس برابر ترانزپوز آن ماتریس شود، آن را ماتریس متعامد می‌نامند. به تعبیری A ماتریس متعامد است، هرگاه:

$$A^{-1} = A' \quad \text{یا} \quad A.A' = A'.A = I \quad (33)$$

I ماتریس همانی است.

۴) هر ماتریس مربعی مانند A را می‌توان به طور یکتا به شکل زیر نمایش داد:

$$A = \Gamma'\Gamma\Lambda \quad (34)$$

که در آن Γ و Λ به ترتیب ماتریس‌های متعامد و قطری می‌باشند. بنابراین، اگر Γ ماتریسی باشد که ستون‌هایش بردارهای ویژه A و Λ نیز ماتریسی شامل مقادیر ویژه A باشد، آنگاه رابطه (۳۴) همچنان برقرار خواهد بود.

۵) فرض کنید بردار تصادفی $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)$ دارای ماتریس کوواریانس Σ و بردار میانگین μ با زوج مقادیر بردار ویژه (مقدار ویژه برابر است با: $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots, (\lambda_p, e_p)$) باشد، به‌طوری‌که:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$$

$$e_i' e_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (35)$$

آنگاه Λ امین مؤلفه اصلی از رابطه (۳۶) به‌دست می‌آید:

$$Z_i = e_i' X = e_{1i} X_1 + e_{2i} X_2 + \dots + e_{pi} X_p \quad \forall i, p \quad (36)$$

۶) اگر X را به‌صورت ماتریسی در نظر بگیریم که هر سطر آن شامل یک مشاهده^{۱۴} روی تمام متغیرهای x_i باشد و Z نیز ماتریسی باشد که ستون‌هایش مقادیر مؤلفه‌های اصلی است، آنگاه شکل ماتریسی مؤلفه‌های اصلی به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$Z = X \Gamma \quad (37)$$

که در آن Γ ماتریس مربوط به بردارهای ویژه Σ است. در این صورت اگر ماتریس شامل مقادیر ویژه Σ را با Λ نمایش دهیم با توجه به نکته ۳ رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\Gamma' \Sigma \Gamma = \Lambda \quad (38)$$

۷) امین ستون Γ را Λ امین بردار محموله‌های مؤلفه‌های اصلی می‌نامیم. اگر بردار Z_i شامل مقادیر مربوط به Λ امین مؤلفه اصلی باشد، آنگاه Λ امین عنصر Z_i را امتیاز مؤلفه اصلی Λ ام روی Λ امین مشاهده می‌نامیم.

۸) اختلاف بین مقادیر مشاهده شده و بردار مقادیر برازش داده شده، بردار باقیمانده نامیده می‌شود که به‌صورت رابطه (۳۹) است:

$$e = Y - \hat{Y} \quad (39)$$

ابتدا باید ماتریس ورودی (ماتریس X) شامل بردارهای شرایط اولیه نمونه، و ماتریس پاسخ‌ها (ماتریس Y) شامل R و Q های بهینه مربوط به شرایط اولیه نمونه مشخص شود. ماتریس

$Y_{15 \times 8}$ و $X_{15 \times 6}$ به‌صورت زیر هستند:

$$X = \begin{bmatrix} 6471135 & 0 & 0 & -1031.2 & 2833.2 & 0 \\ 6471135 & 0 & 0 & -1020.9 & 2805 & 0 \\ 6465135 & 0 & 0 & -1031.2 & 2833.2 & 0 \\ 6465135 & 0 & 0 & -1020.9 & 2805 & 0 \\ 6471135 & 3000 & 3000 & -1011.1 & 2834.1 & 15 \\ 6471135 & 3000 & 3000 & -1041.1 & 2804.1 & -15 \\ 6465135 & -3000 & -3000 & -1011.1 & 2834.1 & 15 \\ 6465135 & -3000 & -3000 & -1041.1 & 2804.1 & -15 \\ 6468135 & 0 & 3000 & -1031.2 & 2833.2 & 0 \\ 6468135 & 0 & 3000 & -1020.9 & 2805 & 0 \\ 6468135 & 0 & -3000 & -1031.2 & 2833.2 & 0 \\ 6468135 & 0 & -3000 & -1020.9 & 2805 & 0 \\ 6468135 & 0 & 1 & -1031.2 & 2833.2 & 0 \\ 6468135 & 0 & -1 & -1020.9 & 2805 & 0 \\ 6467200 & 0 & 300 & -1021.7 & 2817.1 & 2.7 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2.58 & 8.21 & 6.54 & 19.47 & 12.34 & 18.40 & 478.68 & 97.06 \\ 5.14 & 5.41 & 9.87 & 8.78 & 6.27 & 23.03 & 354.74 & 111.40 \\ 1.76 & 7.54 & 6.22 & 25.52 & 20.16 & 5.08 & 0.73 & 535.29 \\ 5.16 & 8.53 & 5.08 & 14.69 & 20.15 & 27.63 & 588.51 & 12.50 \\ 0.07 & 0.13 & 0.84 & 2.72 & 3.62 & 15.27 & 943.02 & 269.15 \\ 1.24 & 1.35 & 0.34 & 10.48 & 3.14 & 11.25 & 292.12 & 5.61 \\ 0.97 & 0.45 & 0.55 & 0.25 & 0.56 & 9.9 & 581.83 & 54.33 \\ 40.84 & 3.91 & 3.79 & 41.79 & 0.30 & 0.07 & 184.05 & 0.13 \\ 5.74 & 9.10 & 1.08 & 29.71 & 22.66 & 17.8 & 894.16 & 4.73 \\ 6.22 & 7.32 & 2.4 & 18.98 & 13.83 & 23.82 & 616.10 & 12.50 \\ 6.74 & 2.69 & 0.76 & 26.55 & 19.28 & 28.43 & 542.00 & 4.73 \\ 4.24 & 5.75 & 4.26 & 1.19 & 29.71 & 20.22 & 0.63 & 18.87 \\ 1.32 & 6.85 & 3.76 & 7.50 & 3.2 & 12.11 & 0.25 & 1181.29 \\ 3.40 & 9.13 & 4.71 & 15.56 & 17.29 & 16.03 & 227.94 & 547.32 \\ 7.15 & 9.11 & 9.37 & 8.76 & 19.46 & 19.26 & 0.85 & 361.64 \end{bmatrix}$$

اکنون از روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی (PLS) استفاده نموده و ماتریس β استخراج می‌شود. با داشتن ماتریس β و از طریق رابطه $Y=X\beta+e$ ، هر بردار شرایط اولیه جدیدی که در X قرار داده شود، بردار پاسخ و یا ماتریس‌های وزنی بهینه R و Q به سرعت به‌دست می‌آید.

الگوریتم اصلی رگرسیون حداقل مربعات جزئی (PLS)

پیش از شرح الگوریتم اصلی رگرسیون حداقل مربعات جزئی^{۱۲}، توضیحاتی درباره برخی مباحث آماری مورد نیاز در این الگوریتم به شرح زیر ارائه می‌شود [۱۹]:

- ۱) کوواریانس^{۱۳} شاخصی است که شدت وابستگی خطی بین دو متغیر را نشان می‌دهد. محاسبه کوواریانس با استفاده از مشاهدات نمونه از رابطه زیر به‌دست می‌آید:
- ۲) اگر معکوس یکماتریس برابر ترانزپوز آن ماتریس شود، آن را ماتریس متعامد می‌نامند. به تعبیری A ماتریس متعامد است، هرگاه:

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n-1} = \frac{1}{n-1} [\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}] \quad (32)$$

که \bar{x} میانگین داده‌های X و \bar{y} میانگین داده‌های Y می‌باشند.

۱۴. مجموعه‌ای است از اعداد که به وسیله سنسورها اندازه‌گیری (مشاهده) شده‌اند. (این اصطلاح در مباحث کنترلی متداول است)

12. Partial Least Squares
 13. Covariance

بین f_{a-1} و $E_{a-1}W_a$ تحت شرط $W'_a W_a = 1$ محاسبه شود.
 (۲) امتیازهای Z_a با استفاده از رابطه $Z_a = E_{a-1}W_a$ محاسبه شود.
 (۳) E_{a-1} را روی Z_a رگرسیون شود و محموله‌های p_a با استفاده از رابطه $p_a = E'_{a-1}Z_a / Z'_a Z_a$ محاسبه شود.
 (۴) f_{a-1} را روی Z_a رگرسیون کرده و ضرایب q_a با استفاده از رابطه $q_a = f'_{a-1}Z_a / Z'_a Z_a$ محاسبه شود.
 (۵) E_a و f_a با استفاده از روابط زیر برای به دست آوردن مؤلفه بعد محاسبه شود.

$$E_a = E_{a-1} - Z_a p'_a \quad (۴۲)$$

$$f_a = f_{a-1} - Z_a q_a \quad (۴۳)$$

با داشتن ماتریس β ، هر بردار شرایط اولیه جدیدی در X قرار داده شود، بردار پاسخ و یا ماتریس‌های وزنی بهینه R و Q به سرعت به دست می‌آید. سپس، با داشتن ماتریس‌های A ، B ، R ، Q با استفاده از الگوریتم کنترل بهینه غیرخطی می‌توان کنترل بهینه و مسیر بهینه متناظر آن را استخراج کرد. دقت شود که تمام محاسبات سنگین و پیچیده مربوط به رگرسیون به صورت برون-خط است و تنها عملیات ماتریسی ساده باید به صورت بر-خط مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین، قابلیت استفاده بر خط محفوظ مانده است.

مقایسه روش کنترل غیرخطی و روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی (PLS)

در این بخش برای یک شرایط اولیه تصادفی، ماتریس‌های وزنی R و Q بهینه را از هر دو روش کنترل بهینه غیرخطی و روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی استخراج می‌شود و مسیر با ماتریس‌های بهینه به دست آمده تولید می‌شود. در جدول (۲)، زمان مورد نیاز، تعداد فراخوانی تابع توسط هر روش و خطای برخورد ناشی از هدایت وسیله بازگشتی خلاصه شده است.

جدول ۲- مقایسه روش پیشنهادی و کنترل بهینه غیرخطی

خطای برخورد (متر)	تعداد فراخوانی تابع ^{۱۶}	زمان (ثانیه)	کنترل غیرخطی
۰/۰۰۷۶۴۱	۲۲۰۰	۲۴۵۶۹	کنترل غیرخطی
۴/۵۴۹۶۷۷	۱	۱/۵۶۶۵۴۸	PLS

مطابق با نتایج جدول (۲) زمان مورد نیاز در روش اول ۲۴۵۶۹ ثانیه یا به بیان دیگر ۶ ساعت و ۴۹ دقیقه و ۲۹ ثانیه و در روش دوم یعنی رگرسیون حداقل مربعات جزئی یا PLS، ۱/۵۶۶۵۴۸ ثانیه است که این مدت زمان، ۰/۰۰۰۰۶۴ درصد زمان مورد نیاز در روش کنترل غیرخطی است. همچنین، تعداد فراخوانی تابع در روش اول ۲۲۰۰ بار و

روش حداقل مربعات جزئی از الگوریتم‌های مختلفی برای تعیین مؤلفه‌ها استفاده می‌کند. اما، همه این الگوریتم‌ها دارای جواب‌های تقریباً یکسانی هستند و تفاوت آنها در نحوه محاسبه مؤلفه‌ها می‌باشد. در این مقاله از الگوریتم اصلی رگرسیون حداقل مربعات جزئی معرفی شده توسط اسوانت ولد^{۱۵} و معمولاً الگوریتم SIMPLS نامیده می‌شود، استفاده شده است. این الگوریتم شبیه‌سازی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. زیرا، به علت داشتن محاسبات آسان‌تر نسبت به بقیه الگوریتم‌های رگرسیون حداقل مربعات جزئی از سرعت بیشتری برخوردار است.

فرض می‌کنیم تعداد مؤلفه‌های مورد نیاز برابر A باشد. باقیمانده‌ها در مرحله a را با E_a و f_a نشان می‌دهیم. همچنین، فرض می‌کنیم:

$$E_0 = X \quad (۴۰)$$

$$f_0 = Y \quad (۴۱)$$

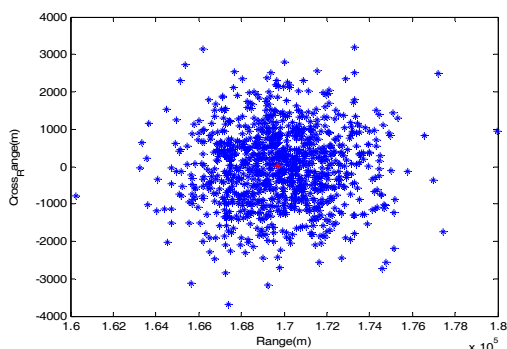
در روش حداقل مربعات جزئی هر مؤلفه با بیشینه کردن کوواریانس بین Y و همه توابع خطی ممکن X به دست می‌آید. بنابراین، رگرسیون حداقل مربعات جزئی بر خلاف رگرسیون مؤلفه اصلی هم از X و هم از Y در تعیین مؤلفه‌ها استفاده می‌کند. این شیوه ساختن مؤلفه‌ها منجر به تولید مؤلفه‌هایی می‌شود که بیشتر از مؤلفه‌های اصلی با تغییرات Y ارتباط دارند.

جهت اولین مؤلفه رگرسیون حداقل مربعات جزئی با استفاده از بیشینه کردن ملاک کوواریانس بین Y و تابعی خطی از X به دست می‌آید و با W_1 نشان داده می‌شود. این بردار دارای طول یک است و نخستین بردار محموله وزنی نامیده می‌شود. در واقع این کار معادل با پیدا کردن بردار W_1 است که مقدار $W'_1 X' Y$ را تحت شرط $W'_1 W_1 = 1$ بیشینه کند.

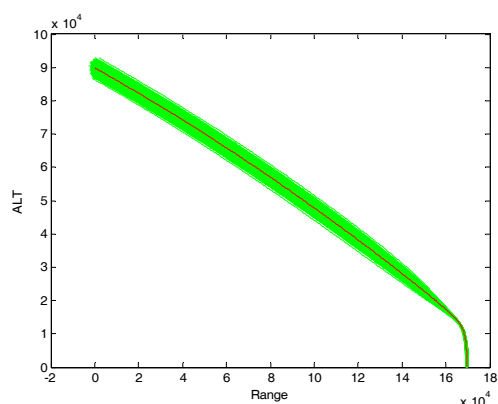
امتیازها در امتداد این بردار با استفاده از ترکیب خطی $Z_1 = XW_1$ محاسبه می‌شوند. سپس، همه متغیرهای ماتریس X روی Z_1 رگرسیون می‌شوند و ضرایب این رگرسیون به عنوان عناصر بردار حامل p_1 در نظر گرفته می‌شود. ضریب رگرسیونی q_1 نیز از رگرسیون Y روی Z_1 به دست خواهد آمد. حال حاصل ضرب $Z_1 q_1$ از X حاصل ضرب $Z_1 q_1$ از Y کم می‌شوند و از باقیمانده‌های حاصل یعنی E_1 و f_1 به عنوان داده‌های اصلی در ساختن دومین مؤلفه رگرسیون حداقل مربعات جزئی استفاده می‌شود. این روند تا رسیدن به A مؤلفه ادامه خواهد یافت. مؤلفه‌های Z_a که با این روش به دست می‌آیند ناهمبسته هستند.

می‌توان مطالب گفته شده برای محاسبه هر مؤلفه را با استفاده از گام‌های زیر نشان داد:

(۱) بردار محموله وزنی W_a با استفاده از بیشینه کردن کوواریانس

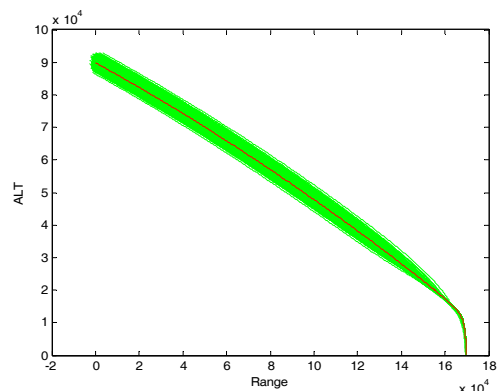


شکل ۴- محدوده برد طولی و عرضی نقاط برخورد وسیله بازگشتی به روش دارت در آنالیز مونت کارلو برای مسیر بالستیک (۱۰۰۰مسیر)



شکل ۵- نمودار تغییرات ارتفاع بر حسب برد طولی در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT با استفاده از یک ماتریس وزنی R و Q برای همه مسیرها (۱۰۰۰مسیر)

با توجه به نمودار محدوده نقاط برخورد به روش دارت^{۱۷} در شکل (۴) مشاهده می‌شود که نقاط برخورد بسیار نزدیک به نقطه هدف می‌باشند. نمودارهای مربوط به شبیه‌سازی با استفاده از رگرسیون در شکل‌های (۶) تا (۱۰) ارائه شده است.

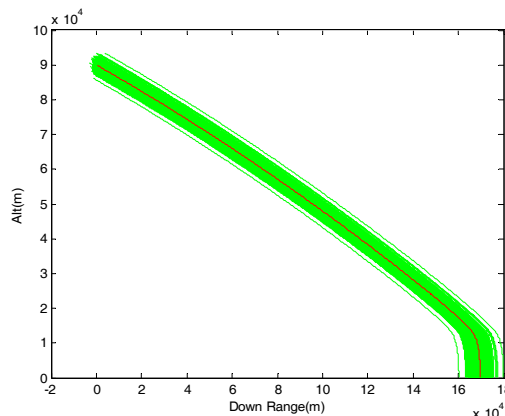


شکل ۶- نمودار تغییرات ارتفاع بر حسب برد طولی در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT و استفاده از رگرسیون برای یافتن ماتریس‌های وزنی R و Q بهینه هر مسیر (۱۰۰۰مسیر)

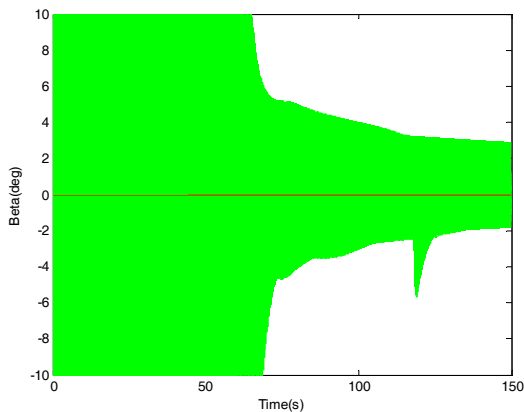
در روش دوم تنها یک بار است. بنابراین، از دیگر مزایای این روش تعداد فراخوانی بسیار کمتر تابع در آن است. در روش کنترل غیرخطی خطای برخورد ۰/۰۰۷۶۴۱ متر و با استفاده از روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی PLS، خطای برخورد ۴/۵۴۹۶۷۷ متر می‌شود. در هر دو روش خطای برخورد بسیار کم است. اگرچه خطای برخورد در روش دوم کمی بیشتر از روش اول است اما قابل قبول است.

نتایج آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT و استفاده از روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی (PLS) برای یافتن ماتریس‌های وزنی R و Q بهینه هر مسیر

همان‌طور که بیان شد ممکن است به هر دلیلی وسیله بازگشتی هنگام ورود به جو در شرایطی غیر از شرایط اولیه‌ای که برای مسیر مرجع در نظر گرفته شده است، روبرو شود. در این مقاله عدم قطعیت در پارامترهای ورودی به میزان ۳ کیلومتر در مؤلفه‌های موقعیت و ۱۵ متر بر ثانیه در مؤلفه‌های سرعت در نظر گرفته شده است. بدین منظور ابتدا ماتریس‌های وزنی R و Q بهینه را از طریق الگوریتم ژنتیک برای ۱۵ شرط اولیه متفاوت که بیشتر آن‌ها شرایط بحرانی (بیشترین و کمترین اختلاف ارتفاع و برد عرضی و بیشترین و کمترین سرعت و ...) هستند، استخراج می‌شود. سپس، با استفاده از روش رگرسیون حداقل مربعات جزئی، ماتریس‌های کنترلی بهینه هر یک از شرایط ورودی به دست می‌آید و از آن برای هدایت مسیر استفاده می‌شود. در این قسمت با استفاده از آنالیز مونت کارلو تأثیر این روش هدایت بر روی ۱۰۰۰ مسیر در حضور عدم قطعیت در شرایط ورودی نشان داده خواهد شد. نتایج آنالیز مونت کارلو برای ۱۰۰۰ مسیر بدون کنترل وسیله (حرکت بالستیک) (شکل ۳ و ۴) و ۱۰۰۰ مسیر در حضور کنترلر NQT و با استفاده از یک ماتریس R و Q برای همه مسیرها (شکل ۵)، نیز ارائه می‌شود تا با نتایج حرکت وسیله در حضور کنترلر پیشنهادی این مقاله مقایسه شود.



شکل ۳- نمودار تغییرات برد طولی نسبت به ارتفاع در آنالیز مونت کارلو برای مسیر بالستیک یا بدون کنترل (۱۰۰۰مسیر)



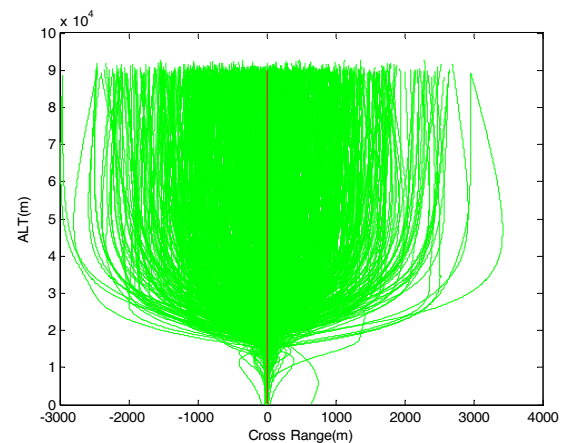
شکل ۱۰- تغییرات زاویه‌ی سرش جانبی بر حسب زمان در آنالیز مونت کارلو

برای مسیر در حضور کنترلر NQT و استفاده از رگرسیون برای یافتن ماتریس‌های وزنی R و Q بهینه هر مسیر (۱۰۰۰ مسیر) نمودارهای زوایای حمله و سرش جانبی (نمودار شکل‌های ۹ و ۱۰) نیز به خوبی به صفر همگرا شده‌اند. خط قرمز و نقطه قرمز در نمودارها مربوط به مسیر مرجع می‌باشد. در جدول ۳، نتایج آنالیز مونت کارلو با وجود عدم قطعیت در پارامترهای ورود ارائه شده است.

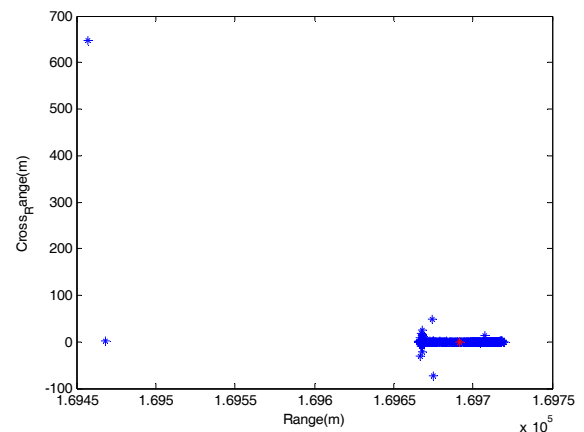
جدول ۳- جمع‌بندی نتایج آنالیز مونت کارلو برای ۱۰۰۰ مسیر

خطای برخورد (CEP) (متر)	خطای برخورد (3σ) (متر)	نوع هدایت
۱۸۹۸/۸	۷۶۱۱/۸	مسیر بالستیک (بدون کنترل)
۲۰۲/۳۷۱۴	۷۷۸/۶۴۹۶	کنترل به روش NQT با استفاده از یک R و Q بهینه برای همه مسیرها
۱۳/۷۲۰۷	۹۲/۴۷۷۲	کنترل به روش NQT و با استفاده از رگرسیون PLS برای یافتن R و Q بهینه هر مسیر

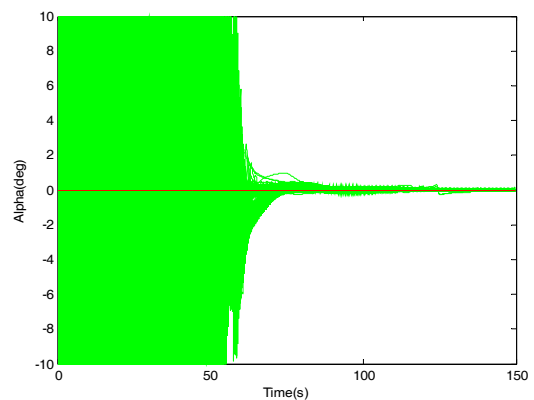
مطابق نتایج استخراج شده از جدول ۳، سه سیگمای خطای برخورد مسیر بالستیک بدون کنترل، ۷۶۱۱/۸ متر است و سه سیگمای خطای برخورد مسیرهایی که از طریق کنترل غیرخطی کوادراتیک NQT که با استفاده از یک ماتریس وزنی R و یک ماتریس وزنی Q برای همه مسیرها هدایت شده‌اند، ۷۷۸/۶۴۹۶ متر می‌باشد. بنابراین، کنترل غیرخطی کوادراتیک NQT با استفاده از یک ماتریس وزنی R و یک ماتریس وزنی



شکل ۷- تغییرات ارتفاع بر حسب برد عرضی در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT و استفاده از رگرسیون برای یافتن ماتریس‌های وزنی R و Q بهینه هر مسیر (۱۰۰۰ مسیر)



شکل ۸- محدوده‌ی برد طولی و عرضی نقاط برخورد وسیله بازگشتی به روش دارت در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT و استفاده از رگرسیون برای یافتن ماتریس‌های وزنی R و Q بهینه هر مسیر (۱۰۰۰ مسیر)



شکل ۹- نمودار تغییرات زاویه‌ی حمله بر حسب زمان در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT و استفاده از رگرسیون برای یافتن ماتریس‌های وزنی R و Q بهینه هر مسیر (۱۰۰۰ مسیر)

- [2] Halbe, O., Raja, R.S. Radhakant Padhi, G., "Robust Reentry Guidance of a Reusable Launch Vehicle Using Model Predictive Static Programming," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 37, No. 1, 2014, pp. 134-148.
- [3] Sun, Z, Liao, X. H., Stewart, F., Li, Bin and Song, Y. D., "Neuro-Robust Reentry Path Control of Reusable Launch Vehicles," *International Journal of Computational Intelligence Research*, Vol. 2, No. 1, 2006, pp. 76-80.
- [4] Lu, P., "Predictor-Corrector Entry Guidance for Low-Lifting Vehicles," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 4, July–August 2008.
- [5] Ashok Joshi, K., Sivan, S. and Amma, S., "Predictor-Corrector Reentry Guidance Algorithm with Path Constraints for Atmospheric Entry Vehicles," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 5, September–October 2007.
- [6] Xue, S. and Lu, P., "Constrained Predictor-Corrector Entry Guidance," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 10-13 August 2009, Chicago, Illinois, AIAA 2009-5767.
- [7] Morio, V., Cazaurang, F. and Vernis, Ph., "Flatness-based Hypersonic Reentry Guidance of a Lifting-body Vehicle," *Control Engineering Practice*, Vol. 17, 2009, pp. 588–596.
- [8] Poustini, M.J., Esmaelzadeh, R. and Adami, A.H., "A new Approach to Trajectory Optimization Based on Direct Transcription and Differential Flatness," *Acta Astronautica*, Vol, 107, 2015, pp. 1-13.
- [9] Harl, N. and Balakrishnan, S.N., "Reentry Terminal Guidance Through Sliding Mode Control," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 1, 2010, pp. 186-199.
- [10] Shaferman, V. and Shima, T., "Linear Quadratic Guidance Laws for Imposing a Terminal Intercept Angle," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, 2008, pp. 1507-1518.
- [11] Chawla, C., Sarmah, P., Padhi, R., "Suboptimal Reentry Guidance of a Reusable Launch Vehicle using Pitch Plane Maneuver," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 14, 2010, pp. 377–386.
- [12] Abbasi, D., "Optimal Reentry Guidance Based on Singular Perturbation," (M.Sc. Thesis), Aerospace Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, 2009, (in persian).
- [13] Poustini, M., "Reentry Trajectory Optimization using Direct Method," (M.Sc. Thesis), Aerospace Department, Malek-ashtar University of Technology, Tehran, 2014, (in persian).
- [14] Barghandan, M., Optimal Guidance and Control of Reentry Vehicle using Combined Methods, (M.Sc. Thesis), Aerospace Department, Tehran, Malek-ashtar University of Technology, 2014, (in persian).
- [15] Jamilnia, R., Developing of Combined On-line Trajectory Optimization, (PhD Thesis), Aerospace Department, Tehran, Amirkabir University of Technology, 2012, (in persian).
- [16] Muylaert, j, et al. "Flight Experiments for Hypersonic Vehicle Development Expert," s.l. : RTO AVT Lecture Series on Critical Technologies for Hypersonic Vehicle Developmen, 2004.

Q برای همه مسیرها خطای برخورد را به $10/23$ درصد میزان خطا در حالت بدون کنترل کاهش داده است. همچنین طبق جدول ۳، سه سیگمای خطای برخورد برای مسیرهایی که با استفاده از کنترلر غیرخطی کوادراتیک NQT و یافتن ماتریس‌های وزنی بهینه هر مسیر از طریق رگرسیون حداقل مربعات جزئی هدایت شده‌اند، $92/4772$ متر می‌باشد. این روش، خطای برخورد را بسیار بیشتر از حالت قبل کاهش داده است. به طوری که با استفاده از این روش، خطای برخورد به $1/21$ درصد میزان خطا در حالت بدون کنترل رسیده است. همچنین مطابق آنچه در جدول (۳) ارائه شده است، با استفاده از روش ترکیبی کنترلر غیرخطی NQT و رگرسیون حداقل مربعات جزئی PLS، شعاع دایره احتمالی خطا (CEP^{90}) $13/7207$ متر به دست آمده است که با توجه به سرعت بالای پردازش این روش بسیار مناسب است.

نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از روش‌های کنترل بهینه غیرخطی مرتبه دوم، الگوریتم ژنتیک و رگرسیون PLS روشی بهینه برای هدایت وسایل بازگشت‌پذیر ارائه شد که قابلیت مقابله با عدم قطعیت در پارامترهای ورود را دارا می‌باشد. با استفاده از روش پیشنهادی می‌توان بدون درگیر شدن با محاسبات تکرارشونده عددی، به تخمین سریع ماتریس‌های کنترلی R و Q پرداخت. بنابراین، قابلیت استفاده برخط برای این الگوریتم مقاوم از مهمترین مزیت‌های روش پیشنهادی است. برای اثبات کارایی روش پیشنهادی، با استفاده از آنالیز مونت کارلو، مقایسه‌ای بین نتایج روش‌های مختلف صورت پذیرفت. این مقایسه نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در حضور عدم قطعیت‌های ورود، خطای برخورد را نسبت به روش کنترل غیرخطی کلاسیک 88% بهبود بخشیده است. این توانمندی از منظر زمان مورد نیاز محاسبات نیز مورد مقایسه قرار گرفت که کاهش شدید مدت زمان مورد نیاز در حدود ۱ ثانیه بسیار امیدبخش است.

مراجع

- [1] Mooij, E., Mease, K. D. and Benito, J., "Robust Reentry Guidance and Control System Design and Analysis", AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 20 - 23 August 2007, Hilton Head, South Carolina, AIAA 2007-6779.

- Matrixes in the State Space Form,” *Journal of Space Sciences and Technology, under Review*, (in persian).
- [19]shahini, A., Partial Least Squares, (M.Sc. Thesis), Mathematics Science Department, Ferdosi University, Mashhad, 2010, (in persian).
- [17]Naidu, D. S., *Optimal Control Systems*, Idaho, USA: CRC Press, 2002.
- [18]hossienzadeh, A., Adami A.H. and Ebrahimi, A. “Nonlinear Optimal Control of Reentry Vehicles Based on Deriving the State and Control Depended Systematic