Vol.11 / No.1/ 2018

JSST

Investigation in to the Effect of Kinematic of the Space Craft Attitude Control using Feedback Linearization Method

M. Navabi[1*] and M. R. Hosseini[2]

1,2. Faculty of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University

Postal Code: 1983969411, Tehran, Iran

m_navabi@sbu.ac.ir

Using nonlinear control theories is common for the attitude control problem of spacecraft. Feedback linearization theory is a nonlinear control method which tries to transform nonlinear dynamics of system into linear. In this control theory, outputs choice will have a direct impact on the stability of system. In order to control the spacecraft attitude by this method, parameters that describe the spacecraft attitude are considered as outputs. The aim of this study is to investigate the effect of using quaternion parameters as a conventional representation in the kinematic equations compared with modified Rodrigues parameters. According to designed controller and simulation results, it is evident that in maneuvers with zero scalar part of quaternion, the controller efficiency is reduced due to singularity in the calculations. This is while by using modified Rodrigues parameters, singularity does not occur and in this way the controller, in the same maneuvers as the previous method, is faster and more efficient with less effort.

Keywords: Quaternion, Modified Rodrigues parameters, Feedback linearization, Spacecraft attitude control

1. Associate Professor(Corresponding Author)
2. M.Sc. Student

Received: 2017.11.23, Accepted: 2018.02.28

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۱۱ / شمارهٔ ۱/ بهار ۱۳۹۷
ص. ص. ۷۱– ۵۹

بررسی اثر نوع بیان سینماتیک در کنترل وضعیت فضاپیما با روش خطی‌سازی پسخورد

محمد نوابی[1]* و محمدرضا حسینی[2]

۱و۲- دانشکدهٔ مهندسی فناوری‌های نوین، مهندسی هوافضا، مهندسی فضایی، دانشگاه شهید بهشتی

*تهران، کدپستی: ۱۹۸۳۹۶۹۴۱۱

m_navabi@sbu.ac.ir

استفاده از تئورهای کنترل غیرخطی در مسئله کنترل وضعیت فضاپیما رایج و مرسوم می‌باشد. تئوری خطی‌سازی پسخورد یک روش کنترل غیرخطی است که سعی در خطی‌سازی دینامیک‌های غیرخطی سیستم دارد. انتخاب خروجی در این تئوری کنترلی، اثر مستقیمی بر پایداری سیستم خواهد داشت. به‌منظور کنترل وضعیت فضاپیما در این روش، پارامترهای توصیف‌کننده وضعیت سیستم به‌عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شوند. هدف این پژوهش بررسی تفاوت اثر استفاده از روش مرسوم بیان سینماتیک از طریق پارامترهای کواترنیون در مقابل استفاده از پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز می‌باشد. با طراحی صورت گرفته و نتایج شبیه‌سازی‌ها این مطلب مشخص شد که استفاده از کواترنیون‌ها در مانورهایی که منجر به صفر شدن قسمت اسکالر پارامترهای کواترنیون می‌شود، عدم کارایی قانون کنترلی رابه علت وجود سینگولاریتی در محاسبات نتیجه خواهد داد. این در حالی است که به کمک پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز این مشکل به وجود نمی‌آید و کنترلر در مانورهای تغییر وضعیت یکسان سرعت و بهره‌وری بیشتری را با تلاش کمتر از خود نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: کواترنیون‌ها، پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز، خطی‌سازی پسخورد، کنترل وضعیت فضاپیما

علائم و اختصارات

محور دوران اویلر	e
مومنتوم زاویه‌ای	h
ممان اینرسی	I
پارامترهای کواترنیون	q
گشتاور	T
زاویه دوران اویلر	$\boldsymbol{\alpha}$
متغیر دینامیک صفر	$\boldsymbol{\eta}$
پارامترهای اصلاح شده رودریگز	$\boldsymbol{\sigma}$
زوایای اویلر	$\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}$
سرعت زاویه‌ای	$\boldsymbol{\omega}$

مقدمه

کنترل وضعیت فضاپیما با وجود معادلات فوق غیرخطی و مرتبه بالا که نیازمند دقت و حساسیت بالایی در حل است، از جمله مسائل بسیار مهم و پیچیده در عصر حاضر می‌باشد و هم‌چنین روش‌های خطی با خطی‌سازی‌های بزرگ در حل سیستم‌های غیرخطی پیچیده، کاهش دقت و گاهی ناپایداری را به همراه خواهند داشت، که برای کنترل وضعیت فضاپیما با زوایای بزرگ در اجرای مانور تغییر وضعیت مناسب نخواهند بود [۱]. در نتیجه استفاده از روش‌های کنترل غیرخطی برای مسئله کنترل وضعیت فضاپیما متداول و کارآمدتر است.

۱. دانشیار (نویسنده مخاطب)

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

دریافت مقاله: ۹۶/۰۹/۰۲ ، تأیید مقاله: ۹۶/۱۲/۰۹

خطی‌سازی پسخورد یک روش طراحی کنترل غیرخطی است که در سال‌های اخیر در زمینه بسیاری از تحقیقات مورد استفاده قرارگرفته است. ایده اصلی این روش مبتنی بر تبدیل دینامیک‌های سیستم غیرخطی به خطی با استفاده از پسخورد حالت است، به شکلی که بتوان از روش‌های کنترل خطی استفاده نمود [۲]. خطی‌سازی پسخورد به‌طور موفقیت‌آمیزی در حل مسائل کنترل عملی به کار گرفته شده است. به‌عنوان مثال، از طراحی خطی‌سازی ورودی-خروجی برای تعقیب مسیر حرکت یک بازوی رباتیک [۳] یا حتی بهبود عملکرد ترمزهای ضدقفل وسایل نقلیه نظیر اتومبیل [۴] استفاده شده است.

این تئوری کنترلی در پژوهش‌های هوافضایی نیز به شکل گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. موضوع مورد مطالعه در مرجع [۵]، طراحی یک وسیله پرنده جدید با نام اومنی‌کوپتر[3] بوده که در این مقاله پس از استخراج معادلات غیرخطی، از روش ورودی-خروجی خطی‌سازی پسخورد، کنترل وضعیت مناسبی برای سیستم ایجاد شده است. نکته قابل‌توجه در این پژوهش انجام‌شده، به‌کارگیری کواترنیون‌ها برای توصیف وضعیت سیستم است.

به طور خاص در مورد مسئله کنترل وضعیت فضاپیما به کمک این تئوری کنترل غیرخطی نیز پژوهش‌هایی صورت گرفته است که در این قسمت به بیان آن‌ها می‌پردازیم. از جمله پژوهش‌های انجام شده در مورد استفاده از تئوری خطی‌ساز پسخورد برای کنترل وضعیت فضاپیما می‌توان به مرجع [۶] اشاره نمود. در این مقاله مسئله کنترل وضعیت فضاپیمای صلب بدون درنظرگرفتن عملگرها مورد مطالعه قرارگرفته و برای به دست آوردن معادلات سینماتیک از پارامترهای کواترنیون استفاده شده است. قابل توجه است که در مقاله یاد شده به بررسی پایداری دینامیک درونی و تحلیل دینامیک صفر پرداخته نشده است. طراحی یک کنترلر PD با کنترل خطی‌ساز پسخورد و اثبات پایداری آن برای پرواز آرایش‌مند فضاپیماها در مرجع [۷] انجام شده. به کمک خطی‌سازی ورودی-خروجی حرکت‌های بی‌نظم وضعیت برای یک ماهواره صلب مغناطیسی در مدار دایروی نزدیک خط استوای زمین به انجام رسیده است [۸]. مرجع [۹] به مسئله خطی‌سازی پسخورد برای یک مدل غیرخطی فضاپیما با شش درجه آزادی و چهار ورودی کنترلی پرداخته است.

ایجاد پایداری و یا اجرای مانور تغییر وضعیت به کمک این تئوری کنترلی در حضور عملگرها از جمله موضوعات مورد مطالعه دیگر است. به عنوان مثال در مرجع [۱۰] از فشار تابش خورشیدی و خطی‌سازی پسخورد برای کنترل زاویه سمت ماهواره بهره برده شده است. می‌توان استفاده از یک چرخ مومنتوم برای یک فضاپیمای صلب [۱۱] و یا به کارگیری جت گاز برای کنترل ماهواره [۱۲] را به عنوان مثال‌هایی دیگری از موارد در نظر گرفتن دینامیک یک عملگر خاص در طراحی ورودی کنترلی به کمک روش خطی‌سازی پسخورد نام برد.

هم‌چنین با ترکیب این تئوری کنترلی در کنار سایر روش‌های کنترلی می‌توان اهداف خاصی را ارضا نمود. از جمله می‌توان به مرجع [۱۳] اشاره نمود که در آن برای پرواز آرایش‌مند فضاپیماها، از ترکیب این روش کنترلی با یک کنترل پیش‌بین که اشباع عملگرها نیز در آن لحاظ شده، استفاده شده است و یا مرجع [۱۴] در مانورهای زاویه بزرگ فضاپیمای منعطف برای ایجاد مقاومت در برابر گشتاورهای خارجی و عدم قطعیت‌های موجود، این روش کنترلی را با یک کنترل تطبیقی ترکیب نموده است.

در مرجع [۱۵] مقایسه روش خطی‌ساز پسخورد با تئوری کنترلی مورد استفاده در طراحی این کنترل غیرخطی انجام شده است که بر اساس آن رفتار بهینه عملگرهای چرخ عکس‌العملی در یک چیدمان هرمی، از نظر تلاش کنترلی، توان مصرفی و اولراینت در مقابل تئوری خطی مورد استفاده، در مانور مشابه به اثبات رسیده است. هم‌چنین نشان می‌دهد این روش کنترلی بهره‌وری بیشتری در مقایسه با کنترلر خطی در نظر گرفته شده دارد. بیان سینماتیک در پژوهش ذکر شده بر اساس کواترنیون‌هاست که در آن به ایجاد سینگولاریتی[4] در محاسبات و پایداری دینامیک درونی این روش کنترلی نیز پرداخته شده است.

در حوزه تحقیقات هوافضایی، توجه به مسئله کنترل وضعیت فضاپیما به خصوص در حضور عملگر دقیق چرخ عکس‌العملی اهمیت ویژه‌ای دارد. طراحی کنترل‌کننده‌های گوناگون به همراه بررسی انواع پیکره‌بندی‌های مرسوم این عملگر از قبیل سه محوره متعامد، هرمی و چهاروجهی و یا مطالعه و مقایسه توان ورودی موتور و از دست رفتن یک عملگر در زمان اجرای مانور، موضوعاتی است که تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۱۶]. استفاده از بیان سینماتیک برحسب پارامترهای کواترنیون در کنترل وضعیت ماهواره بسیار متداول است. به دلیل وجود سینگولاریتی در بیان انتقال وضعیت برحسب زوایای اویلر، از پارامترهای کواترنیون استفاده می‌کنند که چنین مشکلی در آن‌ها دیده نمی‌شود.

یکی از مهم‌ترین قسمت‌ها در طراحی کنترل‌کننده به کمک روش خطی‌سازی پسخورد تعیین توابع خروجی برای سیستم مورد مطالعه است. در مسئله کنترل وضعیت فضاپیما، این پارامترهای توصیف‌کننده وضعیت هستند که باید به‌عنوان خروجی در نظر گرفته

3. Omnicopter

4. Singularity

شوند. روش‌های دیگری نیز برای بیان سینماتیک وجود دارد که یکی از مهم‌ترین آن‌ها استفاده از پارامترهای اصلاح شده رودریگز[۵] می‌باشد [۱۷]. نویسنده در مرجع [۱۸] با اشاره به این مطلب که عملکرد پارامترهای اصلاح شده رودریگز بسیار نزدیک به عملکرد پارامترهای کواترنیون خواهد بود، برای استخراج معادلات در کنترل وضعیت فضاپیما، پارامترهای اصلاح شده رودریگز را مدنظر قرار داده است. در پارامترهای اصلاح شده رودریگز از سه متغیر به‌جای چهار متغیر کواترنیون برای توصیف وضعیت استفاده می‌شود.

مطابق با مرجع [۲] عملکرد روش خطی‌سازی ورودی- خروجی از تعیین توابع خروجی سیستم بسیار تأثیرپذیر است. در مسئله کنترل وضعیت، توابع خروجی از سینماتیک مسئله تعریف می‌شوند. در مقالات و پژوهش‌های ارائه شده در زمینه کنترل وضعیت به کمک تئوری خطی‌سازی پسخورد، معمولاً تنها از یک بیان سینماتیک که عموماً پارامترهای کواترنیون است، استفاده می‌شود. وجه تمایز مقاله حاضر با پژوهش‌های پیشین در این است که در این مقاله تلاش شده است تا اثر بیان سینماتیک با روش مرسوم پارامترهای کواترنیون در فرآیند طراحی مورد بررسی قرار گیرد و هم چنین برای جلوگیری از محدودیت‌های ناشی از این روش، یک طراحی مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگزر نیز ارائه شود که بررسی عملکرد و کارایی این دو روش و مقایسه معیارهای اولراینت و میزان گشتاور کنترلی محاسبه شده برای آن‌ها، تا کنون مورد بررسی قرار نگرفته است.

برای این منظور ابتدا معادلات دینامیک وضعیت یک فضاپیما با در نظر گرفتن حضور عملگر چرخ عکس‌العملی با چیدمان سه محوره متعامد بیان گردیده و سپس به استخراج معادلات سینماتیک برحسب کواترنیون‌ها و پارامترهای اصلاح شده رودریگز پرداخته شده است. در ادامه نیز طراحی کنترل‌کننده خطی‌سازی پسخورد برای معادلات به‌دست‌آمده انجام شده که اثر انتخاب هرکدام از ترمینولوژی‌های متفاوت سینماتیکی مورد ارزیابی قرار گرفته است. در نهایت با اجرای شبیه‌سازی کامپیوتری به کمک نرم‌افزار متلب، نتایج حاصل از عملکرد ورودی‌های کنترلی طراحی شده به صورت نمودار و جدول ارائه گردیده است.

مدل‌سازی ریاضی

در این بخش معادلات دینامیک و سینماتیک وضعیت فضاپیما بیان می‌شود. هم‌چنین معادلات سینماتیک، برحسب پارامترهای کواترنیون و پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز به‌صورت مجزا به‌دست‌آمده است.

5. Modified Rodrigues Parameters

معادلات دینامیک

معادلات بنیادین حاکم بر وضعیت ماهواره، معادلات اویلر است [۱۹]. معادله ممان اویلر بیان می‌کند که مجموع گشتاورهای خارجی اعمال شده به یک جسم، با آهنگ تغییرات مومنتوم زاویه‌ای آن جسم برابر است که این معادله به فرم رابطه (۱) برای بیان دینامیک حرکت دورانی یک فضاپیمای صلب نشان داده می‌شود [۲۰]. در این رابطه T مبین بردار گشتاور خارجی، h بردار مومنتوم زاویه‌ای فضاپیما و $\dot{h}$ مشتق زمانی آن، Iماتریس ممان اینرسی و $\omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ بردار سرعت زاویه‌ای بدنی فضاپیما می‌باشند.

$$\sum \quad T = \dot{h} + \omega \times h = I\dot{\omega} + \omega \times I\omega \qquad (۱)$$

در این پژوهش فرض شده است که عملگر چرخ عکس‌العملی تنها عملگر مورد استفاده در فضاپیما باشد و گشتاور کنترلی لازم برای اجرای مانور تغییر وضعیت توسط این عملگر ایجاد می‌شود. چرخ عکس‌العملی از وسایل تبادل مومنتوم به حساب می‌آید که همان‌طور که از نام آن‌ها مشخص است، این وسایل توانایی تبادل مومنتوم با بدنه فضاپیما را دارا می‌باشند. در نتیجه بردار h در رابطه (۱) با مجموع مومنتوم زاویه‌ای عملگر چرخ عکس‌العملی و مومنتوم زاویه‌ای بدنه فضاپیما برابر است [۲۰].

$$h = h_b + h_w \qquad (۲)$$

که در رابطه (۲) بردار مومنتوم زاویه‌ای بدنی فضاپیما به صورت $h_b = [h_x \quad h_y \quad h_z]^T$ و بردار مومنتوم زاویه‌ای عملگر با h_w و به صورت معادله (۳) نمایش داده می‌شوند. چرخ‌های عکس‌العملی را می‌توان با چیدمان‌های گوناگون برای اجرای کنترل وضعیت در فضاپیماها به کار برد. هندسه چیدمان مورد استفاده، خود را در رابطه (۳) با ماتریس توزیع L نشان می‌دهد [۱۶].

$$h_w = LI_w\omega_w \qquad (۳)$$

در رابطهٔ بالا $I_w = diag(I_{w1}, I_{w2}, \dots, I_{wn})$ ماتریس قطری اینرسی چرخ‌های عکس‌العملی و $\omega_w = [\omega_{w1}\omega_{w2} \dots \omega_{wn}]^T$ سرعت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی را نشان می‌دهد. هم‌چنین $[L]_{3\times n}$ ماتریس توزیع چرخ‌های عکس‌العملی است و n تعداد عملگرهای مورد استفاده را بیان می‌کند.

چیدمان فرضی مورد استفاده برای استخراج معادلات دینامیک در این مقاله، چیدمان سه محوره متعامد در نظر گرفته شده است. در این چیدمان روی هر محور اصلی دستگاه بدنی، تنها یک عملگر وجود دارد. یعنی در روابط قبل $n = 3$ است و ماتریس توزیع در این حالت با رابطه (۴) بیان می‌شود [۱۶].

$$L_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

چرخ‌های عکس‌العملی بر اساس انتقال مومنتوم کار می‌کنند، و فضاپیما در مقابل این انتقال از خود عکس‌العملی برابر و در خلاف جهت نشان خواهد داد تا در شرایط آرمانی، مومنتوم زاویه‌ای کل سیستم را برابر صفر حفظ نماید. بنابراین نرخ مومنتوم زاویه‌ای تولید شده توسط این عملگر با علامت مخالف به بدنه فضاپیما منتقل می‌شود [۱۶]. در نتیجه می‌توان رابطه بردار گشتاور تولید شده توسط عملگر را با مؤلفه‌های $T_C = [T_{cx} \quad T_{cy} \quad T_{cz}]^{\mathrm{T}}$ ، به صورت رابطه (۵) در نظر گرفت.

$$\dot{h}_w = -T_c \qquad (۵)$$

با توجه به مطالب بیان شده تا این قسمت می‌توان معادله (۱) را به صورت زیر بازنویسی نمود [۱۶].

$$\dot{\omega} = I^{-1}[-\omega \times (I\omega + h_w) + T_c] \qquad (۶)$$

معادلات سینماتیک

سینماتیک، حرکت جسم را با توجه به سرعت آن جسم بیان می‌کند که در این پژوهش فضاپیما تنها دارای حرکت دورانی است. تغییر وضعیت زاویه‌ای یک فضاپیما، می‌تواند به‌عنوان دوران یک جسم صلب در یک دستگاه مختصات مشخص و به کمک زوایای اویلر بیان شود. دوران زاویه اویلر به عنوان دوران‌های زاویه‌ای متوالی حول سه محور متعامد دستگاه بدنی تعریف می‌شود [۲۰]. ازآنجاکه دوران‌های وضعیت در قالب زوایای اویلر و در واقع بیان انتقال بر حسب این زوایا، شامل توابع مثلثاتی می‌شود و امکان به وجود آمدن سینگولاریتی در آن‌ها وجود دارد، می‌توان انتقال‌های معادل، ولی ساده‌تری را برحسب کواترنیون‌ها و پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز به دست آورد.

هر انتقال وضعیت در فضا با دوران‌های متوالی حول سه بردار متعامد یک سیستم مختصات را می‌توان با یک دوران حول بردار ویژه با مقدار ویژه واحد به دست آورد [۱۰]. اگر $e = [e_1\, e_2 e_3]^T$ به عنوان بردار ویژه و زاویه دوران با α تعریف شود، می‌توان عناصر کواترنیون‌ها یا پارامترهای متقارن اویلر را به صورت معادلات زیر تعریف نمود [۲۰].

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1 \sin{(\alpha/2)} \\ q_2 &= e_2 \sin{(\alpha/2)} \\ q_3 &= e_3 \sin{(\alpha/2)} \\ q_4 &= cos\,(\alpha/2) \end{aligned} \qquad (۷)$$

پارامترهای کواترنیون شامل یک قسمت اسکالر و یک قسمت برداری می‌شوند.

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 \qquad (۸)$$

همان‌طور که بیان شد، بیان انتقال برحسب زوایای اویلر باعث می‌شود تا ماتریس کسینوس هادی انتقال برحسب توابع مثلثاتی باشد، که هم حل آن زمان‌بر است و هم احتمال وجود سینگولاریتی وجود دارد. به کمک کواترنیون‌ها می‌توان انتقال معادل ساده‌تری را بیان نمود. به همین دلیل، روش ارائه معادلات بر اساس کواترنیون‌ها، به‌طور گسترده در کنترل وضعیت فضاپیماها به کار می‌رود [۲۰]. با تعریف بردار Q به صورت $Q = [q_1 q_2 q_3 q_4]^T$، رابطه مشتق زمانی کواترنیون‌ها می‌تواند، به‌صورت تابعی از سرعت زاویه‌ای بدنی، مانند معادله (۹) بیان شود [۵].

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Omega Q \qquad (۹)$$

از پارامترهای کواترنیون می‌توان یک نمایش سه مؤلفه‌ای ارائه داد که به پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز معروف هستند [۲۲،۲۱]. استفاده از کواترنیون‌ها و زوایای اویلر در بیان معادلات سینماتیک، بسیار متداول‌تر از پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز است. از جمله دلایل تمایل برای استفاده از پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز به‌جای پارامترهای رودریگز، این است که در این روش سینگولاریتی‌ها در زوایای ۳۶۰ درجه اتفاق می‌افتند که بسیار کاربردی‌تر از زمانی است که این اتفاق در ۱۸۰ درجه رخ می‌دهد [۱۸]. استفاده از تنها سه مؤلفه در این روش و عملکرد بسیار نزدیک آن به پارامترهای کواترنیون مزیت دیگری است که محققان را برای استفاده از آن ترغیب می‌کند. معادله زیر نمایش سه مؤلفه اصلاح‌شده رودریگز برحسب پارامترهای کواترنیون می‌باشد [۲۳].

$$\sigma_i = \frac{q_i}{1+q_4},\ i = 1,2,3 \qquad (۱۰)$$

بر اساس معادلات ذکرشده، می‌توان معادله دیفرانسیل سینماتیک وضعیت فضاپیما را برحسب پارامترهای رودریگز به صورت معادله (۱۱) بیان نمود [۲۴].

$$\dot{\sigma} = G(\sigma)\omega \qquad (۱۱)$$

در رابطه بالا، $\sigma = [\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]^T$ بردار پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز و ماتریس G برحسب مؤلفه‌های σ، به‌صورت معادله (۱۲) می‌باشد [۲۴].

$$G(\sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma^T\sigma}{2} I_{3\times3} + S(\sigma) + \sigma\sigma^T\right) \qquad (۱۲)$$

که $S(\sigma)$ برابر است با[۲۴]:

$$S(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

با توجه به معادلات (۱۲) و (۱۳) می‌توان معادله (۱۱) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \frac{1}{2}((\frac{1-(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2)}{2}+\sigma_1{}^2)\omega_x \\ &\quad +(-\sigma_3+\sigma_1\sigma_2)\omega_y+(\sigma_2+\sigma_1\sigma_3)\omega_z) \\ \dot{\sigma}_2 &= \frac{1}{2}((\sigma_3+\sigma_1\sigma_2)\omega_x \\ &\quad +\left(\frac{1-(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2)}{2}+\sigma_2{}^2\right)\omega_y \\ &\quad +(-\sigma_1+\sigma_2\sigma_3)\omega_z) \\ \dot{\sigma}_3 &= \frac{1}{2}((-\sigma_2+\sigma_3\sigma_1)\omega_x+(\sigma_1+\sigma_2\sigma_3)\omega_y \\ &\quad +(\frac{1-(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2)}{2}+\sigma_3{}^2)\omega_z)\end{aligned} \quad (۱۴)$$

تئوری کنترل غیرخطی خطی‌ساز پسخورد

روش خطی‌سازی پسخورد یکی از تئوری‌های مرسوم در کنترل غیرخطی است. ایده اصلی این روش، تبدیل دینامیک‌های سیستم غیرخطی (به طور کلی یا جزئی) به خطی می‌باشد و این کار به گونه‌ای صورت می‌گیرد که می‌توان از روش‌های کنترل خطی در طراحی ورودی کنترلی استفاده نمود [۲]. در استفاده از این روش دو راه‌کار کلی وجود دارد. مورد اول، خطی‌سازی ورودی- حالت است، و مورد دوم خطی‌سازی ورودی- خروجی که با نام (خروجی- حالت) نیز شناخته می‌شود. تفاوت اصلی خطی‌سازی ورودی-خروجی با ورودی- حالت در این است که در مورد اول قانون کنترلی باید بتواند یک خروجی مشخص را ردیابی نماید.

هدف اصلی در خطی‌سازی پسخورد ورودی- خروجی، یافتن یک ورودی کنترلی برای سیستم غیرخطی است، که با اعمال این ورودی، بی‌اثر کردن غیرخطی‌ها صورت می‌گیرد و درنهایت خروجی فرمانی مورد نظر به دست می‌آید. در ابتدا معادلات غیرخطی سیستم باید به صورت معادلات (۱۵) که در شکل خطی در کنترل یا آفین[۶] هستند نمایش داده شوند که در این معادلات f و g میدان‌های برداری هموار هستند. هم‌چنین خروجی‌ها نیز به‌صورت توابعی از متغیرهای سیستم و با معادلات (۱۶) تعریف می‌شوند[۲].

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (۱۵)$$

$$y = h(x) \quad (۱۶)$$

اگر تعداد متغیرهای حالت n و تعداد ورودی‌های سیستم m باشد، برای سیستم چندورودی- چندخروجی قبل،x بردار $n \times 1$ متغیرهای حالت، u بردار $m \times 1$ ورودی‌های کنترلی با مؤلفه‌های u_i، y بردار $m \times 1$ خروجی‌های سیستم با مؤلفه‌های y_i و g نیز یک ماتریس $n \times m$ است که ستون‌های g_i آن و توابع h میدان‌های برداری هموار هستند [۲].

مشکل مشخص در سیستم توصیف شده با معادلات (۱۵) و (۱۶) ارتباط غیرمستقیم خروجی y از طریق متغیرهای حالت x و معادلات حالت غیرخطی با ورودی u است. روشی که می‌توان با استفاده از آن، یک رابطه ساده و مستقیم میان ورودی و خروجی ایجاد کرد، این است که از مؤلفه‌های خروجی آن‌قدر مشتق بگیریم تا ورودی ظاهر شود [۲].

چنانچه برای ایجاد یک رابطه صریح بین خروجی y و ورودی u لازم باشد از خروجی یک سیستم r بار مشتق گرفته شود، گفته می‌شود که سیستم دارای مرتبه نسبی r است. بنابراین هرکدام از مؤلفه‌های خروجی تا زمانی که یک مؤلفه ورودی کنترلی در معادلات ظاهر شود، باید به تعداد کافی مشتق‌پذیر باشند.

از آنجاکه با میدان‌ها و توابع برداری روبه‌رو هستیم با به کار بردن مشتقات لی[۷] که تعاریف آن با توجه به جبر لی در ادامه بیان می‌شود، روش خطی‌ساز پسخورد ورودی-خروجی، می‌تواند سیستم غیرخطی را به یک سیستم خطی تبدیل کند. سپس می‌توان یک قانون کنترل خطی را برای سیستم خطی شده به کاربرد.

همان‌طور که قبلا نیز بیان شد با مشق گیری متوالی از خروجی سیستم توصیف شده با معادله (۱۵) تا ظاهر شدن u کنترلی برای اولین بار، می‌توان یک رابطه مستقیم بین خروجی و ورودی ایجاد کرد. با در نظر گرفتن r_i به عنوان کوچک‌ترین عدد صحیح که حداقل یکی از ورودی‌ها در $y_i^{(r_i)}$ ظاهر شود، می‌توان رابطه (۱۷) را به دست آورد.

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^{m} L_{gj} L_f^{r_i - 1} h_i u_j \quad (۱۷)$$

تکرار فرآیند قبل برای هر کدام از خروجی‌های y_i می‌تواند به رابطه زیر منجر شود.

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = D(x) + E(x)u \quad (۱۸)$$

که $D(x)$ و $E(x)$ به‌صورت زیر حساب می‌شوند [۲]:

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) & \cdots & L_{gm} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g1} L_f^{r_m - 1} h_m(x) & \cdots & L_{gm} L_f^{r_m - 1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

مشتقات لی به‌کاربرده شده دارای تعاریف زیر هستند.

$$L_f h_i(x) = \sum_{j=1}^{7} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} f(x), \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned} L_f^{r_i} h_i(x) &= L_f\left(L_f^{r_i - 1} h_i(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{7} \frac{\partial L_f^{r_i - 1} h_i}{\partial x_i} f(x) \end{aligned} \quad (۲۲)$$

6. Affine

7. Lie

و

$$L_{gi}L_f^{r_i-1}h_i(x) = \sum_{j=1}^{7}\frac{\partial L_f^{r_i-1}h_i}{\partial x_i}g_i(x) \qquad (۲۳)$$
$$i = 1, \dots, m$$

خطی‌سازی پسخورد تنها در صورتی امکان‌پذیر است که، اگر و تنها اگر ماتریس $E(x)$ غیرسینگولار باشد، بدین معنی که $det\big(E(x)\big) \neq 0$ باشد. فرض کنید ورودی کنترلی اصلی (۲۴) در نظر گرفته شود:

$$u = E^{-1}(x)(v_i - D(x)) \qquad (۲۴)$$

که در رابطه قبل v_i یک ورودی جدید است که باید تعیین شود. اعمال ورودی کنترلی (۲۴) به معادله (۱۸) منجر می‌شود که m معادله به شکل ساده خطی زیر ایجاد شود.

$$y_i^{(r_i)} = v_i \qquad (۲۵)$$

چون ورودی v_i تنها بر خروجی y_i اثر می‌گذارد، معادله ورودی کنترلی اصلی (۲۴) یک قانون کنترل مجزاکننده[8] نامیده می‌شود [۲]. علت شرط غیرسینگولار بودن $E(x)$ نیز به دلیل امکان تعیین ورودی کنترلی اصلی u به کمک رابطه (۱۸) است که در آن باید بتوان رابطه را بر حسب u بازنویسی نمود تا رابطه (۲۴) به دست آید. با توجه به مرتبه‌های نسبی مرتبط با هر کدام از خروجی‌های سیستم، عبارت اسکالر $r = r_1 + \dots + r_m$ مرتبه نسبی کلی نامیده می‌شود [۲].

سیستم غیرخطی (۱۵) را می‌توان با استفاده از $y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(r_i-1)}$ به عنوان قسمتی از مؤلفه‌های جدید حالت به شکلی که فرم نرمال نامیده می‌شود تبدیل کرد [۲]. استفاده از معادله ورودی کنترلی (۲۴) و توجه به رابطه (۲۵) موجب می‌شود تا سیستم (۱۵) به یک سیستم در مختصات مناسب که در حالت ورودی- خروجی خطی شده است و کنترل‌پذیر نیز هست، تبدیل شود. با تعریف مختصات تغییر یافته به‌صورت $\xi = \Phi(x)$، تعریف می‌شود که:

$$\begin{aligned}\xi^i &= [\xi_1^i \quad \xi_2^i \quad \cdots \quad \xi_r^i]^T \\ &= \left[y_i \quad \dot{y}_i \quad \cdots \quad y_i^{(r_i-1)}\right]^T\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

در مختصات جدید، سیستم به‌صورت روابط (۲۷) ارائه می‌گردد.

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + Bv \\ y &= C\xi\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

که در معادلات بالا، ξ بردار متغیرهای حالت جدید است. اکنون برای سیستم خطی (۲۷)، به کمک قوانین کنترل خطی، می‌توان یک بردار ورودی کنترلی v در نظر گرفت.

طراحی کنترلر مبتنی بر پارامترهای کواترنیون

برای طراحی ورودی کنترلی مبتنی بر کواترنوین‌ها دستگاه معادلات (۶) و (۹) در نظر گرفته می‌شود که بر اساس آن بردار متغیرهای حالت به‌صورت $x = \left[q_1q_2q_3q_4\omega_x\omega_y\omega_z\right]^T$، بردار ورودی‌های کنترلی سیستم با $u = \left[T_{cx}T_{cy}T_{cz}\right]^{\mathrm{T}}$ و بردار توابع خروجی سیستم با $y = [h_1(x)h_2(x)h_3(x)]^{\mathrm{T}} = [q_1q_2q_3]^{\mathrm{T}}$ تعریف می‌شوند. ازآنجاکه یکی از مهم‌ترین و اصلی‌ترین خواص پارامترهای کواترنیون رابطه $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$ می‌باشد، پس می‌توان متغیر حالت q_4 را مستقیماً از همین رابطه محاسبه و از آن به عنوان یک متغیر خروجی مستقل صرف نظر کرد. با توجه به موارد ذکر شده می‌توان دستگاه معادلات سیستم غیرخطی را در این حالت به صورت روابط (۱۵) و (۱۶) بیان نمود که در آن ماتریس‌های $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$f(x) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\Omega Q \\ I^{-1}[-\omega \times (I\omega + h_w)]\end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

$$g(x) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x)] = \begin{bmatrix}0_{4\times3} \\ I^{-1}\end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

در قسمت قبل برای روش خطی سازی ورودی-خروجی بیان شد که به منظور ایجار یک رابطه میان ورودی و خروجی، از توابع خروجی تا ظاهر شدن ورودی مشتق می‌گیریم. اما این امکان وجود دارد که یک قسمت از دینامیک سیستم در خطی سازی ورودی-خروجی مشاهده ناپذیر شده باشد که به آن دینامیک درونی[9] می‌گویند [۲]. در این تئوری کنترلی تعیین توابع خروجی از متغیرهای حالت سیستم، دارای اثر مستقیمی بر ایجاد دینامیک درونی و پایداری آن می‌باشد. با مشتق‌گیری متوالی از $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ تا ظاهر شدن ورودی کنترلی برای اولین بار، مشخص می‌شود که هر خروجی نیاز به دو مرتبه مشتق‌گیری دارد.

بردار مرتبه نسبی سیستم غیرخطی با توجه به بردار متغیر حالت در نظر گرفته شده، برابر است با $[r_1r_2r_3]^T = [2\ 2\ 2]^T$، و مرتبه نسبی کل برابر مجموع مرتبه‌های نسبی و مساوی ۶ خواهد بود. این در حالی است سیستم اصلی دارای مرتبه ۷ می‌باشد و هم‌چنین طبق [۲۵] تفاوت مرتبه نسبی کل با ابعاد سیستم اصلی، به معنی وجود دینامیک درونی است، که باید به کمک مفهوم دینامیک صفر مورد بررسی قرارگیرد. معنی این اختلاف این است که قسمتی از دینامیک سیستم در کنترل‌کننده دیده نمی‌شود.

با توجه به بردار متغیرهای حالت و بردار توابع خروجی ذکر شده و توجه به معادله (۱۹)، مقدار ماتریس $D(x)$ عبارت است از:

$$D(x) = L_f^2h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{L_f^1h(x)\right\}f(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x & q_4 & -q_3 & q_2 \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y & q_3 & q_4 & -q_1 \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z & -q_2 & q_1 & q_4\end{bmatrix}f(x) \qquad (۳۰)$$

8. Decoupling Control Law

9. Internal Dynamic

هم‌چنین ماتریس $E(x)$ نیز از رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود.

$$E(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{q_4}{I_{xx}} & \frac{-q_3}{I_{yy}} & \frac{q_4}{I_{zz}} \\ \frac{q_3}{I_{xx}} & \frac{q_4}{I_{yy}} & \frac{-q_1}{I_{zz}} \\ \frac{-q_2}{I_{xx}} & \frac{q_1}{I_{yy}} & \frac{q_4}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (۳۱)$$

و

$$\det(E(x)) = \frac{q_4(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2)}{8I_{xx}I_{yy}I_{zz}} = \frac{q_4}{8I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \quad (۳۲)$$

زمانی‌که $q \neq 0$ باشد، ماتریس $E(x)$ غیرسینگولار است و مسئله خطی‌سازی ورودی-خروجی برای سیستم غیرخطی قابل حل است. با توجه به معادله (۲۶) برای هر سه تابع خروجی متغیرهای حالت جدید به شکل (۳۳) نشان داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h_1(x) = q_1 \xi_4 = L_f h_1(x) = \dot{q}_1 \\ \xi_2 &= h_2(x) = q_2 \xi_5 = L_f h_2(x) = \dot{q}_2 \\ \xi_3 &= h_3(x) = q_3 \xi_6 = L_f h_3(x) = \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (۳۳)$$

پس مقادیر ماتریس‌های ثابت ضرایب وزنی در رابطه (۲۷)، در این حالت برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ I_{3\times3} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} I_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۳۴)$$

برای این سیستم خطی، ورودی کنترلی خطای وضعیت زیر را در نظر می‌گیریم که در آن K_1 و K_2 ماتریس‌های ضرایب ثابت و مثبت هستند و q_i^d اشاره به مؤلفه کواترنیون مورد نظر یا مطلوب دارد، که هدف این کنترل‌کننده رسیدن به آن خواهد بود. این ورودی کنترلی خطی، تکمیل‌کننده ورودی کنترلی اصلی سیستم خواهد بود. برای تعیین ماتریس ضرایب K_1 و K_2 از تئوری کنترل بهینه و روش تنظیم‌کننده مربعی خطی استفاده شده است.

$$v_i = -K_1(q_i - q_i^d) - K_2 \dot{q}_i \quad (۳۵)$$

دینامیک صفر

دینامیک‌های صفر، دینامیک‌های درونی سیستم تعریف می‌شوند هنگامی‌که خروجی سیستم به وسیله ورودی آن صفر نگه داشته می‌شود [۲]. همان‌طور که بیان شد، اختلاف مرتبه سیستم اصلی که دارای هفت متغیر حالت بوده (در زمان بیان سینماتیک برحسب کواترنیون‌ها)، با مرتبه نسبی کل، که برابر مجموع مرتبه‌های نسبی است، برابر یک می‌باشد که اشاره به وجود یک دینامیک درونی دارد. باید توجه کرد که متغیر حالت q_4 به خروجی y متصل و مرتبط نیست. به‌عبارت‌دیگر کنترل خطی‌ساز پسخورد، q_4 را از خروجی غیرقابل مشاهده کرده است. باید مطمئن شد که متغیر q_4 به خوبی رفتار می‌کند. این همان دینامیک درونی مطرح‌شده است که باید رفتار آن برای طراحی قانون کنترل مورد بررسی قرار گیرد. پایداری این دینامیک درونی با به کار بردن مفهوم دینامیک صفر به‌صورت زیر، موردبررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور η به‌عنوان متغیر دینامیک صفر در نظر گرفته می‌شود، که باید دو نیازمندی مهم را ارضا نماید [۵]:

۱) $\frac{\partial \eta}{\partial x} g(x) = 0$ یا به عبارتی گرادیان $\nabla\eta$ مستقل خطی باشد [۵].

۲) تبدیل $z = T(x) = [\eta; \xi]$ یک نگاشت هموارریختی[10] باشد.

با توجه به اینکه q_4 دینامیک درونی می‌باشد، پس متغیر دینامیک صفر به‌صورت $\eta = q_4$ انتخاب می‌شود.

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} g(x) = [0\,0\,0\,1\,0\,0\,0]\begin{bmatrix} 0_{4\times3} \\ I^{-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (۳۶)$$

پس درنتیجه مطابق با رابطه (۳۶) اولین نیازمندی موردنظر ارضا می‌شود. به‌منظور اطمینان از اینکه $z = T(x) = [\eta; \xi]$ یک هموارریختی است، باید ماتریس ژاکوبین z ایجاد و معکوس‌پذیری آن بررسی شود [۲]. برای این منظور دترمینان ژاکوبین z به کمک روابط (۳۷)، (۳۸) و (۳۹) تعیین می‌گردد.

$$J(z) = \frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\Lambda(\omega)} & \underbrace{0_{4\times3}}_{\Gamma(Q)} \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \end{bmatrix} \quad (۳۸)$$

$$\Gamma(Q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

درنتیجه دترمینان ژاکوبین به صورت رابطه (۴۰) محاسبه می‌شود.

$$det(J(x)) = \frac{-q_4}{8}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) = \frac{-q_4}{8} \quad (۴۰)$$

زمانی‌که $q_4 \neq 0$ باشد، ماتریس ژاکوبین غیرسینگولار است و دینامیک صفر هر دو نیازمندی را ارضا می‌کند، پس ورودی کنترل غیرخطی به سیستم در این حالت موجب پایداری خواهد بود.

طراحی کنترلر مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز

یک‌بار دیگر فرآیند محاسبات لازم برای استخراج ورودی کنترلی u را همانند مرحله قبل طی می‌کنیم، با این تفاوت که در این قسمت سینماتیک مسئله برحسب پارامترهای اصلاح شده رودریگز می‌باشد. با درنظرگرفتن دستگاه معادلات (۶) و (۱۴)، و تعیین بردار متغیرهای حالت به‌صورت $x = [\sigma_1\sigma_2\sigma_3\omega_x\omega_y\omega_z]^T$ ماتریس‌های $f(x)$ و $g(x)$ عبارتند از:

10. Diffeomorphism

$$f(x) = \begin{bmatrix} G(\sigma)\omega \\ I^{-1}[-\omega \times (I\omega + h_w)] \end{bmatrix} \quad (۴۱)$$

$$g(x) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x)] = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ I^{-1} \end{bmatrix} \quad (۴۲)$$

خروجی سیستم $y = [h_1(x)h_2(x)h_3(x)]^T = [\sigma_1\sigma_2\sigma_3]^T$ در نظر گرفته شده و $u = [u_1u_2u_3]^T = [T_{cx}T_{cy}T_{cz}]^T$ همانند حالت قبل بردار ورودی کنترلی سیستم می‌باشد.

بردار مرتبه نسبی سیستم غیرخطی با توجه به بردار متغیر حالت در نظر گرفته شده، برابر با $[r_1r_2r_3]^T = [2\ 2\ 2]^T$ است و سیستم اصلی دارای مرتبه ۶ می‌باشد. بنابراین می‌توان از تساوی مجموع مرتبه‌های نسبی با دینامیک کامل سیستم نتیجه گرفت که دینامیک سیستم در خطی‌سازی ورودی-خروجی کاملاً مشاهده‌پذیر است. همچنین برای ماتریس $E(x)$ داریم:

$$E(x) = G(\sigma)I^{-1} \quad (۴۳)$$

چون $G(\sigma)$ و I^{-1} هردو معکوس‌پذیر هستند، $E(x)$ نیز معکوس‌پذیر خواهد بود و همواره ماتریس $E(x)$ غیرسینگولار می‌باشد. پس با توجه به معکوس‌پذیری $E(x)$ و با توجه به برابری مرتبه نسبی کل با مرتبه سیستم که برابر ۶ است، پس سیستم خطی در کنترل تعریف شده با ماتریس‌های (۴۱) و (۴۲) می‌تواند به طور کامل خطی شود و نیازی به بررسی دینامیک درونی نمی‌باشد. ماتریس $D(x)$ نیز برابر است با:

$$\begin{aligned} D(x) &= L_f^2h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\{L_f^1h(x)\}f(x) \\ &= [\frac{\partial}{\partial \sigma}\{G(\sigma)\omega\}\frac{\partial}{\partial \omega}\{G(\sigma)\omega\}]f(x) \end{aligned} \quad (۴۴)$$

بر اساس معادله (۲۶) متغیرهای حالت سیستم خطی‌شده نیز به‌صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_1\xi_4 = \dot{\sigma}_1 \\ \xi_2 &= \sigma_2\xi_5 = \dot{\sigma}_2 \\ \xi_3 &= \sigma_3\xi_6 = \dot{\sigma}_3 \end{aligned} \quad (۴۵)$$

و مقادیر ماتریس‌های ثابت در رابطه (۲۷)، در این حالت برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ I_{3\times3} \end{bmatrix} \\ C &= [I_{3\times3} \quad 0_{3\times3}] \end{aligned} \quad (۴۶)$$

در این حالت نیز برای این سیستم خطی، ورودی کنترلی خطای وضعیت (۴۷) را در نظر می‌گیریم که در آن K_1 و K_2 ماتریس‌های ضرایب ثابت و مثبت هستند و σ_i^d اشاره به پارامتر مطلوب یا فرمانی دارد. تعیین ماتریس ضرایب K_1 و K_2 به کمک روش تنظیم‌کننده مربعی خطی صورت می‌گیرد.

$$v_i = -K_1(\sigma_i - \sigma_i^d) - K_2\dot{\sigma}_i \quad (۴۷)$$

کنترل بهینه تنظیم‌کننده مربعی خطی[11]

این کنترل‌کننده، یک روش کنترل بهینه است که بهترین عملکرد ممکن را با توجه به برخی شاخص‌های عملکرد، فراهم می‌کند. مسئله طراحی این کنترل‌کننده در واقع مسئله طراحی یک پسخورد حالت کنترلی مانند K است که تابع هدف خاصی مانند J را به حداقل مقدار برساند. در این روش یک ماتریس بهره پسخورد طراحی می‌شود که تابع معیار را به منظور دست‌یابی به بعضی روابط میان تلاش کنترلی، مقدار و سرعت پاسخ یک سیستم پایدار، حداقل می‌کند [۲۶]. در روش تنظیم کننده مربعی خطی برای یک سیستم خطی زمان پیوسته که به شکل معادله (۲۷) بیان می‌شود، تابع معیار درجه دو (۴۸) در نظر گرفته می‌شود [۲۷].

$$J = \int_0^\infty (x^TQx + u^TRu)dt \quad (۴۸)$$

که Q و R ماتریس‌های وزنی هستند. همچنین Q ماتریس متقارن مثبت معین یا مثبت نیمه معین است و R ماتریس متقارن و مثبت معین می‌باشد. می‌توان در عمل برای راحتی در طراحی ماتریس‌های Q و R را به‌صورت قطری در نظر گرفت. قانون کنترل پسخوردی که مقدار تابع معیار را حداقل می‌کند به‌صورت معادله (۴۹) تعریف می‌گردد [۲۷].

$$u_{LQR} = -Kx \quad (۴۹)$$

که مقدار K از طریق رابطه (۵۰) محاسبه می‌شود [۲۷].

$$K = R^{-1}B^TP \quad (۵۰)$$

و P با حل معادله زمان پیوسته جبری ریکاتی (۵۱) حاصل می‌شود [۲۷].

$$A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0 \quad (۵۱)$$

معیار مقایسه قوانین کنترل

طبق مرجع [۲۰] انتگرال زاویه خطای اویلر حول محور اویلر می‌تواند به عنوان یک معیار مشخص برای سنجش قوانین کنترل مورد استفاده قرار گیرد. این معیار با نام اولراینت[12] شناخته می‌شود. تعریف اولراینت از آنجا سرچشمه می‌گیرد که برای مقایسه قوانین کنترل می‌توان از برخی متغیرهای مشترک بهره برد و زوایای اویلر طبیعی‌ترین متغیر فیزیکی هستند که جهت مقایسه کنترل وضعیت ماهواره می‌توان استفاده نمود. محاسبه زاویه خطای α مبین مسیر زاویه‌ای کلی است که ماهواره در مدت مانور طی می‌کند [۲۰]. معادله (۵۲) به محاسبه مقدار این زاویه خطا اختصاص دارد.

11. Linear Quadratic Regulator
12. EULERINT

$$\alpha = cos^{-1}(\frac{1}{2}(trace[A_E]-1)) \quad (۵۲)$$

در رابطه قبل ماتریس A_E بیانگر ماتریس خطای کسینوس هادی است. هرچه اولراینت کمتر باشد، مبین بهره‌وری بیشتر روش کنترلی مورد استفاده از نظر حداقل‌سازی کل مسیر زاویه‌ای طی شده توسط فضاپیماست و نشانه میل‌کردن سریع‌تر زوایای دوران به هدف کنترل و در نتیجه قوت کنترلر مورداستفاده خواهد بود [۲۰]. رابطه (۵۳) مربوط به محاسبه معیار اولراینت می باشد.

$$EULERINT = \int \alpha dt \quad (۵۳)$$

نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، به‌منظور بررسی عملکرد سیستم کنترل وضعیتِ طراحی شده، دو مانور تغییر وضعیت مجزا در نظر گرفته شده است. مشخصات هر مانور برحسب زوایای اویلر، پارامترهای کواترنیون و رودریگز که همگی نمایشگر یک مانور یکسان هستند در جدول (۱) برای مانور شماره یک و در جدول (۲) برای مانور شماره دو ارائه شده است. هر دو مانور در نظر گرفته شده، مانورهای زاویه بزرگ هستند. همان‌طور که مشخص است، در طی اجرای مانور شماره دو، تغییرات زوایای اویلر به گونه‌ای است که پارامتر q_4 مجبور به عبور از مقدار صفر می‌باشد و این حالت، وجه تمایز دو مانور در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- مشخصات مانور یک

Attitude	Euler	Quaternion	MRP
Initial	$\phi_0 = 0^\circ$ $\theta_0 = 0^\circ$ $\psi_0 = 0^\circ$	$q_1 = 0$ $q_2 = 0$ $q_3 = 0$ $q_4 = 1$	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = 0$
Final	$\phi_f = 20^\circ$ $\theta_f = -40^\circ$ $\psi_f = 30^\circ$	$q_1 = 0.2448$ $q_2 = -0.2831$ $q_3 = 0.2969$ $q_4 = 0.8785$	$\sigma_1 = 0.1303$ $\sigma_2 = -0.1507$ $\sigma_3 = 0.1580$

جدول ۲- مشخصات مانور دو

Attitude	**Euler**	**Quaternion**	**MRP**
Initial	$\phi_0 = 0^\circ$ $\theta_0 = 0^\circ$ $\psi_0 = 0^\circ$	$q_1 = 0$ $q_2 = 0$ $q_3 = 0$ $q_4 = 1$	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = 0$
Final	$\phi_f = -150^\circ$ $\theta_f = 70^\circ$ $\psi_f = 85^\circ$	$q_1 = -0.684$ $q_2 = -0.425$ $q_3 = 0.552$ $q_4 = -0.218$	$\sigma_1 = -0.874$ $\sigma_2 = -0.544$ $\sigma_3 = 0.705$

مطابق با مرجع [۱۶] فضاپیمایی با مشخصات ماتریس ممان اینرسی $I = diag(4,4,3)kg.m^2$ و مقدار ممان اینرسی هر عملگر برابر با $I_w = 5 \times 10^{-4} kg.m^2$ مفروض می‌باشد.

در قسمت طراحی کنترل خطی با استفاده از روش تنظیم‌کننده مربعی خطی؛ ماتریس‌های وزنی Q و R برای بهترین عملکرد سیستم انتخاب شده‌اند و به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد در یک ماتریس همانی با ابعاد مناسب، نمایش داده می‌شوند.

$$Q = 0.4 \times I_6 \quad (۵۲)$$

$$R = 350 \times I_3 \quad (۵۳)$$

بنابراین مؤلفه‌های ماتریس ضرایب کنترلی برای معادلات (۳۳) و (۴۵) به‌صورت زیر ظاهر می‌شوند.

$$K_1 = 0.0338 \quad (۵۴)$$

$$K_2 = 0.2622 \quad (۵۵)$$

شبیه‌سازی مانور وضعیت، در یک بازه زمانی ۶۰ ثانیه‌ای و در نرم‌افزار متلب اجرا شده و نتایج به‌صورت نمودار، در شکل‌های (۱) تا (۱۱) ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که برای نشان دادن مشخصه‌های مربوط به کنترلر مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز از مخفف MRP و برای کنترلر مبتنی بر کواترنیون‌ها از عبارت Quaternion در نمودارها استفاده شده است.

در خاتمه نیز برای اطمینان از جامعیت نتایج حاصل از مقایسه دو کنترلر خطی‌ساز پسخورد در اجرای مانور یک، در جدول (۳) چهار مانور تغییر وضعیت دیگر در نظر گرفته شده است تا از نظر پارامترهای اولراینت و مجموع گشتاورهای کنترلی؛ دو کنترلر خطی‌ساز پسخورد مبتنی بر بیان‌های سینماتیکی متفاوت، با یکدیگر مقایسه شوند. همه مانورهای جدول (۳)، از وضعیت اولیه صفر شروع شده و نتایج شبیه‌سازی این مانورها در جدول (۴) ارائه شده است.

جدول ۳- وضعیت فرمانی نهایی مانورهای ۳ تا ۶

Attitude Maneuvers	Command Attitude		
	ϕ_f	θ_f	ψ_f
3	10	40	25
4	-30	-50	-20
5	35	-5	15
6	5	45	-60

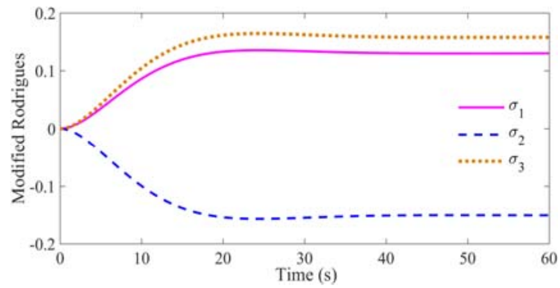
با توجه به فرآیند طراحی ورودی کنترلی مبتنی برکواترنیون‌ها می‌توان نتیجه گرفت، برای این‌که معادله ورودی کنترلی (۲۴) برای کنترل سیستم غیرخطی، همواره قابل‌محاسبه باشد، باید ماتریس $E(x)$ دارای دترمینانی غیر صفر باشد. پس بر اساس (۳۲) مؤلفه q_4 نباید صفر باشد. از طرف دیگر برای دست‌یابی به یک سیستم

خطی مناسب باید نگاشت z یک هموار ریختی باشد که با بررسی این مورد نیز، نتیجه‌ای مشابه مورد قبل به‌دست می‌آید، یعنی مؤلفه q_4 نباید برابر با صفر باشد. درنتیجه ورودی کنترلی طراحی‌شده در قسمت پارامترهای کواترنیون، تا زمانی‌که $q_4 \neq 0$ باشد به‌خوبی وظیفه کنترلی را انجام می‌دهد. اما با صفر شدن این پارامتر، کنترل‌کننده کارایی خود را از دست می‌دهد.

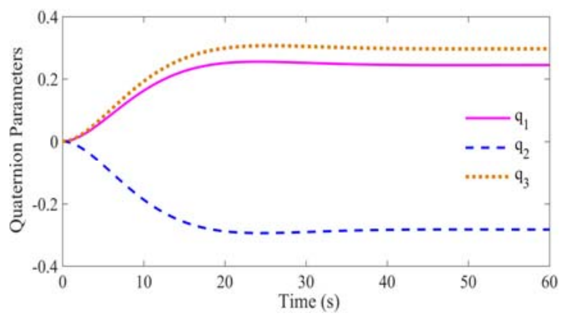
با در نظر گرفتن معادله (۷)، می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که، هر ترکیب توالی دوران که زاویه دوران اویلر ۱۸۰ درجه را نتیجه دهد، نمی‌تواند با انتخاب کواترنیون‌ها به‌عنوان توابع خروجی به کمک این روش کنترلی، کنترل شود. ازاین‌رو $q_4 = 1$ بیان‌کننده پایداری زاویه اویلر حول صفر می‌باشد [۵].

اما در ادامه و با انتخاب پارامترهای اصلاح شده رودریگز نه‌تنها دینامیک درونی به وجود نمی‌آید بلکه سیستم به‌طور کامل خطی شده و محدودیتی در طراحی به وجود نمی‌آید.

نتایج و نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی کامپیوتری حاکی از آن است که در اجرای مانور شماره یک، ورودی کنترلی طراحی شده مبتنی بر دو روش بیان سینماتیک، توانسته کنترل وضعیت مورد انتظار را انجام داده و خطای وضعیت را به صفر برساند. برای مانور شماره یک، شکل (۱) تغییرات پارامترهای اصلاح شده رودریگز و شکل (۲) تغییرات پارامترهای کواترنیون را نشان می‌دهند که مقادیر اولیه و نهایی آن‌ها مطابق با داده‌های مانور طراحی شده در جدول (۱) می‌باشند که نشان از اجرای صحیح مانور تغییر وضعیت طراحی شده دارد.

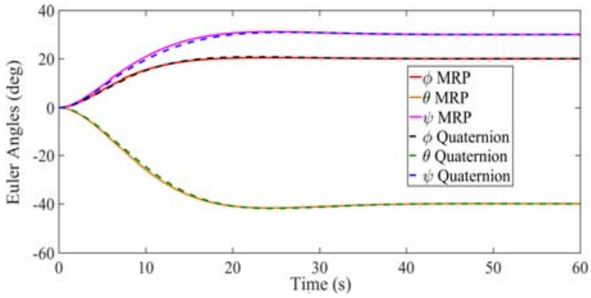


شکل ۱- مانور یک – پارامترهای اصلاح شده رودریگز



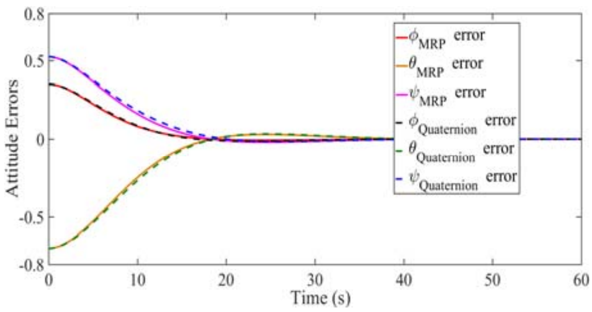
شکل ۲- مانور یک – پارامترهای کواترنیون

در شکل (۳) نمودارهای مربوط به تغییرات زوایای اویلر برای هر دو روش رسم شده است. این نمودارها نشان می‌دهد که تغییرات زوایای اویلر در هر دو کنترلر اختلاف بسیار اندکی با یکدیگر دارند.



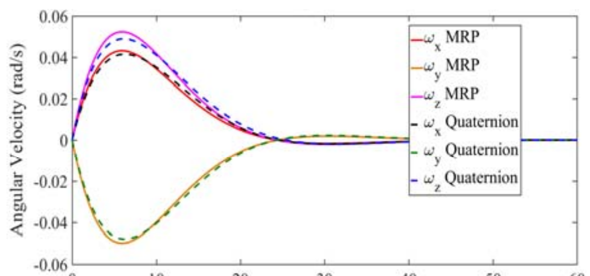
شکل ۳- مانور یک – تغییرات زوایای اویلر

با در نظر گرفتن نمودارهای شکل (۴) که در آن خطاهای وضعیت برای هر دو کنترلر ترسیم شده است، مشخص است که با اجرای مانور، خطای هر وضعیت با یک اختلاف اولیه نسبت به مقدار مطلوب یا فرمانی شروع شده و در نهایت هر دو کنترلر توانسته‌اند تا این خطا را به مقدار صفر رسانده و حفظ نمایند. مطابق با این شکل، اختلاف خطای هر وضعیت نیز برای هر دو کنترلر نسبت به یکدیگر بسیار اندک است.



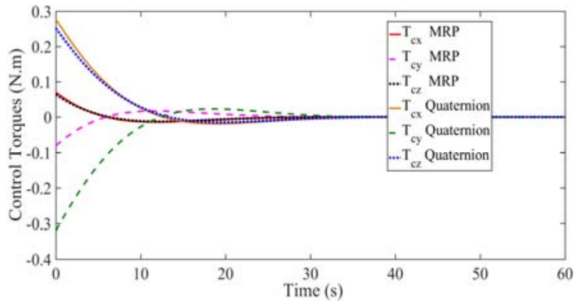
شکل ۴- مانور یک – خطاهای وضعیت برای کنترلرهای مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز و کواترنیون‌ها

هم‌چنین تغییرات سرعت‌های زاویه‌ای بدنی ماهواره حول محورهای بدنی در شکل (۵) برای هر روش ارائه شده که اختلاف اندکی را در به کارگیری هر دو کنترلر نشان می‌دهد.



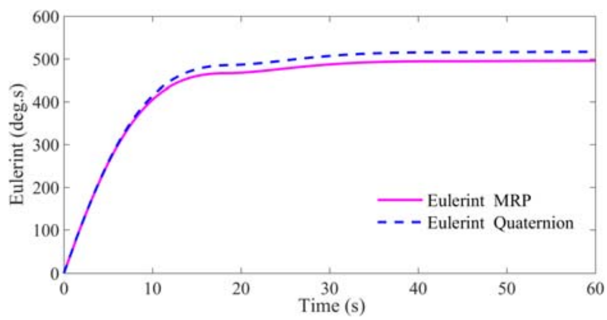
شکل ۵- مانور یک – سرعت‌های زاویه‌ای حول محورهای بدنی

در شکل (۶) گشتاورهای کنترلی حول سه محور بدنی برای هر دو کنترلر رسم شده‌اند. در این نمودارها یک اختلاف واضح میان گشتاور کنترلی لازم برای اجرای مانور با هر کدام از کنترلرها دیده می‌شود. براساس مرجع [۲۸]، یکی از معیارهایی که می‌توان از آن برای مقایسه کنترلرها استفاده نمود، مجموع قدرمطلق گشتاورهای فرمانی است. این معیار برای کنترلر مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز برابر با 8.83 Nm و برای کنترلر مبتنی بر کواترنیون‌ها برابر 37 Nm است. این اختلاف حاکی از تلاش کمتر کنترلر مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز در اجرای مانور یکسان است. در واقع می‌توان بیان نمود که برای اجرای مانور تغییر وضعیت به کمک این کنترلر، گشتاور کمتری باید توسط عملگرها تولید شود، چرا که گشتاور کنترلی محاسبه شده حول هر محور بدنی نیز مقدار کمتری است.



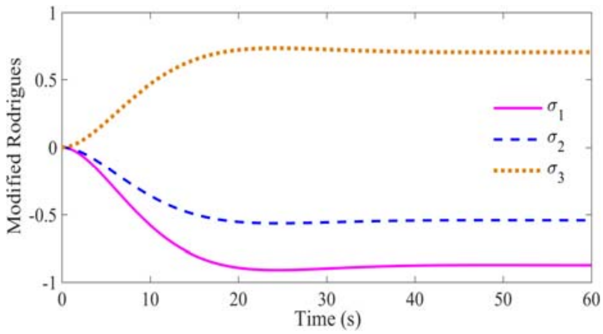
شکل ۶- مانور یک – گشتاورهای کنترلی برای کنترلرهای مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز و کواترنیون‌ها

براساس نمودارهای شکل (۷)، مقدار اولراینت در اجرای مانور تغییر وضعیت با استفاده از کنترلر طراحی شده مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز از مقدار مربوط به کنترلر طراحی شده با پارامترهای کواترنیون کمتر می‌باشد. همان‌طور که در قسمت معیار مقایسه قوانین کنترل بیان شد، این تفاوت در مقدار اولراینت، بیانگر کمتر بودن مسیر زاویه‌ای مجموعی است که فضاپیما در اجرای مانور تغییر وضعیت با تعریف سینماتیک برحسب پارامترهای اصلاح شده رودریگز، طی می‌کند. در نتیجه مطابق با مرجع [۲۰]، کنترلر مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز بهره‌وری بیشتری دارد.

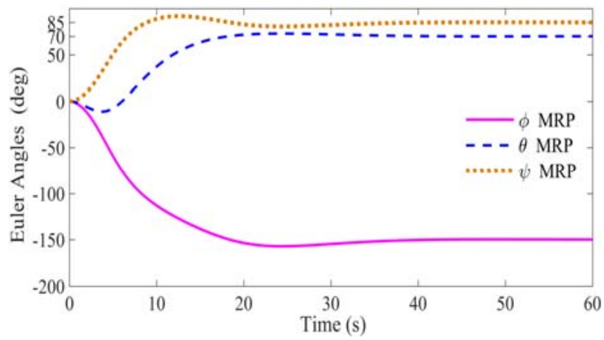


شکل ۷- مانور یک – تغییرات اولراینت

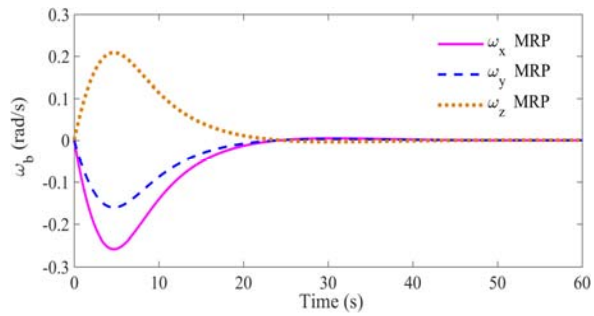
در شبیه‌سازی مانور شماره دو، کنترلر طراحی شده بر اساس کواترنیون، به علت صفر شدن پارامتر q_4 در طی مانور، نمی‌تواند مانور فرمانی را اجرا نماید. علت این امر به وجود آمدن سینگولاریتی در زمان انجام محاسبات است. اما در مورد طراحی مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز، همانند نمودار (۹) تغییر وضعیت از شرایط اولیه به مقادیر مورد انتظار، بدون هیچ مشکلی صورت می‌گیرد و با توجه به شکل (۱۰) فضاپیما مجدداً به حالت سکون بازمی‌گردد. مقادیر اولیه و نهایی نیز برای پارامترهای اصلاح شده رودریگز براساس شکل (۸) مطابق با فرضیات موجود در جدول (۲) است. گشتاور کنترلی لازم حول محورهای بدنی برای این مانور نیز در شکل (۱۱) قابل مشاهده است.



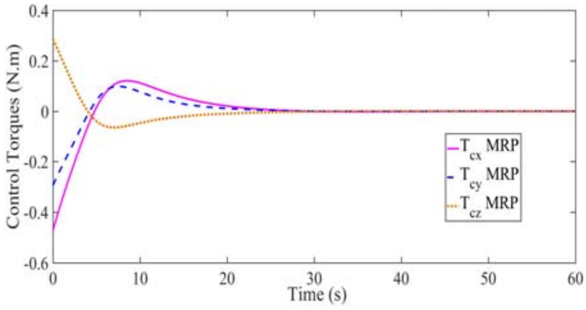
شکل ۸- مانور دو – پارامترهای اصلاح شده رودریگز



شکل ۹- مانور دو – تغییرات زوایایاویلر



شکل ۱۰- مانور دو – تغییرات سرعت‌های زاویه‌ای بدنی



شکل ۱۱- مانور دو – گشتاورهای کنترلی

با در نظر گرفتن نمودارهای ارائه شده در شکل (۱) تا شکل (۷) مشخص می‌شود که رفتار سیستم با استفاده از هر دو ورودی کنترلی در اجرای مانور شماره یک، بسیار نزدیک به هم بوده و تغییرات مربوط به هرکدام از زوایا و هرکدام از سرعت‌های زاویه‌ای بدنی در هر دو روش با یکدیگر اختلاف اندکی دارند. اما مقایسه معیارهای اولراینت و قدرمطلق مجموع گشتاورهای کنترلی در اجرای مانور یک و توجه به مقدار این پارامترها در جدول (۴) برای سایر مانورها، حاکی از کمتر بودن مقدار اولراینت و گشتاور کنترلی مجموع مورد نیاز برای اجرای مانور توسط کنترلر مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز است. در نتیجه با توجه به امکان وقوع سینگولاریتی در محاسبات کنترلر مبتنی بر کواترنیون‌ها، کارایی و بهره‌وری بیشتر، در کنار تلاش کنترلی کمتر طراحی کنترلر خطی‌ساز پسخورد با بیان سینماتیک براساس پارامترهای اصلاح شده رودریگز نشان داده می‌شود.

جدول ۴- نتایج اجرای مانورهای ۳ تا ۶ برای هر دو کنترلر طراحی شده

Attitude Maneuvers	Controller Design	Eulerint	$\sum\lvert T_c\rvert$ (N.m)
3	MRP	401	5.56
	Quaternion	410	23.85
4	MRP	562	10.51
	Quaternion	594	43.22
5	MRP	339	4.58
	Quaternion	345	19.71
6	MRP	648	11.15
	Quaternion	694	45.19

نتیجه‌گیری

در مسئله طراحی کنترل وضعیت فضاپیما با استفاده از تئوری خطی‌سازی پسخورد و روش خطی‌سازی ورودی-خروجی، انتخاب ترمینولوژی سینماتیکی بسیار مهم است. طراحی کنترل‌کننده با استفاده از این تئوری کنترلی و با در نظر گرفتن پارامترهای کواترنیون که رایج‌ترین روش بیان سینماتیک هستند، همیشه کارآمد نبوده و در مانورهایی با زاویه دوران ۱۸۰ درجه حول محور اویلر، حل ریاضیات مسئله با سینگولاریتی مواجه می‌شود. در این مقاله نشان داده شد که با انتخاب پارامترهای اصلاح شده رودریگز، مشکل وجود سینگولاریتی در محاسبات از بین می‌رود و نیازی به بررسی دینامیک درونی و پایداری آن نیز نخواهد بود. این در حالی است که هر دو روش در اجرای مانورهای زاویه بزرگ پاسخ وضعیت بسیار نزدیک به یکدیگر دارند. از نتایج شبیه‌سازی‌های این مقاله مشخص شد که علاوه بر عملکرد بدون محدودیت کنترلر مبتنی بر پارامترهای اصلاح شده رودریگز در اجرای مانورهای تغییر وضعیت، استفاده از این ترمینولوژی در فرآیند طراحی ورودی کنترلی خطی‌سازی ورودی-خروجی موجب می‌شود تا استفاده از پارامترهای اصلاح شده رودریگز در مقایسه با پارامترهای کواترنیون برای مسئله در نظر گرفته شده در این پژوهش، بسیار مفیدتر و مناسب‌تر باشد. چراکه در طراحی آن سینگولاریتی وجود ندارد، عملکرد آن تقریباً با عملکرد کواترنیون‌ها یکسان است، از سه پارامتر به‌جای چهار پارامتر استفاده می‌کند که بار محاسبات کمتری را نیاز دارد و کمتر بودن مقدار اولراینت در این روش حاکی از بهره‌وری بیشتر روش کنترلی مورد استفاده، از نظر حداقل‌سازی کل مسیر زاویه‌ای طی شده می‌باشد. همچنین گشتاور کنترلی لازم در اجرای مانورهای تغییر وضعیت یکسان نیز از این شیوه بسیار کمتر خواهد بود. پس کنترلر طراحی شده با پارامترهای اصلاح شده رودریگز، کاراتر با بهره‌وری بیشتر و تلاش کنترلی کمتر است.

مراجع

[1] Navabi, M., Tavana, M. and Mirzaei, H., "Attitude Control of Spacecraft by State Dependent Riccati Equation and Power Series Expansion of Riccati Methods *Journal of Space Science & Technology, (JSST)*, Vol. 7, No. 4, 2015, pp. 39-49, (in Persian).

[2] Slotin, J. J. E., and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

[3] Yue-nong, F. and Qing-hua W., "Tracking Control of Robot Manipulators via Output Feedback Linearization," *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, Vol. 1, No. 3, 2006, pp. 329-335.

[4] Samuel, J. and O.Pedro, J., "Hybrid Feedback Linearization Slip Control for Anti-lock Braking System," *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 10, No. 1, 2013, pp.81-99.

[5] Long, Y., Lyttle, S., Pagano, N. and Cappelleri, D. J., "Design and Quaternion-Based Attitude Control of the Omnicopter MAVU sing Feedback Linearization,"*ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, American Society of Mechanical Engineers, Vol. 4, 2012, pp. 1413-1421.

[6] Bang, H., Lee, J. S. and Eun, Y. J., "Nonlinear Attitude Control for a Rigid Spacecraft by Feedback Linearization,"*KSME International Journal*, Vol. 18, No. 2, 2004, pp. 203-210 (in Persian).

[7] Kristiansen, R. and Nicklasson, P. J., "Spacecraft Formation Flying: A Review and New Results on State

Inertial Uncertainty," *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, 2015, pp. 112-124, (in Persian).

[19] Navabi, M. and Nasiri, N., "Modeling and Simulating the Earth's Magnetic Field Utilizing the 10th Generation of IGRF and Comparison the Linear and Nonlinear Transformation in order to Use in Satellite Attitude Control," *Journal of Space Science & Technology, (JSST)*, Vol. 3, No. 4, 2011, pp. 45-52, (in Persian).

[20] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control A Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, 1997.

[21] Groÿekatthöfer, K. and Yoon, Z., "Introduction Into Quaternions For Spacecraft Attitude Representation," *TU Berlin*,Technical University of Berlin, Berlin, Germany No. 16, 2012.

[22] Crassidis, J. L. and Landis Markley, F., "Attitude Estimation Using Modified Rodrigues Parameters," *Flight Mechanics/ Estimation Theory Symposium*, (NASA-CP-3333), 1996, pp. 71-83.

[23] Navabi, M. and Soleymanpour, S., "Command Filtered Modular Adaptive Back stepping Attitude Control of Spacecraft in Presence of Disturbance Torque," *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 07, 2015, pp. 285-296, (in Persian).

[24] Tsiotras, P., "Stabilization and Optimality Results for the Attitude Control Problem," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 19, No. 4, 1996, pp. 772-779.

[25] Khalil, H. K., *Noninear Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

[26] Anjali, B. S.,Vivek, A. and Nandagopal, J. L., "Simulation and Analysis of Integral LQR Controller for Inner Control Loop Design of a Fixed Wing Micro Aerial Vehicle (MAV)," *Procedia Technology*, Vol. 1, No. 25, 2016, pp. 76-83.

[27] Kirk, D. E., *Optimal Control Theory an Introduction*, Courier Corporation, New York, 2004.

[28] Navabi, M., Nasiri,N., "Attitude Control of Microsatellite in Terms of Energy Consumption for Reaction Wheel and Magnetorquer Actuators," *Proceedings of The 10th Conference of Iranian Aerospace Society*, Tehran, Iran, March 1-3, 2010, (in persian).

Feedback Control,"*Acta Astronautica*, Vol. 65, No. 11-12, 2009, pp. 1537-1552.

[8] Chen, L. Q. and Liu, Y.Z., "Chaotic Attitude Motion of a Magnetic Rigid Spacecraft and its Control," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37, No. 3, 2002, pp. 493-504.

[9] Fang, B. and Kelkar, A.G., "On feedback linearization of underactuated nonlinear spacecraft dynamics," *Decision and Control Proceedings of the 40th IEEE Conference*, Vol. 4, 2001, pp. 3400-3405.

[10] Singh, S. N. and Yim, W., "Feedback Linearization and Solar Pressure Satellite Attitude Control," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 32, No. 2,1996, pp. 732-741.

[11] Bang, H., Myung, H. S. and Tahk, M.J., "Nonlinear Momentum Transfer Control of Spacecraft by Feedback Linearization," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 39, No. 6, 2002, pp. 866-873.

[12] Bajodah, A. H., "Singularly Perturbed Feedback Linearization with Linear Attitude Deviation Dynamics Realization," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 53, No. 4, 2008, pp. 321-343.

[13] Manikonda, V., Arambel, P. O., Gopinathan, M. and Mehra, R.K., "A Model Predictive Control-Based Approach for Spacecraft Formation Keeping and Attitude Control," *American Control ConferenceProceedings of the IEEE*, Vol. 6,1999, pp. 4258-4262.

[14] Chen, J., Jiang, D. L. and Sun, X.,"Adaptive Feedback Linearization Control of a Flexible Spacecraft," *Intelligent Systems Design and Applications Sixth International Conference IEEE*, Vol. 2, 2006, pp. 225-230.

[15] Navabi, M. and Hosseini, M. R., "Modeling and Spacecraft Attitude Control Using Reaction Wheel with Feedback Linearization, its Performance Study Subject to Power and EULERINT," *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 01, 2018, pp. 51-61, (in Persian).

[16] Kök, I., "Comparison and Analysis of Attitude Control Systems of a Satellite Using Reaction Wheel Actuators," *Master of Science, Luleå University*, 2012.

[17] Bruccoleri, C. and Mortari, D., "MRAD: Modified Rodrigues Vector Attitude Determination," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No. 3, 2006, pp. 383-390.

[18] Navabi, M. and Soleymanpour, S., "Standard and Robust Back stepping Control of a Spacecraft with