JSST
Journal of Space Science & Technology

Vol. 11/ No.1/ 2018

Nonlinear Optimal Control of Reentry Vehicles Based on Deriving the State and Control Depended Systematic Matrices in State Space Form

A. Hosseinzadeh[1], A.H. Adami[2*] and A. Ebrahimi[3]

1, 2, 3.Department of Aerospace Research Institute, MalekAshtar University of Technology

*Postal Code: 1774-15875, Tehran, IRAN

Aha.aerospace@aut.ac.ir

The atmospheric reentry phase is one of the most important mission steps in space missions, therefore, the guidance and control of reentry vehicles in this phase of mission is important. In this article, a reentry vehicle guidance algorithm is proposed which has suitable robustness in the presence of initial reentry parameters uncertainty. To use any conductive method, first the motion equations must be obtained. In this paper, quadratic nonlinear control method is used to guide the vehicle. In this regard, the equations of motion of reentry vehicles are developed in form of state space and the system and control matrices depending on the state and control variables are extracted. In this article, it is tried to minimize the landing errors at terminal point using Nonlinear Quadratic Tracking (NQT) and chasing a reference trajectory. In order to define a trajectory with different initial states using evolutionary genetic algorithm with changes in weighting matrices Q and R, it is tried to reduce the errors of landing at terminal point. Monte Carlo analysis is used to evaluate the performance of the proposed algorithm. According to the results, the proposed algorithm can reduce the errors more than 90% in the presence of reentry initial parameter uncertainties.

Keywords: Reentry vehicles, Optimal guidance, Optimal control, Uncertainty, Nonlinear Quadratic Tracking (NQT), state space

---

1. M.Sc.
2. Assistant Professor(Corresponding Author)
3.Assistant Professor

Received: 2017.09.04, Accepted: 2018.02.28

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۱۱ / شمارهٔ ۱/ بهار ۱۳۹۷
ص. ص. ۰ ۱۲– ۱

کنترل بهینهٔ غیرخطی وسایل بازگشت‌پذیر بر پایه استخراج ماتریس‌های سیستمی وابسته به متغیرهای حالت و کنترل در فرم فضای حالت

عاطفه حسین‌زاده[۱]، امیرحسین آدمی[۲]* و اصغر ابراهیمی[۳]

۱، ۲ و ۳- مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

*تهران، لویزان، کد پستی: ۱۵۸۷۵-۱۷۷۴

Aha.aerospace@aut.ac.ir

در مأموریت‌های فضایی وسایل بازگشت‌پذیر (Reentry Vehicle)، فاز بازگشت به جو از مهمترین مراحل مأموریت می‌باشد. به همین دلیل، هدایت و کنترل وسیلهٔ بازگشت‌پذیردر این فاز مأموریت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله یک الگوی هدایت و کنترل بهینه برای وسایل بازگشت‌پذیر ارائه می‌شود که در برابر عدم قطعیت در پارامترهای ورودی مقاوم باشد. برای استفاده از هر نوع روش هدایتی، ابتدا باید معادلات حرکت وسیله را به‌دست آورد. در این مقاله از روش کنترل غیرخطی کوادراتیک برای هدایت مسیر استفاده می‌شود. در همین راستا هدف از انجام این مقاله توسعهٔ معادلات حرکت وسایل بازگشت‌پذیر به فرم فضای حالت و استخراج ماتریس‌های سیستمی و کنترلی وابسته به متغیرهای حالت و کنترل می‌باشد. در این مقاله سعی شده است تا با استفاده از کنترلر غیرخطی کوادراتیک و تعقیب یک مسیر مرجع، خطای برخورد وسیلهٔ بازگشتی در نقطهٔ پایانی حداقل شود. بدین منظور برای یک مسیر مشخص با پارامترهای ورودی مختلف، با استفاده از روش تکاملی الگوریتم ژنتیک برای کاهش خطای برخورد در نقطهٔ پایانی با تغییرات ماتریس‌های وزنی Q و R تلاش شده است. برای بررسی و امتحان صحت این روش از طریق آنالیز مونت کارلو، این روش برای ۱۰۰۰ مسیر مختلف تحلیل شده است. نتایج نشان می‌دهد که با استفاده از توسعهٔ ماتریس‌های سیستمی وابسته به متغیرهای حالت و کنترل، خطای برخورد در حضور عدم قطعیت‌های پارامترهای ورود ۹۰٪ بهبود می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: وسایل بازگشت‌پذیر، هدایت بهینه، کنترل بهینه، عدم قطعیت، کنترلر غیرخطی کوادراتیک (NQT)، فضای حالت

علائم و اختصارات

زاویه حمله	α
زاویه سرش جانبی	β
انحراف معیار	σ
طول جغرافیایی	λ
عرض جغرافیایی	φ
زاویه آزیموت	ψ
زاویه مسیر پرواز	γ
چگالی	P
ماتریس حالت سیستم شامل متغیرهای وضعیت سیستم	A
مؤلفه‌های شتاب کارتزین	a_x, a_y, a_z
ماتریس ورودی سیستم شامل متغیرهای وضعیت و کنترل سیستم	B
ضریب پسا	C_D
ضریب پسای مستقل از زاویه حمله و سرش جانبی	C_{D_0}

۱. کارشناس ارشد
۲. استادیار (نویسنده مخاطب)
۳. استادیار

دریافت مقاله: ۹۶/۰۶/۱۳ ، تأیید مقاله: ۹۶/۱۲/۰۹

ضریب پسای وابسته به زاویه حمله	C_{D_α}
ضریب پسای وابسته به زاویه سرش جانبی	C_{D_β}
ضریب برآ	C_L
ضریب برآی وابسته به زاویه حمله	C_{L_α}
ضریب برآی وابسته به زاویه سرش جانبی	C_{L_β}
نیروی پسا	D
ماتریس کسینوس‌های هادی (ماتریس انتقال)	DCM
مؤلفه‌های نیرو در مختصات کارتزین	F_x,F_y,F_z
شتاب جاذبه‌ی زمین	g
تابع همیلتونین	H
ارتفاع از سطح زمین	h
ضریب کنترل	K
نیروی برآ (نیروی بالابرنده)	L
تابع هدف لاگرانژ	L
جرم	M
عدد ماخ	$Mach$
ثابت ناوبری (نرخ ناوبری، نرخ مؤثر ناوبری، ضریب ناوبری) که یک عدد مثبت بی‌بعد است.	N
بردار کمک وضعیت (بردار ضرایب لاگرانژ)	P
ماتریس وزنی متغیرهای وضعیت	Q
ماتریس وزنی متغیرهای کنترل	R
فاصله از مرکز زمین	R
مختصات کارتزین	R_x,R_y,R_z
شعاع زمین	Re
سطح مقابل جریان	$(m^2)S$
نیروی جانبی	S
نیروی پیشرانش	T
زمان	t
بردار کنترل سیستم	U
بردار متغیرهای وضعیت سیستم(شامل موقعیت و سرعت)	X(t)
	V
مؤلفه‌های سرعت کارتزین	V_x,V_y,V_z
نیروی وزن	W

بردار متغیرهای وضعیت سیستم(شامل موقعیت و سرعت) X(t)

دستگاه افق محلی	North-East-Down (NED)
کنترلر غیرخطی کوادراتیک	Nonlinear Quadratic Controller (NQT)
تنظیم‌کننده‌ی مرتبه‌ی دوم خطی	Linear Quadratic Regulator (LQR)
دایره‌ی احتمالی خطا	Circular Error Probable (CEP)
الگوریتم هدایت مجانبی وسایل بازگشت پذیر	Matched asymptotic reentry (MARE)

مؤلفه‌های سرعت کارتزین V_x,V_y,V_z
نیروی وزن W
بردار متغیرهای وضعیت سیستم (شامل موقعیت و سرعت) X(t)
دستگاه افق محلی North-East-Down (NED)
کنترلر غیرخطی کوادراتیک Nonlinear Quadratic Controller (NQT)
تنظیم‌کننده‌ی مرتبه‌ی دوم خطی Linear Quadratic Regulator (LQR)
دایره‌ی احتمالی خطا Circular Error Probable (CEP)
الگوریتم هدایت مجانبی وسایل بازگشت‌پذیر Matched asymptotic reentry (MARE)

مقدمه

یکی از مسائل پیچیده ومطرح در علم هوافضا، مسئله بازگشت به جو است. بسیاری از وسایل پرنده پدیدهٔ بازگشت به جو را تجربه نمی‌کنند. بازگشت به جو یا ورود به جو به طور عام، ورود هر گونه جسم فضایی به جو یک سیاره از فضای بیرونی آن را شامل می‌شود. لذا، مطالعهٔ این پدیده تنها در خصوص آن دسته از اجسام پرنده موضوعیت دارد که از جو خارج شده و بازگشت به جو آنها به دلایلی اهمیت دارد [۱]. نکته‌ای که بهتر است در نظر گرفته شود، تفاوت میان ورود به جو و بازگشت به جو است. تفاوت نامحسوس میان آنها این است که اولی برای فضاپیمایی که قصد ورود به جو یک سیاره مانند مریخ را دارد و دومی برای موشک است که یک بار از جو خارج شده و دوباره به جو همان سیاره باز می‌گردد [۲]. فرایند بازگشت به جو می‌تواند کنترل شده باشد مانند بازگشت به جو مصنوعات ساخت دست بشر شامل انواع فضاپیماها و مانند بازگشت به جو شهاب سنگ‌ها کنترل نشده باشد.

سرجنگی موشک‌های بالستیک، موشک‌های حامل ماهواره‌های فضایی، کپسول‌های ارسال‌شده از پایگاه‌ها و ماهواره‌ها، هواپیماهای ماورای صوت که ممکن است در لحظات خاص مانور خود در شرایط بازگشت‌پذیری قرار گیرند و همچنین هر شیء خارجی مانند شهاب‌سنگ‌ها و زباله‌های فضایی که قصد ورود به جو را داشته باشند، در حوزهٔ بازگشت‌پذیری قرار می‌گیرند [۳].

مسئلهٔ بازگشت به جو کنترل شده به اندازهٔ پرتاب یک محموله اهمیت دارد. جسم بازگشت‌پذیر به علت دارا بودن سرعت زیاد مداری و ارتفاعی که از سطح زمین دارد، حامل مقدار زیادی انرژی جنبشی و پتانسیل است و این انرژی باید کاملاً کنترل شده در فرایند بازگشت، کاهش یابد و از بین برود. به‌طوری‌که، بارهای دینامیکی و حرارتی وارده به فضاپیما نباید از حدود معینی تجاوز

نکند. این امر نیازمند کنترل وسیلهٔ بازگشت‌پذیر است. مکانیزم‌های کنترلی موظفند بر طبق یک الگوی معین و از پیش تعیین شده، با اعمال کنترل روی نیروهای برآ و پسای وسیله، دست‌یابی به شرایط نهایی را ممکن کنند. این استراتژی و الگوی معین که بر طبق آن سیستم کنترل، وسیله را به سمت هدف روانه می‌کند، اصطلاحاً هدایت نامیده می‌شود [۴]. وسایل بازگشت‌پذیر معمولاً از ارتفاعات و سرعت‌های بالا فرایند ورود به جو را آغاز می‌کنند (از ارتفاع ۳۰ کیلومتری تا ارتفاع ۱۲۰ کیلومتری). همچنین، از سرعت‌های مادون صوت تا سرعت‌های در حدود ماخ ۲۵ و حتی بیشتر، برای ورودهای هذلولی شکل از مدارهای غیرزمینی طبیعی است. در نهایت جسم بازگشتی باید شرایطی مانند برخورد نهایی با سطح زمین و محل برخورد را ارضا کند. در وسایل بازگشت‌پذیری همچون فضاپیماهای تحقیقاتی، کپسول‌های زیستی و نظایر آنها، مسیر بازگشت به جو باید به گونه‌ای باشد که فرود نرم و آرام وسایل بر روی زمین محقق شود. در وسایلی همچون سرجنگی‌ها، مسیر بازگشت باید به گونه‌ای باشد که وسیله با حداکثر سرعت و در کوتاه‌ترین زمان ممکن با هدف برخورد نماید. از این‌رو،ماهیت وسایل و مأموریت‌های آنها اهداف فرایند هدایت را برای طراحان ترسیم می‌نماید [۵].

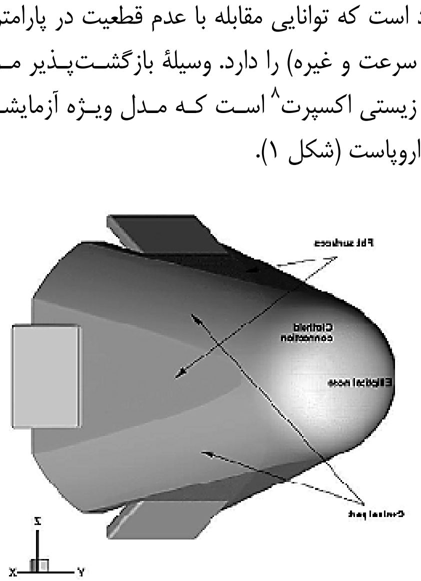
مأموریت‌ها و قیود مختلف در بحث بازگشت به جو، باعث توسعهٔ روش‌های مختلف هدایتی شده است که هر یک دارای مزایا و معایبی می‌باشد. مرجع [۶] به معرفی یک ایده جدید برای هدایت بهینه بر خط وسایل بازگشت‌پذیر با استفاده از روش MARE[4] پرداخته است. در مرجع [۷] برای استخراج footprint وسیلهٔ بازگشت‌پذیر با بدنه برآزا[5]، روشی با تکیه بر تأثیر زاویهٔ حمله ارائه شده است. در این پژوهش سعی شده است که هدایت حلقه بسته و تمامی قیود حاکم بر مسئله، مرتبط با زاویهٔ حمله و محل برخورد شود.در مرجع [۸] برای استفاده برخط، قانون هدایتی ساده شده برای وسایل بازگشت‌پذیر با استفاده از همواری دیفرانسیلی ارائه شده است.در مرجع [۹] به ارائه یک روش تکاملی برای هدایت تلفیقی وسایل بازگشت‌پذیر بر پایه PIO[6] و گاوس- نیوتن[7] پرداخته شده است. در پژوهشی دیگر برای ربات‌های فضایی تولید مسیر با استفاده از روش بهینه‌سازی انبوه ذرات (PSO) پرداخته شده است[۱۰]. مرجع [۱۱] به معرفی یک روش هدایت تطبیقی وسایل بازگشت‌پذیر برای بهینه‌سازی سریع مسیر با هدف کاهش نرخ حرارت آیرودینامیکی پرداخته است.مروری بر روش‌های هدایت و کنترل وسایل بازگشت‌پذیر و مقایسه‌ای بر مزایا و معایب آنها در مرجع [۱۲] ارائه شده است.

هدایت وسایل بازگشتی به جو زمین مسئله‌ای آمیخته با پیچیدگی‌های خاص خود است. دینامیک غیرخطی، محدودیت پارامترهای کنترل، محدودیت‌های سازه‌ای و حرارتی، دقت مورد نیاز و الزامات مأموریتی وسایل بازگشت‌پذیر از جمله شرایطی‌اند که در یک مسئلهٔ هدایت ورود به جو مورد توجه قرار می‌گیرند. تمام روش‌های طراحی مسیر بهینه و یا کنترل بهینه وسایل بازگشت‌پذیر درگیر استفاده از دینامیک غیرخطی حاکم بر وسایل بازگشت‌پذیر است. توسعهٔ مناسب معادلات حاکم بر حرکت وسایل بازگشت‌پذیر نقش بسیار مهمی در کارایی یک الگوریتم هدایتی دارد. این موضوع زمانی که هدف استفاده بر خط باشد بسیار پررنگ‌تر خواهد بود.

در بخش اول این مقاله به تعریف مسئله و مدل وسیلهٔ مورد استفاده و خصوصیات آن پرداخته شده است. در بخش دوم ارائهٔ مسیر مرجع وسیلهٔ بازگشت‌پذیر انجام شده و در بخش سوم به استخراج معادلات حرکت سه بعد وسیلهٔ بازگشت‌پذیر به فرم فضای حالت پرداخته شده است. در بخش چهارم کنترل بهینهٔ غیرخطی مرتبهٔ دوم ارائه شده است. در بخش پنجم استخراج ماتریس‌های سیستمی وابسته به متغیرهای حالت و کنترل انجام می‌پذیرد. در بخش ششم نحوهٔ تنظیم ماتریس‌های R و Q ارائه و در بخش هفتم به تحلیل نتایج آنالیز مونت کارلو جهت ارزیابی کارایی الگوریتم هدایت بهینهٔ غیرخطی معرفی شده پرداخته شده است.

تعریف مسئله

هدف از انجام این پژوهش ارائه یک الگوریتم هدایتی بهینه برای فاز ورود است که توانایی مقابله با عدم قطعیت در پارامترهای ورود (ارتفاع، سرعت و غیره) را دارد. وسیلهٔ بازگشت‌پذیر مورد بررسی کپسول زیستی اکسپرت[8] است که مدل ویژه آزمایشی سازمان فضایی اروپاست (شکل ۱).

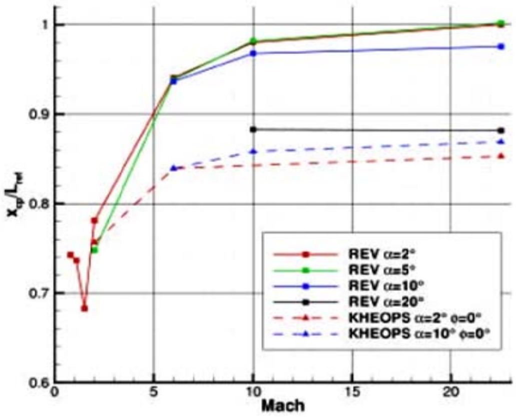


شکل ۱– شماتیک وسیلهٔ بازگشت‌پذیر اکسپرت [۶]

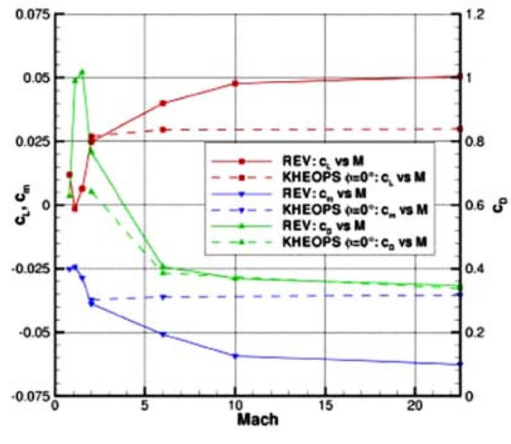
4. Matched asymptotic reentry
5. Lifted Body
6. PigeonInspiredOptimization
7. Gauss-Newton
8. European Experimental Test bed-Expert

ضرایب آیرودینامیکی این وسیله مطابق با شکل (۲) است که در آن به ازای زاویه حملهٔ ۲ درجه، ضرایب C_L و C_D نمایش داده شده است. کپسول زیستی اکسپرت در چند مدل طراحی شده است که در اینجا از مدل Kheops Revision 4.2 استفاده شده است. در این مقاله اطلاعات جرمی، هندسی و آیرودینامیکی وسیلهٔ مورد نیاز می‌باشد که مطابق با رابطهٔ (۱) است. روابط ارائه شده برای ضرایب C_L و C_D براساس تقریبی مناسب از نمودارهای شکل (۲) می‌باشد [۱۳]. شایان ذکر است در اجسام متقارن، ضریب برآ با ضریب جانبی کاملاً برابر است.

$$\begin{cases} M = 436\,kg \\ S = 1.1978\,m^2 \\ C_{l_\alpha} = \left((1.5892^{-3}) \times \log(Mach)\right) + (1.176^{-2}) \\ C_{l_\beta} = -C_{l_\alpha} \\ C_{D_0} = \begin{cases} (1.7 \times Mach) - 0.662 & Mach < 1 \\ 1.038 \times Mach^{-0.438} & Mach \geq 1 \end{cases} \\ C_{D_\alpha} = 0.001 \\ C_{D_\beta} = C_{D_\alpha} \\ C_L = C_{l_\alpha} \times \alpha \\ C_B = C_{l_\beta} \times \beta \\ C_D = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \times \alpha^2 + C_{D_\beta} \times \beta^2 \end{cases} \qquad (۱)$$



(الف)



(ب)

شکل۲- الف و ب) نمودار تغییرات ضرایب آیرودینامیکی وسیله در زاویه حمله ۲ درجه با عدد ماخ [۶]

مسیر مرجع

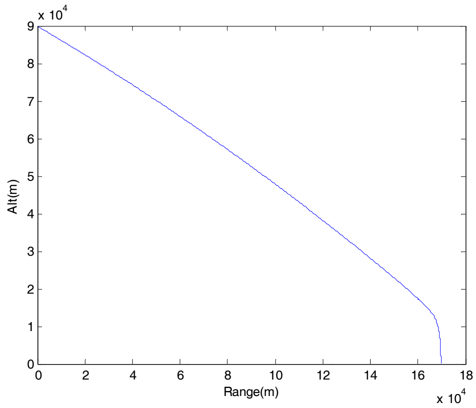
در مقالهٔ حاضر مسیری که وسیلهٔ بازگشتی به جو در عدم حضور اغتشاشات، عدم قطعیت‌ها و بدون اعمال هدایت و کنترل (زاویهٔ حمله و سرش جانبی صفر) طی خواهد کرد، مسیر نامیبا مسیر مرجع در نظر گرفته شده است. روش هدایتی مطلوب در این مقاله، بدین صورت است که در صورت عدم قطعیت در پارامترهای اولیه،وسیلهٔ بازگشتی، مسیر مرجع را تعقیب نموده و خطای نقطهٔ برخورد را به حداقل برساند. در این بخش با استفاده از معادلات توسعه داده شده(که در ادامه ارائه خواهد شد) و با درنظر گرفتن ویژگی‌ها و پارامترهای جسم بازگشتی، شبیه‌سازی حرکت آزاد جسم بازگشتی به جو را انجام داده و مسیر مرجع را به دست می‌آوریم.

برای یافتن مسیر مرجع، شبیه‌سازی حرکت آزاد جسم بازگشتی به جو انجام می‌گیرد. این شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار متلب و با استفاده از Taylor Solver با شرایط اولیهٔ زیر و گام انتگرال‌گیری ۰/۱ شبیه‌سازی شده و نتایج در ادامه نمایش داده شده است. همان‌طورکه از بردارهای یکه موقعیت و سرعت پیداست وسیله روی خط استوا و از طول جغرافیایی صفر درجه به سمت شرق با زاویهٔ مسیر پرواز ۲۰-درجه و زاویهٔ آزیموت ۹۰ درجه در حال بازگشت به جو می‌باشد.

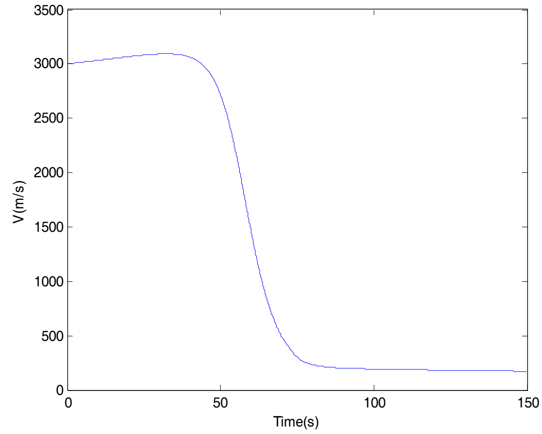
$$V = 3000\frac{m}{s}, h = 90km, \alpha = 0\,deg, \beta = 0\,deg \qquad (۲)$$

طبق این پارامترها، وسیلهٔ بازگشتی با بردار سرعت اولیه از ارتفاع ۹۰ کیلومتری وارد جو می‌شود. چون مسیر حرکت به صورت بالستیک و بدون مانور است، وسیلهٔ بازگشتی در یک صفحه حرکت خواهد نمود. فرضیاتی که برای شبیه‌سازی مسیر بالستیک وسیلهٔ بازگشتی درنظر گرفته شده، عبارتند از: زمین کروی، زمین ثابت (به دلیل کوتاه بودن زمان ورود به جو) و ناوبری ایده‌آل.

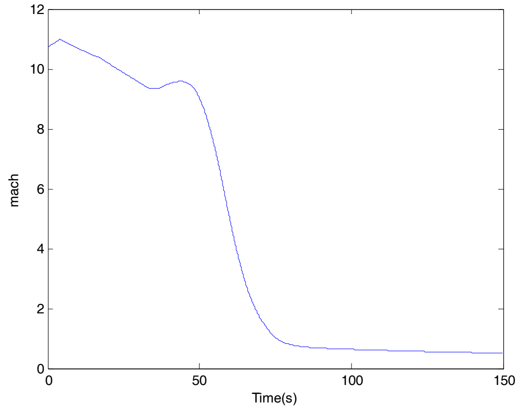
نمودار ارتفاع بر حسب برد طولی مسیر مرجع وسیلهٔ بازگشتی در شکل (۳)، نمودار سرعت بر حسب زمان مسیر مرجع در شکل (۴) و نمودار ماخ بر حسب زمان مسیر مرجع در شکل (۵) نشان شده است.



شکل۳- مسیر مرجع وسیلهٔ بازگشتی مورد مطالعه (نمودار ارتفاع- برد طولی)



شکل۴- نمودار سرعت بر حسب زمان وسیلهٔ بازگشتی مورد مطالعه (مسیر مرجع)



شکل۵- تغییرات عدد ماخ بر حسب زمان (مسیر مرجع)

طبق نمودار سرعت - زمان مشاهده می‌شود که با ورود وسیلهٔ بازگشتی به جو غلیظ افت سرعت شدیدی در وسیلهٔ بازگشتی ایجاد شده است که نشان‌دهندهٔ محدوده‌ای است که بیشترین شتاب و فشار دینامیکی بر وسیله اعمال می‌شود. نمودار شکل (۵) نشان‌دهندهٔ تغییرات عدد ماخ در طول فرایند ورود به جو وسیلهٔ بازگشتی مورد مطالعه است که طبق آن تغییرات عدد ماخ در محدودهٔ ۰/۵۰۷۵ تا ۱۰/۷۳۸۶ است.

جدول ۱- نتایج شبیه‌سازی مسیر بالستیک

سرعت برخورد به زمین (متر بر ثانیه)	زمان پرواز (ثانیه)	برد طولی (متر)	برد عرضی (متر)	برد کل (متر)
۱۷۲/۸۶۸۴	۱۴۹/۹۰۰۰	$۱/۶۹۶۹\times۱۰^{۵}$	۰	$۱/۶۹۶۹\times۱۰^{۵}$

استخراج معادلات حرکت

برای مدل‌سازی دینامیک مسئلهٔ بازگشت به جو مورد مطالعه، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

۱) دستگاه اینرسی: در این مقاله کلیهٔ معادلات حرکت مستقیماً در دستگاه اینرسی بسط می‌یابند که منجر به حذف کلیهٔ ترم‌های مثلثاتی sin و cos از معادلات شده و معادلات سیستم از شرایط بدرفتاری[۹] دور می‌شوند.

۲) زمین کروی

۳) زمین ثابت (به دلیل کوتاه بودن زمان ورود به جو)

۴) وسیلهٔ بازگشتی برآزا با L/D غیر صفر است.

نخستین نیروهایی که در به‌دست آوردن معادلات حرکت باید محاسبه شوند، نیروها در دستگاه بدنه می‌باشند. نیروی مؤثر در دستگاه بدنه نیروی تراست است که حالت کلی آن برای هر سه محور به صورت معادله اعمال می‌شود.

$$F_{Body}=\begin{bmatrix}T_x\\T_y\\T_z\end{bmatrix} \tag{۳}$$

این نیرو در وسیلهٔ بازگشتی مورد نظر ما صفر می‌باشد چون هیچ‌گونه تراستی نداریم.

نیروهای برآ، پسا و جانبی، نیروهای وارد بر وسیله در دستگاه باد می‌باشند که به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$D=\frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D_0}+C_{D_\alpha}\alpha^2+C_{D_\beta}\beta^2) \tag{۴}$$

$$L=\frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L_\alpha}\alpha) \tag{۵}$$

$$S=\frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L_\beta}\beta)\,) \tag{۶}$$

بردار نیروهای وارد بر وسیله در دستگاه باد به شکل زیر می‌باشد:

$$F_{Wind}=DCM_{Body2Wind}F_{Body}+\begin{bmatrix}-D\\S\\-L\end{bmatrix} \tag{۷}$$

حال نیروی وارده بر جسم در دستگاه NED که نیروی وزن می‌باشد با نیروی منتقل شده از دستگاه باد جمع جبری می‌شوند و با استفاده از ماتریس انتقال رابطهٔ (۱۰) نیروها در دستگاه NED به صورت رابطهٔ (۱۱) به‌دست می‌آید. برای محاسبهٔ ماتریس انتقال رابطهٔ (۱۰)، به زوایای مسیر پرواز و آزیموت نیاز داریم که از روابط (۸) و (۹) به‌دست می‌آیند:

$$\psi=\tan^{-1}\left(\frac{V_{y_{NED}}}{V_{x_{NED}}}\right) \tag{۸}$$

$$\gamma=\sin^{-1}\left(\frac{-V_{z_{NED}}}{V}\right) \tag{۹}$$

منظور از V اندازه بردار سرعت می‌باشد.

$$DCM_{Wind2NED}=\begin{bmatrix}\cos(\gamma)\cos(\psi) & -\sin(\psi) & \cos(\psi)\sin(\gamma)\\ \cos(\gamma)\sin(\psi) & \cos(\psi) & \sin(\gamma)\sin(\psi)\\ -sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma)\end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

9. Ill Condition

$$F_{NED} = DCM_{Wind2NED}F_{Wind} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

برای محاسبه برآیند نیروها باید نیروهای محاسبه شده در دستگاه NED را به دستگاه اینرسی منتقل کنیم و در این مرحله نیاز به محاسبهٔ طول و عرض جغرافیایی داریم. از آنجاکه مؤلفه‌های موقعیت در دستگاه اینرسی را در هر لحظه از حرکت جسم داریم، زوایای طول و عرض جغرافیایی توسط روابط (۱۲) و (۱۳) قابل محاسبه هستند.

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad (۱۲)$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{R_z}{R}\right) \quad (۱۳)$$

پس از محاسبهٔ طول و عرض جغرافیایی، ماتریس انتقال از دستگاه NED به اینرسی را تشکیل می‌دهیم (رابطهٔ ۱۴) و سپس از طریق رابطهٔ (۱۵) برآیند نیروها در دستگاه اینرسی را به‌دست می‌آوریم.

$$DCM_{NED2Inertial} = \begin{bmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\lambda) & -\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$F_{Inertial} = DCM_{NED2Inertial}F_{NED} \quad (۱۵)$$

و در نهایت معادلات دیفرانسیل حرکت از رابطهٔ (۱۶) به دست می‌آیند.

$$\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{V}} = \frac{\vec{F}_{Inertial}}{m} \quad (۱۶)$$

در مقالهٔ حاضر از معادلات سه درجهٔ آزادی استفاده نموده‌ایم و با استفاده از روابط، معادلات دیفرانسیل کلی به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \dot{\vec{R}} \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

طراحی کنترلر غیرخطی کوادراتیک NQT

روش‌های مختلفی برای هدایت و کنترل وسیلهٔ بازگشتی وجود دارد. در این مقاله برای کنترل وسیلهٔ بازگشتی مورد مطالعه، کنترلر غیرخطی کوآدراتیک (که یکی از روش‌های کنترل بهینه است) را توسعه داده و با استفاده از آن به کنترل وسیله می‌پردازیم. قانون کنترلی NQT[۱۰] در نتیجهٔ حل مسئله کنترل بهینه با دو شرط مرزی، با فرض تغییرات خطی متغیرهای کمک حالت با متغیرهای حالت سیستم می‌باشد. همان‌طورکه نشان داده خواهد شد این فرض در نهایت منجر به تشکیل معادلهٔ ماتریسی دیفرانسیلی ریکاتی می‌شود که با حل آن در هر لحظه از زمان، سیگنال کنترلی بهینه تولید می‌شود. در اینجا تلاش بر این است که یک مسیر مرجع تعقیب شود. عبارت غیرخطی به این دلیل به‌کار می‌رود که مطابق آنچه در ادامه نشان داده خواهد شد، ماتریس‌های سیستمی A و B حاوی متغیرهایی غیرخطی می‌باشند. این به معنی طراحی یک تعقیب‌کنندهٔ غیرخطی کوادراتیک می‌باشد.

در این بخش با استفاده از این قانون کنترلی قصد داریم ضمن منطبق نمودن مسیر جاری وسیله روی مسیر مرجع، خطای برخورد را تا حد امکان کاهش دهیم. به عبارت دیگر، یک کنترل مرحلهٔ نهایی را برای وسیله طراحی می‌کنیم.

متغیرهای کنترلی سیستم عبارتند از زاویهٔ حملهٔαو زاویهٔ سرش جانبی β. زاویهٔ حمله برای تنظیم برد طولی جاری وسیله روی برد طولی نامی و زاویهٔ سرش جانبی برای تنظیم برد عرضی جاری روی برد عرضی نامی به‌کار می‌روند. قبل از طراحی سیستم کنترل ابتدا باید میزان خطای مسیر جاری با مسیر مرجع یا نامی محاسبه شود. این خطا عبارت است از اختلاف بین سه مؤلفه بردار موقعیت و سه مؤلفه بردار سرعت مسیر جاری و مسیر مرجع. در نتیجه بردار خطا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Error = [r_{x_{cur}} - r_{x_{ref}}, r_{y_{cur}} - r_{y_{ref}}, r_{z_{cur}} - r_{z_{ref}}, v_{x_{cur}} - v_{x_{ref}}, v_{y_{cur}} - v_{y_{ref}}, v_{z_{cur}} - v_{z_{ref}}] \quad (۱۸)$$

این بردار خطا در هر لحظه می‌بایست توسط کنترلر قرائت شده و ورودی زاویهٔ حمله و سرش جانبی متناسب، برای جبران این خطا به سیستم پسخور شود. در ادامه خواهیم دید که با نزدیک شدن به نقطهٔ پایانی مأموریت اندازه این بردار خطا به سمت صفر همگرا می‌شود. فرض می‌کنیم سیستم کنترل‌شونده به صورت یک سیستم خطی متغیر با زمان به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\dot{X}(t)_{[n\times1]} = (t)_{[n\times n]}X(t) + B(t)_{[n\times r]}U(t)_{[r\times1]} \quad (۱۹)$$

رابطهٔ (۱۹) معادلهٔ وضعیت سیستم است که در آن X(t) بردار متغیرهای وضعیت سیستم، A(t) ماتریس وضعیت، B(t) ماتریس کنترل و U(t) بردار متغیرهای کنترلی سیستم است.

در صورتی‌که تلاش کنترلی صرف برگرداندن مقدار متغیرهای حالت سیستم روی مقدار صفر باشد، اصطلاحاً مسئلهٔ تنظیم حل می‌شود. اما، درصورتی‌که برای برگرداندن تاریخچهٔ تغییرات متغیرهای وضعیت روی یک تاریخچهٔ از پیش تعیین شدهٔ r(t) تلاش شود، اصطلاحاً مسئلهٔ تعقیب حل می‌شود. برای کنترل مسئله به روش تنظیم‌کننده خطی[۱۱]، تابع معیار به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۷].

$$J = \frac{1}{2}x^T(t)F(t)x(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt \quad (۲۰)$$

10. Nonlinear Quadratic Tracking

11. LQR

ماتریس R و Q متقارن، $R>0$ و معین و $Q\geq 0$ و نیمه معین می‌باشند. همچنین، ماتریس F و تابع بیرون انتگرال برای حصول اطمینان از حداقل شدن خطای نهایی است که لازم است برای آن $F>0$ و نیمه معین باشد. ماتریس R، ماتریس وزنی مربوط به متغیرهای کنترلی می‌باشد که میزان استفاده از پارامترهای کنترلی را در حین فرایند بهینه‌سازی مشخص می‌نماید و ماتریس Q، ماتریس وزنی متغیرهاست و میزان تأثیر آنها را در کنترل بهینه معرفی می‌نماید.

در این مقاله، کنترل مسئله به روش تعقیب NQT مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای هرچه نزدیک‌تر و منطبق‌تر نگه‌داشتن متغیرهای وضعیت سیستم $X(t)$ روی وضعیت مورد انتظار و نامی $r(t)$ در بازهٔ زمانی $[t_0,t_f]$ می‌توان از تابع معیار زیر استفاده نمود:

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[||x(t)-r(t)||^2*Q(t)+||u(t)-U(t)||^2*R(t)]dt \quad (۲۱)$$

همان‌طورکه گفته شد در صورتی‌که $r(t)=0$ درنظر گرفته شود، اصطلاحاً مسئلهٔ تنظیم (LQR) حل می‌شود و در غیراین‌صورت اصطلاحاً مسئلهٔ تعقیب (NQT) حل می‌شود. مسئلهٔ تنظیم، زمانی کاربرد دارد که سیستم با عدم قطعیت‌هایی روبرو است و برای صفر نمودن اثرات آنها باید کنترل خاصی را اعمال نماید.

همان‌طورکه در رابطه‌ی (۲۱) مشاهده می‌شود، تابع هدف فوق دارای ترم‌های مربع از مقدار خطا یا اختلاف متغیرهای وضعیت $X(t)$ و کنترل $U(t)$ جاری با مرجع می‌باشد، به همین دلیل کوآدراتیک نامیده می‌شود. با حداقل و حداکثرسازی تابع هدف می‌توان سیگنال کنترلی بهینه را به سیستم هدایت و کنترل ارسال نمود. به عنوان مثال در موشک‌های دور برد، صرفه‌جویی در مصرف انرژی یک فاکتور مهم در شاخص کارایی خواهد بود که باید لحاظ شود. در نتیجه سیستم کنترلی پرنده باید به شدت از ایجاد پسای القایی جلوگیری نماید. اما، اغتشاشات در حین پرواز که وسیله را از مسیر نامی دور می‌کند می‌تواند تا حدی مجاز باشد. همچنین، از مانورهای بی‌جا که سرعت وسیله را کاهش می‌دهد نیز پرهیز می‌شود. اما، در طرف مقابل برای یک موشک کوتاه برد آنچه مهم است انطباق هرچه دقیق‌تر روی مسیر نامی است. بنابراین، مصرف انرژی دیگر اهمیت نداشته و تلاش می‌شود با افزایش وزن ماتریس Q این انطباق روی مسیر نامی تا لحظه برخورد ادامه داشته باشد [۱۴]. این نکته، در فاز ورود به جو یک موشک دوربرد و نیز در فاز پایانی هم صادق است.

با دنبال نمودن اصل کنترل بهینه پونتریاگین[12] و با استفاده از حساب تغییرات جواب بهینه را پیدا خواهیم کرد. برای این کار طبق گام‌های اساسی زیر مسئله را حل می‌نمائیم [۱۵]:

۱) تشکیل تابع همیلتونین:

برای حل مسئله کنترل بهینه ابتدا همیلتونین به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$H=P^T\dot{X}+L \quad (۲۲)$$

$$H=P^T\dot{X}+\frac{1}{2}[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]= \\ =P^T(A(t)x(t)+B(t)u(t))+\frac{1}{2}[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]$$

که در آن P بردار کمک وضعیت از مرتبه nام می‌باشد.

۲) یافتن سیگنال کنترل بهینه:

$\frac{\partial H}{\partial u}=0$ شرط بهینگی است. با مشتق گرفتن از H نسبت به U داریم:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=R(t)u(t)+B^T(t)P(t)=0 \quad (۲۳)$$

از رابطهٔ فوق کنترل بهینهٔ U مطابق رابطه‌ی (۲۴) به‌دست می‌آید. از اینجا معلوم می‌شود که ماتریس R باید مثبت معین باشد نه مثبت نیمه معین، چراکه باید بتوان از آن معکوس گرفت.

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (۲۴)$$

۳) معادلات کمک وضعیت

با مشتق گرفتن از H نسبت به X، معادلات کمک وضعیت به‌دست می‌آید:

$$\dot{P}(t)=-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)\rightarrow\dot{P}(t)=-Q(t)X(t)-A^T(t)P(t) \quad (۲۵)$$

رابطهٔ $\dot{P}=-\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T$، معادلهٔ کمک حالت می‌باشد. در معادلات فوق P بردار ضرایب لاگرانژ می‌باشد. بدون احتساب معادلات کمک حالت و شرط بهینگی، مسئله تحت عنوان مسئلهٔ بهینه‌سازی مستقیم مطرح می‌شود.

اکنون رابطهٔ بردار حالت X و بردار ضرایب لاگرانژ (کمک حالت)، به ساده‌ترین شکل ممکن (رابطهٔ خطی) فرض می‌شود:

$$P(t)=S(t)X(t) \quad (۲۶)$$

$$S^T(t)=S(t) \quad (۲۷)$$

ماتریس S، ماتریسی متقارن به‌صورت زیر فرض می‌شود که باید مثبت نیمه معین باشد:

$$S=\begin{bmatrix}S_{11} & \cdots & S_{16}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ S_{61} & \cdots & S_{66}\end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

۴) کنترل حلقه بسته

می‌توان کنترل را در قالب تابعی بر حسب Xهای بهینه نوشت. بنابراین، می‌توان سیگنال کنترل بهینه را مطابق رابطه زیر نوشت:

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t) \quad (۲۹)$$

12. Pontryagin

رابطهٔ فوق کنترل بهینه نامیده می‌شود. با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۲۶) خواهیم داشت:

$$\dot{P}(t) = \dot{S}(t)X(t) + S(t)\dot{X}(t) \quad (۳۰)$$

اکنون با جایگذاری معادلات وضعیت و کمک وضعیت (۱۹) و (۲۵) در رابطهٔ (۳۰) داریم:

$$[\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) + Q(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)]X(t) = 0 \quad (۳۱)$$

در واقع ما تا به اینجا با معرفی S، P را از معادلات کنترل، وضعیت و کمک وضعیت حذف نموده‌ایم.

۵) معادله ماتریسی دیفرانسیلی ریکاتی

رابطهٔ (۳۱) باید به ازای هر مقدار دلخواهی از X برقرار باشد. بنابراین، S باید معادلهٔ دیفرانسیلی زیر را ارضا نماید.

$$\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) + Q(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) = 0 \quad (۳۲)$$

$$\dot{S}(t) = -S(t)A(t) - A^T(t)S(t) - Q(t) + S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) \quad (۳۳)$$

معادلهٔ (۳۳) از نوع ریکاتی بوده و معادلهٔ ماتریسی دیفرانسیلی ریکاتی نامیده می‌شود. همچنین، S(t) ماتریس ریکاتی یا ضریب ریکاتی نامیده می‌شود. مقدار کنترل بهینه را می‌توان از ماتریس S و یا با تعریف ضریب K از طریق روابط زیر به‌دست آورد.

$$k = R^{-1}(t)B^T(t)S(t) \quad (۳۴)$$

$$u(t) = -k\big(x_T(t) - x(t)\big) \quad (۳۵)$$

K را اصطلاحاً ماتریس فیدبک (پسخور) یا ضریب کنترل می‌نامند. از رابطهٔ (۳۵) مشاهده شد که تمامی اطلاعات مورد نیاز برای کنترل سیستم می‌تواند به صورت غیر برخط محاسبه و در رایانهٔ پرواز موشک ذخیره شود. بنابراین، اگر ماتریس‌های A، B، Q و R ثابت باشند و زمان به سمت بی‌نهایت میل کند، ماتریس k نیز ثابت خواهد بود. شاید به همین دلیل است که با ثابت فرض نمودن k در تمامی طول مسیر مشاهده می‌شود که باز هم برخورد با دقت صورت خواهد گرفت ولی با دقتی متفاوت با قبل. به هرحال بهتر است برای سیستمی مانند موشک به دلیل داشتن ذات غیرخطی، در هر لحظه سیگنال کنترلی جدید تولید شود. لذا، برای داشتن k جدید در هر لحظه هنگام پرواز، باید ماتریس‌های A، B، Q و R در هر لحظه محاسبه شوند.

ماتریس‌های سیستمی A و B

همان‌طورکه گفته شد، معادلات دیفرانسیل کلی به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$\vec{\dot{X}} = \begin{bmatrix} \vec{\dot{R}} \\ \vec{\ddot{R}} \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

که شتاب‌ها به صورت زیر به‌دست آمدند:

$$\begin{bmatrix} \ddot{R}_x \\ \ddot{R}_y \\ \ddot{R}_z \end{bmatrix} = DCM_{NED2Inertial}\left(DCM_{Wind2NED}\begin{bmatrix} -D \\ Si \\ -L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix}\right)/m \quad (۳۷)$$

بردار متغیر حالت X و بردار کنترل U به صورت زیر می‌باشند:

$$X = [R_x \quad R_y \quad R_z \quad V_x \quad V_y \quad V_z] \quad (۳۸)$$

$$U = [\alpha \quad \beta] \quad (۳۹)$$

بنابراین، سیستم $\dot{X} = AX + BU$ را با استفاده از معادلات فوق طوری می‌نویسیم که ضرایب متغیرهای وضعیت و کنترل، المان‌های ماتریس‌های A و B را تشکیل دهند. این ماتریس‌ها باید به گونه‌ای انتخاب و آرایش داده شوند که در هیچ شرایطی در حین حل معادله ریکاتی مشکل تکینگی به وجود نیاید. به بیان دیگر، نباید در مخرج هیچ درایه‌ای از ماتریس حالت A(X) متغیر حالت وجود داشته باشد که همین امر استخراج ماتریس حالت را امری مشکل می‌نماید. با این وجود در نهایت ماتریس A(X) به صورت زیر استخراج شود:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴۰)$$
$$A_4 = k_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{xy}^2}\left(R_y^2\, RI + \frac{R_x^2 R_z^2}{RI}\right) - \frac{R_x^2}{RI} & k & 0 \\ k & -\frac{1}{R_{xy}^2}\left(R_x^2\, RI + \frac{R_y^2 R_z^2}{RI}\right) - \frac{R_y^2}{RI} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RI}\left(R_{xy}^2 + R_z^2\right) \end{bmatrix}$$

متغیرهای k_1، k_2، k و R_{xy} و RI که در ماتریس A آمده، بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$R_{xy} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (۴۱)$$

$$RI = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (۴۲)$$

$$k_1 = -\frac{g_0 Re^2}{RI^3} \quad (۴۳)$$

$$k_2 = \frac{\rho VSCD_0}{2\, m\, RI} \quad (۴۴)$$

$$k = \frac{R_x R_y}{R_{xy}^2}\left(RI - \frac{R_{xy}^2}{RI} - \frac{R_z^2}{RI}\right) \quad (۴۵)$$

Re شعاع زمین و g_0 شتاب گرانش می‌باشد. برای نوشتن ماتریس B پارامترهای مربوط به ضرایب α و β را وارد می‌نمائیم که مطابق رابطهٔ (۴۶) خواهد شد. توجه شود که یک α و یک β در ماتریس B باقی خواهند ماند و در واقع این ماتریس تابعی از متغیرهای کنترلی خواهد شد.

$$B = k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \\ B_5 & B_6 \end{bmatrix}$$
$$B_1 = -\frac{R_y}{R_{xy}}\left(k_4 cd_\alpha \alpha + k_8\right) - \frac{R_x}{RI}\left(k_6 cd_\alpha \alpha - V_{xy} cl_\alpha\right) - \frac{R_x R_z}{R_{xy}RI}\left(k_5 cd_\alpha \alpha + k_{10}\right)$$
$$B_2 = -\frac{R_y}{R_{xy}}\left(k_4 cd_\beta \beta - k_7\right) - \frac{R_x}{RI}\left(k_6 cd_\beta \beta\right) - \frac{R_x R_z}{R_{xy}RI}\left(k_5 cd_\beta \beta + k_9\right) \quad (۴۶)$$
$$B_3 = \frac{R_x}{R_{xy}}\left(k_4 cd_\alpha \alpha + k_8\right) - \frac{R_y}{RI}\left(k_6 cd_\alpha \alpha - V_{xy} cl_\alpha\right) - \frac{R_y R_z}{R_{xy}RI}\left(k_5 cd_\alpha \alpha + k_{10}\right)$$
$$B_4 = \frac{R_x}{R_{xy}}\left(k_4 cd_\beta \beta - k_7\right) - \frac{R_y}{RI}\left(k_6 cd_\beta \beta\right) - \frac{R_y R_z}{R_{xy}RI}\left(k_5 cd_\beta \beta + k_9\right)$$
$$B_5 = \frac{R_{xy}}{RI}\left(k_5 cd_\alpha \alpha + k_{10}\right) - \frac{R_z}{RI}\left(k_6 cd_\alpha \alpha - V_{xy} cl_\alpha\right)$$
$$B_6 = \frac{R_{xy}}{RI}\left(k_5 cd_\beta \beta + k_9\right) - \frac{R_z}{RI}\left(k_6 cd_\beta \beta\right)$$

متغیرهای k_3،k_4، k_5، k_6، k_7، k_8، k_9،k_{10} و V_{xy} که در ماتریس B آمده، بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$V_{xy} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (۴۷)$$
$$k_3 = \frac{\rho V S}{2\,m} \quad (۴۸)$$
$$k_4 = \left(\frac{V_x R_y}{R_{xy}} - \frac{V_y R_x}{R_{xy}}\right) \quad (۴۹)$$
$$k_5 = \left(\frac{V_x R_x R_z}{R_{xy}RI} - \frac{V_z R xy}{RI} + \frac{V_y R_y R_z}{R_{xy}RI}\right) \quad (۵۰)$$
$$k_6 = \left(\frac{V_x R_x}{RI} + \frac{V_y R_y}{RI} + \frac{V_z R_z}{RI}\right) \quad (۵۱)$$
$$k_7 = k_5 cl_\beta \frac{V}{V_{xy}} \quad (۵۲)$$
$$k_8 = k_4 k_6 \frac{cl_\alpha}{V_{xy}} \quad (۵۳)$$
$$k_9 = k_4 cl_\beta \frac{V}{V_{xy}} \quad (۵۴)$$
$$k_{10} = k_5 k_6 \frac{cl_\alpha}{V_{xy}} \quad (۵۵)$$

در نهایت فرم خطی معادلات غیرخطی حرکت به صورت رابطهٔ (۵۶) خواهد بود:

$$\dot{X} = A(X)X + B(X,U)U \quad (۵۶)$$

ماتریس‌های وزنی R و Q

پس از تعیین ماتریس‌های سیستمی A و B اکنون نوبت به تعیین ماتریس‌های کنترلی Q و R می‌باشد. ماتریس‌های Q و R را از طریق الگوریتم ژنتیک به‌دست آورده‌ایم. تنظیم دقیق ماتریس‌های Q و R از طریق اعمال تغییرات در آنها به نحوی حاصل می‌شود که نسبت این دو ماتریس و ضرائب آنها منجر به تعقیب دقیق مسیر مرجع توسط وسیله شود. با اعمال تغییر در ماتریس Q، خطا در زمان نهائی کاهش یافته و با اعمال تغییر در ماتریس R میزان مجاز استفاده سیستم از کنترل‌ها تعیین می‌شود.

برای به‌دست‌آوردن ماتریس‌های وزنی از روش الگوریتم ژنتیک به این ترتیب عمل می‌کنیم. با تعریف ۸ المان متشکل از ۶ المان قطری ماتریس Q و ۲ المان قطری ماتریس R به‌عنوان متغیرهای بهینه‌سازی، تلاش می‌شود تا در هر تکرار مقادیر ماتریس‌ها با استفاده از الگوریتم ژنتیک به نحوی انتخاب شوند که خطای پایانی به حداقل برسد. در روش الگوریتم ژنتیک یکی از پارامترهای مهم در همگرایی مسئله حدود تعریف شده برای متغیرهای بهینه‌سازی می‌باشد. در اینجا، این حدود پس از چند بار اجرا گرفتن از برنامه، طوری تنظیم شده‌اند که بهترین جواب در سریع‌ترین زمان ممکن به‌دست آید. این حدود نهایتاً مطابق زیر درنظر گرفته شده‌است:

$$Lower\ Bound = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ .1\ .1] \quad (۵۷)$$

$$Upper\ Bound = [100\ 100\ 100\ 100\ 100\ 100\ 2000\ 2000] \quad (۵۸)$$

شش درایهٔ اول، حدود درایه‌های ماتریس Q و دو درایهٔ آخر، حدود درایه‌های ماتریس R را مشخص می‌کند. پس از تعیین حدود جواب برای متغیرهای بهینه‌سازی نوبت به تعیین معیار بهینه‌سازی می‌رسد که در اینجا «مقدار خطای نقطهٔ برخورد» به عنوان معیار بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است.

یک ماتریس R و Q را به عنوان جمعیت اولیه در الگوریتم ژنتیک قرار داده و برنامه را برای یک مسیر با شرایط اولیهٔ معین اجرا می‌کنیم. تا اینکه در نهایت ماتریس‌های R و Q بهینه که به ازای آنها، خطای برخورد به کمترین مقدار کاهش می‌یابد، به‌دست می‌آید. ماتریس‌های R و Q بهینه بدین صورت به‌دست آمدند:

$$R = \begin{bmatrix} 945.049536544091 & 0 \\ 0 & 269.192763808039 \end{bmatrix} \quad (۵۹)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0680 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1396 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8906 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.8644 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7448 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20.9999 \end{bmatrix} \qquad (۶۰)$$

در این مقاله، دقت اعدادی که در ماتریس R و Q قرار دارد، ۱۴ رقم اعشار است ولی در این صفحه به دلیل اینکه بتوان ماتریس Q را به شکل زیباتری در یک ستون نمایش داد، اعداد را تا چهار رقم اعشار نشان داده‌ایم. در برنامه‌ها از اعداد با ۱۴ رقم اعشار استفاده نمودیم.

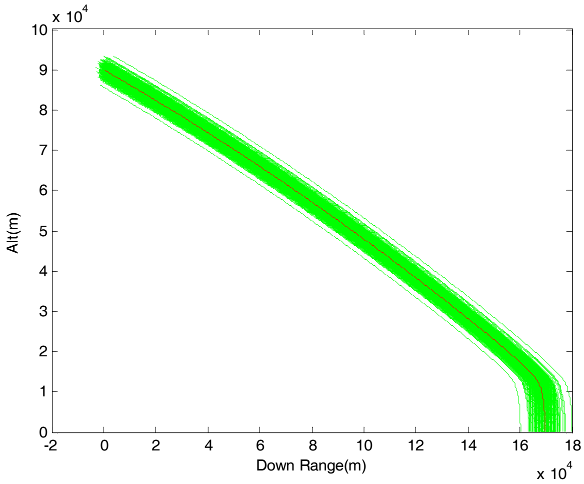
نتایج آنالیز مونت کارلو برای هدایت وسیلهٔ بازگشت‌پذیر با استفاده از کنترلر NQT در صورت عدم قطعیت در شرایط ورودی

همان‌طورکه بیان شد ممکن است به هر دلیلی وسیلهٔ بازگشتی هنگام ورود به جو، در شرایطی غیر از شرایط اولیه‌ای که برای مسیر مرجع در نظر گرفتیم، قرار بگیرد. در این مقاله عدم قطعیت در پارامترهای ورودی به میزان ۳ کیلومتر در مؤلفه‌های موقعیت و ۱۵ متر بر ثانیه در مؤلفه‌های سرعت می‌باشد. در این قسمت با استفاده از آنالیز مونت کارلو، تأثیر هدایت وسیلهٔ بازگشتی در حضور کنترلر NQT با استفاده از ماتریس‌های R و Q به‌دست آمده را بر روی ۱۰۰۰ مسیر تصادفی در بازهٔ عدم قطعیت درنظر گرفته شده را بررسی می‌کنیم. نتایج آنالیز مونت کارلو برای ۱۰۰۰ مسیر بدون کنترل وسیله (حرکت بالستیک) نیز ارائه می‌شود تا با نتایج حرکت وسیله در حضور کنترلر مقایسه شود. نمودارهای مسیرهای بدون کنترل وسیله (بالستیک) در شکل‌های (۶) و (۷) نمودارهای مسیرهای کنترل‌شده در شکل‌های (۸) تا (۱۲) نشان داده شده است.

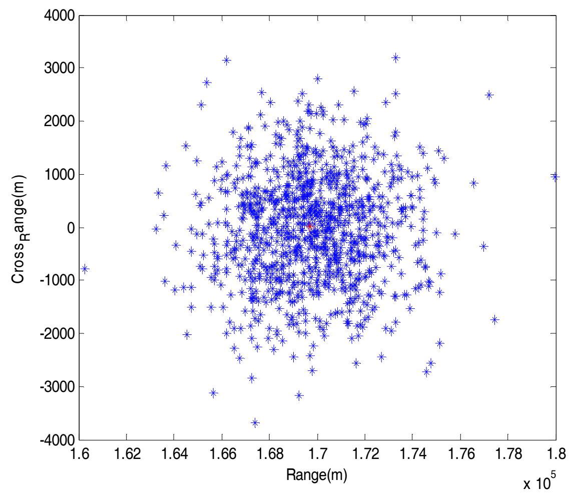
مطابق جدول (۲) سه سیگمای خطای برخورد مسیر بالستیک بدون کنترل، ۷۶۱۱/۸ متر و سه سیگمای خطای برخورد مسیرهایی که از طریق کنترل غیرخطی کوادراتیک NQT با استفاده از یک ماتریس وزنی R و یک ماتریس وزنی Q برای همهٔ مسیرها هدایت شده‌اند، ۷۲۵/۹۷۲۰ متر می‌باشد. بنابراین، کنترل غیرخطی کوادراتیک NQT با استفاده از یک ماتریس وزنی R و یک ماتریس وزنی Q برای همهٔ مسیرها، خطای برخورد را کاهش داده و به ۹/۵۴ درصد میزان خطا در حالت بدون کنترل، می‌رساند. همچنین، مطابق شکل‌های (۱۰) و (۱۱)، زوایای حمله و سرش جانبی خیلی خوب به صفر همگرا شده‌اند. خط قرمز و نقطهٔ قرمز در نمودارها مربوط به مسیر مرجع می‌باشد. در نمودار شکل‌های (۱۰) و (۱۱) علت تراکم در ابتدای مسیر این است که برنامه برای هدایت ۱۰۰۰ مسیر انجام شده است و زوایای حمله و سرش جانبی هر کدام از مسیرها شکل متفاوتی دارد، اجتماع این نمودارها در یک نمودار باعث ایجاد این تراکم شده است.

جدول ۲- جمع‌بندی نتایج آنالیز مونت کارلو برای ۱۰۰۰ مسیر

نوع هدایت	خطای برخورد (3σ)	خطای برخورد (CEP)
مسیر بالستیک (بدون کنترل)	۷۶۱۱/۸ متر	۱۸۹۸/۸ متر
کنترل به روش NQT	۷۲۵/۹۷۲۰ متر	۱۸۸/۹۹۸۰ متر

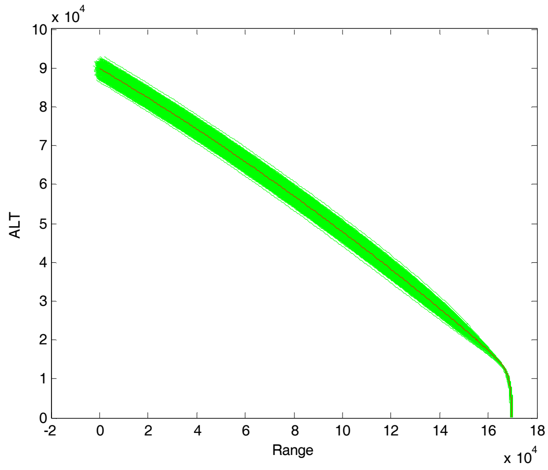


شکل ۶- نمودار تغییرات برد طولی نسبت به ارتفاع در آنالیز مونت کارلو برای مسیر بالستیک یا بدون کنترل (۱۰۰۰مسیر)

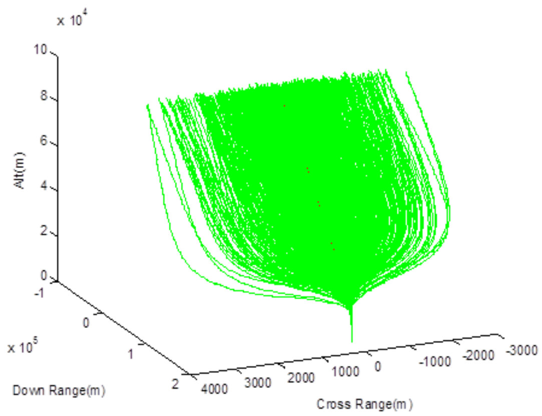


شکل ۷- محدودهٔ برد طولی و عرضی نقاط برخورد وسیلهٔ بازگشتی به روش دارت[۱۳] در آنالیز مونت کارلو برای مسیر بالستیک (۱۰۰۰مسیر)

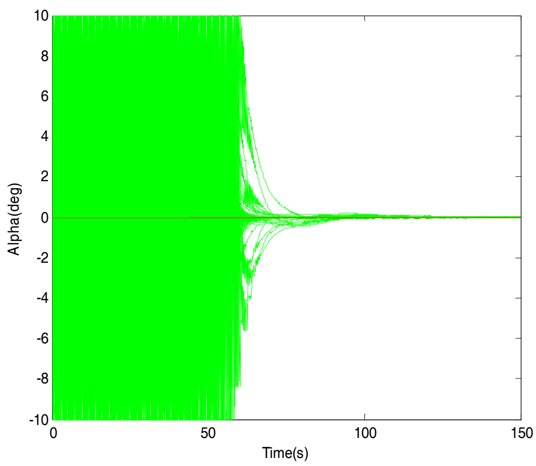
13. Dart Clearance Results



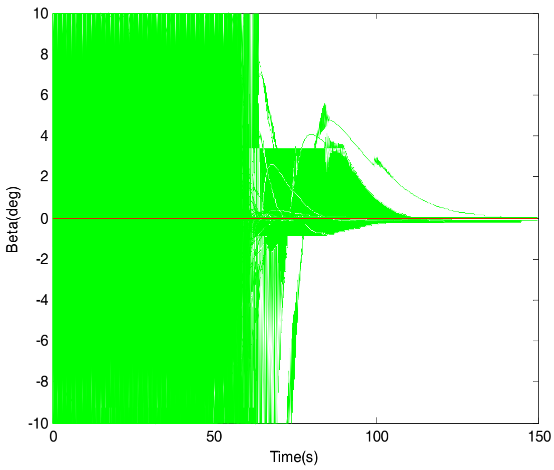
شکل ۸- نمودار تغییرات ارتفاع بر حسب برد طولی در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT (۱۰۰۰مسیر)



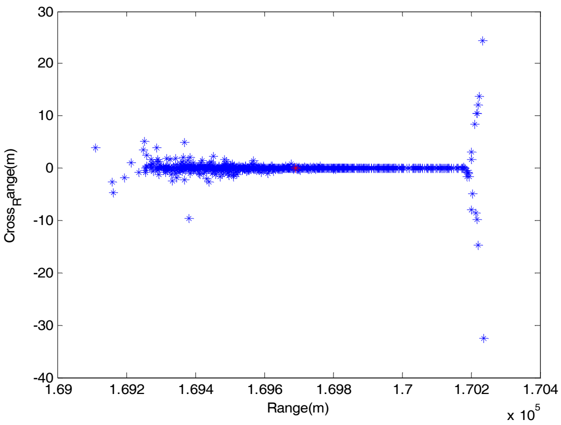
شکل ۹- نمودار تغییرات ارتفاع بر حسب برد طولی و عرضی در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT (۱۰۰۰ مسیر)



شکل ۱۰- نمودار تغییرات زاویه‌ی حمله بر حسب زماندر آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT (۱۰۰۰مسیر)



شکل ۱۱- تغییرات زاویهٔ سرش جانبی بر حسب زمان در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT (۱۰۰۰مسیر)



شکل ۱۲- محدودهٔ برد طولی و عرضی نقاط برخورد وسیلهٔ بازگشتی به روش دارت در آنالیز مونت کارلو برای مسیر در حضور کنترلر NQT (۱۰۰۰ مسیر)

نتیجه‌گیری

در این مقاله, برای هدایت وسیلهٔ بازگشتی، کنترلر غیرخطی کوآدراتیک NQT طراحی شده است، به‌طوری‌که ضریب کنترلی K متغیر می‌باشد و در هر گام انتگرال‌گیری محاسبه می‌شود. هدایت وسیله به این صورت انجام شد که بعد از اعمال عدم قطعیت‌ها، همهٔ مسیرها باید به یک مسیر که مسیر مرجع نام گرفت، نزدیک شوند و سعی در انطباق با آن داشته باشند تا در نهایت خطای برخورد کاهش یابد. در این راستا با بسط دادن معادلات حرکت، ماتریس‌های سیستمی و کنترلی را به‌دست آورده و معادلات به فرم فضای حالت نگاشته و سیستم غیرخطی در فرم خطی نمایش داده شد. ماتریس‌های وزنی R و Q مورد نیاز از طریق روش تکاملی الگوریتم ژنتیک به‌دست آمدند. با تنظیم ماتریس‌های وزنی با

استفاده از الگوریتم ژنتیک دقت برخورد با هدف، افزایش قابل توجهی یافته است. سه سیگمای خطای برخورد مسیر بالستیک بدون کنترل، ۷۶۱۱/۸ متر و سه سیگمای خطای برخورد مسیرهایی که از طریق کنترل غیرخطی کوادراتیک NQT با استفاده از یک ماتریس وزنی R و یک ماتریس وزنی Q برای همهٔ مسیرها هدایت شده‌اند، ۷۲۵/۹۷۲۰ متر می‌باشد. بنابراین، کنترل غیرخطی کوادراتیک NQT با استفاده از یک ماتریس وزنی R و یک ماتریس وزنی Q برای همهٔ مسیرها، خطای برخورد را کاهش داده و به ۹/۵۴ درصد میزان خطا در حالت بدون کنترل، می‌رساند. همچنین، با توجه به نمودارهای مربوط به زوایای حمله و سرش جانبی به‌دست آمده، مشاهده شد که کنترلر غیرخطی کوادراتیک NQT، کنترل وسیله را با دقت خوبی انجام می‌دهد و زوایای کنترلی به صفر همگرا می‌شوند.

مراجع

[1] Poustini, M.J., *Esmaelzadeh, R. and Adami, A.H., "Anew Approach to Trajectory Optimization Based on Direct Transcription and Differential Flatness,*" *Acta Astronautica*, Vol, 107, 2015, pp. 1-13.

[2] Abbasi, D., Optimal Reentry Guidance Based on Singular Perturbation, (M.Sc. Thesis), Aerospace Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, 2009, (in persian).

[3] Sabzeh, A., Conceptual Design of a Reentry Vehicle, (M.Sc. Thesis), Aerospace Department, Tehran, Khajeh Nasiredin Toosi, University of Technology, 2010, (in persian).

[4] Poustini, M., Reentry Trajectory Optimization using Direct Method, (M.Sc. Thesis), Aerospace Department, Malek-ashtar University of Technology, Tehran, 2014, (in persian).

[5] Barghandan, M., Optimal Guidance and Control of Reentry Vehicle using Combined Methods, (M.Sc. Thesis), Aerospace Department, Tehran, Malek-ashtar University of Technology, 2014, (in persian).

[6] Abbasi, D. and Mortazavi, M., *A New Concept for Atmospheric Reentry Optimal Guidance: An Inverse Problem Inspired Approach,* Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2013, Article ID 419409.

[7] Huifeng, L., Ran, Zh, Zhaoying, L. and Rui, Zh., "Footprint Problem with Angle of Attack Optimization for High Lifting Reentry Vehicle," *Chinese Journal of Aeronautics,*Vol. 25, 2012, pp. 243-251.

[8] Susan Babu, R., Rajeev, U. P. and Lethakumari, R. "Hybrid Guidance Algorithm using Flatness and Dynamic Inversion for RLV," *Third International Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems*, Kanpur, India , 2014.

[9] Sushnigdha, G. and Joshi, A., "Evolutionary Method Based Hybrid Entry Guidance Strategy for Reentry Vehicles," *IFAC-PapersOnLine* 49-5 , 2016, pp. 339–344.

[10] Hu, Y., Liu, J. and Liu, B., "Trajectory planning of free-floating space robot using particle swarm optimization (PSO)", *Acta Astronaut*, Vol. 112, 2015, pp. 77–88.

[11] Wua, Y., Yao, J. and Qu, X., "An adaptive reentry guidance method considering the influence of blackout zone", *Acta Astronautica*,Vol. 142, 2018, pp. 253–264.

[12] Wingrove, R.C. "Survey of atmosphere re-entry guidance and control methods", *AIAA J.*, Vol. 1, No 9, 2015, pp. 2019–2029.

[13] Muylaert, j. and etal. "Flight Experiments for Hypersonic Vehicle Development Expert", *RTO AVT Lecture Series on Critical Technologies* for Hypersonic Vehicle Development, 2004.

[14] Siouris, G. and *Missile*, M., *Guidance and Control Systems, New York:* Springer, 2003.

[15] Desineni Subbaram, N., *Optimal Control Systems*, Idaho, USA: CRC Press, 2002.