

Research Paper

Prediction of Droplet Size and Velocity Distribution Based on Maximum Entropy Formulation by Nonlinear Instability Analysis of Liquid Sheet Spray and Turbulent of Nozzle Flow

F. Omimi^{1*}, D. Poorrajab Sufinai², D. Domirir Ganji³ and S. H. Moosavi⁴

1. Department of Mechanical Engineering, Tarbiyat Modares University, Tehran, Iran
2. Department of Technical, Pardis University of Tehran, Tehran, Iran
3. Department of Mechanical Engineering, University of Anushirvan Babol, Babol, Iran
4. Aerospace Research Institute, Ministry of Science, Research and Technology, Tehran, Iran

* Fommi@modares.ac.ir

In this research, it is attempted to determine the diameter and velocity distribution according to the flow characteristics of the upstream and without needing experimental measurements. Firstly, Fluent software has been used to simulate the turbulent flow of inside nozzle by $k-\epsilon$ model to obtain the nozzle turbulence energy at the nozzle outlet. Then, nonlinear growth rate analysis of instability is used to determine spray breakup length and the frequency of maximum instability, and the mean diameter of primary breakup. Four equation maximum entropy model has been developed according to the inlet of upstream flow. Subsequently, the terms of momentum source as well as the energy of the maximum entropy model have been determined using the results of simulated nozzle turbulence flow and instability analysis. In the following, first, the results of the maximum entropy model have been evaluated with the experimental input and then determined with upstream input. The obtained results which have been compared with experimental tests show well agreement.

Keyword: $k-\epsilon$ Simulation, Diameter distribution, Non-Linear instability analysis, Maximum entropy

1. Professor (Corresponding Author)
2. PhD Student
3. professor
4. PhD

مقاله علمی پژوهشی

تخمین توزیع قطر و سرعت قطرات اسپری به روش ماکزیمم انتروپی با استفاده از تحلیل غیرخطی ناپایداری و شبیه‌سازی توربولانس جریان بالادست

فتح‌اله امی^{۱*}، دومان پوررجب صوفیانی^۲، داوود دومیری گنجی^۳ و سیدحسین موسوی^۴

۱- گروه مهندسی هوافضا دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۲- گروه مهندسی هوافضا دانشکده فنی، پردیس دانشگاه تهران، تهران، ایران

۳- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه نوشیروانی بابل، بابل، ایران

۴- پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

* fommi@modares.ac.ir

در این تحقیق سعی شده با توجه به مشخصات جریان بالادست و بدون نیاز به اندازه‌گیری تجربی، توزیع قطر و سرعت تعیین گردد. در ابتدا با استفاده از نرم‌افزار فلوئنت، جریان توربولانس داخل نازل به وسیله مدل دو معادله‌ای $k-\epsilon$ شبیه‌سازی شده و انرژی توربولانس نازل در خروجی نازل تعیین می‌گردد، سپس با استفاده از تحلیل رشد غیرخطی اغتشاشات طول شکست افشانه و فرکانس حداکثر ناپایداری تعیین شده و در نتیجه آن قطر میانگین قطرات پس از شکست اولیه تعیین می‌گردد. همچنین مدل ماکزیمم انتروپی چهارمعادله‌ای با توجه به ورودی جریان بالادست توسعه یافته و در ادامه ترم‌های چشمه منتوم و انرژی مدل ماکزیمم انتروپی با استفاده از نتایج شبیه‌سازی جریان توربولانس نازل و تحلیل ناپایداری تعیین می‌گردد. در ادامه نتایج مدل ماکزیمم انتروپی ابتدا با ورودی‌های تجربی ارزیابی شده و سپس نتایج مدل با ورودی جریان بالادست تعیین می‌گردد. این نتایج نیز با نتایج تجربی مقایسه شده که همخوانی مناسبی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: شبیه‌سازی دو معادله‌ای، توزیع قطر، تحلیل غیرخطی ناپایداری، ماکزیمم انتروپی

		علائم و اختصارات
L_b	طول شکست (m)	ضریب درگ
n	عدد فاز	ضرایب معادله اغتشاش
S_{mv}	ترم چشمه منتوم	C_f
S_e	ترم چشمه انرژی	C_{ij}
U	سرعت محوری گاز اطراف (ms^{-1})	\bar{D}
\bar{U}	سرعت بی بعد شده با سرعت گاز	g
w	سرعت چرخشی جریان خروجی از نازل	
We_t	عدد وبر مایع	
η	اغتشاش سطح جریان خروجی نازل	

۱. استاد (نویسنده مخاطب)

۲. دانشجوی دکتری

۳. استاد

۴. دکتری

جرم و ممنتوم، دو شرط بقای انرژی سطحی و سینماتیکی را نیز به عنوان شروط مدل در نظر گرفتند. در ادامه توسعه مدل، سلسل در سال‌های بعد قانون بقای ممنتوم را نیز به دو مؤلفه سرعت محوری و عمودی تقسیم کرد [۱]. به موازات سلسل و برزاتوسکی، لی و تانکین [۱] با صرفنظر از نحوه تبدیل انرژی جنبشی به سطحی تنها از یک شرط انرژی استفاده کرده و یک مدل ماکزیمم انتروپی حجم پایه^۶ را جهت تخمین توزیع قطر و سرعت توسعه دادند. در روش لی و تانکین، حجم کنترل از انتهای نازل آغاز شده و تا صفحه‌ای که در آن قطرات تشکیل می‌شوند ادامه دارد که در همین رابطه برخی از محققان به این نحوه استفاده از مدل حجم پایه ایراداتی وارد ساختند و اعلام گردید در مدل حجم پایه به دلیل نوع معادلات، توزیع قطرهای کوچک‌تر با ضریب غیرفیزیکی که در معادلات وارد می‌شود، کوچک‌تر از مقدار واقعی در نظر گرفته می‌شود [۱]. با این حال تاکنون از هر دو این مدل‌ها جهت مدلسازی توزیع قطرات استفاده شده است [۲].

در ادامه توسعه مدل، سلسل و احمدی [۳] شرط پارتیشن را که حداقل نسبت سطح به حجم را تعیین می‌کند، جهت محدود کردن حداقل قطر قطرات ارائه کردند. همچنین احمدی و سلسل [۱] طی تحقیقی عنوان داشتند، شروط ممنتوم و انرژی تنها اطلاعات توزیع سرعت را با خود حمل می‌کنند و بر توزیع قطر اثر ناچیزی دارند، لذا می‌توان توزیع قطر و سرعت را با قبول خطای اندکی از هم جدا کرد. در ادامه طی سال‌های دهه نود، تحقیقاتی در زمینه مقایسه روش‌های ماکزیمم انتروپی با مدل‌های تجربی صورت گرفت که در نتیجه آن نتایج هر دو مدل ماکزیمم انتروپی مورد تایید قرار گرفت [۱]. در سال-های نخست قرن ۲۱ میلادی تحقیقات در خصوص کاربرد مدل ماکزیمم انتروپی بر روی انژکتورهای چرخشی، اولتراسونیک و انژکتورهای با توزیع دو حالتی^۷ ادامه یافت. در ادامه لی، مدل تانکین را با اضافه کردن شرط پارتیشن سلسل برای انژکتور جریان مستقیم استفاده نمود و نتایج را با آزمایش‌ها مورد ارزیابی قرار داد [۱]. کوزین نیز بر پایه نتایج احمدی و سلسل مدلی را ارائه داد که بر مبنای جداسازی ترم‌های چشمه انرژی سینتیک و انرژی سطحی بوده و همچنین توزیع قطر و سرعت را بطور جداگانه محاسبه می‌کرد [۱، ۲]. در ادامه کار کوزین داموچل با تکمیل مدل کوزین، مدلی را بر پایه استفاده از توزیع با پیش احتمال ارائه نمود که برای انژکتورهای دو حالتی و التراسونیک نتایج قابل قبولی را ارائه کرد [۳].

چالشی که در روش ماکزیمم انتروپی وجود دارد، نیاز به اندازه‌گیری مشخصات تجربی (قطر میانگین) به عنوان ورودی، جهت تعیین مشخصات پاشش است. از این رو تلاش‌های بسیاری

η_0	اغتشاش اولیه سیال
η_1	اغتشاش مرتبه اول
η_2	اغتشاش مرتبه دوم
η_a	اغتشاش در سطح خارجی
η_b	اغتشاش در سطح داخلی
ϕ	تابع پتانسیل جریان
k	عدد موج برابر $\frac{2\pi}{\lambda}$
$\omega_{1,s}$	فرکانس حداکثر ناپایداری مرتبه ۱ و نامتقارن

مقدمه

در بسیاری از کاربردهای اتمیزرها توزیع قطر و سرعت قطرات ایجاد شده باید از فرم مشخصی تبعیت کند (تعداد ذرات، عرض پاشش، قطرات کوچک کم، قطرات بزرگ مشخص و ...) تا بهترین نتیجه حاصل شود، برای مثال در دستگاه‌های اسپری مخصوص بیماران تنفسی، قطر قطرات تولیدی باید در محدوده مشخص (۳-۱۰ میکرون) باشد تا نتیجه درمانی مناسب حاصل شود. همچنین در بسیاری از کاربردهای احتراقی نیز دانستن توزیع قطر و سرعت جهت بهینه‌سازی سیستم بسیار مهم است. از این رو فرایند شناخت اتمیزاسیون اهمیت زیادی دارد و دارای سابقه تحقیقاتی در حدود یک صد و پنجاه سال است.

معمولاً به منظور توصیف توزیع قطر و سرعت قطرات حاصل از اسپری از تابع توزیع چگالی احتمال^۵ استفاده می‌شود. دلیل آن نیز ماهیت تصادفی و غیرقابل تعیین تولید ذرات و قطرات در فرایند اتمیزاسیون است. از این رو عمده روش‌های تعیین الگوی پاشش این الگو را رعایت کرده و در اکثر موارد اطلاعات را به صورت مقادیر متوسط یا توابع توزیع احتمال ارائه می‌دهند. در این تحقیق نیز هدف، تعیین تابع توزیع احتمال توزیع قطر و سرعت قطرات است.

روش ماکزیمم انتروپی

اصل ماکزیمم انتروپی نخستین بار توسط جینس در سال ۱۹۵۲ ارائه گردید [۱].

اولین تلاش‌ها برای تعیین توزیع اندازه قطرات به روش ماکزیمم انتروپی توسط سلسل و برزاتوسکی [۱] صورت پذیرفت. در این تحقیق آنها فرض کردند صفحه مایع (با ضخامت t و سرعت U_s) در ابتدای منطقه شکست اولیه (طول شکست اولیه) دچار شکست می‌شود. سلسل و برزاتوسکی در این مدل غیر از شرط نرمالیزاسیون (یک بودن مجموع تمامی احتمالات)، قوانین بقای

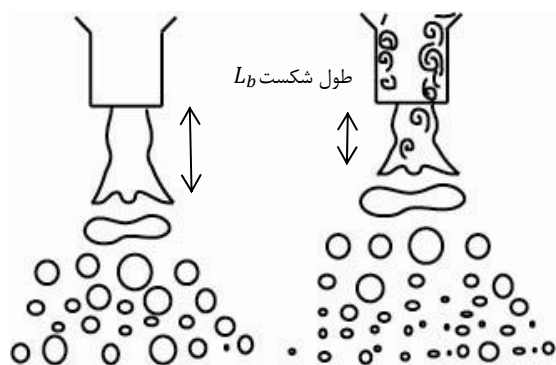
مدل هو و گاسمن [۸, ۷] این تاثیر در ثابت زمانی شکست می‌باشد که در رابطه (۱) نشان داده شده است و این ثابت زمانی در جهت محاسبه قطر قطره میانگین و طول شکست استفاده می‌شود.

$$\tau_A = C_3 \tau_t + C_4 \tau_w \quad (1)$$

در این رابطه C_3 و C_4 برابر $1/2$ و $0/5$ می‌باشد. τ_w, τ_t, τ_A نیز ثابت زمانی کل، توربولانسی و ناپایداری سطحی کلین هلمهولتز می‌باشند. ثابت زمانی توربولانس از رابطه (۲) تعیین می‌گردد.

$$\tau_t = C_\alpha \frac{k_{avg}}{\varepsilon_{avg}} \quad (2)$$

در نهایت پس از محاسبه ثابت زمانی کل، فرکانس مود غالب در نتیجه آن طول موج شکست تغییر می‌کند که در محاسبه طول شکست و قطر قطره میانگین تاثیر دارد (شکل ۲).



شکل ۲- شماتیک تاثیر توربولانس بر کاهش طول شکست و کاهش طول موج شکست و قطر قطر انتهایی

شبیه‌سازی جریان توربولانس داخل نازل

به منظور شبیه‌سازی جریان توربولانسی داخل نازل از مدل توربولانسی دو معادله‌ای $k - \varepsilon$ استفاده شده است. به این منظور در ابتدا هندسه نازل در نرم افزار گمبیت^۸ مدل‌سازی شده و مش زده می‌شود و در ادامه با انتخاب مدل دو معادله‌ای جریان خروجی شبیه‌سازی می‌شود.

هندسه نازل

مشخصات هندسه نازل مطابق شکل (۳) است که از جمله نازل‌های حلقوی مورد استفاده در صنایع نیروگاهی است. ایجاد شبکه

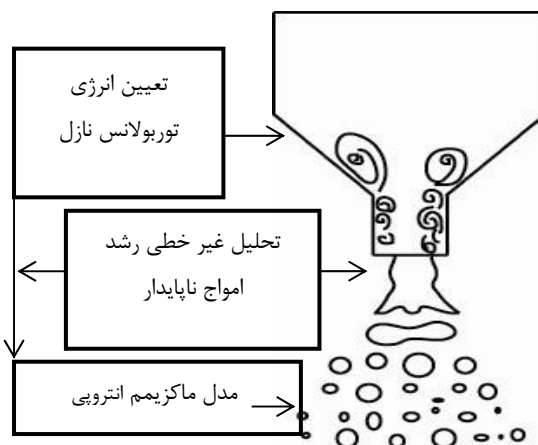
با توجه به سایز ریزترین سلول، شبکه کلی با استفاده از نرم‌افزار گمبیت، ایجاد گردید و جهت کاهش تعداد نقاط، شبکه با نسبت $1/2$ به سمت مرکز هندسه بزرگتر شده است (شکل ۴). در این حالت

تخمین توزیع قطر و سرعت قطرات اسپری به روش ماکزیمم انترویی با استفاده از تحلیل غیرخطی ناپایداری ...

در جهت حذف این نیاز صورت گرفته است. دسته‌ای دیگر از محققان بر روی ارائه روش‌های تئوری و مستقل از آزمایش‌ها جهت محاسبه توزیع قطر بدون استفاده از اندازه‌گیری‌های تجربی قطر میانگین پرداختند. در این راستا میترا با استفاده از تحلیل ناپایداری دوبعدی بالادست جریان مدلی را برای محاسبه توزیع قطر با استفاده از مقادیر بالادست و بدون نیاز به اندازه‌گیری قطر میانگین ارائه داد[۱]. همچنین موحدنژاد و امی با استفاده از تحلیل ناپایداری خطی، مشخصات بالادست جریان توزیع قطرات را با روش ماکزیمم انترویی به روش تانکین و یک شرط انرژی بدست آوردند [۴]. در همین راستا، کریمایی و حسینعلی‌پور نیز بر اساس تخمین جریان بالادست، به منظور استقلال از اندازه‌گیری تجربی، روشی را ارائه کردند، که با استفاده از زیر مدل بر پایه انرژی، توزیع قطرات افشانه را تعیین می‌نماید [۵].

هدف و روند تحقیق

در این تحقیق، هدف، توسعه یک مدل جهت تخمین توزیع قطر و سرعت افشانه به روش ماکزیمم انترویی است که مستقل از اندازه‌گیری تجربی است. در این مدل مقادیر ورودی با استفاده از نتایج شبیه‌سازی توربولانس داخل نازل و تحلیل ناپایداری جریان پس از نازل تعیین می‌گردد. روند این تحقیق و محل انجام هر بخش شبیه‌سازی به‌طور شماتیک در شکل (۱) نشان داده شده است.

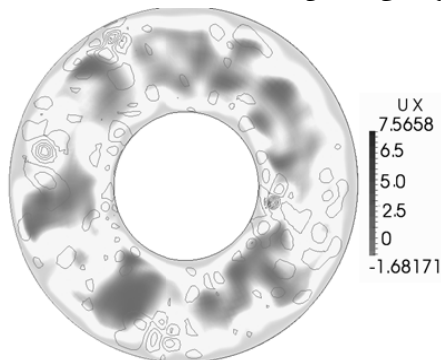


شکل ۱- شماتیک روند و ارتباط بخش‌های تحقیق

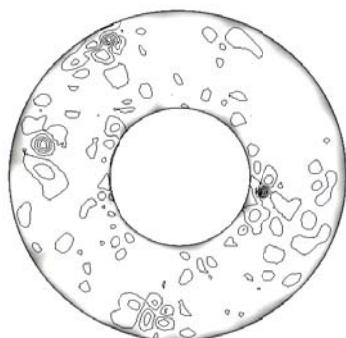
معرفی مدل

با توجه به رینولدز جریان نازل که برابر $Re = 20 \times 10^3$ است، رژیم جریان داخل نازل توربولانس می‌باشد و همانطور که از تحقیقات تجربی تیب و سلام [۶] مشخص شده است، انرژی توربولانس داخل نازل بر شکست اولیه تاثیر داشته و حتی در غیاب نیروی آیرودینامیک نیز باعث شکست می‌گردد. از این رو بر طبق

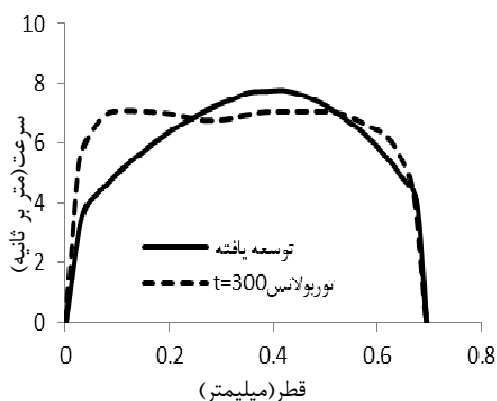
همچنین برش پروفیل سرعت در قسمت بالایی لوله در شکل (۷) ترسیم شده است که شامل دو حل جریان کاملاً توسعه یافته و حل توربولانسی در زمان ۳۰۰ ثانیه است.



شکل ۵- کانتور سرعت در مقطع عرضی



شکل ۶- ساختار گردابه‌های جریان داخل نازل در مقطع عرضی

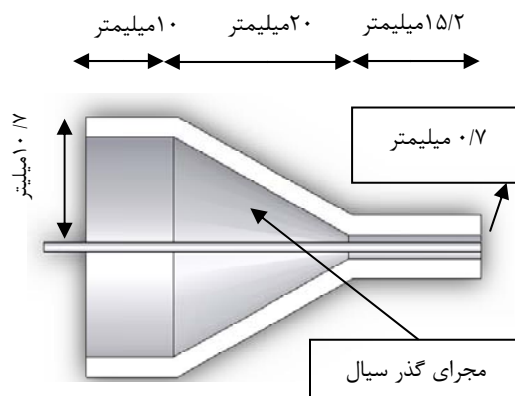


شکل ۷- پروفیل سرعت جریان در دو حالت حل میانگین رینولدزی (پاسخ کاملاً توسعه یافته) و پاسخ توربولانسی

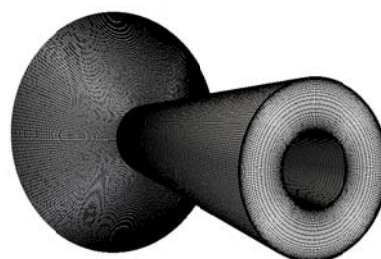
شایان ذکر است با توجه به توخالی بودن لوله، پروفیل سرعت جریان کاملاً توسعه یافته نسبت به لوله توپر کمی متمایل به مرکز لوله است. همچنین پروفیل سرعت توربولانسی در زمان‌های مختلف، کاملاً متفاوت می‌باشد، ولی در تمام زمان‌ها، مقدار دبی جریان ثابت می‌باشد. در نهایت مقدار k یا انرژی توربولانسی و

تعداد شبکه برابر ۳ میلیون سلول می‌گردد.

شرط مرزی و اولیه جریان نازل شرط مرزی و اولیه جریان داخل نازل مطابق جدول (۱) است. همچنین جهت اعمال توربولانس در شرط ورودی به همراه فشار ورودی مقدار اغتشاش اولیه نیز به صورت درصد از کل میدان فشار اعمال می‌گردد.



شکل ۳- هندسه نازل



شکل ۴- شبکه مورد استفاده در ۳۶۰ درجه

جدول ۱- شرایط مرزی و اولیه جریان داخل نازل

چگالی ($\frac{kg}{m^3}$)	گرانروی دینامیکی ($\frac{kg \cdot s}{m}$)	فشار خروجی (MPa)	فشار ورودی (MPa)
۱۰۰۰	$1/0.02 \times 10^{-3}$	۰/۱۰۲	۰/۵

نتایج شبیه‌سازی جریان توربولانس داخل نازل

پس از اجرای کد با عدد کورانت ۰/۵ و پس از ۱۰۰ هزار گام تکرار، حل با شرط همگرایی عدم تغییر مقدار انرژی جنبشی جریان در دو گام زمانی، همگرا گردید. در شکل (۵) کانتور سرعت نازل پس از همگرایی حل مشخص شده است.

معادلات بقا و بالانس نیروها جهت شبیه‌سازی رفتار سیال در ابتدا معادلات بقا و بالانس نیرویی نوشته می‌شود. معادله بقای جرم یا پیوستگی در این حالت برای سیال با توجه به میدان پتانسیل ϕ_i, ϕ_o, ϕ_l به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود (معادله (۵)). به این ترتیب که معادله پیوستگی به صورت معادله (۴) ساده شده و پس از بازنویسی به صورت معادله (۵) که معادله لاپلاس است نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (۳)$$

$$\nabla \cdot v = 0 = v_x + v_y = 0 \quad (۴)$$

$$v_x + v_y = 0 = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \nabla^2 \phi = 0 \quad (۵)$$

معادل بقای اندازه حرکت با توجه به غیرلزج بودن سیال به معادله اولر تبدیل می‌شود و از آنجا که معادله برنولی برای سیال غیرلزج هم تراز معادله اولر است، این معادله بجای معادله اولر استفاده می‌شود و از آنجا که جریان غیرچرخشی است، معادله برنولی در کل میدان حل برقرار است. در حالت کلی معادله برنولی بین دو نقطه از سیال افشانه و دو نقطه از گاز پیرامون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P_g = -\rho_g [\phi_{gj,t} + \frac{1}{2}(\phi_{gj,t}^2 + \phi_{gj,t}^2)] + P_{g0} \quad (۶)$$

$$P_l = -\rho_l [\phi_{lj,t} + \frac{1}{2}(\phi_{lj,t}^2 + \phi_{lj,t}^2)] + P_{l0} \quad (۷)$$

که در این رابطه P_{g0}, P_{l0} و فشار داخلی سیال و گاز پیش از آغاز اغتشاش می‌باشد که بنا بر شرط مرزی دینامیکی $P_{l0} = P_{g0}$ می‌باشد. از این رو با توجه به شرط مرزی دینامیکی در حالت بدون اغتشاش، از معادله (۶) و (۷) نتیجه می‌شود،

$$P_g + \rho_g [\phi_{gj,t} + \frac{1}{2}(\phi_{gj,t}^2 + \phi_{gj,t}^2)] = P_l + \rho_l [\phi_{lj,t} + \frac{1}{2}(\phi_{lj,t}^2 + \phi_{lj,t}^2)] \quad (۱)$$

از این رو معادله (۸) از شرط مرزی دینامیک بدون اغتشاش و معادله بقای ممنتوم نتیجه می‌شود. در نهایت با ترکیب این معادله و شرط مرزی دینامیک در حالت کلی، معادله اصلی مدل‌سازی استخراج می‌شود.

حل معادلات مرتبه اول و دوم

حل نهایی معادلات با توان مرتبه اول (η_0) و معادلات با توان مرتبه دوم (η_0^2) به صورت معادله (۹) خواهد بود.

$$\eta(x, \theta, t) = \eta_0^1 \eta_1 + \eta_0^2 \eta_2 \quad (۹)$$

حل معادلات اغتشاش مرزی مرتبه اول (ضریب η_0) به صورت معادله (۱۰) می‌باشد و هدف حل مرتبه اول پیدا کردن ضرایب این معادله می‌باشد.

$$\eta_1(x, \theta, t) = A(t) \exp(i(kx + n\theta)) + \overline{A(t)} \exp(-i(kx + n\theta)) \quad (۱۰)$$

این ضرایب به صورت جزئی‌تر در معادله (۱۱) مشخص گردیده است.

اتلاف در مقطع خروجی نازل تعیین و پس از انتگرال‌گیری در سطح مقطع خروجی، مقدار متوسط آن تعیین گردید.

تحلیل غیرخطی رشد ناپایداری‌های سطحی افشانه پس از نازل

همان‌طور که در رابطه (۱) عنوان شد، عامل تأثیرگذار دیگر بر محاسبه ترم چشمه ممنتوم مدل ماکزیمم انترپولی و محاسبه طول شکست و قطر میانگین، ثابت زمانی حاصل از تحلیل ناپایداری افشانه پیش از شکست اولیه می‌باشد. جهت محاسبه این ثابت زمانی، از تحلیل غیرخطی رشد ناپایداری‌های سطحی استفاده می‌شود. اساس این تحلیل بر پایه فرض جریان پتانسیل و تحلیل کلونین هلمهولتز می‌باشد.

فرضیات مدل رشد ناپایداری سطحی

جهت شبیه‌سازی رفتار سیال می‌بایست برخی فرضیات در جهت ساده‌سازی در نظر گرفته شوند که شامل موارد زیر می‌باشند:

- سیال خروجی از نازل و هوای اطراف غیر قابل تراکم می‌باشند که با توجه به سرعت و فشار سیال قابل قبول است (سرعت هر دو زیر صوت است).
- سیال افشانه دارای خواص ثابت بوده (چگالی)، غیر قابل تراکم و غیرلزج است.
- محیط اطراف دارای خواص ثابت بوده (نظیر چگالی)، غیر لزج و غیر قابل تراکم می‌باشد.
- سیال افشانه و محیط اطراف در تعادل حرارتی بوده و تنها از نظر مشخصات دینامیکی نظیر سرعت و مشخصات ماهیتی با هم تفاوت دارند.
- جریان سیال در افشانه به صورت متقارن فرض می‌شود.
- در سطح مشترک حرکت عمود بر جهت مماسی دو سطح برابر و در خلاف جهت می‌باشد (شرط مرزی سینماتیکی).
- از تاثیر نیروی جاذبه به دلیل سرعت زیاد سیال و طول شکست کم و همچنین ضخامت کم لایه سیال صرف نظر می‌شود (به عبارت دیگر عدد فرود بسیار زیاد است).
- جریان غیرچرخشی بوده و میدان پتانسیل‌های سرعت برای سیال و محیط اطراف وجود دارد.
- نوع چرخش کلی سیال نیز از نوع گردش غیرچرخشی^۹ می‌باشد به این معنا که چرخش در تمام سیال به غیر از مرکز صفر است.
- از کشش سطحی گاز در برابر کشش سطحی مایع صرف نظر می‌شود.

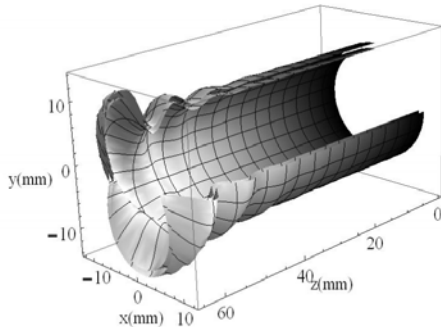
آن با انتظار فیزیکی که از رشد ناپایداری می‌رود متفاوت است. دلیل آن هم رشد ناپایداری به صورت مکانی است و نه زمانی و از این تحلیل تنها جهت بدست آوردن فرکانس ماکزیمم استفاده می‌گردد. از این رو جهت بررسی رفتاری شکست با مشاهده نمودار آن، از تحلیل مکانی استفاده می‌شود.

نتایج رشد زمانی^{۱۰} ناپایداری

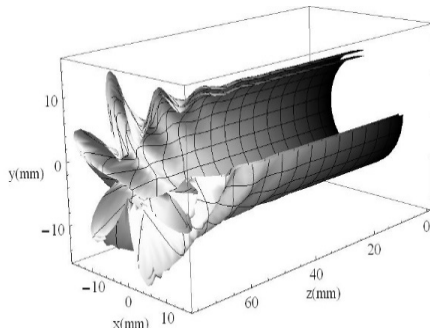
همانطور که بیان گردید، جهت تعیین مقدار عدد موج مرتبط با نرخ رشد ناپایداری حداکثر از تحلیل زمانی استفاده می‌گردد. در این حالت مقدار عدد موج، مقداری حقیقی بوده و نتایج جهت تعیین فرکانس بررسی می‌گردد.

بررسی رشد مکانی^{۱۱} ناپایداری موج اغتشاش در افشانه

با توجه به مطالب عنوان شده، جهت بررسی مکانی رشد ناپایداری، مقدار موهومی عدد موج را قرار می‌دهیم. در این صورت دامنه نمودار نمایی رشد اغتشاشات، با افزایش فاصله از نازل افزایش یافته و در نهایت به شکست می‌انجامد. در این حالت رفتار نمودار از نظر کیفی مشابه رفتار تجربی می‌باشد (شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰).



شکل ۸- نمودار رشد مکانی اغتشاشات در اسپری لایه سیال در حالت $\eta_0 = 0.0006, W_0 = 0, n = 0, Wel = 4, U_0 = 15, U_i = 0$



شکل ۹- نمودار رشد مکانی اغتشاشات در اسپری لایه سیال در حالت $\eta_0 = 0.0006, m = 4, W_0 = 50, Wel = 4, U_0 = 15, U_i = 0$

$$A(t) = (c_{11}\exp(\omega_{11}t) + c_{12}\exp(\omega_{12}t)) \quad (11)$$

که شامل دو جزء حل فرکانس حداکثر ناپایداری و ضرایب c_{11} و c_{12} می‌باشد که از حل فرکانس ناپایداری و شرط مرزی دینامیکی بدست می‌آید.

همچنین حل معادلات اغتشاش مرزی مرتبه دوم (ضریب η_0^2) نیز به صورت معادله (۱۲) است و هدف حل مرتبه دوم پیدا کردن ضرایب این معادله می‌باشد.

$$\eta_2(x, \theta, t) = B(t)\exp(2i(kx + n\theta)) + \overline{B(t)}\exp(-2i(kx + n\theta)) + D(t) \quad (12)$$

ضرایب معادله مرتبه دوم شامل دو جزء فرکانسی و ضرایب غیرفرکانسی است که با حل فرکانس حداکثر ناپایداری مرتبه دوم و استفاده از معادلات شرط مرزی می‌توان ضرایب $c_{21} - c_{25}$ را محاسبه نمود (معادله ۱۳).

$$B(t) = c_{21}\exp(\omega_{21}t) + c_{22}\exp(\omega_{22}t) + c_{23}\exp(2\omega_{11}t) + c_{24}\exp(2\omega_{12}t) + c_{25}\exp((\omega_{11} + \omega_{12})t) \quad (13)$$

شرایط مرزی

همان‌طور که قبلاً عنوان شد شرایط مرزی این مسئله شامل شرط مرزی سینماتیک و دینامیک است که شرط مرزی سینماتیک بیان‌کننده تساوی مقدار حرکت و سرعت در مرز می‌باشد. از این رو شرط مرزی سینماتیک به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$V_{L,r} = \frac{D\eta,t}{Dt} \quad (14)$$

$$\phi_{L,r} - \eta_{,t} - \phi_{L,x}\eta_{,x} = 0 \quad (15)$$

از سوی دیگر شرط مرزی دینامیک بیان‌کننده برابری نیرو در سطح مشترک دو سیال در تمام شرایط است.

$$(P_L - P_g - \sigma \nabla \cdot k) \cdot n = (\tau_l - \tau_g) \cdot n \quad (16)$$

در معادله (۱۶) P_L و P_g مقادیر فشار در هر لحظه در سطح سیال می‌باشد و τ_i تانسور تنش سیال در سطح می‌باشد. همچنین n بردار عمود بر سطح مشترک و σ کشش سطحی و k نیز شعاع میانگین سطح می‌باشد.

نتایج حل معادله سه بعدی رشد ناپایداری

سطح لایه سیال

جهت بررسی رشد ناپایداری، در ابتدا با حل معادلات حاکم و تعیین عدد موج حقیقی، با افزایش زمان، ناپایداری کلی افزایش یافته تا جایی که در نهایت موجب شکست افشانه می‌گردد. در این حالت روند تحلیل روند شکست افشانه به صورت زمانی است که نتیجه آن تعیین فرکانس شکست افشانه و عدد موج وابسته به آن خواهد بود. در صورتی که نمودار شکست افشانه در این حالت رسم شود، رفتار

10. Temporal wave analysis

11. Spatial instability analysis

تحقیق با توجه به اینکه هدف تعیین توزیع پاشش با استفاده از مشخصات بالادست و بدون استفاده از نتایج اندازه‌گیری تجربی است، تنها می‌توان از چهار معادله بقا استفاده نمود و در صورت افزایش معادلات قید نظیر جداسازی معادله انرژی به دو بخش بقای انرژی مکانیکی و انرژی سطحی مطابق روش سلنس [۱]، اطلاعات قطر میانگین برای تعیین ترم چشمه آن در دسترس نیست و نیازمند استفاده از نتایج تجربی می‌باشد. با فرض پیوسته بودن فضای متغیرهای قطر و سرعت معادلات بقای نهایی به صورت معادلات زیر خواهند بود.

$$\int_{D_{min}}^{D_{max}} \int_{U_{min}}^{U_{max}} f D^3 dU dD = 1 + S_m \quad (22)$$

$$\int_{D_{min}}^{D_{max}} \int_{U_{min}}^{U_{max}} f U D^3 dU dD = 1 + S_{mv} \quad (23)$$

$$\int_{D_{min}}^{D_{max}} \int_{U_{min}}^{U_{max}} f (U^2 D^3 + B D^2) dU dD = 1 + S_e \quad (24)$$

$$\int_{D_{min}}^{D_{max}} \int_{U_{min}}^{U_{max}} f dU dD = 1 \quad (25)$$

که در آن $\bar{D}_i = D_i/D_{30}$ و $\bar{U}_j = U_j/U_l$ بوده و $\bar{S}_m, \bar{S}_{mv}, \bar{S}_e$ نیز ترم‌های چشمه بی بعد شده می‌باشند. ثابت B نیز با کشش سطحی مرتبط بوده و مقدار آن بصورت زیر می‌باشد.

$$B = \frac{12}{We_{30}} ; \quad We_{30} = \frac{\rho U_l^2 D_{30}}{\sigma} \quad (26)$$

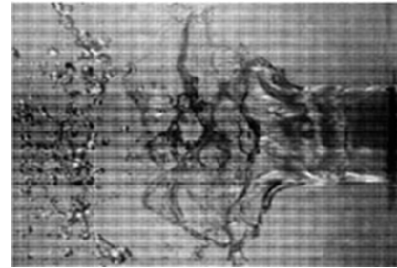
جملات چشمه مدل ماکزیمم انتروپی

جهت حل معادلات ماکزیمم انتروپی در ابتدا بایستی جملات چشمه مشخص گردند. همانطور که قبلاً توضیح داده شد، دستگاه معادلات از یک معادله نرمالیزاسیون و سه معادله بقا تشکیل شده است. این رو سه جمله چشمه (S_m, S_{mv}, S_{me}) بایستی تعیین گردند. این جملات ارتباط بین بخش با حل قطعی^{۱۲} تحلیل ناپایداری و تعیین توربولانس با بخش با حل غیرقطعی^{۱۳} معادلات ماکزیمم انتروپی می‌باشند. در این تحلیل فرض بر آن است که گاز اطراف کاملاً اشباع بوده و در نتیجه هیچ انتقال جرمی اتفاق نمی‌افتد. به عبارت دیگر کاهش جرم ناشی از تبخیر اتفاق نمی‌افتد. این فرض برای آزمایشات در محیط آزمایشگاهی بدلیل انتالپی بالای تبخیر آب در دمای اتاق قابل قبول است. بنابراین ترم چشمه جرم صفر می‌باشد.

$$S_m = 0 \quad (27)$$

ترم چشمه ممتوم با فرض تاثیر نیروی مقاوم بر دو سطح افشانه، به دلیل اختلاف سرعت بین سیال و گاز اطراف تعیین می‌گردد. در این حالت برای نیروی مقاوم در برابر حرکت افشانه خواهیم داشت:

$$F = 2 \left[\frac{1}{2} \rho_g (U_g - U_l)^2 A^* C_f \right], \quad A^* = (L_b a^*) \times b^* \quad (28)$$



شکل ۱۰- تصویر شکست یک افشانه در حالت واقعی [۹]

مدل ماکزیمم انتروپی

رابطه و روش محاسبه ماکزیمم انتروپی هدف مدل ماکزیمم انتروپی، بیشینه کردن تابع معیار عدم قطعیت با در نظر گرفتن قیود تعریف شده است. برای ماکزیمم کردن تابع معیار عدم قطعیت:

$$B(P) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \ln \frac{p(x_i)}{\alpha(x_i)} \quad (17)$$

با توجه به شرایط

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1, \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) g_r(x_i) = \bar{g}_r; \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

بایستی از روش ضرایب لاگرانژ استفاده نمود. به این منظور ابتدا لاگرانژین آن بصورت زیر محاسبه شود

$$p(x_i) = p_{i,0} \exp \left[-\lambda_0 - \lambda_1 g_1(x_1) - \lambda_2 g_2(x_2) - \dots - \lambda_m g_m(x_m) \right] \quad (19)$$

و با مساوی قرار دادن مشتقات احتمال با صفر، نتیجه می‌شود

$$p(x_i) = \alpha(x_i) \exp \left[-\lambda_0 - \lambda_1 g_1(x_1) - \lambda_2 g_2(x_2) - \dots - \lambda_m g_m(x_m) \right] \quad (20)$$

$$\exp \lambda_0 = p_{i,0}$$

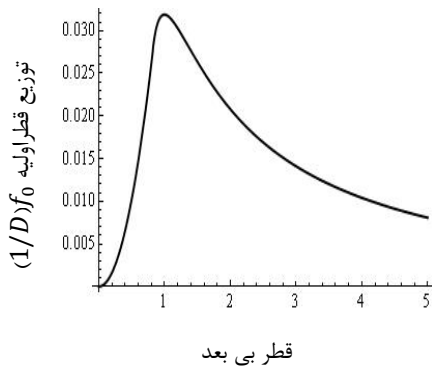
$$\sum_{i=1}^n \exp \left[-\lambda_0 - \lambda_1 g_1(x_1) - \lambda_2 g_2(x_2) - \dots - \lambda_m g_m(x_m) \right] \quad (21)$$

که در آن ثابتهای $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ ضرایب لاگرانژ هستند که در معادله (۱۸) عنوان شده‌اند.

همچنین تابع توزیع نهایی نیز همان‌طور که عنوان شد از رابطه (۲۱) محاسبه می‌شود.

معادلات بقای مدل ماکزیمم انتروپی

با توجه به شکل کلی تابع احتمال توزیع، تفاوت روش‌های مختلف استفاده از اصل ماکزیمم انتروپی، جهت تعیین توزیع قطر و سرعت قطرات، مربوط به نوع شرایط اعمالی و معادلات بقا می‌باشد. در این



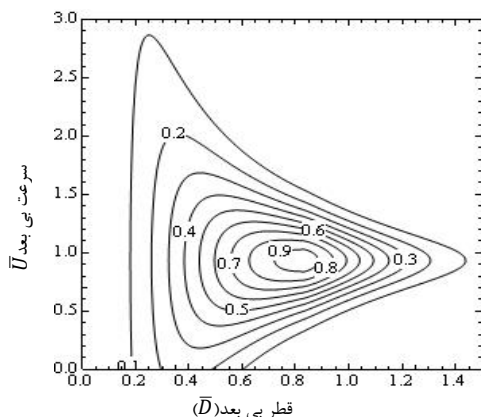
شکل ۱۱- توزیع اولیه قطر قطرات افشانه برای $We = 50, U = 4, \rho = 0.001$

ارزیابی رفتاری نتایج مدل ماکزیمم انتروپی روش ماکزیمم انتروپی توزیع قطر و سرعت ذرات اسپری را با توجه به شرایط خروجی نازل (مشخصات اسپری) تعیین می‌کند. همچنین جهت ارزیابی اولیه روش حل و مدل، نتایج ابتدا برای یک انژکتور مشخص ارائه می‌گردد. در ابتدا محدود حل با توجه به روابط حداکثر قطر و سرعت تعیین می‌گردد.

$$\bar{D}_{min} = 0, \bar{D}_{max} = 3, \quad \bar{U}_{min} = 0, \bar{U}_{max} = 3 \quad (34)$$

در شکل (۱۲) نمودار توزیع نقاط هم احتمال رسم شده است که نشان می‌دهد هر چه سرعت از $U = 1$ دورتر شود، تغییرات و فراوانی آن کمتر خواهد شد. همچنین در شکل ۱۳ نمودار سه بعدی از نحوه توزیع سرعت و قطر برای یک اسپری نمونه با مشخصات $We = 50, U = 4, \rho = 0.001$ نشان داده شده است.

تأثیر تغییرات عدد وبر بر توزیع ماکزیمم انتروپی در شکل (۱۴) تغییرات توزیع قطر ذرات اسپری در اعداد وبر مختلف رسم شده است و همان‌طور که انتظار می‌رود در این نمودار هرچه عدد وبر بالاتر رود یا به عبارت دیگر سرعت افزایش یابد، توزیع یکنواخت‌تر می‌شود.



شکل ۱۲- نمودار توزیع خطوط هم احتمال

که در این معادله C_f ضریب نیروی درگ جریان بر روی صفحه می‌باشد که برای جریانهای توربولانس و آرام و مقادیر مختلف b^* مقدار آن متفاوت است. در این حالت با توجه به حجم کنترل، نرخ تغییرات ممتوم برابر با تغییرات تنها نیروی وارد به سیال یا همان مقاومت آیرودینامیکی است که بواسطه مقاومت حرکتی که توسط گاز اطراف سیال ایجاد می‌شود از ممتوم سیال افشانه کسر می‌شود.

$$S_{mv} = \frac{F}{\rho_l U_l^2 b^* (2a^*)} \quad (29)$$

در نتیجه با ترکیب معادلات (۲۸ و ۲۹) نتیجه می‌شود

$$S_{mv} = \frac{1}{2} C_f \rho (U - 1)^2 L_b \quad (30)$$

که در این معادلات ρ نسبت چگالی گاز به چگالی سیال و U

نیز نسبت سرعت گاز به سرعت سیال می‌باشد.

ترم چشمه انرژی نیز با استفاده از تحلیل مشابه بدست می‌آید.

$$S_e = C_f \rho (U - 1)^3 L_b \quad (31)$$

توزیع اولیه قطر قطرات

بر طبق مدل میترا [۱] در روش ماکزیمم انتروپی مورد استفاده، تأثیر اطلاعات رشد امواج ناپایدار در فصل مشترک گاز- مایع در نظر گرفته نمی‌شود. و با توجه به نتایج تحلیل ناپایداری خطی، طول موج بایشتین نرخ رشد، نقش اساسی را در شکست اولیه لایه سیال ایفا می‌کند و از این رو نقش مهمی در توزیع قطر قطرات در افشانه دارد.

در این حالت، توزیع اولیه قطر قطرات (f_0) از منحنی نرخ رشد بدست می‌آید. در این مدل پیشنهاد شده که توزیع اولیه با فرکانس حداکثر نرخ رشد مرتبط باشد. بسته به نرخ رشد ناپایداری، قطر بی‌بعد \bar{D} با نرخ رشد بی‌بعد k نسبت معکوس دارد. بر طبق نتایج میترا [۱] در محدوده طول موج‌های ناپایدار ($0 \leq k \leq k_c$) قطر قطره با معادله زیر با طول موج در ارتباط است.

$$\bar{D} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_b}}; \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (32)$$

همچنین بر طبق تئوری ناپایداری خطی ($[\lambda_0]$) خارج از محدوده عدد موج ناپایدار k_c موج‌ها پایدار می‌باشند. بنابراین برای امواج با عدد موج بیش از عدد موج ناپایدار ($k \geq k_c$) فرض می‌شود که توزیع اولیه با مجذور قطر قطرات نسبت دارد. همچنین جهت پیوستگی توزیع، یک قطر بحرانی تعریف می‌شود، که نقطه برخورد شیب دو منحنی می‌باشد. در این حالت تابع چند ضابطه‌ای بصورت زیر خواهد بود.

$$f_0 = \begin{cases} m \bar{D}^2 \bar{D} \leq \bar{D}_{cr} \\ \omega_{1,s} \left(\frac{k_b}{\bar{D}^2} \right) \bar{D} \geq \bar{D}_{cr} \end{cases} \quad (33)$$

که در این رابطه m شیب f_0 و k_b عدد موج شکست مربوط به k_b و $\omega_{1,s}$ نرخ رشد ماکزیمم مرتبه اول می‌باشد. شکل ۱۱ نشان‌دهنده توزیع اولیه در حالت $We = 50, U = 4, \rho = 0.001$ می‌باشد.

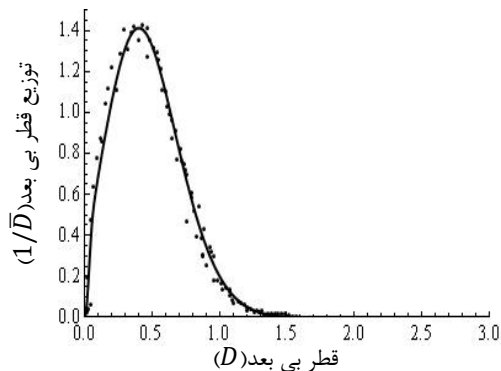
توزیع قطر و سرعت مدل مقایسه می‌شود که نتایج آن در نرم‌افزار متمتیکا رسم شده است (شکل‌های ۱۶، ۱۷ و ۱۸).

همان‌طور که در شکل (۱۶) نشان داده شده است، توزیع قطر از مدل چهار معادله‌ای همخوانی مناسبی با نتایج تجربی دارد. همچنین در خصوص توزیع سرعت در شکل (۱۷) نیز تخمین توزیع با دقت مناسبی صورت گرفته، ولی در سرعت‌های بالا به دلیل وجود قطرات بسیار ریز ولی با سرعت لحظه‌ای زیاد و فاصله سیر کم در مقادیر سرعت بی‌بعد انتهایی توزیع، مدل مقدار سرعت حداکثر را بیشتر از مقدار نهایی (در حدود ۱۰٪) تخمین می‌زند (شکل ۱۷).

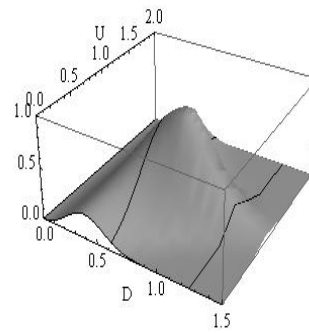
جدول ۲- مشخصات انژکتور مورد بررسی

مقدار	مشخصات انژکتور
۵۰	عدد وبر
۰/۰۰۱۲	نسبت چگالی
۰/۰۷۳	کشش سطحی (N/m)
۵	C_f
۰/۰۲۸۷	S_{mv}
۰/۱۷۰۷	S_e

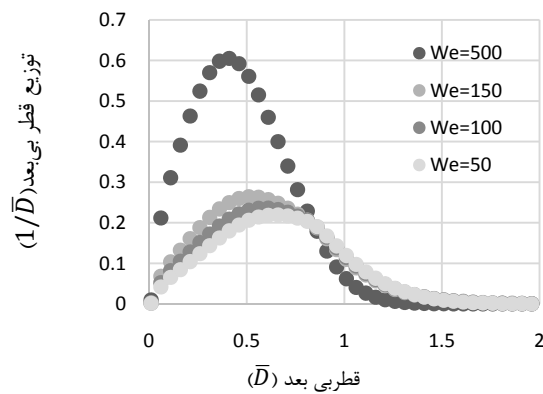
همان‌طور که در شکل (۱۶) نشان داده شده است، توزیع قطر از مدل چهارمعادله‌ای همخوانی مناسبی با نتایج تجربی دارد. همچنین در خصوص توزیع سرعت در شکل (۱۷) نیز تخمین توزیع با دقت مناسبی صورت گرفته، ولی در سرعت‌های بالا به دلیل وجود قطرات بسیار ریز ولی با سرعت لحظه‌ای زیاد و فاصله سیر کم در مقادیر سرعت بی‌بعد انتهایی توزیع، مدل مقدار سرعت حداکثر را بیشتر از مقدار نهایی (در حدود ۱۰٪) تخمین می‌زند (شکل ۱۸).



شکل ۱۶- نتایج توزیع قطر مدل به ازای ورودی قطر میانگین اندازه‌گیری شده در مقایسه با توزیع اندازه‌گیری شده به روش تجربی (خط ممتد نتایج عددی و نقاط نتایج تجربی می‌باشد)

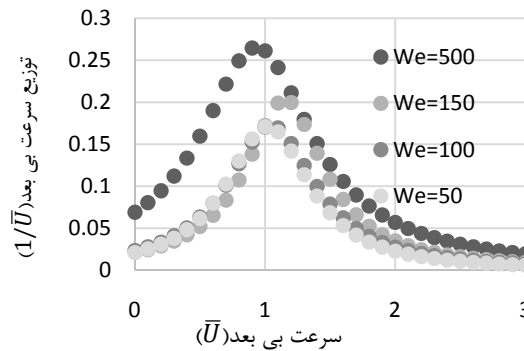


شکل ۱۳- نتایج توزیع همزمان سرعت و قطر ذرات اسپری برای $\rho = 0.001, U = 4, We = 150$



شکل ۱۴- تغییرات توزیع قطر قطرات نسبت به قطر بی‌بعد برای $\rho = 0.001, U = 4, We = 50, 100, 150, 500$

همچنین در شکل (۱۵) تغییرات نمودار سرعت بی‌بعد نسبت به تغییرات عدد وبر رسم شده است، که با افزایش عدد وبر، نمودار تغییرات سرعت بی‌بعد نیز یکنواخت‌تر می‌گردد.



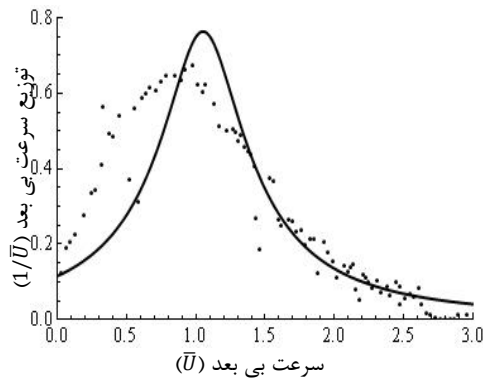
شکل ۱۵- تغییرات توزیع سرعت نسبت به تغییرات سرعت بی‌بعد برای $\rho = 0.001, U = 4, We = 50, 100, 150, 500$

بررسی نتایج مدل به ازای داده‌های ورودی تجربی
در مرحله بعد جهت تست کارایی مدل به ازای مقادیر تجربی C_f ، L_b و D_{30} (جدول ۲) نتایج مدل با نتایج تجربی لی [۱] در خصوص

شکست از مقدار واقعی آن بیشتر تخمین زده شده است. دلیل آن خطای ناشی از تخییر سطحی، فرار قطرات بسیار ریز از سطح انژکتور پیش از شکست اولیه و همچنین خطای مقادیر تجربی در مدل هو و گاسمن است [۷، ۸]. همچنین با توجه به این موضوع که چشمه انرژی مسئول توزیع سرعت می‌باشد، شکل (۱۹) نشان‌دهنده همخوانی تقریبی نتایج سرعت با نتایج تجربی است که دلیل این امر دقت مناسب تعیین ترم چشمه انرژی است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق هدف توسعه مدل ماکزیمم انتروپی با ورودی مستقل از اندازه‌گیری تجربی و با استفاده از مشخصات جریان بالادست بوده است. از این رو در ابتدا با توجه به حجم کنترل و بالانس انرژی و ممنتوم، ترم‌های چشمه تعیین می‌گردد.



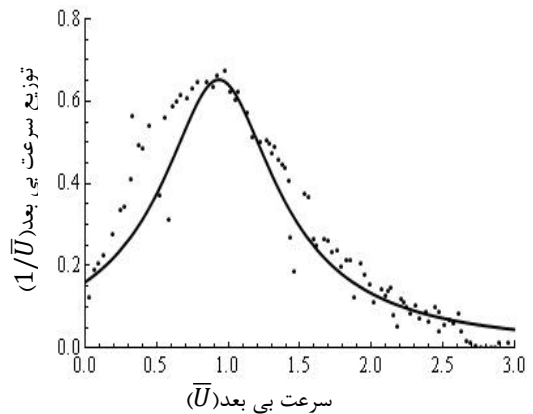
شکل ۱۹- نتایج توزیع سرعت پس از محاسبه ترم چشمه بصورت تئوری با استفاده از نتایج شکست اولیه (خط ممتد نتایج مدل و نقاط نتایج تجربی می‌باشد)

جهت تعیین ترم‌های چشمه با توجه به مدل هو و گاسمن جریان توربولانس داخل نازل با استفاده از مدل توربولانسی دو معادله‌ای $k-\epsilon$ ، شبیه‌سازی شد و انرژی متوسط توربولانس جریان در خروجی انژکتور تعیین گردید.

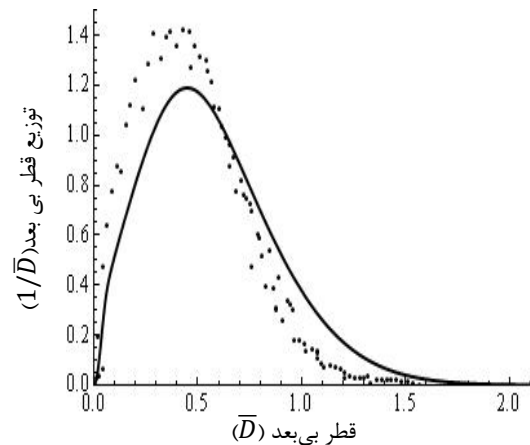
در ادامه با استفاده از تحلیل سه بعدی غیر خطی رشد امواج ناپایداری در سطح افشانه، طول موج شکست و فرکانس غالب تعیین شد. در ادامه تاثیر توربولانس بر نتایج آن اعمال شد که منجر به محاسبه قطر قطره میانگین و طول شکست و در نهایت ترم‌های چشمه، ممنتوم و انرژی شد.

در قسمت سوم، مدل ماکزیمم انتروپی بر پایه معادلات بقا و معادله نرمالیزاسیون توسعه یافت تا از ورودی‌های جریان بالادست استفاده شود. در ادامه مدل با ورودی‌های تجربی تست گردید که نتایج حاصل از آن همخوانی مناسبی با نتایج تجربی را نشان می‌دهد.

نهایتاً، ورودی‌های بدست آمده از جریان بالادست جایگزین ورودی تجربی گردید که در این حالت هر دو نمودار از جهت رفتاری همخوانی کاملی را نشان می‌دهند.



شکل ۱۷- مقایسه نتایج توزیع سرعت با نتایج تجربی (خط ممتد نتایج عددی و نقاط نتایج تجربی می‌باشد)



شکل ۱۸- نتایج توزیع قطر پس از محاسبه ترم چشمه بصورت تئوری با استفاده از نتایج شکست اولیه (خط ممتد نتایج مدل و نقاط نتایج تجربی می‌باشد)

نتایج مدل ماکزیمم انتروپی به ازای مقادیر به‌دست آمده از جریان بالادست

پس از بدست آوردن مقادیر طول شکست و فرکانس ناپایداری از روش تحلیل رشد ناپایداری‌های سطحی و اصلاح آن با انرژی توربولانس طبق مدل هو و گاسمن [۷، ۸] برای انژکتور مورد بررسی (رابطه ۱)، مقادیر آن با استفاده از معادلات (۳۰) و (۳۱) جایگزین مقادیر چشمه ممنتوم و چشمه انرژی بدست آمده از آزمایش‌های تجربی گردید. نتایج توزیع قطر و سرعت آن در شکل (۱۸) و شکل (۱۹) نشان داده شده است. در این حالت مشخص می‌گردد، تخمین مدل از نظر رفتاری به درستی رفتار توزیع را نشان داده است. همچنین نمودار با تقریب مناسبی با نتایج همخوانی دارد. در خصوص تفاوت نتایج مدل و مقدار تجربی در شکل (۱۹) که مقدار قطر حداکثر بیشتر از نتایج تجربی تخمین زده شده است می‌توان نتیجه گرفت که انرژی شکست و به دنبال آن ترم چشمه انرژی، از مقدار تخمین زده شده توسط مدل بیشتر است یا طول

- extraction column," *Chemical Engineering Research and Design*, Vol. 117, 2017, pp. 637-647.
4. Movahednejad, E., Ommi, F. and Hosseinalipour, S.M., "Prediction of droplet size and velocity distribution in droplet formation region of liquid spray," *Entropy*, Vol. 12, No. 6, 2010, pp. 1484-1498.
 5. Hosseinalipour, S.M., Karimaei, H. and Movahednejad, E., "Droplets diameter distribution using maximum entropy formulation combined with a new energy-based sub-model," *Chinese journal of chemical engineering*, Vol. 24, No. 11, 2016, pp. 1625-1630.
 6. Tayeb, R. and et al., "Both experimental and numerical investigation on breakup length of cylindrical falling jet," *Procedia Engineering*, Vol. 56, 2013, pp. 462-467.
 7. Omocea, I.L. and et al., "Breakup of Liquid Jets," *Energy Procedia*, Vol. 85, 2016, pp. 383-389.
 8. Yao, S., Zhang, J. and Fang, T., "Effect of viscosities on structure and instability of sprays from a swirl atomizer," *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 39, 2012, pp. 158-166.
 9. Ibrahim, A. and Jog, M., "Nonlinear instability of an annular liquid sheet exposed to gas flow," *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 34, No. 7, 2008, pp. 647-664.
 10. Zhao, H. and et al., "Transition Weber number between surfactant-laden drop bag breakup and shear breakup of secondary atomization," *Fuel*, Vol. 221, 2018, pp. 138-143.

نمودار توزیع سرعت نیز از نظر کمی، همخوانی مناسبی با مقادیر تجربی دارد که نشان دهنده تعیین مناسب ترم چشمه انرژی دارد. در خصوص نمودار توزیع قطر، پیک نمودار در حدود $\frac{2}{14} = 0.14$ درصد کمتر از مقدار تجربی است و همچنین مقدار قطر حداکثر نیز بیشتر از مقدار تجربی حدس زده شده است. این امر ناشی از کمتر تخمین زدن ترم ممنتوم نسبت به حالت واقعی دارد. دلیل آن می‌تواند خطای ناشی از تبخیر سطحی، فرار قطرات بسیار ریز از سطح انژکتور پیش از شکست اولیه و همچنین خطای مقادیر تجربی در مدل هو و گاسمن باشد. ولی در نهایت مدل جهت تخمین اولیه مقادیر قطر و سرعت نتایج مناسبی را ارائه داده است.

مراجع

1. Dumouchel, C., "The maximum entropy formalism and the prediction of liquid spray drop-size distribution" *Entropy*, Vol. 11, No. 4, 2009, pp. 713-747.
2. Bodaghkhani, A., Colbourne, B. and Muzychka, Y.S., "Prediction of droplet size and velocity distribution for spray formation due to wave-body interactions," *Ocean Engineering*, Vol. 155, 2018, pp. 106-114.
3. Asadollahzadeh, M. and et al., "Using maximum entropy, Gamma, Inverse Gaussian and Weibull approach for prediction of drop size distribution in a liquid-liquid