

Research Paper

# Numerical Simulation of Complicated Grains With 3D Burnback and Quasi-One-dimensional Flow Field of Solid Rocket Motors

M. Shahbazi<sup>1</sup>, M. Razmjooie<sup>2</sup>, and F. Ommi<sup>\*3</sup>

1. Department of Mechanical Engineering, Arak University, Arak. IRAN

2. Aerospace Group, Mechanical Engineering, Tarbiat Modarres University, Tehran, IRAN

3. Aerospace Group, Mechanical Engineering, Tarbiat Modarres University, Aerospace Research Institute, Ministry of Science Research and Technology, Tehran, IRAN

\*fommi@modares.ac.ir

*In this research, the 3D grain burnback with quasi-one-dimensional internal ballistic in a solid rocket motor is simulated using the Level set theory and the utilization of Sections method. Moreover, high accuracy in the simulation of grain's post-burn can be achieved while analysis time is significantly reduced. By using Section method, 3D grains are divided to many 2D grains, then 2D Level set is utilized to analyze grain burnback. Finally, the burning port of 3D grains are calculated by means of Interpolation. Furthermore, a numerical code is written and coupled with grain burnback programme to predict the internal pressure of the motor and the burning rate.*

**Keywords:** Solid rocket motor, Numerical simulation, 3D grain burnback, Level set method, Quasi-One-dimensional

---

1. M. Sc.

2. M. Sc.

3. Professor (Corresponding Author)

مقاله علمی - پژوهشی

# شبیه‌سازی موتور پیشرانه جامد شامل گرین پیچیده با در نظر گرفتن پس‌روی سه‌بعدی و میدان جریان شبه یک‌بعدی

محمد شهبازی<sup>۱</sup>، محمد رزمجویی<sup>۲</sup> و فتح‌اله امی<sup>۳\*</sup>

۱- گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران

۲- گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۳- گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس و رئیس پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

\* Fommi@modares.ac.ir

در این تحقیق، پس‌روی سطح انواع گرین‌های سه‌بعدی به همراه بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی موتورهای سوخت جامد با استفاده از تئوری مرزهای متحرک روش مجموعه سطح و بهره‌گیری از روش مقاطع شبیه‌سازی شده تا ضمن رسیدن به دقت بالا در شبیه‌سازی از زمان تحلیل پس‌روی گرین نیز به‌طور محسوسی کاسته شود. با استفاده از روش مقاطع، گرین‌های سه‌بعدی به تعداد زیادی از سطح مقطع‌های دوبعدی تبدیل شده و سپس با استفاده از تئوری منحنی‌های تراز در دو بعد پس‌روی گرین مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت با استفاده از روش درون‌یابی، سطح سوزش گرین‌های سه‌بعدی حاصل می‌شود. همچنین برای پیش‌بینی فشار درون موتور و نرخ سوزش مورد نظر یک کد بالستیک داخلی به صورت شبه یک‌بعدی نوشته و با کد تحلیل پس‌روی گرین کوپل شده است. پدیده سوزش فرسایشی نیز پدیده‌ای مهم در موتورهای سوخت جامد، به حساب می‌آید. در این تحقیق، با در نظر گرفتن سوزش فرسایشی بر اساس مدل سادرهلم، محفظه‌ی احتراق به المان‌هایی تقسیم‌بندی می‌شود و روابط بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی برای محاسبه پارامترهایی از قبیل فشار محفظه احتراق، تراست، سطح سوزش، درجه حرارت محفظه، عدد ماخ و ... در هر المان اعمال و حل می‌گردد. این روش از نظر نحوه پیاده‌سازی و میزان دقت با روش‌های تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه شده است که بیانگر دقت بالای روش استفاده‌شده در تحلیل عملکرد موتورهای سوخت جامد با گرین سه‌بعدی است.

واژه‌های کلیدی: موتور راکت پیشرانه جامد، شبیه‌سازی عددی، پس‌روی گرین سه‌بعدی، روش مجموع سطح، شبه یک‌بعدی

## علائم و اختصارات

|            |                                 |              |                          |
|------------|---------------------------------|--------------|--------------------------|
| $N_{CS}$   | تعداد سطح مقطع‌ها در هندسه گرین |              |                          |
| $A_p$      | سطح پورت                        |              |                          |
| $V_{prop}$ | حجم پیشران                      | $F$          | سرعت گسترش مرز           |
| $R$        | ثابت جهانی گازها                | $\bar{x}(t)$ | موقعیت مرز در لحظه $t$   |
| $M$        | عدد ماخ                         | $P_b$        | محیط سوزش                |
| $f$        | ضریب اصطکاک                     | $Z_{CS}$     | مختصات $Z$ سطح           |
| $D_h$      | قطر هیدرولیکی                   | $A_b$        | سطح سوزش                 |
| $P_o$      | فشار سکون                       |              |                          |
| $\dot{m}$  | جرم جریان عبوری                 |              | ۱. کارشناس ارشد          |
| $\rho_p$   | چگالی سوخت                      |              | ۲. کارشناس ارشد          |
|            |                                 |              | ۳. استاد (نویسنده مخاطب) |

|                  |                         |
|------------------|-------------------------|
| $h$              | گام مکانی               |
| $\tau_p$         | نرخ سوزش وابسته به فشار |
| $M_{cr}$         | عدد ماخ بحرانی          |
| $L_p$            | طول سوخت                |
| $A_{th}$         | سطح مقطع گلوگاه         |
| $T_f$            | دمای شعله               |
| $\partial\Omega$ | مرز پیوسته              |
| $\varphi$        | تابع فاصله              |

## مقدمه

برای تحلیل یک موتور سوخت جامد باید تغییرات سطح سوزش و فشار درون موتور در هر لحظه مشخص شود. در واقع مقدمه تحلیل موتور سوخت جامد، شبیه‌سازی پس‌روی سطح گرین آن است. اطلاعات به‌دست‌آمده از پس‌روی گرین برای بالستیک موتور مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای پیش‌بینی فشار درون موتور لازم است پس‌روی گرین با یک برنامه بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی کوپل شود. پس‌روی گرین از لحاظ تئوری مسئله‌ای با مرز متحرک است که بررسی آن به سه صورت تحلیلی، ترسیمی و عددی قابل انجام است [۱]. سایننتوت و همکارانش با استفاده از حل معادلات همیلتون-ژاکوبی، با تحلیل پس‌روی گرین، مساحت سطح سوزش را به‌دست آوردند [۲]. با توجه به عدم جامعیت و کارایی پایین روش‌های تحلیلی و ترسیمی، بهتر است از روش‌های عددی استفاده شود. تحقیقات فراوانی در زمینه‌ی تحلیل عددی پس‌روی گرین صورت گرفته است. کورین روشی را ارائه کرد که در آن از روش VOF برای حرکت مرز در جهت نرمال استفاده می‌شود. با استفاده از این روش نیازی به گسسته‌سازی مجدد مرز در حال حرکت نیست. اوشر و ستیان مسئله مرز متحرک را توسط معادلاتی از نوع همیلتون-ژاکوبی توصیف کردند [۳]. این معادلات می‌توانند به‌صورت یک مسئله مقدار اولیه یا مقدار مرزی، فرمول‌بندی شوند. بیان این معادلات به‌صورت یک مسئله مقدار اولیه، به روش منحنی‌های هم‌تراز شناخته‌شده است [۴]. در این روش مرز به‌صورت ضمنی تعریف می‌شود. میربان با استفاده از روش منحنی‌های هم‌تراز پس‌روی گرین‌های دوبعدی سوخت جامد را تحلیل نموده و به همراه یک برنامه بالستیک داخلی صفر بعدی، رفتار موتورهای سوخت جامد را شبیه‌سازی نموده است [۵]. ویلکاکس و همکارانش پس‌روی گرین‌های سوخت جامد را با استفاده از تابع حداقل فاصله شبیه‌سازی کرده‌اند [۶]. در این روش تابع حداقل فاصله با توجه به مدل گرین (دوبعدی یا سه‌بعدی) برنامه کتیا محاسبه شده و با توجه به مفهوم تابع فاصله بر روی گرین‌های سوخت جامد شبیه‌سازی شده است. اکسل و بیلدیریم با

استفاده از روش مجموع سطوح پس‌روی سطح گرین‌های سوخت جامد را در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی شبیه‌سازی کرده‌اند. آن‌ها برای تعریف هندسه گرین به‌صورت ضمنی، از تابع فاصله علامت‌دار استفاده کرده‌اند [۷]. فی کمن و همکارانش با استفاده از روش منحنی‌های هم‌تراز و حل آن با استفاده از روش‌های عددی دقت بالای ونو<sup>۴</sup> و رانگ-کوتا<sup>۵</sup> پس‌روی چند گرین نسبتاً پیچیده را شبیه‌سازی کرده‌اند [۸]. فاوینی و همکارانش بالستیک داخلی موتور زفیرو<sup>۶</sup> را شبیه‌سازی کردند، برای پس‌روی از روش لول‌ست و برای استخراج مشخصه‌های بالستیکی گرین از خواص توابع ضمنی (استفاده از توابع هویساید<sup>۷</sup> و دلتا دیراک<sup>۸</sup>) استفاده شده است [۹].

برخوردار با استفاده از روش سطوح هم‌تراز به شبیه‌سازی پس‌روی گرین‌های سه‌بعدی پرداختند. آن‌ها با مدل‌سازی سوزش غیریکنواخت و تغییر شرایط مرزی اتمام سوزش، قابلیت روش سطوح هم‌تراز را نشان دادند [۱۰]. مشیر استخاره و همکارانش پس‌روی سطح گرین‌های سه‌بعدی را با استفاده از روش سطوح هم‌تراز شبیه‌سازی کردند [۱۱]. آن‌ها در این تحقیق از روش المان برشی برای به‌دست آوردن پارامترهای بالستیکی سطح سوزش و سطح گذر جریان استفاده کردند. در روش المان برشی، المان‌هایی که مرز آن‌ها را قطع می‌کنند مستقیماً مورد توجه قرار می‌گیرد. این روش تعداد حالات ممکن را از ۲۵۶ حالت به ۱۵ حالت کاهش می‌دهد. در نتیجه پیش‌بینی می‌شود روش المان برشی سه‌بعدی دقت پایینی در محاسبه پارامترهای بالستیکی داشته باشد. قیصری و میر ساجدی به شبیه‌سازی پس‌روی گرین‌های سه‌بعدی موتورهای سوخت جامد با استفاده از روش منحنی‌های تراز پرداخته‌اند، آن‌ها در این تحقیق نقاط ضعف و قدرت تکنیک‌هایی که برای محاسبه پارامترهای پس‌روی (سطح سوزش و حجم محفظه احتراق) استفاده می‌شوند را مورد ارزیابی داده‌اند و بر اساس آن یک الگوریتم جدید با عنوان پیمایش مکعبی برای محاسبه پارامترهای پس‌روی معرفی کرده‌اند [۱۲].

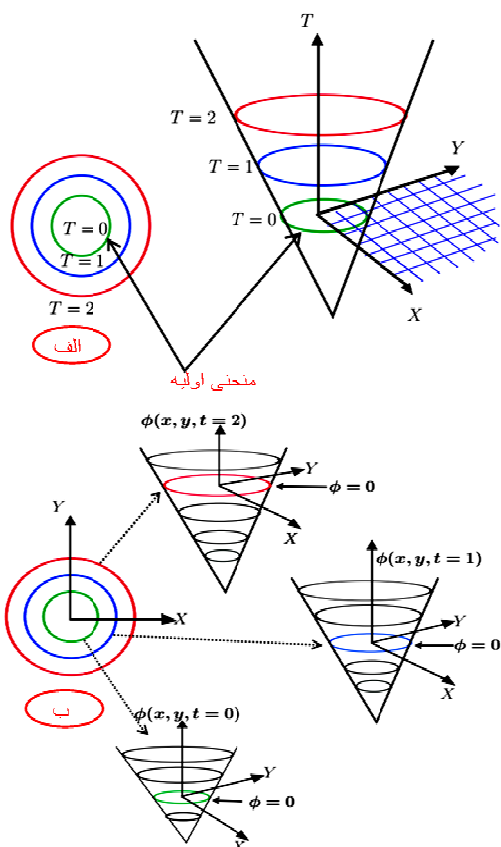
تحقیقات انجام‌شده در این زمینه نشان می‌دهند که روش منحنی‌های تراز، عملکرد مناسبی در تحلیل پس‌روی گرین دارد؛ اما میزان دقت نتایج به‌شدت وابسته به روشی است که برای محاسبه پارامترهای پس‌روی (سطح سوزش و حجم محفظه احتراق) استفاده می‌شود.

بر اثر عبور گازهای محصولات احتراق از روی سطح سوخت میزان نرخ سوزش سوخت افزایش می‌یابد که از آن با عنوان پدیده سوزش فرسایشی یاد می‌شود. همان‌طور که از مطالعات تحقیقات پیشین مشهود است، تاکنون پژوهشی به بررسی تأثیر سوزش

4. Weno  
5. Runge-Kutta  
6. Zefiro  
7. Heaviside function  
8. Dirac delta function

است برای به دست آوردن مرز از میانمایی استفاده شود. با استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای رابطه زیر حاصل می‌شود [۱۳].

$$\varphi_t + \nabla \varphi(X(t), t) \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (3)$$



شکل ۱- مدل‌سازی مسئله مرز متحرک با استفاده از روش منحنی‌های تراز [۱۳].

با توجه به روابط  $n = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$ ,  $n = F$ ,  $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cdot n = F$  رابطه‌ی فوق برابر است با [۱۱]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F |\nabla \varphi| = 0 \text{ given } \varphi(\bar{x}, t) = 0 \quad (4)$$

رابطه (۴) معادله منحنی هم‌تراز وابسته به زمان است که توسط اوشر و ستیان ارائه شده است. لازم به ذکر است که مرز در حال گسترش در هر لحظه با تراز صفر این تابع مشخص شده است. برای تقریب عددی منحنی‌های تراز ابتدا فرم اسکالر یک‌بعدی معادله فوق، با استفاده از قانون هایپربولیک به صورت رابطه (۵) به دست می‌آید:

$$u_t + [g(u)]_x = 0 \quad (5)$$

با بهره‌گیری از حل عددی می‌توان (به کمک یک تابع شار عددی  $g$ ) این رابطه تقریب زد، بنابراین با استفاده از یک تقریب اختلاف محدود پیشرو برای ترم اول و تقریب تفاضل محدود مرکزی برای ترم دوم، معادله فوق برابر است با:

فرسایشی بر پس‌روی سطح گرین‌های سه‌بعدی همراه با بالستیک شبه یک‌بعدی به‌طور هم‌زمان نپرداخته است. در این تحقیق روابط تحلیلی سوزش فرسایشی بر اساس مدل سادرهلم در نظر گرفته می‌شود. ابتدا مدل گرین موردنظر در نرم‌افزار کتیا طراحی می‌شود. سپس با استفاده از برنامه گمبیت<sup>۹</sup> به گسسته‌سازی مدل موردنظر پرداخته می‌شود. با استفاده از روش منحنی‌های تراز، معادلات همیلتون-ژاکوبی حل می‌شوند و با استفاده از روش مقاطع، مرز بازسازی می‌شود. نوآوری به‌کاررفته در این تحقیق، کویل کردن مدل بالستیک شبه یک‌بعدی با برنامه پس‌روی گرین‌های شبه سه‌بعدی و در نظر گرفتن اثر سوزش فرسایشی بر پس‌روی گرین است که موجب دقت بالا و کاهش زمان محاسبات می‌شود.

## تئوری و معادلات حاکم

### روش منحنی‌های تراز

روش منحنی‌های تراز، یک تکنیک عددی است که با اعمال بر یک معادله دیفرانسیل جزئی مقدار اولیه اوپلرین، چگونگی حرکت مرزها را توصیف می‌کند. روش منحنی‌های تراز به دو صورت ساکن و وابسته به زمان بیان شده است. در نوع ساکن فرض بر این است سرعت حرکت مرز ثابت است (شکل (۱-الف)). معادله حرکت این حالت به صورت رابطه (۱) بیان شده است [۱۳]:

$$|\nabla T| F = 1 \quad (1)$$

در نوع دوم (وابسته به زمان) مطابق با شکل (۱-ب) موقعیت اولیه مرز به‌عنوان یک منحنی تراز صفر از یک تابع  $\varphi$  بعد بالاتر  $\partial \Omega$  پیوسته شده است. مرز پیوسته  $\partial \Omega$  ناحیه داخلی و خارجی را از یکدیگر جدا می‌کند. این مرز در حالت دوبعدی یک منحنی و در حالت سه‌بعدی یک سطح است. این منحنی (سطح) در جهت عمود بر خودش با سرعت معلوم  $F$  حرکت می‌کند. هدف تعیین موقعیت مرز متحرک در هر لحظه است. مرز پیوسته  $\partial \Omega$ ، توسط مقدار صفر تابع ضمنی پیوسته در هر بازه‌ی زمانی تعریف شده است [۱۳]:

$$\varphi(\bar{x}(t), t) = 0 \quad (2)$$

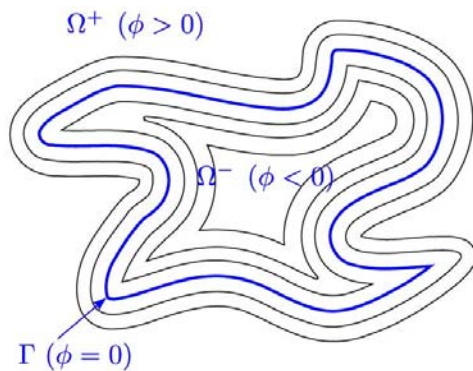
در رابطه (۲)،  $\varphi$  تابع فاصله و  $\bar{x}(t)$  بیانگر موقعیت مرز در لحظه  $t$  است.  $\varphi > 0$  نقاط بیرون از مرز، در مورد تحلیل پس‌روی قسمت سوخت است.  $\varphi < 0$  نقاط درون مرز، در مورد تحلیل پس‌روی قسمت گازهای داغ است. لازم به ذکر این نکته است که احتمال صفر شدن مطلق مقدار تابع  $\varphi = 0$  بسیار کم است، بنابراین لازم

9. Catia  
10. Gambit

فاصله برای گره موردنظر در شبکه کارتیزین در نظر گرفته و این عمل برای کلیه نقاط شبکه ثانویه تکرار شده است [۱۵].

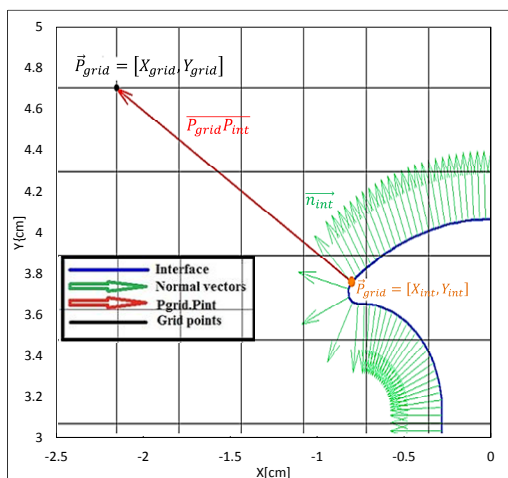
$$d(\bar{x}) = \min |\bar{x} - \bar{x}_1| \text{ for all } \bar{x}_1 \in \partial\Omega \quad (12)$$

تابع فاصله علامت‌دار، یک تابع ضمنی است که برای تمام Xهای شبکه حل برابر  $|MDF(x)| = d(X)$  است. همانند شکل (۲) برای تعیین علامت نیز بدین صورت عمل می‌شود که نقاط درون مرز علامت منفی ( $MDF = -|d_{min}|$ )، همچنین نقاط بیرون مرز علامت مثبت دارند ( $MDF = |d_{min}|$ ). میانگر حداقل فاصله نقطه‌ی Z ام شبکه حل از نقطه‌ی k ام مرز موردنظر، با استفاده از یک حلقه برای تمام نقاط مرز و شبکه حل محاسبه گردیده است. شمارنده این حلقه از  $k=1$  شروع و تا  $k=N$  ادامه دارد [۱۵].



شکل ۲- شماتیک تابع گسترده شده‌ی  $\Phi$  روی یک شبکه حل کارتیزین [۱۵].

بعد از محاسبه کمترین فاصله، تعیین علامت این فاصله جهت تشخیص داخل یا بیرون بودن این نقطه نسبت به مرز حائز اهمیت است. مطابق با شکل (۳) استفاده از بردار نرمال در نزدیک‌ترین نقطه از مرز نسبت به نقطه Z ام از شبکه حل ضروری است.



شکل ۳- پیدا کردن کمترین فاصله از مرز نسبت به نقاط شبکه حل [۱۴].

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{\Delta x} \quad (6)$$

تابع شار باید به گونه‌ای انتخاب شود که شکل بقایای معادله حفظ و شرایط بی‌نظمی ارضا شود. همچنین، یک جواب هموار با دقت بالا و به دور از ناپیوستگی ایجاد کند. یکی از ساده‌ترین تقریب‌های عددی شار روش آنکوئیست-اوشر است، که در آن با خلاصه کردن اجزاء تابع شار برابر است با:

$$g_{EO}(u_1, u_2) = (\max(u_1, 0)^2 + \min(u_2, 0)^2) \quad (7)$$

و با در نظر گرفتن همیلتونین  $H(u) = \sqrt{u^2}$  معادله منحنی تراز یک‌بعدی موردنظر برابر است با:

$$\Phi_i^{n+1} = \Phi_i^n - \Delta t (\max(D_i^{-x}, 0)^2 + \min(D_i^{+x}, 0)^2)^{1/2} \quad (8)$$

در نهایت منحنی تراز سه‌بعدی برابر است با:

$$\Phi_{i,j,k}^{n+1} = \Phi_{i,j,k}^n - \Delta t^n (\max(F_{i,j,k}, 0) \cdot \nabla_{i,j,k}^+ + \min(F_{i,j,k}, 0) \cdot \nabla_{i,j,k}^-) \quad (9)$$

که  $F_{i,j,k}$  در واقع سرعت گسترش مرز است و برای  $\nabla_{i,j,k}^+$  و  $\nabla_{i,j,k}^-$  داریم [۱۴]:

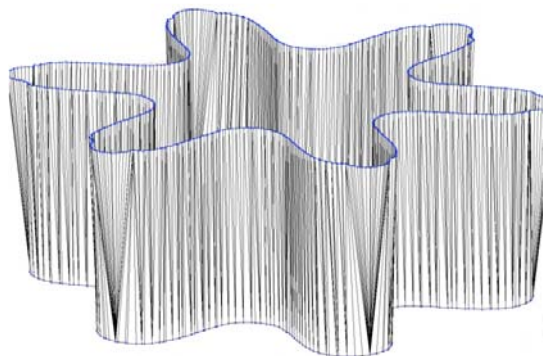
$$\begin{aligned} \nabla_{i,j,k}^+ &= [\min(D_{i,j,k}^{-x} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{+x} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-y} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{+y} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-z} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{+z} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{i,j,k}^- &= [\min(D_{i,j,k}^{-x} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{+x} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-y} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{+y} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-z} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{+z} \Phi_{i,j,k}^n, 0)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

### تابع حداقل فاصله

برای تعیین موقعیت اولیه مرز لازم است از تابع حداقل فاصله استفاده شود. برای تعیین تابع فاصله، فاصله هر گره از شبکه کارتیزین با تمام نقاط مرز محاسبه شده و کمترین فاصله محاسبه شده به عنوان تابع

تحلیل پس‌روی گرین به محاسبه نرخ سوزش می‌پردازد. در نتیجه سطح گرین با استفاده از گسترش یا انتشار مرز سطح مقطع محاسبه شده در دو بعد بازسازی شده است. شایان ذکر است که پس‌روی فقط در جهت بردار نرمال عمود بر مرز در نظر گرفته شده است. جهت تحلیل بهتر گرین‌های سه‌بعدی، علاوه بر سطح مقطع‌های دوبعدی که در راستای طول گرین ثابت‌اند، به وسیله مکان‌یابی سطح مقطع‌های بیشتری بین این سطوح ایجاد شده است. سپس شکل سطح سوزش گرین با ایجاد المان‌های مثلثی بین نقاط هرکدام از سطح مقطع‌ها به دست آمده است (شکل ۵). در حقیقت با استفاده از این روش به جای استفاده از تئوری منحنی‌های تراز در سه بعد و تحلیل پس‌روی سطح گرین سه‌بعدی، از تئوری منحنی‌های تراز دوبعدی استفاده می‌شود. در نتیجه با استفاده از این روش مرز گسترش یافته به وسیله تئوری منحنی‌های تراز یک منحنی دوبعدی (متناسب با هرکدام از سطح مقطع‌های دوبعدی) است. بعد از اینکه تمام منحنی‌های دوبعدی گسترش یافتند، با استفاده از پروسه مثلثی سطح گرین سه‌بعدی بازسازی شده است. بعد از آن مشخصات هندسی گرین سه‌بعدی مانند سطح سوزش، محیط سوزش و سطح گذر محاسبه می‌شود. در واقع، در روش شبه سه‌بعدی هرکدام از سطح مقطع‌های مختلف را با استفاده از تئوری منحنی‌های تراز در دو بعد گسترش می‌دهیم.



شکل ۵- ایجاد المان‌های مثلثی بین دو سطح مقطع [۱۴].

به همین جهت باید برای هر سطح مقطع یک تابع  $\varphi_k(x, y, t)$  وجود داشته باشد که با نرخ سوزش مشخص شروع به گسترش کند. مقدار نرخ سوزش برای هر سطح مقطع از محاسبات بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی به دست می‌آید. برای هر سطح مقطع با استفاده از تابع حداقل فاصله، تابع  $\varphi_k(x, y, t)$  مقاردهی اولیه می‌شود. پس لازم است برای هر سطح مقطع تابع حداقل فاصله محاسبه شود؛ و سپس تابع  $\varphi_k(x, y, t)$  مقاردهی اولیه شود.  $N_{rcs}$  مشخص‌کننده تعداد سطوح مقطع است [۱۵].

$$\Phi_k(x, y, t = 0) = MDF_k(x, y) \in \text{background grid}, \quad k = 1, \dots, N_{rcs} \quad (14)$$

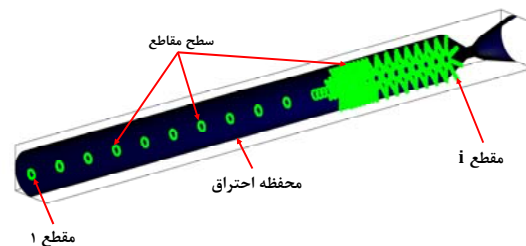
مقادیر مثبت رابطه‌ی  $(\overline{p_{grid}} - \overline{p_{int}}) \cdot \overline{n_{int}}$  بیانگر نقاط بیرونی و مقادیر منفی آن بیانگر نقاط درونی مرز هستند.  $(\overline{p_{grid}} = [X_{grid}^j, Y_{grid}^j])$  بیانگر بردار موقعیت نقطه زام از شبکه حل،  $(\overline{p_{int}} = [X_{int}^k, Y_{int}^k])$  بیانگر بردار موقعیت نزدیک‌ترین نقطه مرز نسبت به نقطه زام شبکه حل و بردار نرمال  $(\overline{n_{int}})$ .

محلی در نزدیک‌ترین نقطه مورد نظر از مرز هستند. این فرایند در یک حلقه برای کل نقاط شبکه حل تکرار می‌شود. در نتیجه با محاسبه تابع فاصله برای کل نقاط شبکه حل تابع  $\Phi$  مقاردهی اولیه می‌شود [۱۴].

$$\Phi(x, y, t = 0) = MDF(x, y) \Rightarrow \forall x, y \in \text{Background grid} \quad (13)$$

### تحلیل پس‌روی گرین‌های سه‌بعدی

در این پژوهش، طراحی گرین‌های موتور موشک سوخت جامد از نظر هندسی شامل گرین‌هایی است که سطح مقطع آن‌ها در راستای محور Z متغیر است (شکل ۴). بنابراین در گرین‌های سه‌بعدی، برای تحلیل پس‌روی سطح گرین، مطالعه هندسه ۳ بعدی گرین ضروری است.



شکل ۴- یک گرین سه‌بعدی با سطح مقطع‌های مختلف در راستای طول موتور.

### مدل شبه سه‌بعدی

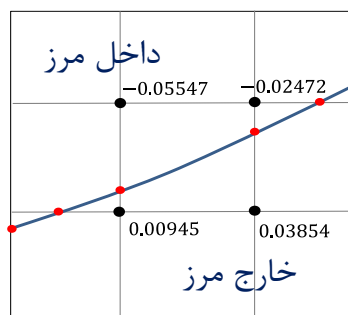
در این تحقیق، به جهت کاهش محاسبات، ساده‌تر کردن مسئله و کاهش زمان مورد نیاز، گرین‌های سه‌بعدی توسط روش جدیدی به نام شبه سه‌بعدی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ایده‌ی اصلی این روش به این صورت است که یک گرین سه‌بعدی را به چند گرین دوبعدی تبدیل می‌کند، که هرکدام از گرین‌های دوبعدی بیانگر مشخصات اصلی سطح گرین سه‌بعدی هستند. در واقع تحلیل پس‌روی گرین‌ها شامل گسترش (تکثیر) همین منحنی دوبعدی با نرخ سوزش مشخص است. از طرف دیگر نرخ سوزش مورد نظر از طریق شبیه‌سازی بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی محاسبه شده است. برنامه شبیه‌سازی بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی با استفاده از مشخصات هندسی گرین مورد نظر مانند سطح سوزش و ... به‌طور هم‌زمان با



## بازسازی مرز

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در روش منحنی‌های تراز مرز به‌وسیله تابع ضمنی بیان می‌گردد. برای گسترده‌سازی مرز موردنظر ابتدا باید با استفاده از میان‌یابی تابع  $\Phi$  رابین نقاط شبکه حل مشخص نماییم. پس از تبیین معادله پس‌روی، مشخصات بالستیکی گرین (شامل سطح سوزش، مساحت گذر، محیط سوزش و...) در هر گام حل تعیین می‌شوند، که این محاسبات مستلزم پیدا کردن موقعیت مرز در هر گام زمانی است. برای این منظور از روش میان‌یابی برای استخراج مرز استفاده شده است. مینا این روش بر مطالعه مقادیر تابع  $\Phi$  در گره‌های شبکه حل و میان‌یابی مقدار صفر این تابع بین گره‌های هر سلول از شبکه حل است. به بیان دیگر برای پیدا کردن مرز، لازم است سلول‌هایی که علامت تابع  $\Phi$  تغییر می‌کند، مشخص شود. آن‌ها سلول‌های مرزی می‌باشند. در واقع مرز از میان سلول‌هایی که علامت تابع  $\Phi$  بین گره‌های آن سلول متفاوت است، می‌گذرد (شکل ۶). در نتیجه اساس کار میان‌یابی<sup>۱۱</sup> بر پایه‌ی محاسبه مقدار تابع  $\Phi$  در گره‌های هر سلول و تخمین مرز به‌وسیله میان‌یابی است. به‌علاوه این روش دارای فرضیات زیر است:

- مرز تنها یک‌بار از هر ضلع سلول می‌گذرد.
- مرز درون هر سلول به‌صورت یک خط (منحنی) ترسیم می‌شود.
- مرز نمی‌تواند خودش را قطع کند.



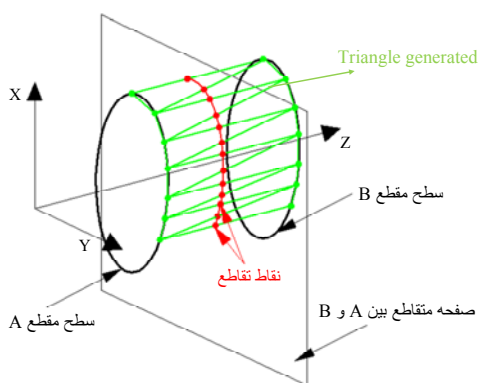
شکل ۶- مثالی از ردیابی مرز با استفاده از مقادیر تابع  $\Phi$

این فرآیند آن‌قدر تکرار می‌گردد تا مرز یک منحنی بسته شود. با پیدا کردن مرز، محاسبه محیط مرز امکان‌پذیر است. در واقع با استفاده از موقعیت مکانی هر نقطه از مرز درون هر سلول از شبکه حل، به راحتی می‌توان طول هر بخش از مرز درون هر سلول را به دست آورد. سپس با جمع کردن طول این بخش‌ها محیط مرز به‌طور کامل محاسبه می‌شود. در روش شبه سه‌بعدی، بازسازی سطح سوزش گرین سه‌بعدی در دو مرحله صورت می‌گیرد: (۱) پیدا کردن مقدار صفر  $\Phi$  برای هر کدام از سطح مقطع‌ها (۲) ایجاد پروسه

المان‌های مثلثی بین نقاط سطح مقطع. در نتیجه اولین قدم پیدا کردن نقاطی است که مقدار تابع  $\Phi$  برای آن‌ها برابر صفر است. در مرحله بعدی با وصل کردن نقاط سطوح مقطع مختلف از طریق ایجاد المان‌های مثلثی به هم سطح سوزش گرین به دست می‌آید. در واقع با بازسازی سطح سه‌بعدی گرین در هر بازه زمانی به مشخصات هندسی گرین دست می‌یابیم. در نتیجه ابتدا باید با استفاده از میان‌یابی و مقادیر تابع  $\Phi$  در هر سلول از شبکه حل به پیدا کردن مرز برای هر سطح مقطع پردازیم. محیط و سطح گذر در هر بازه زمانی محاسبه می‌شود. به دست آوردن این دو فاکتور برای محاسبه سطح سوزش و حجم پیشران ضروری است [۱۴].

## ایجاد المان‌های مثلثی بین سطح مقطع‌های اصلی

دومین مرحله از بازسازی مرز ایجاد المان‌های مثلثی بین نقاط سطوح مقطع است. با این کار سطح سه‌بعدی گرین به دست می‌آید. به‌علاوه برای ایجاد بهتر سطح می‌توانیم سطح مقطع‌های اضافی ایجاد کنیم. دقت کنید این سطح مقطع‌های اضافی با استفاده از تئوری مجموع سطوح گسترش نمی‌یابند. به بیان دیگر سطح مقطع‌های اضافی گسترده نمی‌شوند ولی در هر بازه‌ی زمانی با استفاده از میان‌یابی شکل گرین بین سطوح مقطع اصلی ایجاد می‌شوند (شکل ۷). در برنامه کامپیوتری تعداد سطح مقطع‌های اضافی که بین سطح مقطع‌های اصلی ایجاد می‌شوند توسط کاربر تعیین می‌گردند. الگوریتم محاسبه المان‌های مثلثی بر اساس یافتن نزدیک‌ترین رابط بین نقاط دو سطح مقطع است. با تکرار این عمل بین سطح مقطع‌های دیگر، سطح سه‌بعدی گرین ایجاد می‌گردد. بعد از ایجاد المان‌های مثلثی، سطح مقطع‌های اضافی از تقاطع سطح ایجاد شده توسط المان‌های مثلثی با صفحه میان‌یابی شده، ایجاد می‌شوند [۱۴].



شکل ۷- نحوه ایجاد سطح مقطع میان‌یابی شده بین دو سطح مقطع [۱۴].

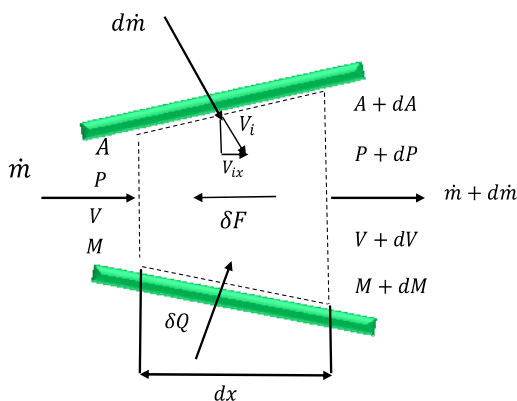
## سطح سوزش - سطح پورت گرین

سطح سوزش بین دو سطح مقطع (سطح مقطع  $i$  ام و سطح مقطع  $i+1$ ) را با استفاده از محیط این دو سطح مقطع تعریف می‌کنیم:

متفاوت استفاده کرد، لکن از طریق این روش نمی‌توان اثر پدیده‌های مهمی همچون سوزش فرسایشی را در مدل‌سازی لحاظ نمود. بنابراین برای احتساب اثرات سوزش فرسایشی، شتاب طولی و دورانی بر روی بالستیک داخلی، از یک مدل شبه یک‌بعدی استفاده می‌شود. شرایط گذرای عملکرد موتور نیز به صورت شبه دائمی مدل‌سازی می‌شود. جریان شبه یک‌بعدی غیرلزج و تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال حرارت، اصطکاک، تزریق جرم و تغییر سطح مقطع جریان به عنوان معادلات حاکم در نظر گرفته می‌شود [۱۷]. با فرض شبه‌دائمی بودن جریان و صرف‌نظر کردن از انتقال حرارت در دیواره‌ها، در هر لحظه از زمان از معادلات حاکم در طول موتور انتگرال‌گیری شده و توزیع عدد ماخ، فشار، دما و سرعت گاز در این امتداد مشخص می‌شود. با توجه به وابستگی نرخ سوزش پیش‌رانه به فشار، از توزیع فشار حاصل‌شده در لحظه قبل استفاده شده و نرخ سوزش در لحظه جدید در امتداد طول موتور تعیین می‌گردد. این روند تا پایان سوزش پیش‌رانه ادامه پیدا می‌کند. پس از اتمام پیش‌رانه جامد روند تخلیه گازهای محفظه موتور با استفاده از معادلات حاکم مدل‌سازی شده و تغییرات فشار به هنگام تخلیه گازهای داغ محاسبه می‌شود.

### معادلات حاکم بر بالستیک داخلی

ابتدا حجم معیار دیفرانسیلی شکل (۸) را در نظر می‌گیریم. به دلیل اینکه بر روی این حجم معیار اثرات اصطکاک دیواره ( $\delta F$ )، تزریق جرم ( $d\dot{m}$ )، انتقال حرارت ( $\delta Q$ ) و تغییر سطح ( $dA$ ) در نظر گرفته شده است، به جریان عبوری از آن جریان عمومیته یافته<sup>۱۲</sup> گفته می‌شود.



شکل ۸- حجم معیار دیفرانسیلی در جریان عمومیته یافته [۱۷]

با به‌کارگیری معادلات بقای جرم، منتوم و انرژی برای حجم معیار نشان داده‌شده، معادلات (۱۹) و (۲۰) حاصل می‌گردد.

$$A_{b-cs}^i = \left( \frac{p_{bcs}^i + p_{bcs}^{i+1}}{2} \right) \times \left| z_{cs}^{i+1} - z_{cs}^i \right| \quad (15)$$

$p_{bcs}^i$  محیط سوزش  $i$  ام،  $p_{bcs}^{i+1}$  محیط سوزش  $i+1$  ام،  $Z_{cs}^i$  مختصات  $Z$  سطح مقطع  $i$  ام،  $Z_{cs}^{i+1}$  مختصات  $Z$  سطح مقطع  $i+1$  ام را نشان می‌دهند؛ بنابراین کل سطح سوزش گرین با جمع کردن سطح سوزش‌های بین تمام سطح مقاطع به دست می‌آید:

$$A_b = \sum_{i=1}^{N_{cs}-1} A_{b-cs}^i \quad (16)$$

$N_{cs}$  بیان‌کننده تعداد سطح مقطع‌ها در هندسه گرین است. سطح پورت بین دو سطح مقطع نیز از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$V_{pcs}^i = \left( \frac{A_{pcs}^i + A_{pcs}^{i+1}}{2} \right) \times \left| z_{cs}^{i+1} - z_{cs}^i \right| \quad (17)$$

$A_{pcs}^i$  و  $A_{pcs}^{i+1}$  سطح پورت مقطع  $i$  و  $i+1$  ام است. در نهایت حجم پیش‌رانه برابر است با [۱۵]:

$$V_{prop} = \pi R_{case}^2 \cdot L - \sum_{i=1}^{N_{cs}-1} V_{p-cs}^i \quad (18)$$

### شبیه‌سازی بالستیک داخلی موتور سوخت جامد با در نظر گرفتن جریان شبه یک‌بعدی

در واقع برای دستیابی کامل به عملکرد موتور سوخت جامد باید به‌طور هم‌زمان پس‌روی گرین و بالستیک داخلی بررسی شود؛ مدل‌سازی بالستیک داخلی موتور متأثر از عوامل مختلفی است. در این قسمت، روابط ریاضی مربوط به بالستیک داخلی راکت سوخت جامد و مدل جریان شبه یک‌بعدی شبه‌پایدار را معرفی می‌کنیم.

### مدل‌سازی جریان شبه یک‌بعدی

هدف از مدل‌سازی که در این بررسی به توضیح آن پرداخته می‌شود آن است که با حل معادلات حاکم بر جریان درون موتور پیش‌رانه جامد، مشخصات جریان درون آن از جمله توزیع فشار، دما و عدد ماخ در طول موتور و همچنین مشخصات عملکردی موتور مانند فشار محفظه در طی فرآیند سوزش به صورت تابعی از زمان تعیین گردد. این مدل‌سازی را می‌توان از روش‌های مختلفی به انجام رساند. در ساده‌ترین روش، کل محفظه موتور و نازل متصل به آن را می‌توان به صورت یک حجم معیار واحد در نظر گرفت و به صورت صفربعدی و تنها با نوشتن قانون بقای جرم، مشخصات عملکردی موتور و فشار متوسط را به دست آورد [۱۶]. هر چند که می‌توان از این تحلیل صفر بعدی برای تعیین مشخصات عملکردی موتورهای پیش‌رانه جامد با هندسه گرین



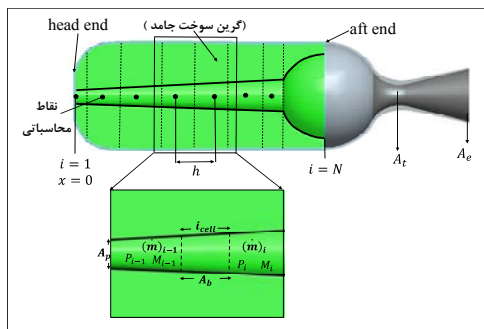
که در رابطه بالا  $P_b$  محیط سوزش می‌باشد. نرخ سوزش پیشرانه  $r$  دربرگیرنده اثرات نرخ سوزش وابسته به فشار و نرخ سوزش ناشی از سوزش فرسایشی است. در ادامه روابط نرخ سوزش وابسته به فشار و نیز نرخ سوزش ناشی از سوزش فرسایشی آورده می‌شود. با مشتق‌گیری از رابطه (۲۳) مقدار  $\frac{dm}{dx}$  حاصل می‌شود.

$$\frac{dm}{dx} = \rho_p \left( r P_b + x P_b \frac{dr}{dx} + x r \frac{dP_b}{dx} \right) \quad (24)$$

برای تعیین  $\frac{dP_b}{dx}$  و  $\frac{dr}{dx}$  و همچنین  $\frac{dA}{dx}$  که در معادله (۲۴) ظاهر شده است، نقاط محاسباتی شکل (۹)، را در نظر می‌گیریم. چنان‌که گفته شد مقادیر  $r(x)$ ،  $P_b(x)$ ،  $A(x)$  از لحظه قبل و یا شرایط اولیه معلوم هستند. بنابراین برای انتگرال‌گیری از معادله (۲۴) می‌توان از این مقادیر استفاده کرد. به عنوان مثال:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{A_i - A_{i-1}}{h} \quad (25)$$

نیز به روش مشابه قابل محاسبه هستند. بدین ترتیب با قرار دادن این مقادیر در رابطه (۲۴) مقدار  $\frac{dm}{dx}$  به دست می‌آید.



شکل ۹- نمایی از نقاط محاسباتی در میدان حل درون موتور پیشران سوخت جامد

قبل از ادامه بررسی روش حل، قدری بر روی فیزیک معادله (۲۱) متمرکز می‌شویم. چنانچه در این معادله ملاحظه می‌شود، برای اعداد ماخ کوچکتر از واحد (یعنی زیر صوت) عبارت  $1 - M^2$  مثبت شده و با افزایش سطح مقطع در امتداد  $x$ ، عدد ماخ جریان کاهش و با کاهش سطح مقطع در این امتداد، عدد ماخ افزایش می‌یابد. در جریان‌های مافوق صوت ملاحظه می‌شود که عدد ماخ با افزایش سطح در امتداد طول، افزایش و با کاهش آن، کاهش می‌یابد. اثر اصطکاک همچنان که از معادله فوق قابل درک است، در جهت صوتی شدن جریان (رسیدن عدد ماخ به یک) می‌باشد.

اکنون از روش رانگ-کوتا مرتبه ۴ استفاده کرده و از معادله (۲۱) انتگرال‌گیری می‌کنیم. مقدار عدد ماخ  $M_{i+1}$  در  $x_{i+1}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود [۸]. با حل معادله (۲۶) در نقاط محاسباتی مشخص شده در شکل (۹)، یعنی  $i = 1, 2, \dots, N$  توزیع عدد ماخ در طول محفظه موتور به دست می‌آید.

$$\frac{dM}{M} = - \left( \frac{\psi}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A} + \left( \frac{\gamma M^2 \psi}{2(1-M^2)} \right) \left( \frac{A f dx}{D_h} \right) + \left( \frac{(1+\gamma M^2)\psi}{2(1-M^2)} \right) \frac{dT_t}{T_t} + \quad (19)$$

$$\left( \frac{\psi(1+\gamma M^2) - \gamma M^2}{1-M^2} \right) \frac{dm}{m} - \left( \frac{dP}{P} = - \frac{\gamma M^2}{2} \left( \frac{A f dx}{D_h} \right) - \frac{\gamma M^2}{2} \frac{dT_t}{T_t} - \left( \gamma M^2 (1-y) \right) \frac{dm}{m} \right) \quad (20)$$

در این معادلات  $\psi = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2$  به  $y = V_{ix}/V$  و معرف نسبت مؤلفه افقی سرعت جرم تزریقی به سرعت کل جریان است. چنانچه گازهای حاصل از احتراق پیشرانه به صورت عمودی وارد حجم معیار شوند، مقدار  $y = 0$  می‌باشد. با صرف نظر کردن از تبادل حرارت بین گاز و دیواره موتور و پیشران جامد، تغییرات دمای سکون در طول موتور را می‌توان ناچیز فرض کرد. با استفاده از رابطه گاز کامل می‌توان چگالی را با داشتن دما و فشار، همچنین سرعت گاز را با داشتن سرعت صوت و عدد ماخ بدست آورد.

## روش حل معادلات

در صورتی که  $A(x)$ ،  $r(x)$ ،  $P_b(x)$  از شرایط اولیه یا لحظه قبل معلوم باشند، از معادله (۱۹) می‌توان در امتداد طول موتور انتگرال‌گیری کرد و توزیع عدد ماخ و سایر مشخصه‌های جریان را به دست آورد. برای این منظور با صرف نظر کردن از انتقال حرارت در دیواره‌ها، مجدداً معادله (۱۹) و (۲۰) را در نظر می‌گیریم. که این دو معادله به صورت زیر نوشته می‌شوند [۱۷].

$$\frac{dM}{dx} = \left( \frac{\psi}{1-M^2} \right) \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \left( \frac{\gamma M^2}{2} \right) \left( \frac{A f}{D_h} \right) \right) + \left( 1 + \gamma M^2 \right) \frac{1}{m} \frac{dm}{dx} = g_1(x, M) \quad (21)$$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{\gamma M^2}{2} \left( \frac{A f dx}{D_h} \right) - \frac{\gamma M^2}{2} \frac{dm}{m} = g_2(x, M) \quad (22)$$

کمیت  $\dot{m}$  جرم جریان عبوری در موقعیت  $x$  است. نرخ سوزش پیشرانه برابر ضخامت پیشرانه سوخته شده در واحد زمان می‌باشد. بنابراین  $\dot{m}$  در حالتی که شیب سطح عبوری جریان ناچیز باشد از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\dot{m} = \rho_p r P_b x \quad (23)$$

در ادامه جنریوکس<sup>۱۷</sup> رابطه (۳۰) را برای محدوده عدد رینولدز  $Re = 4 \times 10^3$  تا  $Re = 20 \times 10^6$  ارائه داد، که این رابطه در بیشتر کارهای مهندسی از دقت بالایی برخوردار است.

$$f_0 = 0.04 Re^{-0.16} = 0.04 \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right)^{-0.16} \quad (30)$$

اگر مقدار  $\mu$  در دسترس نباشد از رابطه (۳۱) برای بدست آوردن مقدار ویسکوزیته استفاده می‌شود.

$$\mu = 1.78 \times 10^{-7} M_g^{0.5} T^{0.6} \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)،  $Mg$  وزن مولکولی و  $T$  دمای گاز محصولات احتراق است [۱۸].

اما در حالت کلی به دلیل اثرات تزریق جرم بر ضریب اصطکاک، ضریب اصطکاک به عنوان تابعی از عدد رینولدز و نسبت دمش به صورت زیر بیان می‌شود [۱۹].

$$f = 0.0287 \frac{\ln(1 + B_f)}{B_f} Re_x^{-0.2} \quad (32)$$

با استفاده از انتگرال مومنتوم، این معادله می‌تواند به صورت تابعی از ضخامت مونتوم عدد رینولدز نوشته شود:

$$f = 0.0125 \left[ \frac{\ln(1 + B_f)}{B_f} \right]^{1.25} (1 + B_f)^{0.25} Re_{\delta 2}^{-0.25} \quad (33)$$

در رابطه بالا  $B_f$  نسبت دمش است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$B_f = \frac{\dot{m}_f / G_\infty}{f} \quad (34)$$

در رابطه (۳۴)  $\dot{m}_f$  شار جرمی در سطح دیواره و  $G_\infty = \rho_\infty u_\infty$ ، شار جرمی جریان آزاد است. در نهایت برای بدست آوردن ضریب اصطکاک با در نظر گرفتن اثرات تزریق جرم از رابطه زیر استفاده می‌شود [۱۹].

$$\frac{f}{f_0} = \frac{b_f}{e^{b_f} - 1}, \quad b_f = \ln(1 + B_f) \quad (35)$$

زیر نویس 0 نشان‌دهنده ضریب اصطکاک بدون اثرات تزریق جرم می‌باشد. بنابراین با در نظر گرفتن اثرات تزریق جرم بر ضریب اصطکاک می‌توان ضریب اصطکاک را با دقت مناسب در معادلات محاسبه نمود که این معادله یک معادله ضمنی است که به روش نیوتن رافسون حل شده است [۱۹].

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= M_i + \frac{h}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ m_1 &= g_1(x_i, M_i) \\ m_2 &= g_1\left(x_i + \frac{h}{2}, M_i + \frac{h}{2}m_1\right) \\ m_3 &= g_1\left(x_i + \frac{h}{2}, M_i + \frac{h}{2}m_2\right) \\ m_4 &= g_1(x_i + h, M_i + hm_3) \end{aligned} \quad (26)$$

که در این رابطه  $h = x_{i+1} - x_i$  گام مکانی می‌باشد [۱۷].

## محاسبه ضریب اصطکاک

به‌طور کلی ضریب اصطکاک برای جریان تراکم‌پذیر در یک لوله تابعی از عدد رینولدز ( $Re$ ) و عدد ماخ ( $M$ ) است. آزمایش‌های تجربی نشان می‌دهد در رژیم کاملاً توسعه‌یافته آشفته، ضریب اصطکاک ( $f$ ) در عمل وابسته به عدد ماخ نیست، و فرض می‌شود که  $f$  تنها وابسته به عدد رینولدز برای هر دو جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر است، همچنین وابسته به زبری سطح نیز می‌باشد [۱۸]. برای مقادیر کم عدد رینولدز (عدد رینولدز کمتر از ۲۰۰۰) جریان در لوله آرام است و ضریب اصطکاک تنها تابعی از عدد رینولدز است.

اگر جریان آشفته باشد (عدد رینولدز بیشتر از ۲۰۰۰) اما نسبت  $\frac{\varepsilon}{D}$  خیلی کوچک باشد، سطح دیواره تقریباً صاف است، بنابراین برای لوله صاف، ون کارمن<sup>۱۳</sup> رابطه زیر را ارائه کرد [۱۸].

$$\frac{1}{\sqrt{f'}} = 1.74 - 2 \log \left( \frac{18.6}{Re \sqrt{f'}} \right) \quad (27)$$

اگر سطح لوله خیلی زیر باشد، یعنی نسبت  $\frac{\varepsilon}{D}$  خیلی بزرگ باشد، و مقادیر رینولدز بزرگ باشد، آزمایش‌های تجربی نشان داده است که ضریب اصطکاک به عدد رینولدز وابسته نیست. به این سطوح کاملاً زبر<sup>۱۴</sup> گفته می‌شود. برای جریان در یک لوله زیر پراتل<sup>۱۵</sup> رابطه زیر را ارائه داده است.

$$\frac{1}{\sqrt{f'}} = 1.74 + 2 \log \left( \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (28)$$

کلبروک<sup>۱۶</sup> با انجام آزمایشات در لوله در رژیم جریان آشفته بین حالت تقریباً صاف و کاملاً زیر سطوح لوله، نشان داد که در این رژیم‌ها ضریب اصطکاک وابسته به عدد رینولدز و نسبت  $\frac{\varepsilon}{D}$  می‌باشد و رابطه (۲۹) را برای محاسبه ضریب اصطکاک ارائه داد [۱۸].

$$\frac{1}{\sqrt{f'}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f'}} \right) \quad (29)$$

13. Von Karman  
14. Wholly rough  
15. Prandtl  
16. Colebrook

17. Genereaux

## محاسبه سوزش فرسایشی

۲. جریان به صورت شبه یک‌بعدی در نظر گرفته می‌شود.
۳. سوخت مورد استفاده در هنگام سوختن، شکل هندسی خود را از دست نمی‌دهد.
۴. از انتقال حرارت داخل سوخت صرف نظر می‌شود.
۵. اثرات شتاب (طولی و دورانی) موشک در نظر گرفته نمی‌شود.
۶. از واکنش‌های شیمیایی رخ داده در گازها صرف نظر می‌شود.

### الگوریتم شبیه‌سازی

مراحل کلی الگوریتم شبیه‌سازی بالستیک داخلی موتور سوخت جامد به صورت خلاصه به شرح زیر می‌باشد.

- ۱- در ابتدا فشار  $P_0$  به عنوان حدس اولیه فشار در نقاط انتگرال‌گیری شکل (۲) انتخاب می‌شود. بدین منظور کل محفظه موتور به عنوان یک حجم کنترل در نظر گرفته شده و با مساوی قرار دادن جرم گاز تولید شده توسط پیشران با جرم عبوری از گلوگاه نازل داریم:

$$\dot{m}_p = \dot{m}_{th} \rightarrow r P_b L_p \rho_p = \frac{P_0 A_{th} \sqrt{\gamma \left[ \frac{2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}{\sqrt{RT_f}}$$

با استفاده از رابطه نرخ سوزش وابسته به فشار، فشار سکون کل محفظه با توجه به رابطه (۳۹) بدست می‌آید.

$$P_0 = \left( \frac{P_b L_p \rho_p \sqrt{RT_f}}{A_{th} \sqrt{\gamma \left[ \frac{2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (39)$$

- ۲- با دانستن دمای آدیاباتیک شعله  $T_f$ ، چگالی گاز در سر موتور برابر خواهد بود با:

$$\rho_1 = \frac{P_0}{RT_f} \quad (40)$$

- ۳- جرم تولید شده در حجم معیار متصل به سر موتور (نقطه ۱ در شکل ۲) برابر است با:

$$\dot{m}_1 = \rho_p P_b \frac{h}{2} (a P_0^n) \quad (41)$$

که در آن  $h = \frac{L_p}{N}$  گام مکانی انتگرال‌گیری است. با انتصاب این جرم به اولین گره محاسباتی، از تکین شدن نقطه ۱ برای معادلات (۲۱) و (۲۲) جلوگیری می‌شود. در سایر نقاط محاسباتی نیز جرم وارد شده به حجم معیارهای دیفرانسیلی ماقبل آن نقطه، به گره محاسباتی مربوطه نسبت داده می‌شود. به این ترتیب با استفاده از  $\dot{m}_1$  می‌توان به صورت زیر مقدار عدد ماخ  $M_1$  را محاسبه و به عنوان شرط مرزی معادله (۲۱) استفاده کرد.

بر اثر عبور گازهای محصولات احتراق از روی سطح سوخت میزان نرخ سوزش افزایش می‌یابد که از آن با عنوان پدیده سوزش فرسایشی یاد می‌شود. افزایش نرخ سوزش به واسطه سوزش فرسایشی اثرات جدی بر روی عملکرد موتور سوخت جامد دارد. به گونه‌ای که گاهی اوقات باعث افزایش فشار محفظه موتور تا دو برابر فشار متوسط می‌شود. سوزش فرسایشی معمولاً در ناحیه‌ای از سوخت که در آن گازها به هنگام ورود به نازل سرعت می‌گیرند اتفاق می‌افتد. به همین خاطر چنانچه نسبت سطح عبوری جریان به سطح گلوگاه نازل نزدیک یک باشد، نرخ سوزش فرسایشی سوخت بالا می‌رود. تاکنون بیش از ۳۰ مدل گوناگون که هر یک بر مبنای تئوری‌هایی نظیر، افزایش انتقال حرارت گاز به سطح سوخت، مخلوط شدن لایه مرزی جریان مغشوش و ... می‌باشد. برای مدل‌سازی ریاضی سوزش فرسایشی ارائه شده است [۱۹]. در این مدل‌سازی از مدل سادرهلم برای مدل‌سازی سوزش فرسایشی استفاده می‌شود [۲۰].

بر اساس مدل سادرهلم نرخ سوزش کلی سوخت به صورت زیر به دست می‌آید.

$$r = r_p \left( \frac{M}{M_{cr}} \right)^{XM} \quad (36)$$

که در آن  $r_p$  همان نرخ سوزش وابسته به فشار می‌باشد.  $M$  عدد ماخ جریان و  $M_{cr}$  عدد ماخ بحرانی می‌باشد. مقدار توان  $XM$  در رابطه (۳۶) از رابطه زیر بدست می‌آید [۲۱]:

$$r_p = a P^n \quad (37)$$

$$XM = \ln \left[ 0.06768 \left( \frac{P^{0.74}}{r_p} \right)^{0.4948} \right] \quad (38)$$

شایان ذکر است که در رابطه (۳۶) اگر  $M \leq M_{cr}$  شود، نرخ سوزش سوزش برابر با نرخ سوزش پایه ( $r = r_p$ ) در نظر گرفته می‌شود.

### فرضیات در نظر گرفته شده برای انجام

#### شبیه‌سازی

مدل‌سازی بالستیک داخلی موتور سوخت جامد متأثر از عوامل مختلفی می‌باشد؛ بنابراین برای ساده‌سازی معادلات، فرضیات زیر به کار گرفته شده است [۲۳، ۲۲، ۲۴].

۱. محصولات حاصل از احتراق به صورت گاز کامل در نظر گرفته می‌شوند.

منظور از رابطه فشار سکون مورد نیاز برای ایجاد حالت خفگی در گلوگاه نازل استفاده می‌شود. بر اساس این رابطه داریم:

$$P_{th} = \frac{\dot{m}_N \sqrt{\gamma RT_f}}{\Gamma A_{th}} \quad (50)$$

که در آن:

$$\Gamma = \gamma \left( \frac{2}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

گلوگاه نازل چنانچه فشار سکون در گلوگاه نازل یعنی  $P_h$  با  $P_{NOZ}$  یکی باشد بقای جرم بین موتور و نازل ارضا می‌شود و حل معادلات در قدم زمانی بعد دنبال می‌شود. در غیر این صورت باید مراحل ۱ تا ۵ را با اصلاح حدس فشار اولیه تکرار کرد. برای اصلاح حدس اولیه فشار در مرحله ۱ از رابطه زیر می‌توان بهره جست:

$$(P_o)_{new} = (P_o)_{old} \left( \frac{P_{th}}{P_{NOZ}} \right)^K \quad (51)$$

که ضریب ثابت  $K$  در آن در حدود 1.01 است. همچنین رابطه افت فشار سکون در نازل را می‌توان با توجه به شکل (۱۰) از رابطه (۵۲) بدست آورد [۲۵].

$$(\Delta P_s)_i = \gamma (M_i)^2 \left( \frac{\dot{m}_s}{\dot{m}_a} \right)_i (P_s)_i \quad (52)$$

که در آن:

$$(\dot{m}_a)_i = (\dot{m}_a)_{i-1} + \frac{1}{2} (\dot{m}_s)_i \quad (53)$$

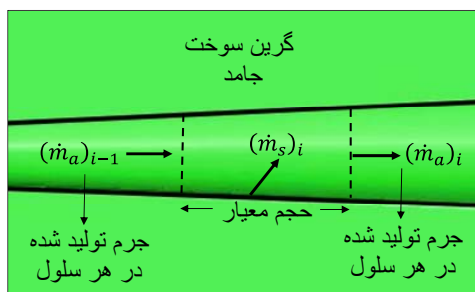
همچنین داریم:

$$(\dot{m}_s)_i = \frac{1}{2} \rho_p r_i W_{pi} h \quad (54)$$

بنابراین فشار سکون در گلوگاه نازل را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$P_{NOZ} = (P_s)_N - \frac{1}{2} (\Delta P_s)_N \quad (55)$$

که در آن  $(P_s)_N$  فشار سکون در انتهای گرین می‌باشد.



شکل ۱۰- جرم تولید در حجم معیارهای در نظر گرفته شده [۲۶].

پس از حل معادلات در گام زمانی اول، می‌توان با استفاده از رابطه تغییرات فشار نسبت به زمان، فشار را در اولین امان در نظر گرفته شده در شکل (۹) در گام زمانی بعد محاسبه نمود و این روند

$$M_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho_1 A_{p1} \sqrt{\gamma RT_f}} \quad (42)$$

اکنون می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (۲۱) به روش رانگ-کوتا (معادله ۲۶) توزیع عدد ماخ در طول موتور و عدد ماخ در خروجی از گرین (یعنی  $M_n$ ) را محاسبه کرد.

۴- با معلوم شدن توزیع عدد ماخ در طول موتور و با توجه به اینکه  $dT_i = \gamma = 0$  می‌توان از معادله (۲۲) انتگرال‌گیری کرده و توزیع فشار  $P_i$  را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$p_i = p_o \exp \left[ \int_{x=0}^{x=x_1} g_2(x, M) dx \right] \quad (43)$$

که در آن تابع  $g_2(x, M)$  برابر است با:

$$g_2(x, M) = -\frac{\gamma M^2}{2} \left( \frac{4f}{D_h} + 2 \frac{1}{m} \frac{dm}{dx} \right) \quad (44)$$

با اعمال روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای به معادله (۴۳) می‌توان نوشت:

$$p_i = p_c \exp \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{h}{2} \left[ g_2(x_j, M_j) + g_2(x_{j+1}, M_{j+1}) \right] \right] \quad (45)$$

۵- با استفاده از روابط بین خواص سکون و خواص ترمودینامیکی گاز کامل، سایر خواص ترمودینامیکی همچون فشار استاتیک، دما، چگالی و سرعت گاز به صورت زیر قابل محاسبه است [۲۵].

$$P_i = \frac{p_i}{\left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right)^{\frac{\gamma}{\lambda-1}}} \quad (46)$$

$$T_i = \frac{T_f}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2} \quad (47)$$

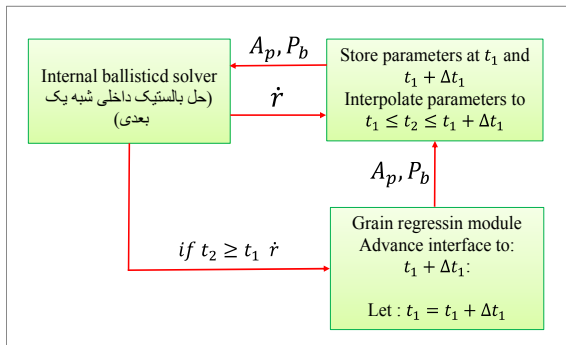
$$\rho_i = \frac{P_i}{RT_i} \quad (48)$$

$$V_i = M_i \sqrt{\gamma RT_i} \quad (49)$$

باید توجه داشت که در محاسبه  $\dot{m}$  و  $\frac{dm}{dx}$  در مراحل قبل، از حدس اولیه فشار سکون جهت تعیین نرخ سوزش استفاده شده است. پس از آنکه توزیع فشار استاتیک در مرحله ۵ به دست آمد، لازم تا مقدار حدسی فشار در رابطه نرخ سوزش را با مقادیر جدید فشار جایگزین شده و مجدداً مراحل ۲ تا ۴ تکرار شود. این تکرار تا زمانی که یک توزیع ثابت برای عدد ماخ (و یا فشار استاتیک) در طول محفظه موتور به دست آید ادامه پیدا می‌کند.

۶- پس از ثابت شدن توزیع خواص ترمودینامیکی گازهای درون محفظه موتور، باید بررسی شود که آیا میزان جرم گازهای سوخته شده با جرم عبوری از نازل یکی می‌شود یا خیر. بدین

می‌دهد. در این حالت خروجی نیروی رانش موتور برابر صفر است زیرا سطح سوزش صفر است. در حالت مقابل اگر زمان محاسبات تمام شود ولی سوخت تمام نشود، برنامه آخرین مرحله از سطح سوزش را به دست می‌آورد. لازم به ذکر است که زمان شبیه‌سازی به پارامترهای هندسی گرین و احتراقی سوخت بستگی دارد.



شکل ۱۱- الگوریتم شبیه‌سازی پس‌روی گرین سه‌بعدی به همراه بالستیک یک‌بعدی.

## راستی‌آزمایی نتایج

جهت راستی‌آزمایی نتایج، لازم است نتایج بدست آمده از کد این برنامه‌ها را با نتایج آزمایشگاهی و روش‌های انجام شده قبلی مقایسه کنیم.

### راستی‌آزمایی گرین دو بعدی (گرین استوانه‌ای درون-سوز) با نتایج تحلیلی

نتایج پس‌روی گرین دو بعدی به همراه جریان داخلی صفر بعدی با نتایج پس‌روی یک گرین استوانه‌ای که با روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است مقایسه می‌شود. محیط مرز در هر لحظه دلخواه از رابطه (۶۱) بدست می‌آید.

$$p_b(t) = 2\pi r(t) \quad (61)$$

که  $r(t)$  در این رابطه نشان‌دهنده شعاع گرین در زمان  $t$  است. نرخ تغییر شعاع مرز برابر است با نرخ سوزش مربوطه ( $r_b = r(t)$ ). بنابراین با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق شعاع مرز محاسبه می‌شود.

$$r(t) = r_0 + r_b t \quad (62)$$

در رابطه (۶۲)،  $r_b$  شعاع اولیه گرین می‌باشد ( $t = 0$ ). بنابراین سطح سوزش در هر لحظه به صورت تحلیلی مطابق زیر بدست می‌آید (فرض شده است که دو انتهای گرین می‌سوزند).

$$A_b(t) = (2\pi(r_0 + r_b t)(L_{grain} - 2r_b t)) + 2\pi(R_{case}^2 - (r_0 + r_b t)^2) \quad (63)$$

در شکل (۱۲) شکل اولیه گرین نشان داده شده است. شکل (۱۲) تغییر شکل تدریجی مرز را در بازه‌های زمانی برابر نمایش می‌دهد.

تا پایان سوزش پیش‌رانه ادامه پیدا می‌کند.

$$P_{NOZ} = (P_s)_N - \frac{1}{2}(\Delta P_s)_N \quad (56)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{RT_f}{V_c} (\dot{m}_{total} - \dot{m}_{nozzle}) - \frac{1}{2} \frac{P_1}{\rho_p} \frac{\dot{m}_{total}}{V_c} \quad (57)$$

که در آن:

$$\dot{m}_{total} = \sum_{i=1}^N \dot{m}_i \quad (58)$$

$$\dot{m}_{total} = P_{NOZ} A_{th} \sqrt{\frac{\gamma+1}{RT_f} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (59)$$

که در روابط بالا  $V_c$ ، برابر حجم کل فضای آزاد (فضایی که توسط گرین سوخت اشغال نشده) در هر گام زمانی می‌باشد. و  $A_t$ ، بیانگر سطح مقطع گلوگاه می‌باشد. در نهایت فشار در گام زمانی بعدی در اولین المان به صورت زیر بدست می‌آید [۲۶].

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(1) + \Delta t \frac{dP}{dt} \quad (60)$$

### الگوریتم پس‌روی سطح گرین‌های سه‌بعدی با بالستیک داخلی شبه سه‌بعدی

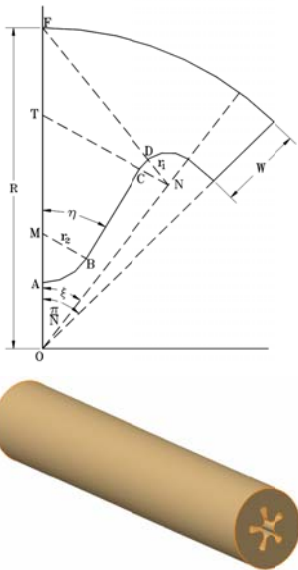
شکل (۱۱) الگوریتم برنامه کامپیوتری نوشته‌شده گرین سه‌بعدی موتور سوخت جامد با بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی را نمایش می‌دهد. تغییر شکل سطح سوزش گرین بر روی عملکرد راکت سوخت جامد تأثیر به‌سزایی دارد. در واقع عملکرد راکت سوخت جامد از طریق بالستیک داخلی وابسته به تحلیل پس‌روی سطح گرین است. برنامه شبیه‌ساز بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی راکت به مشخصات هندسی مانند سطح سوزش، سطح گذر، محیط سوزش و... به‌عنوان ورودی نیاز دارد. همچنین سرعت گسترش سطح سوزش (نرخ سوزش) با در نظر گرفتن سوزش فرسایشی از مدل سادرهلم با محاسبه عدد ماخ در راستای طول گرین برای هر کدام از سطح مقطع‌های مورد نظر به‌طور جداگانه از بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی به‌دست می‌آید. ارتباط بالستیک داخلی و پس‌روی، یک رابطه دوطرفه است، در نتیجه برنامه بالستیک داخلی و پس‌روی گرین با همدیگر کوپل هستند. برنامه کامپیوتری محاسبات را تا به پایان رسیدن زمان شبیه‌سازی ادامه می‌دهد. با تعیین کردن زمان شبیه‌سازی ممکن است سوخت راکت تمام شود. اگر سوخت راکت تمام شود ولی زمان تعیین‌شده به پایان نرسد، برنامه محاسبات را ادامه

### گرین ستاره‌ای

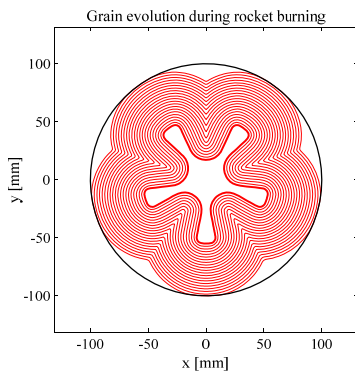
پارامترهای لازم برای ترسیم گرین ستاره‌ای در جدول (۱) آمده است. همچنین شکل گرین سه بعدی که در نرم‌افزار CAD رسم شده است در شکل (۱۵) نشان داده شده است. در اینجا نتایج برنامه کامپیوتری نوشته شده با نتایج مرجع [۲۷] مقایسه شده است. شکل (۱۶) تغییر شکل تدریجی مرز را در بازه‌های زمانی برابر در گرین ستاره‌ای در حالت دو بعدی نمایش می‌دهد. در شکل (۱۷) مقایسه‌ای بین مساحت سطح سوزش بر حسب ضخامت جان برای گرین ستاره‌ای نسبت به مرجع [۲۷] انجام شده است.

جدول ۱- مشخصات گرین ستاره‌ای مرجع [۲۷]

|              |      |
|--------------|------|
| N            | ۵    |
| R(mm)        | ۱۰۰  |
| W(mm)        | ۴۵   |
| r1(mm)       | ۵    |
| r2(mm)       | ۱۵   |
| $\eta$ (deg) | ۲۵   |
| $\epsilon$   | ۰/۹  |
| Length (mm)  | ۱۵۰۰ |

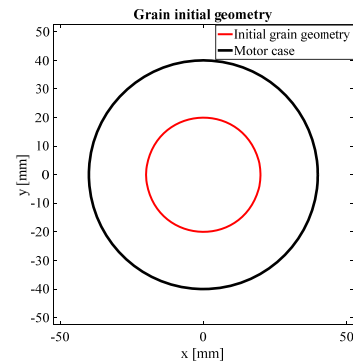


شکل ۱۵- گرین ستاره‌ای

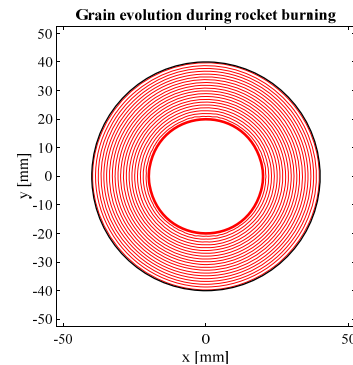


شکل ۱۶- تغییر شکل گرین ستاره‌ای در حین عملکرد موتور

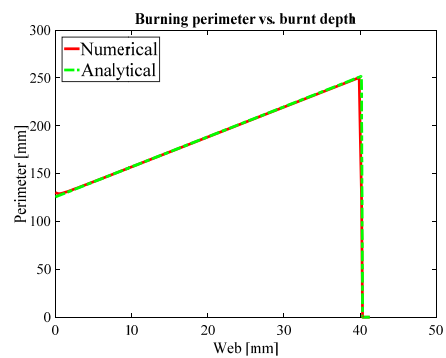
این نتایج با استفاده از کد برنامه شبیه‌سازی پس‌روی گرین دوبعدی با جریان داخلی صفر بعدی ناپایدار بدست آمده‌اند. به‌رغم اینکه شبکه حل در نظر گرفته شده کارترین و با تعداد معقول گره می‌باشد، شکل کروی دایروی به خوبی مدل شده است. شکل (۱۳) تغییر شکل تدریجی مرز را در بازه‌های زمانی برابر نمایش می‌دهد. این نتایج با استفاده از کد برنامه شبیه‌سازی پس‌روی گرین دوبعدی با جریان داخلی صفر بعدی ناپایدار به‌دست آمده‌اند. همان‌طور که در شکل (۱۴) نشان داده شده است. نتایج بدست آمده از برنامه تهیه شده برای پس‌روی گرین دوبعدی راکت سوخت جامد با جریان داخلی صفر بعدی ناپایدار با نتایج تحلیلی مورد نظر همخوانی خوبی دارند.



شکل ۱۲- هندسه اولیه گرین دایروی

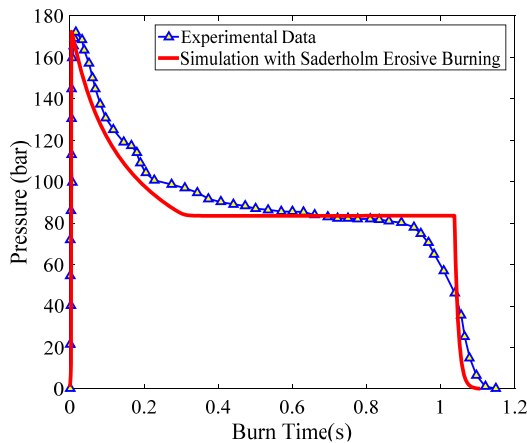


شکل ۱۳- تغییر شکل گرین در حین عملکرد راکت

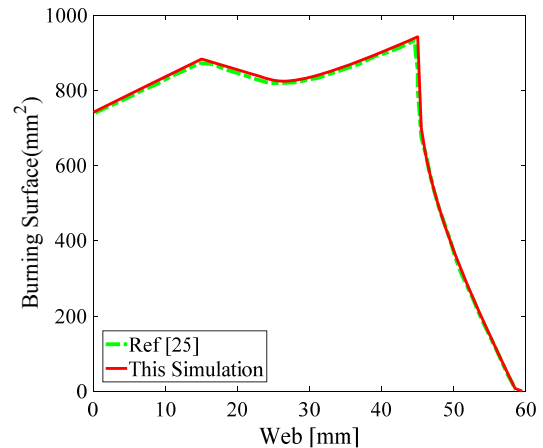


شکل ۱۴- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای تغییرات محیط سوزش بر حسب وب





شکل ۱۸- مقایسه نتایج تجربی و شبیه‌سازی عددی برای موتور سوخت جامد درون- بیرون سوز

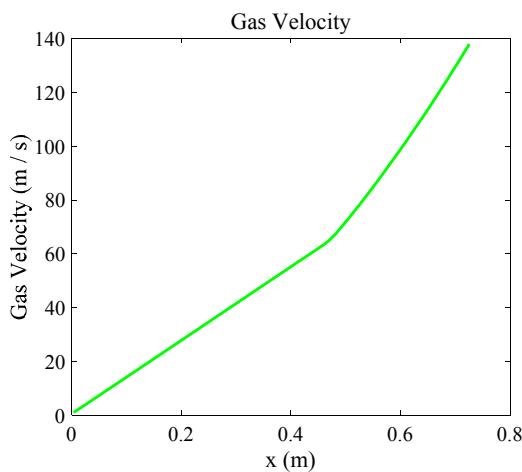


شکل ۱۷- مقایسه‌ای بین نمودار مساحت سطح سوزش بر حسب ضخامت جان برای گرین ستاره‌ای در حالت سه بعدی با مرجع [۲۷]

## اثرات اصطکاک بر توزیع فشار استاتیک درون موتور

در رابطه (۳۰) اثر اصطکاک در نظر گرفته شد، از آنجاییکه این رابطه برای محدوده خاصی از عدد رینولدز صادق است و عدد رینولدز جریان گاز داخلی به سرعت گاز وابسته است، در شکل (۱۹) توزیع سرعت در راستای طولی موتور رسم شده است. همچنین با توجه به شکل (۲۰) مشخص است که عدد رینولدز در این محدوده قرار دارد. بنابراین مقدار اصطکاک در راستای طولی موتور در شکل (۲۱) رسم شده است. با توجه به نمودارهای رسم شده، مشخص است که هر چه سرعت افزایش پیدا کند عدد رینولدز افزایش و در نهایت مقدار اصطکاک کاهش پیدا می‌کند.

همچنین در شکل (۲۲) توزیع فشار استاتیک را مشاهده می‌کنیم که هر چه میزان ضریب اصطکاک در راستای طولی کاهش پیدا کند، میزان افزایش فشار نیز کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۱۹- توزیع سرعت در راستای طولی موتور در گام زمانی اول

## راستی‌آزمایی بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی با در نظر گرفتن گرین استوانه‌ای درون-بیرون سوز

برای صحت‌گذاری کد بالستیک داخلی شبه‌بعدی نوشته شده یک موتور با گرین درون-بیرون سوز در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که تست‌های انجام شده در یکی از معتبرترین مراکز تحقیقاتی سازمان صنایع هوافضا در ایران انجام شده است. مشخصات این موتور در جدول (۲) آورده شده است.

جدول ۲- مشخصات و پارامترهای هندسی موتور سوخت جامد با گرین استوانه‌ای درون-بیرون سوز

|          |   |
|----------|---|
| ۱۱/۸۴۰۳  | نسبت طول گرین به قطر خارجی ( $L/D_{out}$ )                      |
| ۱۰/۴۱۴۳  | نسبت طول گرین به کالیبر موتور ( $L/C$ )                         |
| ۲/۲۰۱۰   | نسبت سطح مقطع عبوری جریان گاز به گلوگاه ( $A_p/A_{th}$ )        |
| ۱۹۲/۰۶۱۵ | نسبت کل سطح سوزش سوخت به سطح مقطع عبوری جریان گاز ( $A_b/A_p$ ) |
| ۴۲۲/۷۱۸۸ | نسبت کل سطح سوزش سوخت به سطح مقطع گلوگاه ( $A_b/A_{th}$ )       |
| ۲۲۰۰     | دمای شعله (K)   |

در شکل (۱۸) مقایسه‌ای بین نتایج تجربی و شبیه‌سازی در موتور مورد نظر انجام شده است. با توجه به نمودار فشار-زمان دیده می‌شود مدل سوزش فرسایشی سادرهلم قادر است که قله منحنی فشار موتور را به خوبی پیش‌بینی کند. همچنین شبیه‌سازی حاضر در پیش‌بینی فشار محفظه در سایر قسمت‌های منحنی به خوبی عمل کرده است. بنابراین مدل سادرهلم در مقایسه با سایر مدل‌ها (مانند مدل گریتریکس) به علت عدم نیاز به پارامترهای تجربی می‌تواند مدل مناسبی برای بررسی اثر سوزش فرسایشی باشد.

با توجه به اینکه جرم سوخت مورد نظر در حدود ۳ کیلوگرم است و با بدست آوردن شار جرمی در روابط ارائه شده پارامتر  $bf$  محاسبه و ضریب اصطکاک نیز اصلاح شد. همانطور که در شکل (۲۱) مشاهده شد، در این مورد اثرات blowing بسیار کم می‌باشد به طوری که تقریباً می‌توان از اثرات آن در نمودار فشار صرف نظر کرد (شکل ۲۲). دلیل آن این است که در این مورد جرم سوخت پایین است و اثرات این ترم نیز کم می‌باشد بدیهی است که در موتورهای با وزن سوخت بالاتر این اثر می‌تواند قابل توجه‌تر باشد و اثرات بیشتری نیز بر نمودار فشار زمان داشته باشد.

### راستی‌آزمایی و نتایج حاصل از شبیه‌سازی

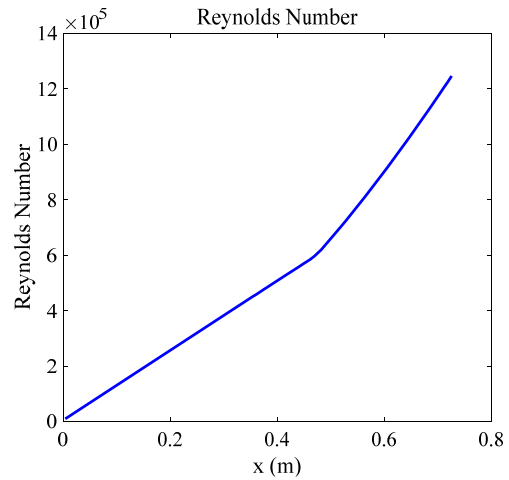
در این بخش نتایج اصلی حاصل از کوپل کد بالستیک داخلی شبه‌یک بعدی و کد شبیه‌سازی پس‌روی شبه سه بعدی به‌دست‌آمده توسط برنامه کامپیوتری تهیه‌شده در نرم‌افزار مطلب ارائه می‌شود. به‌طور کلی مراحل شبیه‌سازی پس‌روی گرین سه‌بعدی به صورت زیر است:

- مرحله اول مدل کردن هندسه اولیه گرین و موتور در یک نرم‌افزار CAD می‌باشد.
- انتخاب اینکه کدام یک از سطح مقاطع از هندسه گرین دارای اطلاعات هدف‌دار هستند. ذخیره این سطح مقاطع با فرمت IGES.
- گسسته‌سازی هر کدام از این مقاطع در نرم‌افزار Gambit و ذخیره اطلاعات در یک فایل متنی مشخص.
- وارد کردن ورودی‌های موردنیاز توسط کاربر
- کوپل کردن کد بالستیک داخلی شبه یک بعدی و کد پس‌روی شبه سه‌بعدی
- اجرا کردن کد اصلی مربوطه و مشاهده نتایج مورد نظر و مقایسه با نتایج تجربی

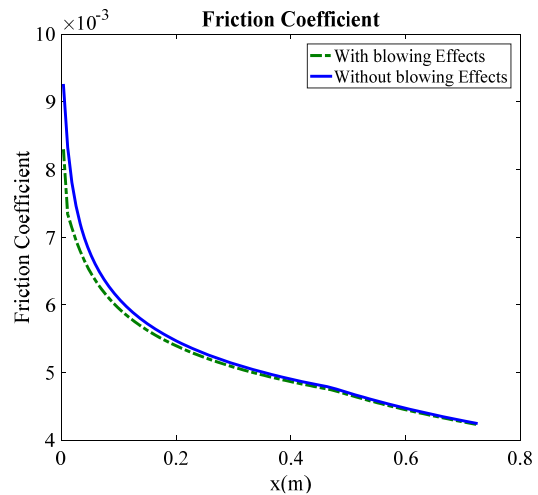
مراحل پس‌روی گرین موردنظر با هندسه نسبتاً پیچیده در طی فرایند سوزش نسبت به بازه‌های زمانی مختلف در شکل (۲۳) نمایش داده‌شده است.

جدول ۳- مشخصات و پارامترهای هندسی موتور سوخت جامد با گرین درون‌سوز

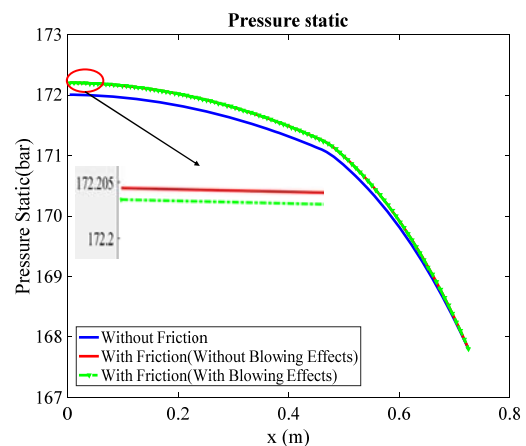
| ستاره  | استوانه | پارامترهای بی بعد   |
|--------|---------|---|
| -      | ۴۰/۷۶   | نسبت طول گرین به قطر خارجی ( $L/D_{in}$ )                       |
| ۳/۰۳   | ۸/۰۳    | نسبت طول گرین به کالیبر موتور ( $L/C$ )                         |
| ۳/۴۳   | ۰/۵۲    | نسبت سطح مقطع عبوری جریان گاز به گلوگاه ( $A_p/A_{th}$ )        |
| ۹۹/۸۸  | ۱۶۳/۰۷  | نسبت کل سطح سوزش سوخت به سطح مقطع عبوری جریان گاز ( $A_b/A_p$ ) |
| ۳۴۳/۳۴ | ۸۵/۰۶   | نسبت کل سطح سوزش سوخت به سطح مقطع گلوگاه ( $A_b/A_{th}$ )       |



شکل ۲۰- توزیع عدد رینولدز در راستای طولی موتور در گام زمانی اول



شکل ۲۱- توزیع ضریب اصطکاک در راستای طولی موتور در گام زمانی اول با و بدون اثرات blowing



شکل ۲۲- توزیع فشار استاتیک در دو حالت با اثرات اصطکاک و بدون اثرات اصطکاک

در لحظات اولیه عملکرد موتورهای سوخت جامد، گازهای حاصل از احتراق با نرخ جریان جرم زیاد از مجاری باریک سوخت می‌گذرند. در این لحظات به دلیل کوچک بودن سطح مقطع مجرای سوخت و بالا بودن نرخ جریان جرمی عبورکننده از آن، سرعت عبور گازها بسیار زیاد خواهد بود. سرعت زیاد گازهای حاصل از احتراق، باعث انتقال حرارت قابل‌توجهی از شعله به سطح سوخت از طریق جابجایی شده و سطح را به شدت گرم می‌کند. در نتیجه نرخ تصعید و در نهایت نرخ سوزش سوخت جامد افزایش فراوانی خواهد یافت. این افزایش همان سوزش فرسایشی است. همان‌طور که در شکل (۲۴) دیده می‌شود مدل سوزش فرسایشی سادرهلم قله‌ی منحنی فشار موتور را به خوبی پیش‌بینی کرده است. به نظر می‌رسد اختلاف بین نمودار شبیه‌سازی و تست تجربی در این گرین ناشی از عدم در نظر گرفتن سوزش پیشانی گرین در شبیه‌سازی با الگوریتم شبه سه‌بعدی است. همچنین خطای ساختی و خطای محاسبات پارامترهای احتراقی می‌توانند در این اختلاف مؤثر باشد با توجه به نکات مذکور نتایج به‌دست‌آمده از برنامه تهیه‌شده برای پس‌روی گرین سه‌بعدی موتور سوخت جامد با بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی با نتایج تجربی موردنظر توافق بسیار خوبی دارد.

همان‌طور که قبلاً ذکر شد تکنیک‌های متفاوتی برای محاسبه‌ی پارامترهای پس‌روی (سطح سوزش و حجم محفظه احتراق) استفاده می‌شوند، بنابراین با در نظر گرفتن یک گرین استوانه‌ای که مشخصات آن در جدول (۳) آمده است، مقایسه‌ای بین زمان اجرای روش‌های موجود بیان شده در مرجع (۱۲) و پژوهش حاضر انجام شده است. که نتایج آن در جدول (۴) مشخص شده است.

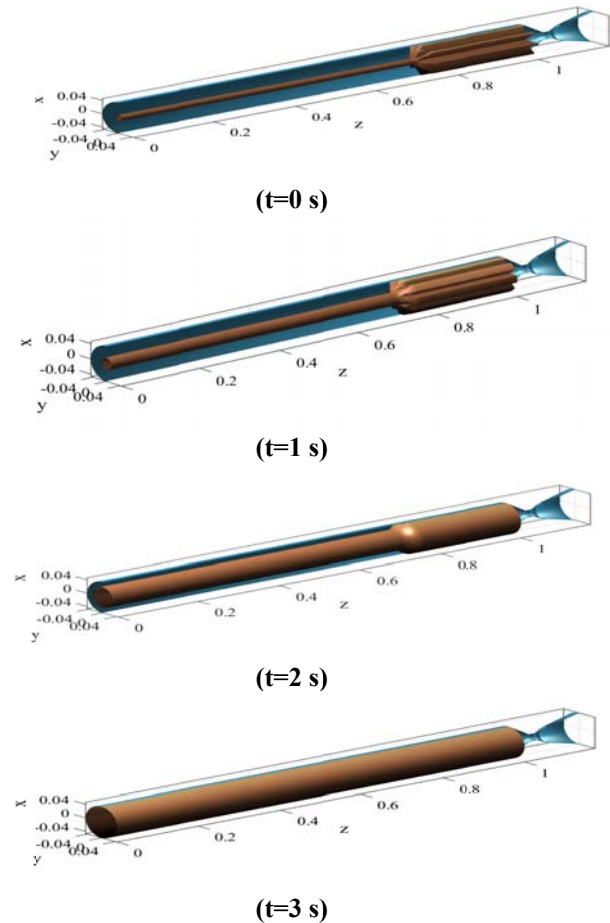
جدول ۴- مشخصات گرین مفروض [۱۲].

| نوع گرین   | شعاع خارجی (mm) | شعاع داخلی (طول ضلع) (mm) | ضخامت جان (mm) | طول موتور (mm) |
|------------|-----------------|---------------------------|----------------|----------------|
| استوانه‌ای | ۵۵              | ۲۰                        | ۳۵             | ۱۰۰            |

جدول ۵- مقایسه زمان اجرای روش‌های محاسبه‌ی پارامترهای پس‌روی [۱۲].  
(زمان اجرا بر حسب ثانیه می‌باشد)

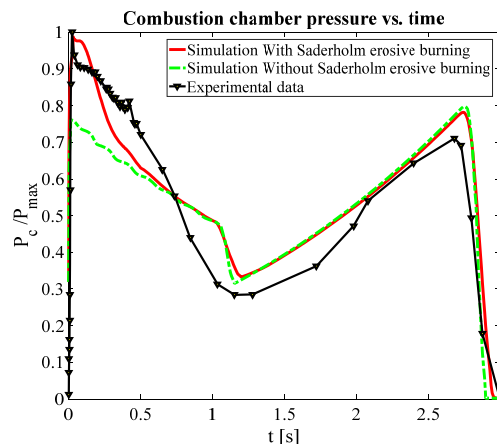
| تسخیر سلولی | المان برشی سه بعدی | مقطعی | پیمایش مکعبی | شبه‌سه بعدی |
|-------------|--------------------|-------|--------------|-------------|
| ۱۲۹         | ۱۳۷                | ۱۶۶   | ۱۶۳          | ۳۶/۴        |

از آنجاکه روش پس‌روی شبه سه‌بعدی بر اساس  $n$  المان دو بعدی در راستای محور موتور است، به طور کلی تعداد صفحاتی که در راستای محور می‌تواند قرار گیرد بسته به تجربه طراح می‌باشد.



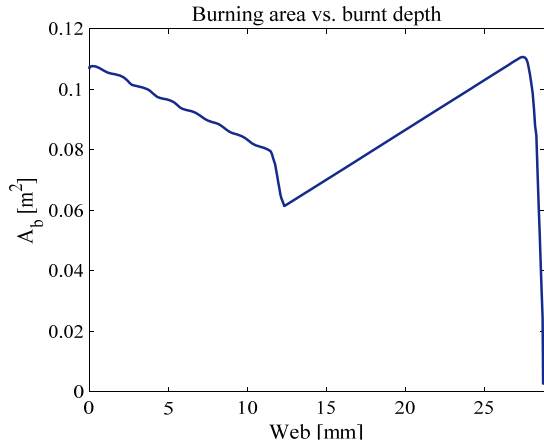
شکل ۲۳- پس‌روی گرین برحسب زمان در طی فرآیند سوزش.

برای راستی آزمایی نتایج به‌دست‌آمده از این روش، برنامه حاضر را با تست تجربی مقایسه و صحت کد نوشته‌شده بررسی می‌شود. شکل (۲۴) نشان‌دهنده تغییرات فشار برحسب زمان برای تست تجربی و شبیه‌سازی عددی با در نظر گرفتن مدل سوزش فرسایشی سادرهلم و بدون در نظر گرفتن سوزش فرسایشی است.

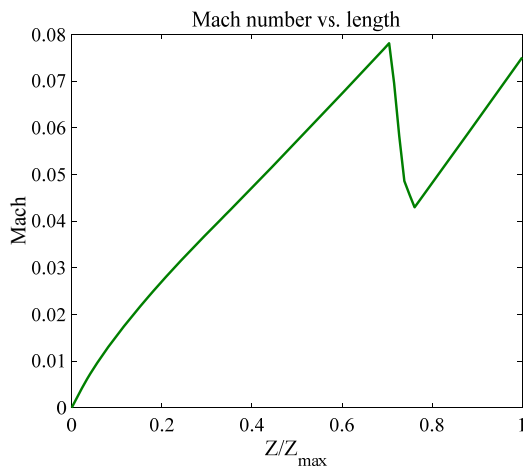


شکل ۲۴- مقایسه نتایج تجربی و شبیه‌سازی عددی برای یک موتور سوخت جامد درون‌سوز.

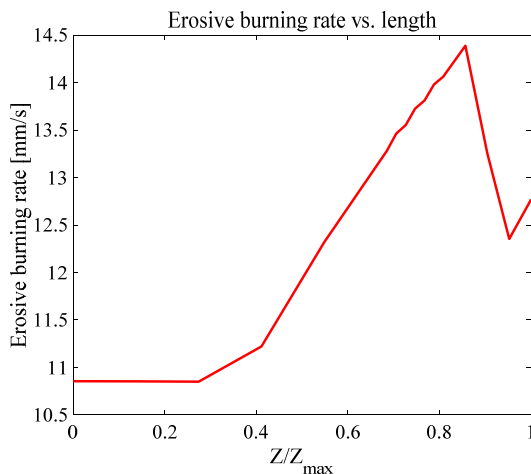
برش زده مطابق با شکل (۲۸ تا ۳۰) افزایش داده شود. بدیهی است میزان زمان اجرا به میزان افزایش یافته که در مقابل افزایش دقت قابل چشم‌پوشی است.



شکل ۲۵- تغییرات سطح سوزش برحسب جان سوخت.



شکل ۲۶- تغییرات عدد ماخ در راستای طول گرین (در گام زمانی سوم).



شکل ۲۷- تغییرات نرخ سوزش فرسایشی در راستای طول گرین (در گام زمانی سوم).

بدین صورت در مقطعی که نیاز به دقت بالاتر است (در نواحی که تغییرات سطح سوزش و سطح پورت بیشتر است یا هر چه به سمت گلوگاه نزدیک‌تر شویم) تعداد این صفحات و در نتیجه، زمان اجرای نرم افزار افزایش پیدا می‌کند (شکل ۲۸). بنابراین طراح با انتخاب نسبی بین زمان اجرا و دقت حل مناسب می‌تواند به طرح مورد نظر خود دست پیدا کند.

شکل (۲۵) نشان‌دهنده تغییرات سطح سوزش برحسب جان سوخت می‌باشد. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود سطح سوزش در قسمت شیاردار بر حسب جان سوخت کاهش پیدا می‌کند تا زمانی که قسمت شیاردار سوخت به اتمام برسد و به قسمت استوانه‌ای شکل سوخت برسد، با توجه به اینکه گرین مورد نظر استوانه‌ای درون‌سوز می‌باشد در طی زمان سوزش افزایش سطح سوزش را مشاهده می‌کنیم تا زمانی که سوخت به اتمام برسد.

شکل‌های (۲۶) و (۲۷) به ترتیب نشان‌دهنده تغییرات عدد ماخ و نرخ سوزش فرسایشی در راستای طول گرین در گام زمانی سوم هستند. با استفاده از این الگوریتم، ماخ جریان در راستای طول گرین محاسبه شده و با مدل سوزش فرسایشی سادهرلم نرخ سوزش به ازای مقاطع مختلف در راستای طول گرین بدست آمده و به نرخ سوزش پایه اضافه می‌شود بنابراین نرخ پسروی گرین در بخش‌های مختلف با توجه به محیط سوزش و سطح عبوری گاز متفاوت بوده و اختلاف فشار بین سر و ته موتور و محاسبه سایر پارامترهای بالستیکی مورد نظر با دقت بالاتری مورد انتظار است. با توجه به هندسه و فیزیک جریان در حالت کلی، عدد ماخ باید در طول محفظه احتراق افزایش یابد. درون نازل نیز هنگامی که خروجی آن بالای صوت است عدد ماخ افزایش و در جریان خروجی زیر صوت و در قسمت واگرای نازل، عدد ماخ کاهش می‌یابد. با توجه به شکل‌های (۲۶) مشاهده می‌کنیم زمانی که به ناحیه شیاردار سوخت می‌رسیم به دلیل افزایش سطح پورت مقدار سرعت و در نتیجه عدد ماخ کاهش پیدا می‌کند، سپس با توجه به افزایش سطح سوزش و ثابت بودن سطح پورت در ناحیه استوانه‌ای شکل سوخت عدد ماخ افزایش پیدا می‌کند.

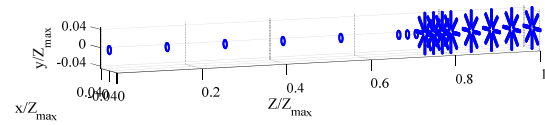
در حالت سوزش فرسایشی با توجه به رابطه سادهرلم نرخ سوزش وابسته به فشار و عدد ماخ جریان می‌باشد، بنابراین تغییرات نرخ سوزش به شدت وابسته به تغییرات عدد ماخ می‌باشد، مشاهده می‌کنیم که با توجه به شکل (۲۷) تغییرات نرخ سوزش مشابه روند تغییرات عدد ماخ در طول گرین می‌باشد.

با توجه به اینکه تغییر قطر در راستای گرین سبب افزایش یا کاهش شدید محیط سوزش محلی می‌گردد که باعث به وجود آمدن خطا در محاسبات الگوریتم شبه سه‌بعدی و روش مقاطع می‌شود برای کمتر کردن خطای محاسبات لازم است تعداد سطح مقطع‌های

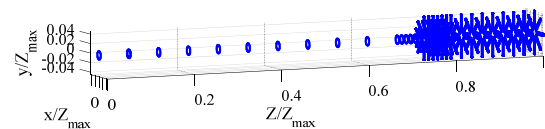
تغییرات توپولوژیکی مرز، در هنگام پس‌روی را پوشش داده و پیچیدگی‌های هندسه مرز را لحاظ کند. تبیین سطوح پیچیده گرین با استفاده از تابع فاصله علامت‌دار مقدور است. تولید هندسه اولیه در نرم‌افزار CAD باعث آسان‌تر شدن طراحی و تحلیل گرین می‌شود. تعیین مکان مستقیم مرز در حالت سه‌بعدی و استخراج مشخصه‌های هندسی آن به آسانی مقدور نیست. در این تحقیق برای تحلیل حالت سه‌بعدی از روش شبه سه‌بعدی استفاده شده است، در این روش برای مدل سه‌بعدی سطح مقاطع مختلف به‌طور جداگانه مدل شده و برای هر یک، مرز را با نرخ سوزش مشخص گسترده می‌کنیم قید گذاری بر روی پس‌روی مرز را می‌توان اعمال نموده و شرایط مرزی انتهایی را وارد نمود. نرخ سوزش غیریکنواخت (سوزش فرسایشی) را ارزیابی نموده و اثر آن را بررسی نمود. ضمناً استفاده از الگوریتم شبه سه‌بعدی در تحلیل پس‌روی گرین‌های سه‌بعدی زمان محاسبات را کاهش داد. مهم‌ترین ویژگی کد کامپیوتری تهیه‌شده، جامع بودن آن است به‌طوری‌که به‌راحتی گرین‌های پیچیده‌ی سه‌بعدی درون‌سوز را با دقت قابل‌توجهی موردبررسی قرار می‌دهد.

## مراجع

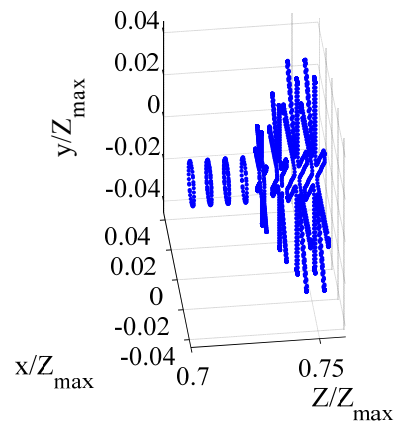
- [1] Heidari, M. R.; Adami, A. H. "General Grain Analysis and Rapid Internal Ballistic Simulation for Solid Motor"; *Iranian Scientific Association of Energetic Materials*, Vol. 5., No. 2, 2011, pp. 59-72 (In Persian).
- [2] Chorin, A. J. "Flame Advection and Propagation Algorithms"; *J. Comput. Phys.* Vol. 35, No. 1, 1980, pp. 1-11.
- [3] Osher, S.; Sethian, J. A. "Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations"; *J. Comput. phys.*, Vol. 79, No. 1, 1988, pp. 12-49.
- [4] Atilgan, T. K.; Tuğrul, T. H.; Haluk, A. M. "Three-Dimensional Internal Ballistic Analysis by Fast Marching Method Applied to Propellant Grain Burn-Back"; *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE. Joint. Propul. Conf.* Tucson, AZ, USA. 2005.
- [5] H. Karimi, M. Moradi, H. Abtahi. "Three-dimensional grain burn-back geometric modeling with quite complex profiles by SolidWork software"; *in The 6th Conference of Iranian Areospace Society*, Tehran, Iran, 2006. (In Persian).
- [6] Willcox, M. A.; Brewster, M. Q.; Tang, K. C.; Stewart, D. S. "Solid Propellant Grain Design and Burnback Simulation Using a Minimum Distance Function"; *J. propul. Power.* 2007, 23(2), 467-477.
- [7] Yildirim, C.; Aksel, M. H. "Numerical Simulation of the Grain Burnback in Solid Propellant Rocket Motor"; *AIAA. Pap.* 2005, 4160.
- [8] Qin, F.; Guoqiang, H.; Peijin, L.; Jiang, L. "Algorithm Study on Burning Surface Calculation of Solid Rocket Motor With Complicated Grain Based On Level Set



شکل ۲۸- موقعیت نقاط مرز اولیه در راستای طول گرین با تعداد سطح مقطع کم



شکل ۲۹- موقعیت نقاط مرز اولیه در راستای طول گرین با افزایش تعداد سطح مقطع



شکل ۳۰- موقعیت نقاط مرز اولیه در راستای طول گرین با افزایش تعداد سطح مقطع در ناحیه تغییر سطح مقطع

روش المان‌های مثلثی و مقاطع کمکی با افزایش تعداد مقاطع در راستای محور و استفاده از روش‌های میانمایی باعث افزایش دقت می‌شود (به خصوص مقاطعی که در راستای طولی تغییر سطح دارند). همانطور که گفته شد جهت بررسی سوزش فرسایشی از پس‌روی در راستای محوری چشم پوشی شده است، که سعی شده است با استفاده از روش المان‌های مثلثی و مقاطع کمکی از خطاهای ایجاد شده کاسته گردد.

## نتیجه‌گیری

در این تحقیق شبیه‌سازی پس‌روی گرین‌های پیچیده سوخت جامد به روش مجموع سطح با بالستیک داخلی شبه یک‌بعدی و در نظر گرفتن سوزش فرسایشی با مدل سادرهلم انجام شد. نشان داده شد که این روش، برای حل مسئله پس‌روی سطح در گرین‌های سوخت جامد کارآمد و دقیق است. این روش قادر است

- Reno congestion avoidance and control," *Univ. of Massachusetts, Amherst, MA, CMPSCI Tech. Rep.*, 1999, pp. 99-02.
- [19] Kays Morrow, W., *Convective heat and mass transfer*, Tata McGraw-Hill Education, 2012.
- [20] Heidari, M. R., Adami, A. H., "Specific Grain Analysis and Rapid Internal Ballistic Simulation for Solid Motor"; *Journal of Space Science & Technology*, 2012, pp. 67-80 (In Persian).
- [21] ThiokoVhuntsvill, A. L. "Application of the Saderholm Erosive Burning Model to Nozzleless Solid Propellant Rocket Motors", 1984, 35807
- [22] Willcox, M. L.; Brewster, M. Q.; Tang, K. C.; Stewart, D. S. and Kuznetsov, I. R. "Solid Rocket Motor Internal Ballistics Simulation Using Three Dimensional Grain Burn Back"; *J. Propul. Power.* May-June 2007, pp. 575-584.
- [23] Sutton; George, P., Babilarz, O., *Rocket Propulsion Elements*, John & Sons, 2017, pp. 165-167.
- [24] Cavallini, E. Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics; (Thesis PhD), 2010, pp. 37-43.
- [25] Parsa, R, E., Mirsajedi, S. M., "Effects of Erosive Burning on Solid Rocket Motor Internal Ballistics"; *Journal of Space Science & Technology*, 2012, pp. 69-74 (In Persian).
- [26] Konert, M. Vandenberghf, J. F. "Comparison of Laser Grain Size Analysis with Pipette and Sieve Analysis: a Solution for the Underestimation of the Clay Fraction," *Sedimentology*, Vol. 44, No. 31, 1997, pp. 523-535.
- [27] Cavallini, E.; Favini. B.; Giacinto, M. Di. "Internal Ballistics Simulation of a NAWC Tactical SRM.," *J. Appl. Mech*, Vol. 78, 2011, pp. 1005-1018.
- Methods"; *42<sup>th</sup> AIAA/Am. Soc. Mech. Eng. Soc. Auto. Eng. Soc. Explos. Eng. Joint Propul. Conf. Exh.* 2006.
- [9] Favini, B.; Cavallini, E.; Di Giacinto, M.; Serraglia, F. "An Ignition-to-Burn Out Analysis of SRM Internal Ballistic and Performances"; *AIAA. Pap.* 2008, 5141.
- [10] Toker, K. A.; Alsel, H.; Tinaztepe, T. "3-Dimensional Propellant Grain Burn back Calculation on Tetrahedron Mesh by Fast Marching Method"; *AIAA*, 2004.
- [11] Moshir Estekhahreh, S. G. Numerical simulation of the grain burn-back in solid propellant rocket motor, MS Thesis, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Maleke-ashtar University of Technology, Tehran, 2012 (In Persian).
- [12] Gheisari, M. M., Mirsajedi, S. M., "Using marching cube algorithm for 3D grain burn-back analysis in Solid Rocket Motors based on level set method"; *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14 No. 15, 2015, pp. 85-95 (In Persian).
- [13] Tshokotsha, M.H., Internal ballistic modelling of solid rocket motors using level set methods for simulating grain burnback, (Thesis PhD), Stellenbosch: Stellenbosch University, 2016.
- [14] Pons Lorente, A. Study of grain burnback and performance of solid rockets motors, (Thesis Master), Jet. Propul. 2013, pp. 8-10.
- [15] Cavallini, E., *Modeling and numerical simulation of solid rocket motors internal ballistics*, 2010.
- [16] Summerfield, M. *Solid Propellant Rocket Research*, Princeton University: Prinnceton, New Jersey. 1960, pp. 207-227.
- [17] Zucrow, M.J. and Hoffman, J.D., *Gas Dynamics: Volume2-Multidimensional Flow*, John Wiley & Sons, Inc., New York. 1977, p. 488.
- [18] Hoffman, Z., "Gas Dynamics Volume I J. Padhye, V. Firoiu, and D. Towsley, "A stochastic model of TCP



