JSST

Vol. 11/ No.1/ 2018

Optimal Multiple-Impulse Orbit Transfer Utilizing Pseudo-Newton Method

A.Shakouri[1], M.Kiani[2*], S. H. Pourtakdoust[3] and M.Sayanjali[4]

1,2,3.Department of Center for Research and Development in Space Science and Technology, Sharif University of Technology

4.Department of Satellite System Institute, Iranian Space Research Center

Postal Code: 14588-89694, Tehran, Iran

kiani@sharif.edu

A new strategy is presented for the optimal transfer of non-coplanar elliptical orbits based on sequential multi-Lambert trajectories. The proposed method tries to minimize the control effort during the orbit transfer. The main advantages of the proposed method include transfer between arbitrary initial and final orbits, utilizing desired number of impulses, and covering all possible transfer trajectories to achieve the target. The position and time instant of impulses are considered as the design variables which determine utilizing the well-known optimization method of pseudo-Newton. Performance of the proposed method is investigated and verified through some numerical simulations. It is also shown that the proposed method converges to the celebrated Hahmann's maneuver in transfer between two coplanar orbital orbits.

Keywords: Orbital maneuver, Multiple-impulse maneuver, Optimization, Pseudo-Newton method

1. M. Sc.
2. Assistant Professor (Corresponding Author)
3. Professor
4. PhD

Received: 2017.08.23, Accepted: 2018.02.28

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۱۱ / شمارهٔ ۱/ بهار ۱۳۹۷
ص. ص. ۵۷- ۴۹

بهینه‌سازی انتقال مداری چندضربه‌ای با استفاده از روش شبه نیوتن

امیر شکوری[۱]، مریم کیانی[۲*]، سید حسین پورتاکدوست[۳] و محمد سینجلی[۴]

۱، ۲ و ۳- دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

۴- پژوهشکدهٔ سامانه‌های ماهواره، پژوهشگاه فضایی ایران

*تهران، کدپستی: ۹۵۶۷-۱۱۳۶۵

kiani@sharif.edu

در این مقاله روشی جامع برای دست‌یابی به مسیرهای انتقال مداری بهینه بین دو مدار بیضوی غیرصفحه‌ای با استفاده از چند ضربه بر مبنای تکه مسیرهای لمبرت متوالی ارائه شده است. هدف، دست‌یابی به این مسیرها همراه با حداقل میزان مصرف سوخت است. از قابلیت‌های این روش پیشنهادی می‌توان به توانایی پیاده‌سازی برای تعداد دلخواه ضربه، تنوع مشخصات مدار ابتدایی و انتهایی و پوشش تمامی مسیرهای امکان‌پذیر قابل دست‌یابی به مدار هدف اشاره کرد. تعداد ضربه‌ها به عنوان ورودی مسئله لحاظ شده و مکان و زمان اعمال ضربه به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی درنظر گرفته شده‌است. با توجه به زیادبودن تعداد متغیرهای بهینه‌سازی، از روش حل شبه نیوتن جهت افزایش سرعت بهینه‌سازی کمک گرفته شده است. در راستای اعتبارسنجی روش پیشنهادی، ابتدا یک مسئلهٔ انتقال مداری بین دو مدار دایروی بررسی شده و همگرایی حل حاصله به حل مسئله هاهمن نشان داده شده است. سپس، کارآیی روش پیشنهادی در مانورهای ملاقات و انتقال مداری نیز بررسی و نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: مانور مداری، مانور چندضربه‌ای، بهینه‌سازی، شبه‌نیوتن

علائم و اختصارات

بردار موقعیت	$\mathbf{r}$
بردار سرعت	$\mathbf{v}$
بردار متغیرهای بهینه‌سازی	$\mathbf{x}$
تابع هزینه	J
زمان	t
شمارنده	i
تعداد ضربه	N
اپراتور گرادیان	∇
ماتریس هسین	$\mathbf{H}$
ماتریس همانی	$\mathbf{I}$
ضریب کاهش	α
زاویه	β
آنومالی حقیقی	θ
تعداد متغیرهای بهینه سازی	n
ضریب قابل تنظیم اسکالر	k_i
Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno	BFGS
Linear quadratic regulator	LQR
Davidon-Fletcher-Powell	DFP
Symmetric rank-one	SR1
Particle Swarm Optimization	PSO

مقدمه

مانورهای مداری ضربه‌ای به جهت کاربردی بودن در انتقال میان مدارهای فضایی بسیار مورد توجه‌اند. مشهورترین مانور ضربه‌ای

۱. کارشناسی ارشد
۲. استادیار (نویسنده مخاطب)
۳. استاد
۴. دکتری

دریافت مقاله: ۹۶/۰۸/۲۳ ، تأیید مقاله: ۹۶/۱۲/۰۹

توسط والتر هاهمن[5] جهت انتقال دو ضربه‌ای بین مدارهای دایروی معرفی شده است [۱]. پس از آن دیدگاه‌های انتقال مداری زمان ثابت با استفاده از حساب تغییرات و روش بردار اولیه[6] بررسی شده [۲] و برای مانورهایی میان مدارهای دایروی [۳] و بیضوی [۴] مورد استفاده قرار گرفته است. تأثیر قیود مسیر [۵] و قیدهای همزمان مسیر و تراسترها نیز با استفاده از بهینه‌سازی مقید در مرجع [۶] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. علاوه‌بر روش‌های کلاسیک، از روش‌های بهینه‌سازی ابتکاری نیز می‌توان برای به‌دست آوردن مسیرهای بهینه استفاده کرد [۷، ۸]. به‌علاوه، اثر عدم قطعیت بر روی مانورهای مداری می‌تواند به عنوان محرکی در جهت بهینه‌سازی بر مبنای کواریانس[7] قرار بگیرد که در مرجع [۹] بررسی شده است. از دیگر کارهای انجام گرفته در ارتباط با مانورهای ضربه‌ای در داخل کشور نیز می‌توان به مراجع [۱۰، ۱۱] اشاره کرد.

یکی از روش‌های مرسوم در استخراج مسیرهای مانور مداری و مقدار ضربه‌های مورد نیاز، استفاده از مسئلهٔ لمبرت[8] است [۱۲]. مسئلهٔ لمبرت با دادن موقعیت اولیه، موقعیت نهایی و مدت زمان انتقال حل می‌شود. حل لمبرت، یک مدار (به‌صورت مقطعی مخروطیتحت مسئلهٔ دو جسم) را طوری می‌یابد که جسم بتواند در زمان تعیین شده میان دو موقعیت مذکور انتقال یابد. این همان چیزی است که در مانور ضربه‌ای به دنبال آن هستیم. مسئلهٔ لمبرت می‌تواند ابزاری مناسب برای دست‌یابی به یک مانور دو ضربه‌ای باشد. نمونه‌های ارتقایافته‌ای از مسئلهٔ لمبرتدر حضور اغتشاشات مداری نیز توسعه یافته است [۱۳-۱۷]. همچنین، حل مسئلهٔ لمبرت در حضور عدم قطعیت در مرجع [۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است.

برای مانورهای چند ضربه‌ای، می‌توان از اتصال چندین مسیر لمبرت به صورت پیاپی به جهت رسیدن به مسیر موردنظر استفاده نمود. در مرجع [۱۹] این روش با استفاده از بهینه‌سازی با الگوریتم ژنتیک توسعه یافته است. متغیرهای بهینه‌سازی مورد استفاده در این مطالعه، شامل زمان میان ضربه‌ها و موقعیت‌های اولیه و نهایی است. حال آن که موقعیت ضربه‌های میانی نیز می‌تواند پاسخ مسئله را به کلی تغییر دهد. در مرجع [۱۹] به جهت استفاده از یک الگوریتم زمان‌بر، پیاده‌سازی روش مورد اشاره برای هر تعداد دلخواه از ضربه میسر نبوده و رسیدن به دقت مناسب نیازمند صرف هزینه محاسباتی بسیار بالایی است.

در پژوهش حاضر، با پیاده‌سازی یک الگوریتم شبه‌نیوتن[9] مبتنی بر گرادیان، راه حل بهینهٔ سریع‌تری نسبت به استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری ارائه شده و همین مسئله راه را برای در نظر گرفتن تمامی متغیرهای بهینه‌سازی فراهم می‌آورد. همچنین، برای شروع فرایند بهینه‌سازی یک حدس اولیه مورد نیاز است که روشی کلی برای دست‌یابی به آن ارائه خواهد شد. در ادامه برای ارزیابی و اعتبارسنجی روش پیشنهادی، یک مانور جهت انتقال بین دو مدار دایروی از آنومالی حقیقی[10] صفر به ۱۸۰ درجه را با استفاده از چهار ضربه حل و همگرایی آن به مانور هاهمن نشان داده خواهد شده است. سپس جهت بررسی بیشتر روش پیشنهادی، دو مثال انتقال مداری صفحه‌ای و خارج از صفحه‌را با استفاده از روش پیشنهادی حل و بررسی خواهد شد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که استفاده از الگوریتم پیشنهادی برای دست‌یابی به مسیرهای ضربه‌ای، اهداف پیش رو را در مقایسه با مراجع پیشین فراهم خواهد کرد نظیر: (۱) در مراجعی مانند [۳] مانورهای مداری تنها میان مدارهای دایروی بررسی شده‌اند،در حالی که الگوریتم پیشنهادی مقاله حاضر توانایی پیاده‌سازی مانور میان مدارهای بیضوی را داراست. (۲) در مراجعی مانند [۱-۴] مانورمداری محدود به هم‌صفحه بودن مدارهاست که در این مقاله به چنین قیدی محدود نخواهیم بود. (۳) در مقایسه با [۷، ۸] که استفاده از الگوریتم‌های زمان‌بر خصوصا در ابعاد بالا می‌تواند از رسیدن به دقت‌های مناسب به‌علت هزینه محاسباتی بالا جلوگیری نماید، الگوریتم پیشنهادی این مقاله می‌تواند با استفاده از گرادیان مسئله، به‌سمت حل با هر دقتی پیش برود. (۴) در مقایسه با مرجع [۱۹] که استفاده از الگوریتم ژنتیک اجازه بررسی مسئله با بیشترین درجه آزادی (مدنظر گرفتن تمامی متغیرهای بهینه‌سازی) را نمی‌دهد، استفاده از الگوریتم پیشنهادی در این مقاله از حیث سرعت حل عددی، الگوریتم را کارآتر کرده و اجازه می‌دهد تا متغیرهای بهینه‌سازی را برای انتقال بین دو نقطه ثابت از فضا به بیشترین مقدار خود افزایش دهیم.

ساختار مقاله پیش‌رو بدین صورت می‌باشد: نخست، ایدهٔ انتقال مداری با استفاده از تکه مسیرهای لمبرت پیاپی مطرح خواهد شد. پس از آن، فرمولاسیون روش بهینه‌سازی شبه‌نیوتن با استفاده از تخمین BFGS ارائه خواهد شد. در ادامه، روشی کلی برای دست‌یابی به حدس اولیه معرفی شده است. سپس، نتایج شبیه‌سازی ارائه شده و نتایج بررسی خواهند شد. بخش پایانی مقاله نیز به بیان نتیجه حاصل از انجام این پژوهش اختصاص داده شده است.

انتقال مداری چندضربه‌ای با مسئلهٔ لمبرت

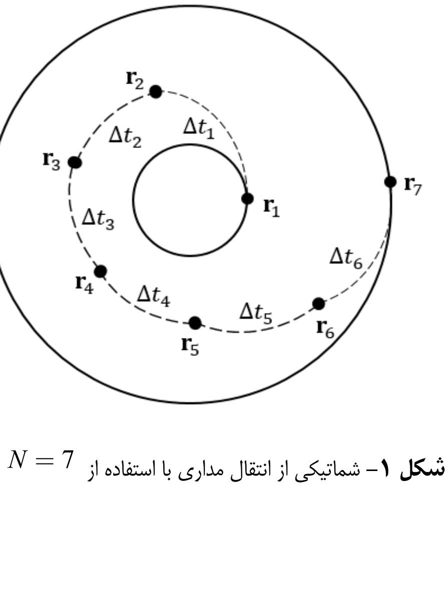
برای انتقال فضاپیما از موقعیت مکانی $\mathbf{r}_1$ به مکان $\mathbf{r}_N$ با استفاده از N ضربه، به $N-1$ تکه مسیر نیاز داریم که ضربه‌ها به ترتیب

5. Walter Hohmann
6. Primer vector
7. Covariance
8. Lambert's problem
9. Quasi-Newton
10. Real anomaly

روی ابتدا و انتهای هر تکه مسیر اعمال می‌شود تا ماهواره را از مسیر قبلی وارد مسیرجاری و از مسیر جاری وارد مسیر بعدی نماید. این تکه مسیرها به‌وسیلهٔ مسئلهٔ لمبرت تعیین می‌شوند. بنابراین،برای انتقال با استفاده از N ضربه، نیاز داریم تا $N-1$ بار مسئلهٔ لمبرت حل شود. از خواص این روش می‌توان به اطمینان از رسیدن از مکان اولیه به نهایی نام برد. بدین معنا که این روش خود به خود قید مکان نهایی را مستقل از زمان انتقال به سیستم اعمال می‌کند و مانند ترم بیرون انتگرال در حل LQR نیست که سعی‌کند به مکان نهایی نزدیک شود [۲۰]. این روش به ازای حل‌هایی که در تمامی مراحل الگوریتم به‌دست می‌آید (حتی حدس اولیه)، شرایط اولیه و نهایی را برقرار خواهد کرد. دلیل این برقراری، بهره‌گیری از حل لمبرت است که به ازای هر شرایط ابتدایی و انتهایی و زمان پرواز متناهی، مقادیر ضربه را نتیجه می‌دهد.

مسیر لمبرت برای اختلاف آنومالی‌های ۳۶۰ درجه دچار تکینگی می‌شود [۱۲]. همچنین، برای مسیرهایی با اختلاف آنومالی ۱۸۰ درجه و بیشتر، حل لمبرت حاصل مناسب نمی‌باشد (ضربه‌های بزرگ و نامعقولی بدست می‌دهد). به همین دلیل باید توجه کرد که مسیر حاصل طوری تنظیم شود که اختلاف آنومالی حقیقی میان ضربه‌های متوالی کمتر از ۱۸۰ درجه باشد.

موقعیت، سرعت و ضربه را در لحظه t_i به ترتیب با $\mathbf{r}_i$، $\mathbf{v}_i$ و $\Delta\mathbf{v}_i$ نشان می‌دهیم که i نشان‌دهندهٔ شماره ضربه است و می‌تواند مقادیر $i=1$ تا N را به خود بگیرد. در $i=1$ ماهواره از مدار اولیه جدا و در $i=N$ به مدار نهایی می‌رسد. هر مسئلهٔ لمبرت که از $\mathbf{r}_i$ به $\mathbf{r}_{i+1}$ در مدت زمان $\Delta t_{i(i+1)}=t_{i+1}-t_i$ حل می‌شود، دو سرعت اولیه و نهایی را به‌دست می‌دهد که به ترتیب برابر با $\mathbf{v}_i+\Delta\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_{i+1}$ خواهند بود (شکل ۱). به‌عبارتی‌دیگر، می‌توان سرعت در t_i (قبل اعمال ضربه) را $\mathbf{v}_i$ و سرعت در t_i+dt (پس از اعمال ضربه) را $\mathbf{v}_i+\Delta\mathbf{v}_i$ دانست.



شکل ۱- شماتیکی از انتقال مداری با استفاده از $N=7$ ضربه

در این روش پارامترهای بهینه‌سازی شامل موقعیت ضربه‌ها و زمان بین ضربه‌ها هستند. پارامترهای بهینه‌سازی را می‌توان در بردار $\mathbf{x}$ به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_{N-1} & \Delta t_{12} & \cdots & \Delta t_{(N-1)N}\end{bmatrix}^T \quad (۱)$$

تعداد متغیرهای بهینه‌سازیبرای یک مانور N ضربه‌ای، $4N-7$ است. با مقیدشدن زمان نهایی می‌توانیکی از این تعداد کم نمود و با مقیدشدن تمامی بازه‌های زمانی تعداد متغیرها به $3N-6$ کاهش خواهند یافت که در این جا حالت کلی مد نظر است. مقدار کل زمان پرواز، t_N، برابر است با

$$t_N=\sum_{i=1}^{N-1}\Delta t_{i(i+1)} \quad (۲)$$

تابع هزینه $J(\mathbf{x})$ در یک انتقال N ضربه‌ای را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$J(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}\left\|\Delta\mathbf{v}_i\right\| \quad (۳)$$

که در معادلهٔ (۳) مقدار ضربه‌ها $\Delta\mathbf{v}_i$ پس از حل هرکدام از مسیرهای لمبرت به‌دست خواهد آمد.

بهینه‌سازی شبه‌نیوتن

برای یافتن نقطهٔ اکسترمم یک تابع هزینه نسبت به متغیرهای بهینه‌سازی، می‌توان به دنبال ریشهٔ گرادیان تابع هزینه گشت ($\nabla_{\mathbf{x}}J\triangleq\mathbf{Hx}=\mathbf{0}_{n\times1}$). روش نیوتن یکی از راه حل‌های عددی موجود برای جستجوی نقاطی است که گرادیان تابع هزینه را صفر می‌کند. برای استفاده از روش نیوتن در جهت یافتن نقطهٔ اکسترمم تابع هزینهٔ J، نیاز به هسین[11] تابع هزینه، $\mathbf{H}$ خواهیم داشت. در مواردی یافتن یک مقدار تحلیلی برای $\mathbf{H}$ دشوار بوده وبنابراین ناگزیر از تقریب‌های عددی برای آن هستیم. روش‌های شبه‌نیوتن بر مبنای تقریب عددی ژاکوبین[12] در روش نیوتن بنا شده‌اند. در این راستا، روش‌های شبه‌نیوتن تقریب‌هایی عددی ارائه می‌کنند تا بدون نیاز به دانستن رابطهٔ تحلیلی هسین تابع هزینه، بتوان نقاط اکسترمم تابع را یافت.

به‌طورکلی، پس از دادن بردار حدس اولیه $\mathbf{x}^{(0)}$ به سیستم و محاسبهٔ گرادیان تابع هزینه نسبت به متغیرهای بهینه‌سازی $\nabla_{\mathbf{x}}J$ به‌روزرسانی متغیرها به روش زیر انجام می‌گیرد [۲۱]:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)} \quad (۴)$$

$$\Delta\mathbf{x}^{(k)}=-\alpha\mathbf{H}^{(k)}\nabla_{\mathbf{x}}J^{(k)} \quad (۵)$$

11. Hessian
12. Jacobian

مقدار α باید طوری تنظیم شود تا شرط وولف[13] را ارضا کند [۲۱، ۲۲]. مقدار هسین $\mathbf{H}^{(k)}$ در مرحلهٔ kام را می‌توان به‌وسیلهٔ الگوریتم‌های DFP [۲۳]، BFGS [۲۴]، Broyden [۲۵]،SR1 [۲۶] یا روش Chord (که هسین را ثابت و برابر با مقدار آن در حدس اولیه قرار می‌دهد) تقریب زد. در این میان، الگوریتم BFGS دارای قابلیت‌های بهتری نسبت به سایر روش‌ها بوده و برای مسائل غیرهموار نیز قابل استفاده است. ماتریس هسین به‌وسیلهٔ این الگوریتم به‌صورت زیر به‌روزرسانی می‌شود:

$$\mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{H}^{(k-1)}\mathbf{A}^T + \mathbf{B} \tag{۶}$$

به‌طوری که،

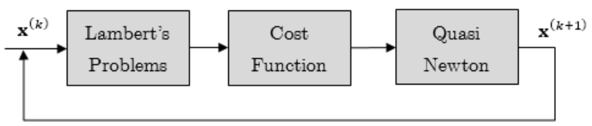
$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_{n\times n} - \frac{\Delta\mathbf{x}^{(k-1)}\left[\mathbf{y}^{(k-1)}\right]^T}{\left[\Delta\mathbf{x}^{(k-1)}\right]^T \mathbf{y}^{(k-1)}} \tag{۷}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\Delta\mathbf{x}^{(k-1)}\left[\Delta\mathbf{x}^{(k-1)}\right]^T}{\left[\Delta\mathbf{x}^{(k-1)}\right]^T \mathbf{y}^{(k-1)}} \tag{۸}$$

$$\mathbf{y}^{(k-1)} = \nabla_{\mathbf{x}} J^{(k)} - \nabla_{\mathbf{x}} J^{(k-1)} \tag{۹}$$

مقدار n برابر با تعداد متغیرهای بهینه‌سازی است. برای به‌روزرسانی از روابط فوق، نیاز به دانستن مقدار گرادیان $\nabla_{\mathbf{x}} J$ داریم. مقدار گرادیان با استفاده از روش عددی اختلاف محدود به‌دست خواهد آمد. در معادلهٔ (۵) با برابر قرار دادن $\mathbf{H} = \mathbf{I}_{n\times n}$ به الگوریتم نزول گرادیانی[14] می‌رسیم. بنابراین، مقدار حدس اولیهٔ برای $\mathbf{H}$ را می‌توان برابر با ماتریس همانی قرار داد یعنی $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I}_{n\times n}$.

اکنون می‌توان بهینه‌سازی شبه‌نیوتن را بر روی مسئلهٔ مانور ضربه‌ای پیاده‌سازی نمود. شکل (۲) الگوریتم بهینه‌سازی را در ترکیب با مسئلهٔ لمبرت به صورت یک نمودار بلوکی نشان می‌دهد. الگوریتم به یک حدس اولیه برای شروع نیاز دارد که موضوع بخش بعدی است.



شکل ۲– نمودار بلوکی الگوریتم پیشنهادی

حدس اولیه

در این بخش روش به‌دست آوردن حدس اولیه برای شروع الگوریتم پیشنهادی ارائه می‌گردد. نخست حدس اولیه برای مانور هم صفحه و سپس تعمیمی از آن برای مانورهای خارج صفحه پیشنهاد خواهد شد.

مانور هم‌صفحه

حدس اولیه برای مکان ضربه‌ها بر رویبک هندسهٔ مارپیچ[15] که نقاط اولیه و نهایی را قطع می‌کند، داده می‌شود. هندسهٔ مارپیچمورد نظر برای یک انتقال دوبعدی میان مدارهای دایروی، به‌صورت پیشنهادی زیر در یک دستگاه قطبی قابل بیان است:

$$r(\theta) = k_1 \exp\left[-k_2 \cos(\theta)\right] \tag{۱۰}$$

در رابطهٔ فوق θ آنومالی حقیقی مدار است. ضرایب k_i را طوری تعیین می‌کنیم تا مارپیچ از نقاط اولیهٔ (r_1) و نهایی (r_N) عبور کرده و حتی الامکان به مدار در این نقاط مماس باشد. فرض کنید انتقال از آنومالی حقیقی صفر تا ۱۸۰ درجه باشد. بنابراین، $dr(0)/d\theta = 0$ و $dr(\pi)/d\theta = 0$. با استفاده از شروط هندسی که برشمرده شد، پس از ساده‌سازی داریم:

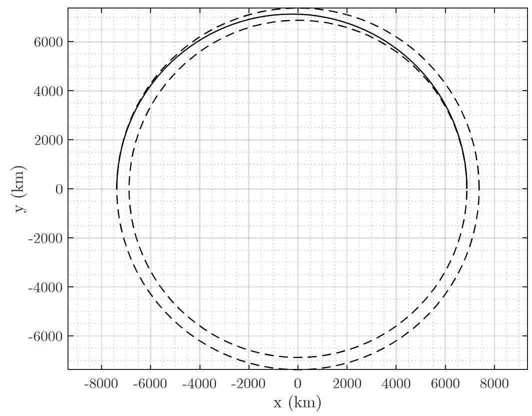
$$k_1 = \sqrt{r(\pi)r(0)} \tag{۱۱}$$

$$k_2 = \ln\left[\frac{r(\pi)}{r(0)}\right] \tag{۱۲}$$

و در نهایت معادلهٔ (۱۰) به فرم زیر ساده می‌شود:

$$r(\theta) = \sqrt{r(\pi)r(0)}\left[\frac{r(\pi)}{r(0)}\right]^{-\frac{1}{2}\cos(\theta)} \tag{۱۳}$$

شکل (۳) مارپیچ تعریف شده در معادلهٔ (۱۳) را برای انتقال بین مدارهای دایروی با ارتفاع ۴۰۰ تا۵۰۰ کیلومتر نشان می‌دهد. همان‌طورکه در شکل (۳) مشخص است این منحنی بر مدارها در نقاط ابتدایی و انتهایی مماس است.



شکل ۳– منحنی مارپیچ کاندید برای حدس اولیه

13. Wolfe
14. Gradient descent
15. Spiral

اکنون برای داشتن حدسی اولیه از موقعیت ضربه‌ها باید این موقعیت‌ها را با تعریف $\theta = \theta_i$ از روی رابطه شکل (۳) انتخاب نمود. روند اتخاذ شده برای تعیین θ_iها در یک مانور با N ضربه به‌صورت زیر است:

$$\theta_i = \frac{\Delta\theta_{1N}}{N} + \theta_{N-1} \qquad (۱۴)$$

به‌طوری که،

$$\Delta\theta_{1N} = \frac{\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_N}{r_1 r_N} \qquad (۱۵)$$

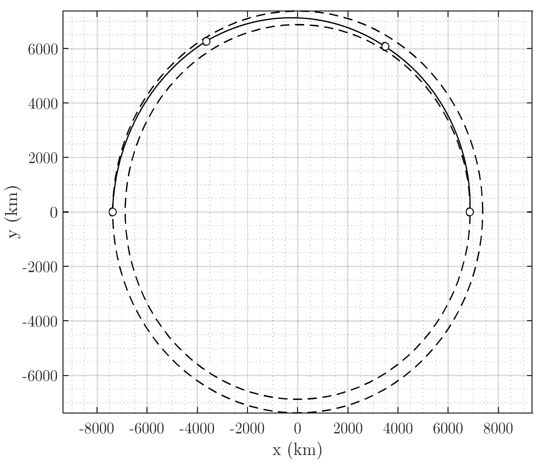
که مقادیر $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_N$ از پیش مشخص است. اکنون هر موقعیت را می‌توان برای انتقال N ضربه‌ای از آنومالی صفر تا ۱۸۰ درجه به‌صورت زیر معین کرد:

$$\mathbf{r}_i = \sqrt{r(\pi)r(0)}\left[\frac{r(\pi)}{r(0)}\right]^{-\frac{1}{2}\cos(\theta_i)} \begin{Bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۱۶)$$

دیگر پارامترهای بهینه‌سازی که باید در حدس اولیه مشخص شوند، بازه‌های زمانی میان هر دو ضربه می‌باشند. این بازه‌های زمانی را به‌صورت نسبتی از میانگین پریود دو مدار قرار می‌دهیم. نخست، میانگین پریود دو مدار را در $\Delta\theta_{1N}/2\pi$ ضرب کرده و مقدار حاصل را به تناسب فاصلهٔ خطی میان مکان ضربه‌ها تقسیم می‌کنیم. بنابراین، برای تعیین بازه‌های $\Delta t_{i(i+1)}$ داریم:

$$\Delta t_{i(i+1)} = \frac{T_1 + T_N}{2\pi} \frac{\left\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\right\|}{\sum_{i=1}^{N-1}\left\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\right\|} \qquad (۱۷)$$

اکنون برای یک انتقال ۴ ضربه‌ای میان مدارهای دایروی از ارتفاع ۴۰۰ تا ۵۰۰ کیلومتر، با استفاده از حدس اولیهٔ تکه مسیرهای لمبرت متوالی به‌دست آمده است که مسیر متناظر با حدس اولیه برای بهینه‌سازی خواهد بود (شکل ۴).



شکل ۴– مسیر متناظر با حدس اولیه تولید شده به‌وسیلهٔ تکه لمبرت‌های متوالی

مانور غیر هم‌صفحه

برای یک مانور همراه با تغییر صفحه ابتدا لازم است، حدس اولیهٔ داده شده در زیربخش قبل را متناسب با یک حرکت سه‌بعدی اصلاح کنیم. حدس اولیه‌ای ارائه شده در زیربخش قبل برای حرکت دوبعدی تدوین می‌شود. به همین جهت، تمامی موقعیت‌های ضربه‌های میانی را روی صفحه تنظیم کرده‌ایم. برای رویهٔ تعریف شده در این قسمت، موقعیت‌های میانی روی صفحه‌ای تعریف می‌شوند که شامل بردار موقعیت اولیه و نهایی باشد. در این راستا، حدس اولیهٔموقعیت ضربه‌های میانی را برای یک انتقال از آنومالی صفر به ۱۸۰ درجه به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathbf{r}_i = \sqrt{r(\pi)r(0)}\left[\frac{r(\pi)}{r(0)}\right]^{-\frac{1}{2}\cos(\theta_i)} \begin{Bmatrix} \cos(\theta_i)\cos(\beta_i) \\ \sin(\theta_i)\cos(\beta_i) \\ \sin(\beta_i) \end{Bmatrix} \qquad (۱۸)$$

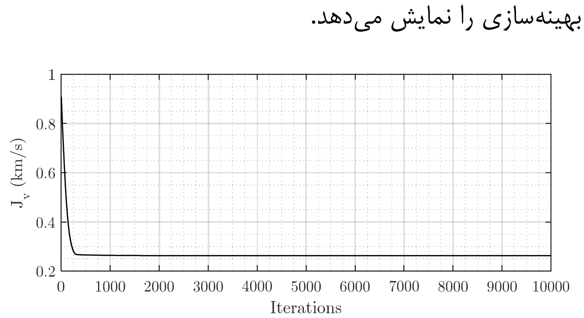
در رابطهٔ فوق، β_iسهم هر یک از موقعیت‌های میانی در افزایش زاویهٔ شیب مداری است. رابطهٔ (۱۸) فرم کلی‌تر رابطهٔ (۱۶) بوده و برای انتقال‌های دوبعدی نیز قابل استفاده است.

تحلیل و شبیه‌سازی

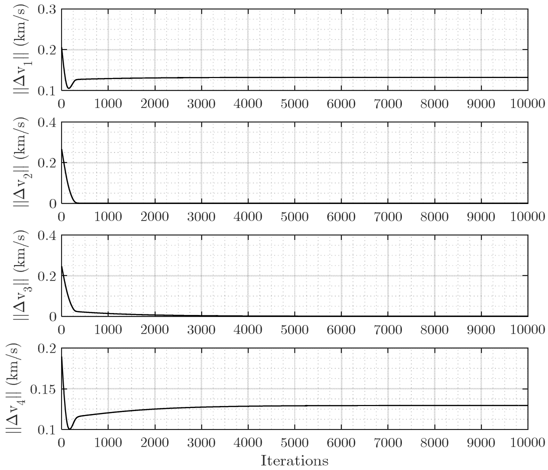
در این بخش روش ارائه شده به‌وسیله شبیه سازی و حل عددی پیاده سازی شده و نتایج آن ارائه شده است. دو مثال هم صفحه و خارج صفحه برای مانورهای مداری بررسی شده‌اند.

اعتبارسنجی

به جهت اعتبارسنجی روند همگرایی الگوریتم پیشنهادی، مسئلهٔ انتقال از آنومالی حقیقی صفر در مدار دایروی ۵۰۰ کیلومتری به آنومالی حقیقی ۱۸۰ درجه در مدار دایروی ۱۰۰۰ کیلومتری را بررسی خواهیم نمود. با استفاده از حدس اولیهٔ داده شده در بخش قبل و اجرای الگوریتم پیشنهادی با استفاده از بهینه‌سازی شبه‌نیوتن، متغیرهای بهینه‌سازی پس از ۱۰۰۰۰ تکرار متوالی همگرا شده‌اند. شکل (۵) روند همگرایی تابع هزینه را نشان می‌دهد. شکل (۶) نیز روند همگرایی مقدار ضربه‌ها طی فرایند بهینه‌سازی را نمایش می‌دهد.



شکل ۵– همگرایی تابع هزینه در فرایند بهینه‌سازی



شکل ۶- همگرایی مقدار اندازه ضربه‌ها در فرایند بهینه‌سازی

همان‌طورکه در شکل‌های (۵) و (۶) مشاهده می‌شود، مقدار ضربه‌های میانی به صفر رسیده و ضربه‌های ابتدایی و انتهایی به همراه مقدار تابع هزینه به حل تحلیلی هاهمن میل می‌کنندکه با توجه به مرجع [۱۲] مقدار تحلیلی آن‌ها، $\|\Delta\mathbf{v}_i\|_{\text{an}}, i=1,2,3,4$، برابر است با:

$$\|\Delta\mathbf{v}_1\|_{\text{an}}=\sqrt{\frac{\mu}{\|\mathbf{r}_1\|}}\left(\sqrt{\frac{2\|\mathbf{r}_4\|}{\|\mathbf{r}_1\|+\|\mathbf{r}_4\|}}-1\right)=0.1323\,\text{km} \quad (۱۹)$$

$$\|\Delta\mathbf{v}_2\|_{\text{an}}=0 \quad (۲۰)$$

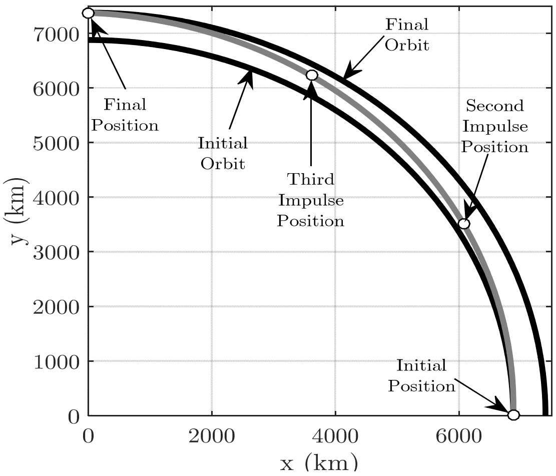
$$\|\Delta\mathbf{v}_3\|_{\text{an}}=0 \quad (۲۱)$$

$$\|\Delta\mathbf{v}_4\|_{\text{an}}=\sqrt{\frac{\mu}{\|\mathbf{r}_4\|}}\left(1-\sqrt{\frac{2\|\mathbf{r}_1\|}{\|\mathbf{r}_1\|+\|\mathbf{r}_4\|}}\right)=0.1300\,\text{km} \quad (۲۲)$$

این رفتار سیستم را به عنوان یک معیار اعتبار پذیرفته می‌شود. در ادامه، روش پیشنهادی را برای چند مثال دشوارتر که حل‌های بسته‌ای ندارند، بررسی می‌کنیم.

مثال الف: مانور مداری هم‌صفحه

نخستین مثال مورد بررسی، مسئلهٔ مانور مداری صفحه‌ای از یک مدار دایروی با ارتفاع ۵۰۰ کیلومتر در آنومالی حقیقی صفر به یک مدار دایروی با ارتفاع ۱۰۰۰ کیلومتری در آنومالی حقیقی۹۰ درجه با استفاده از چهار ضربه است. پس از دادن حدس اولیه و همگرایی مسئله، مانور مداری بهینه حاصل می‌شود. شکل (۷) مسیر بهینهٔ مانور را به همراه مکان ضربه‌ها نشان می‌دهد. مقدار متغیرهای بهینه‌سازی و مقدار ضربه‌ها به همراه تلاش کنترلی به‌ترتیب در جدول‌های (۱) و (۲) متناظر با حدس اولیه و پاسخ نهایی آورده شده است.



شکل ۷- مسیر انتقال چهار ضربه‌ای برای مثال اول

جدول ۱- مقادیر اولیه و نهایی متغیرهای بهینه‌سازی برای مثال اول

متغیر	مقدار اولیه	مقدار نهایی
$\mathbf{r}_2$	$\begin{bmatrix}5.9847\\3.4553\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$	$\begin{bmatrix}6.0751\\3.5056\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$
$\mathbf{r}_3$	$\begin{bmatrix}3.4999\\6.0621\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$	$\begin{bmatrix}3.6081\\6.2256\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$
Δt_{12}	490.0344 s	471.9025 s
Δt_{23}	494.4932 s	493.0527 s
Δt_{34}	513.4445 s	522.3657 s

جدول۲- مقادیر اولیه و نهایی پارامترهای تصمیم‌گیری برای مثال اول

پارامتر	مقدار اولیه	مقدار نهایی
$\|\Delta\mathbf{v}_1\|$	0.2772 km/s	0.2683 km/s
$\|\Delta\mathbf{v}_2\|$	0.3376 km/s	0.0003 km/s
$\|\Delta\mathbf{v}_3\|$	0.7318 km/s	0.0001 km/s
$\|\Delta\mathbf{v}_4\|$	0.6929 km/s	0.3262 km/s
$J=\sum\|\Delta\mathbf{v}_i\|$	2.0395 km/s	0.5950 km/s

باتوجه به جداول (۱) و (۲) نکات زیر قابل استنتاج است:

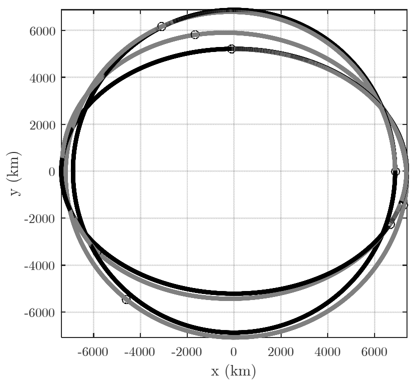
الف-۱: با مقایسهٔ مقادیر متغیرهای بهینه‌سازی در حدس اولیه و نهایی (جدول ۱)، می‌توان به تأثیر تغییرات حتی اندک متغیرهای بهینه‌سازی در مقادیر ضربه‌ها و تلاش کنترلی پی برد.

الف-۲: مقادیر ضربه‌های دوم و سوم به مقدار صفر همگرا شده‌اند (جدول ۲)، این بدان معناست که از دید تلاش کنترلی مانور دو ضربه (تک لمبرت)، مانور بهینه برای این انتقال است که الگوریتم به آن رسیده است.

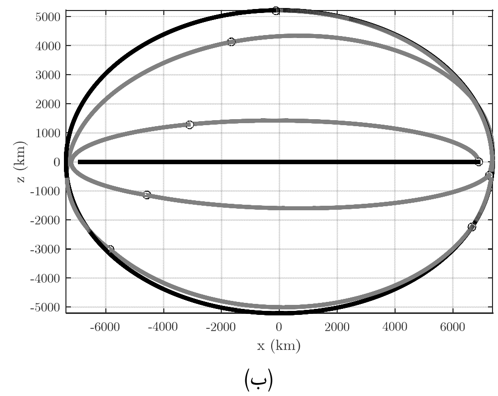
الف-۳: باتوجه به جدول (۲)، تلاش کنترلی کاهش و این درحالی است که مقدار ضربه چهارم افزایش یافته است. این بدان معناست که حل بهینه از دیدگاه تلاش کنترلی به بیشینه ضربهٔ بالاتری نسبت به حدس اولیه نیاز دارد. هرچند، مقدار تلاش کنترلی پاسخ نهایی بسیار کمتر (حدود ۳۰٪ حدس اولیه) است.

مثال ب: مانور مداری غیر هم‌صفحه

به عنوان مثال دوم، یک مانور مداری هشت ضربه‌ای از مدار دایروی با ارتفاع ۵۰۰ کیلومتر و آنومالی حقیقی صفر به مدار دایروی با ارتفاع ۱۰۰۰ کیلومتر و آنومالی حقیقی ۹۰ درجه را در نظر بگیرید که مسیر پس از دو دور چرخش به دور مرکز گرانش به مقصد برسد. در این مثال، مدارها دارای اختلاف زاویهٔ شیب مداری ۴۵ درجه نیز می‌باشند. به همین جهت، یک مانور غیر هم‌صفحه لازم است. پس از دادن حدس‌های اولیه، به شرط ارضا شدن قید دو دور چرخش، مسئله همگرا شده است. شکل (۸) (الف) تا (ج) مسیر بهینه را در سه صفحه و شکل ۹ نمایی سه‌بعدی از آن را نشان می‌دهد. مقدار متغیرهای بهینه‌سازی و مقدار ضربه‌ها به همراه تلاش کنترلی به‌ترتیب در جداول (۳) و (۴) متناظر با حدس اولیه و پاسخ نهایی آورده شده است.

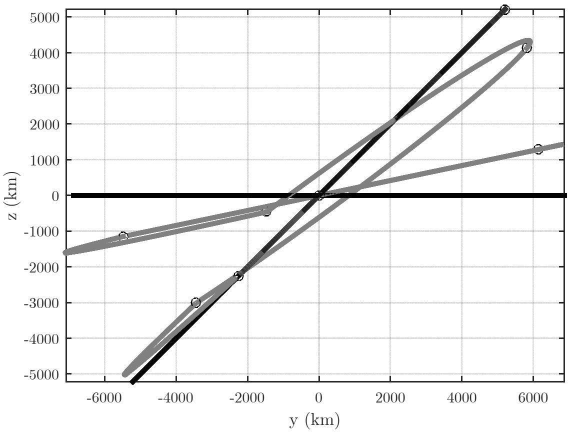


(الف)



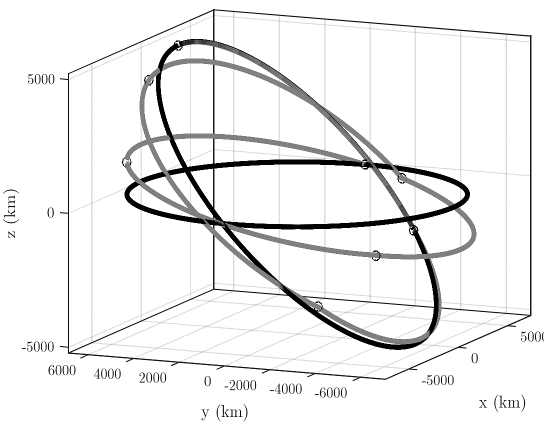
(ب)

شکل ۸- مسیر انتقال هشت ضربه‌ای برای مثال دوم در هر صفحه: (الف) صفحه x-y، (ب) صفحه x-z و (ج) صفحه y-z



(ج)

(ادامه) شکل ۸- مسیر انتقال هشت ضربه‌ای برای مثال دوم در هر صفحه: (الف) صفحه x-y، (ب) صفحه x-z و (ج) صفحه y-z



شکل ۹- مسیر انتقال هشت ضربه‌ای در سه بعد برای مثال دوم

جدول ۳- مقادیر اولیه و نهایی متغیرهای بهینه‌سازی برای مثال دوم

متغیر	مقدار اولیه	مقدار نهایی
$\mathbf{r}_2$	$\begin{bmatrix}-3.0314\\6.2343\\0.8704\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$	$\begin{bmatrix}-3.0994\\6.1597\\1.2876\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$
$\mathbf{r}_3$	$\begin{bmatrix}-4.4212\\-5.3155\\-1.5753\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$	$\begin{bmatrix}-4.5859\\-5.4751\\-1.1488\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$
$\mathbf{r}_4$	$\begin{bmatrix}7.0058\\-1.4451\\-0.6844\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$	$\begin{bmatrix}7.2482\\-1.4654\\-0.4644\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$
$\mathbf{r}_5$	$\begin{bmatrix}-1.6169\\5.8697\\3.9662\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$	$\begin{bmatrix}-1.6467\\-5.8200\\4.1296\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$

متغیر	مقدار اولیه	مقدار نهایی
$\mathbf{r}_6$	$\begin{bmatrix}-5.7287\\-3.3820\\-3.0712\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$	$\begin{bmatrix}-5.8490\\-3.4385\\-3.0142\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$
$\mathbf{r}_7$	$\begin{bmatrix}6.6360\\-2.0678\\-2.4366\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$	$\begin{bmatrix}6.6592\\-2.2470\\-2.2470\end{bmatrix}\times10^3\,\text{km}$
Δt_{12}	$2.0762\times10^3\,\text{s}$	$1.8241\times10^3\,\text{s}$
Δt_{23}	$2.1022\times10^3\,\text{s}$	$1.9326\times10^3\,\text{s}$
Δt_{34}	$2.3505\times10^3\,\text{s}$	$2.0264\times10^3\,\text{s}$
Δt_{45}	$2.1622\times10^3\,\text{s}$	$1.9886\times10^3\,\text{s}$
Δt_{56}	$2.1623\times10^3\,\text{s}$	$2.0028\times10^3\,\text{s}$
Δt_{67}	$2.2019\times10^3\,\text{s}$	$2.0552\times10^3\,\text{s}$
Δt_{78}	$2.2066\times10^3\,\text{s}$	$2.0235\times10^3\,\text{s}$

جدول ۴- مقادیر اولیه و نهایی پارامترهای تصمیم‌گیری برای مثال دوم

پارامتر	مقدار اولیه	مقدار نهایی
$\lVert\Delta\mathbf{v}_1\rVert$	1.3645 km/s	1.5796 km/s
$\lVert\Delta\mathbf{v}_2\rVert$	1.8495 km/s	0.0144 km/s
$\lVert\Delta\mathbf{v}_3\rVert$	2.4716 km/s	0.2403 km/s
$\lVert\Delta\mathbf{v}_4\rVert$	2.9054 km/s	3.0499 km/s
$\lVert\Delta\mathbf{v}_5\rVert$	1.3237 km/s	0.0003 km/s
$\lVert\Delta\mathbf{v}_6\rVert$	1.9522 km/s	1.0372 km/s
$\lVert\Delta\mathbf{v}_7\rVert$	1.1911 km/s	0.3336 km/s
$\lVert\Delta\mathbf{v}_8\rVert$	0.6832 km/s	0.0002 km/s
$J=\sum\lVert\Delta\mathbf{v}_i\rVert$	13.7412 km/s	6.2553 km/s

باتوجه به جداول (۳) و (۴) نکات زیر قابل استنتاج است:

ب-۱: مقدار ضربه‌های اول، چهارم و ششم دارای مقادیر بزرگی است و این مشاهده از آنجا نشأت می‌گیرد که وظیفه تغییر صفحهٔ مداری به عهدهٔ این ضربه‌ها است.

ب-۲: با دو دور چرخش به دور مرکز گرانش، می‌توان مقدار ضربهٔ کل مورد نیاز برای تغییر صفحه را میان چندین لحظه تقسیم نمود تا نیاز به ضربه‌های بزرگ ودر نتیجه تراسترهای بزرگ نباشد.

ب-۳: مانورهای تغییر صفحه در نزدیکی خط واصل صفحات دو مدار اتفاق افتاده‌اند.

نتایج و بحث

در مسائل پیچیده‌ای نظیر انتقال مداری چند ضربه‌ای، ممکن است با اندک تغییری در زمان و یا مکان اعمال ضربه‌ها، تغییرات محسوس و بعضاً بزرگی در تابع هزینه رخ دهد (نکته الف-۱). یکی از مزایای استفاده از روش‌هایی مانند روش شبه‌نیوتون، دیده شدن چنین تغییراتی در الگوریتم و حرکت پایدار به سمت مقادیر بهینه است. همان‌طورکه مشاهده شد، الگوریتم پیشنهادی بر مبنای یک روش بهینه‌سازی شبه‌نیوتن توانست جواب‌هایی هموار با تلاش کنترلی مناسبی برای مسائل دوبعدی و سه‌بعدی با هر گونه شرایطی را به‌دست آورد. نکتهٔ حائز اهمیت در این‌جا، توجه به این مطلب می‌باشد که روش پیشنهادی یک روش موضعی است. بدین معنی که دادن یک حدس اولیهٔ مناسب در پاسخ نهایی نقش کلیدی دارد. این مسئله می‌تواند نقطهٔ قوتی به جهت بررسی پاسخ‌های موضعی مختلف از دید طراح باشد. از سوی دیگر، این تأثیر می‌تواند بعضاً به جهت دشواری در یافتن حدس اولیهٔ مناسب و یا عدم دست‌یابی به پاسخ بهینهٔ مطلق، یک ضعف به‌حساب آید.

استفاده از یک بهینه‌ساز با الگوریتم‌های ابتکاری نظیر الگوریتم ژنتیک و یا PSO در ترکیب با روش شبه‌نیوتن گفته شده در این مقاله می‌تواند منجر به دست‌یابی به پاسخ‌های بهتری باشد که در آینده مورد بررسی قرار خواهد گرفت. البته، در آن صورت باتوجه به این‌که ممکن است بهینهٔ مطلق پاسخی تکین داشته باشد، شاید نتوان با هر تعداد دور دلخواه (نظیر مثال دوم) به مقصد موردنظر رسید.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش نوین برای دست‌یابی به مسیرهای انتقال مداری ضربه‌ای پیشنهاد و مورد بررسی قرار گرفته است. از مزایای این روش می‌توان به قابلیت استفاده از آن برای هرگونه انتقال مداری مابین مدارهای دایروی یا بیضوی و نیز داخل یا خارج صفحه نام برد. روش پیشنهادی با استفاده از تکه مسیرهای لمبرت متوالی، یک مسیر میان مبدأ و مقصد تشکیل می‌دهد. این مسیر تابع مکان‌ها و زمان‌های اعمال ضربه است. در این مقاله روشی کلی در جهت دست‌یابی به یک حدس اولیه برای الگوریتم بهینه‌سازی ارائه و سپس با استفاده از روش شبه‌نیوتن، مکان‌ها و زمان‌های اعمال ضربهٔ بهینه در جهت کمینه‌سازی تلاش کنترلی محاسبه شده است. پس از اعتبارسنجی، روش به‌وسیلهٔ مقایسهٔ پاسخ‌ها با حل هاهمن در دو مثال هم‌صفحه و غیرهم‌صفحه جهت ارزیابی روش پیشنهادی ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که مسیرهای به‌دست آمده دارای هندسه‌ای هموار و تلاش کنترلی مناسب است.

مراجع

[1] Hohmann, W. and Ozaki, S., “The Attainability of Heavenly Bodies,” *NASA Technical Translation F-44*, Washington, DC, 1960.

[2] Lion, P. M. and Handelsman, H., “Primer Vector on Fixed-Time Impulsive Trajectories,” *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 1, 1968, pp. 127-132.

[3] Prussing, J. E. andChiu, J. H., “Optimal Multiple-Impulse Time-Fixed Rendezvous Between Circular Orbits,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 9, No. 1, 1986, pp. 17-22.

[4] Lawden, D. F., “Optimal Transfer Between Coplanar Elliptical Orbits,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 12, No. 3, 1992, pp. 788-791.

[5] Taur, D. R., Coverstone-Carroll, V. and J. E. Prussing, "Optimal Impulsive Time-Fixed Orbital Rendezvous and Interception with Path Constraints," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 18, No. 1, 1995, pp. 54-60.

[6] Wenzel, R. S. and Prussing, J. E., "Preliminary Study of Optimal Thrust-Limited Path-Constrained Maneuvers," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 19, No. 6, 1996, pp. 1303-1309.

[7] Kim, Y. H., and Spencer, D. B., "Optimal Spacecraft Rendezvous Using Genetic Algorithms," *Journal of Spacecraft and Rockets,* Vol. 39, No. 6, 2002, pp. 859-865.

[8] Pontani, M., Ghosh, P., and Conway, B. A., "Particle Swarm Optimization of Multiple-Burn Rendezvous Trajectories," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 35, No. 4, 2012, pp. 1192-1207.

[9] Shakouri, A., *Trajectory Shaping of Orbital Maneuver in Presence of Uncertainty,* M.Sc. Thesis, Sharif University of Technology, 2017.

[10] Navabi, M. andSanatifar, M., “Optimal Impulsive Maneuver Between Elliptical Coplanar-Noncoaxial Orbits,” *Journal of Space Science and Technology (JSST)*, Vol. 3, No., 12, 2010, pp. 67-74.

[11] Navabi, M. and Sanatifar, M., “Optimal Impulsive Orbital 3D Maneuver with or without Time Constraints,” *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 44, No. 53, 2012, pp. 53-69.

[12] Curtis, H. D.,*Orbital Mechanics for Students*,3rd Ed., Butterworth-Heinemann, Boston, 2014.

[13] Prussing, J. E., “A Class of Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions,” *Journal of the Astronautical Sciences,* Vol. 48, No. 2, 2000, pp. 131-148.

[14] Shen, H. J., and Tsiotras, P., “Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 26, No. 1, 2003, pp. 50-61.

[15] Zhang, G., and Mortari, D., “Constrained Multiple-Revolution Lambert's Problem,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 33, No. 6, 2010, pp. 1779-1786.

[16] Engels, R., and Junkins, J., “The Gravity-Perturbed Lambert Problem: A KS Variation of Parameters Approach,” *Celestial Mechanics,* Vol. 24, No. 3, 1981, pp. 3-21.

[17] Kechichian, J. A., “The Algorithm of the Two-Impulse Time-Fixed Noncoplanar Rendezvous with Drag and Oblateness Effects,” *Journal of the Astronautical Sciences,* Vol. 46, No. 1, 1998, pp. 47-64.

[18] Schumacher, P. W., Sabol C., Higginson C. C., and Alfriend K. T., “Uncertain Lambert Problem,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 38, No. 9, 2015, pp. 1573-1584.

[19] Abdelkhalik, O., and Mortari, D., “N-Impulse Orbit Transfer Using Genetic Algorithms,” *Journal of Spacecraft and Rockets,* Vol. 44, No. 2, 2007, pp. 456-460.

[20] Bryson, A. E., HoY. C., *Applied Optimal Control*,Hemisphere Publishing Corporation, London, 1975.

[21] Kelley, C. T.,*Iterative Methods for Optimization*,SIAM, Philadelphia,1999.

[22] Nocedal, J. and Wright, S. J., *Numerical Optimization*,Springer, New York, 2006.

[23] Davidon, W. C., “Variable Metric Method for Minimization,” *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 1, No. 1, 1991, pp. 1-17.

[24] Fletcher, R.,*Practical Methods of Optimization*,John Wiley & Sons,Chichester,1987.

[25] Broyden, C. G., “A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations,” *Mathematics of Computation*, Vol. 19, No. 92, 1965, pp. 577-593.

[26] Byrd R. H., “Analysis of a Symmetric Rank-One Trust Region Method,” *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 6, No. 4, 1996, pp. 1025-1039.