

مقاله علمی - پژوهشی

# بهبود فرآیند توجیه اولیه سامانه ناوبری اینرسی با روش پیش‌بینی و شناسایی فیلتر کالمن ماتریسی

رضا قصری‌زاده<sup>۱</sup> و امیرعلی نیکخواه<sup>۲</sup>

۱ و ۲- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، تهران، ایران

\*nikkhah@kntu.ac.ir

در این مقاله به ارائه راهکاری نوین برای حذف نویزها و اغتشاشات موجود در فرآیند توجیه اولیه سامانه های ناوبری اینرسی پرداخته شده است. به دلیل وجود نوسانات شدید در محیط های شبه ایستا، فرآیند توجیه اولیه اغلب با خطا و نویزهای فراوانی همراه است. ابتدا با فرض وجود اغتشاشات و نویز برای بهبود و افزایش دقت توجیه اولیه اقدام به فیلترینگ شده است. در ادامه ضمن معرفی شاخصه های فیلتر دیجیتال برای این منظور، به علت حذف برخی از داده های اصلی سنسور، اقدام به شناسایی پارامترهای مجهول و تخمین متغیرهای حالت با استفاده از فیلتر کالمن ماتریسی بر اساس واریانس خطای داده ها می شود. شناسایی پارامترهای مجهول ماتریس تبدیل مختصات با استفاده از فیلتر کالمن ماتریسی ابتکار این مقاله است که منجر به بهبود نتیجه توجیه اولیه در سامانه ناوبری اینرسی شده است. همچنین روش های معمول بر اساس فیلتر کالمن برداری دارای پیچیدگی محاسباتی است اما تخمین مستقیم ماتریس تبدیل با فیلتر کالمن می تواند این پیچیدگی محاسباتی را تا حدی زیادی کاهش دهد.

واژه های کلیدی: توجیه اولیه، سامانه ناوبری اینرسی، ژيروسکوپ، شتاب سنج، فیلتر کالمن ماتریسی

T	زمان (S)
$\hat{x}$	بردار تخمین فیلتر کالمن
$\omega_t$	سرعت زاویه ای ژيروسکوپ (rad/s)
$\gamma_K$	پارامترهای ماتریس دوران مجهول در لحظه ی K
$Y_{K+1}$	ماتریس اندازه گیری فیلتر کالمن در فضای ماتریسی
$W_K$	ماتریس نویز سفید در لحظه ی K

## مقدمه

INS سیستم ناوبری اینرسی است که شتاب و نرخ های دوران جسم متحرک را از حسگرهای شتاب سنج و ژيروسکوپ دریافت می کند تا سرعت و جهت گیری جسم متحرک به دست آورد. از این رو حل معادلات ناوبری نیازمند مقادیر اولیه برای محاسبه ی موقعیت سرعت و جهت گیری وسیله پرنده است. فرآیند تجربی تعیین این مقادیر اولیه با نام توجیه اولیه اینرسی<sup>۴</sup> یا تراز اینرسی عنوان می شود.

## فهرست علائم و اختصارات

$g$	شتاب گرانش ( $ms^{-2}$ )
R	ماتریس تبدیل بین دو دستگاه مختصات
$\omega_{ie}$	سرعت زاویه ای چرخش کره ی زمین ( $^{\circ}/h$ )
L	عرض جغرافیایی زمین ( $^{\circ}$ )
$V_E$	سرعت در راستای شرق دستگاه مختصات ناوبری
$\lambda$	طول جغرافیایی زمین ( $^{\circ}$ )
$\pi$	عدد پی
$\tau$	خطای بایاس ژيروسکوپ (rad/s)
P	کواریانس خطای تخمین
exp	عدد نپر
$\hat{x}$	ماتریس تخمین فیلتر کالمن

3. Inertial Navigation System  
4. Inertial Alignment

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد  
۲. دانشیار (نویسنده مخاطب)

با روش‌های جدید که منجر به افزایش دقت ناوبری می‌گردد روش‌های بسیاری معرفی شده است که در مراجع به آن اشاره می‌شود [۱۵-۱۷]. یکی از روش‌های بهبود فرآیند توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری اینرسی استفاده از فیلترهای دیجیتال و بازسازی بردارهای مشاهده یا اندازه‌گیری است [۱۷-۱۶].

این مقاله راه حلی نوین برای توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری اینرسی پیشنهاد می‌کند. در این روش با استفاده از فیلترهای دیجیتال ضمن حذف نویز مقادیر خروجی سنسورهای ناوبری به پیش‌بینی و شناسایی پارامترهای ماتریس دوران بدست آمده در فرآیند توجیه اولیه اینرسی پرداخته می‌شود.

در ادامه ضمن معرفی شاخصه‌های فیلتر دیجیتال برای نویزبرداری، به علت حذف برخی از داده‌های اصلی سنسور، اقدام به شناسایی پارامترهای مجهول و تخمین متغیرهای حالت با استفاده از فیلتر کالمن ماتریسی بر اساس واریانس خطای داده‌ها می‌شود. شناسایی پارامترهای مجهول ماتریس تبدیل مختصات با استفاده از فیلتر کالمن ماتریسی ابتکار این مقاله است. وجه تمایز روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها این است که مستقیماً پارامترهای ماتریس دوران در توجیه اولیه را به عنوان یک ماتریس فضای حالت در نظر گرفته و سعی می‌شود درایه‌های ماتریس فضای حالت به کمک فیلتر کالمن ماتریسی تخمین زده شود. سایر مقالات اغلب در این بخش با استفاده از فیلتر کالمن معمولی فرآیند تخمین بردارهای اندازه‌گیری را انجام می‌دهند که بسیار پر هزینه و دارای خطای محاسباتی است.

در بخش دوم این مقاله، دستگاه‌های مختصات مرجع تعریف می‌شوند. در بخش سوم، فرآیند توجیه اولیه و روش‌های حل آن به روش مسئله وهبا و نیز اصول توجیه اولیه پیشنهادی بیان می‌گردد. بخش چهارم به موضوع فیلترهای پایین گذر در حذف نویزهای سنسورهای اندازه‌گیری پرداخته و در بخش پنجم تئوری شناسایی و تخمین پارامترهای ماتریس دوران در توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری به طور کامل تشریح می‌شود. همچنین در بخش ششم نتایج شبیه‌سازی مورد تحلیل قرار می‌گیرد تا در بخش هفتم جمع بندی و نتیجه‌گیری از شبیه‌سازی‌ها ارائه شود.

### دستگاه مختصات ناوبری

دستگاه مختصات بدنی (b): مرکز این دستگاه بر مرکز وسیله منطبق بوده و محور  $x_b$  آن به سمت محور طولی است و محور  $z_b$  آن به سمت پایین است. محور  $y_b$  طبق قانون دست راست مشخص می‌شود. دستگاه مختصات ناوبری (n): مرکز این دستگاه بر مرکز وسیله منطبق بوده و محور  $x_n$  آن در راستای شمال، محور  $y_n$  در راستای شرق و محور  $z_n$  آن در راستای عمود محلی و به سمت پائین است.

این مقادیر در یک حلقه تکراری و بازگشت‌پذیر به آسانی از مرحله قبل در دسترس هستند. اما برای گام اول باید مقادیر اولیه اندازه‌گیری‌ها فراهم شود از این رو توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری برای موقعیت سرعت و جهت‌گیری جسم اهمیت بسزایی دارد. از طرفی اگر توجیه اولیه موقعیت، سرعت و جهت‌گیری دقیق انجام شود می‌تواند، دقت و زمان حل معادلات در فاز ناوبری را بهبود بخشد.

استفاده از فیلتر کالمن به عنوان یک تخمین‌گر دقیق و مقاوم اغلب بر اساس ورودی‌های برداری از متغیرهای حالت انجام می‌شود به گونه‌ای که فیلتر کالمن با استفاده از دینامیک سیستم و بردارهای اندازه‌گیری توسط کواریانس خطا اقدام به شناسایی و یا تخمین متغیرهای حالت برداری می‌کند [۱-۲]. اما با توجه به فرم ماتریسی ماتریس‌های تبدیل کسینوس هادی که اغلب به فرم  $3 \times 3$  هستند با توجه به حجم پایین محاسبات در این پژوهش سعی می‌شود تا به طراحی فیلتر کالمن ماتریسی بپردازیم [۳].

با داشتن ماتریس کواریانس خطای تخمین که در نویزبرداری ابتدایی بدست می‌آید و به کمک شتاب‌های اندازه‌گیری شده در دستگاه بدنی توسط سنسورهای اینرسی که اغلب با اغتشاشات محیطی همراه هستند، توسط فیلتر کالمن به شناسایی ماتریس تبدیل (کسینوس‌های هادی)<sup>۵</sup> می‌پردازیم [۴].

تلاش‌ها و پژوهش‌های بسیاری در مقالات مختلف پیرامون توسعه الگوریتم تخمین و کنترل مدل‌های ماتریسی صورت گرفته است. بر همین اساس با توجه به معادلات دیفرانسیل ریکاتی از حل خطای تخمین ماتریس کواریانس در یک فیلتر خطی، فیلتر کالمن توسعه یافته‌ای معرفی می‌شود، که گین بهینه را در کنترل و تخمین خطا ارائه می‌دهد [۵]. همچنین راهکارهای بسیاری برای توسعه محاسبات ماتریسی از جمله ماتریس گرادیان ارائه شده که می‌تواند ما را در بهبود فرآیند کواریانس خطای تخمین در حالت ماتریسی کمک کند [۶].

از روش‌های توسعه یافته‌ای برای تخمین درایه‌های یک ماتریس در سیستم دینامیکی استفاده شده است که می‌توان نتایج آن را در مرجع [۷] مشاهده کرد. همچنین به عنوان مثال می‌توان روش حل برآورد یک ماتریس با استفاده از متد حداقل مربعات خطای تخمین را در مراجع [۸] و [۹] مشاهده کرد.

در این الگوریتم به دنبال تخمین ماتریس تبدیل از دستگاه بدنی به دستگاه مرجع ناوبری هستیم که دارای ۹ پارامتر است لذا باید شرایط یک ماتریس دوران را دارا باشد [۳]. با استفاده از فیلتر کالمن ماتریسی اقدام به تخمین پارامترهای ماتریس دوران خواهیم کرد [۱۱]. توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری بدون سکو از اهمیت بالایی برخوردار است به گونه‌ای که توجیه اولیه‌ی غیردقیق منجر به ناوبری ضعیف خواهد شد [۱۲-۱۴]. برای بدست آوردن توجیه اولیه

در این رابطه  $g$  شتاب جاذبه زمین می‌باشد که در نقاط مختلف، مقدار آن وابسته به عرض جغرافیایی و ارتفاع جسم متحرک است. همچنین  $\omega_{ie}$  سرعت زاویه‌ای زمین است و بردار سومی را به صورت رابطه‌ی ۳ تعریف می‌شود.

$$E^n = g^n \times \omega_{ie}^n \quad (3)$$

حال سه بردار در دستگاه ناوبری وجود دارد. این سه بردار را در دستگاه بدنی نیز تشکیل می‌شود. در دستگاه بدنی اندازه‌گیری‌های شتاب‌سنج‌ها و ژيروسکوپ‌ها و ضرب خارجی آنها این سه بردار را تشکیل می‌دهند. سه بردار در دو دستگاه مشخص می‌باشند و بدین صورت ماتریس  $C_b^n$  یعنی تبدیل از دستگاه بدنی به ناوبری تعیین می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} g^{nT} \\ \omega_{ie}^{nT} \\ E^{nT} \end{bmatrix} = C_b^n \begin{bmatrix} g^{bT} \\ \omega_{ie}^{bT} \\ E^{bT} \end{bmatrix} \quad (4)$$

روش معمول تنظیمات اولیه در شرایطی صادق است که سامانه ناوبری ساکن و یا تحت ارتعاشات محدود باشد. ولی در شرایط شبه ایستا که نوسانات شدید می‌باشد این روش کاربرد ندارد. گفتنی است ماتریس تبدیل از دستگاه بدنی به ناوبری را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۵ تجزیه کرد.

$$C_b^n = C_i^n C_{ib0}^i C_b^{ib0} \quad (5)$$

که در آن  $C_b^{ib0}(t)$  ماتریس تبدیل از دستگاه بدنی به ناوبری،  $C_i^n$  ماتریس تبدیل از دستگاه زمین به ناوبری،  $C_{ib0}^i$  ماتریس تبدیل از بدنه ثابت در اینرسی نسبت به فضای اینرسی (در یک لحظه منطبق فرض شده‌اند) و  $C_b^{ib0}(t)$  ماتریس تبدیل از دستگاه بدنی به بدنه ثابت (که از طریق خروجی ژيروسکوپ‌ها محاسبه می‌گردد) می‌باشند.

روند محاسبه ماتریس‌های تجزیه شده به این صورت است که  $C_b^{ib0}(t)$  از خروجی ژيروسکوپ‌ها محاسبه می‌گردد و در شروع فاز تنظیم اولیه، دستگاه بدنی و دستگاه بدنه ثابت در اینرسی بر هم منطبق هستند، یعنی:  $C_b^{ib0}(t_0) = I$  این ماتریس با توجه به خروجی ژيروسکوپ‌ها در هر لحظه بروزرسانی می‌گردد که در رابطه‌ی ۶ به آن اشاره شده است.

$$C_b^{ib0} = C_b^{ib0}(\omega_{ib0}^b \times) \quad (6)$$

$C_e^n$  ماتریس تبدیل از دستگاه زمین ثابت به ناوبری است این ماتریس ثابت می‌باشد و بر مبنای طول و عرض جغرافیایی به صورت رابطه‌ی ۷ بدست می‌آید.

$$C_e^n = \begin{bmatrix} -\sin L & 0 & \cos L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos L & 0 & -\sin L \end{bmatrix} \quad (7)$$

$C_i^e(t)$  ماتریس تبدیل از دستگاه اینرسی به دستگاه زمین می‌باشد که بر مبنای سرعت زاویه‌ای زمین در طول زمان در قالب رابطه ۸ مشخص می‌شود.

دستگاه مختصات اینرسی (i): محورهای این دستگاه به صورت متعامد و با شرایط انطباق بر روش دست راست تعریف گردیده و این دستگاه نسبت به فضای اینرسی ثابت می‌باشد. دستگاه مختصات  $ib0$  یک دستگاه اینرسی که در لحظه اول بر دستگاه بدنی منطبق شده تعریف می‌گردد.

دستگاه مختصات زمین (e): دستگاه مختصات چرخنده با زمین که محور  $Z_e$  منطبق بر محور چرخش زمین و محورهای  $X_e$  و  $Y_e$  آن روی صفحه شامل مدار استوا تعریف می‌گردد.

### اصول توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری

هدف در توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری اینرسی بدون سکو، یافتن ارتباط بین دستگاه مختصات بدنی با دستگاه ناوبری است. با مقایسه مقادیر نامی شتاب گرانش و سرعت زاویه‌ای زمین با مقادیر اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها و ژيروسکوپ‌ها، یک تخمین اولیه از وضعیت جسم حاصل می‌شود. اما ماتریس بدست آمده در این مرحله به اغتشاشات خارجی و خطاهای سنسور آغشته است لذا در این بخش یکی از روش‌های توجیه اولیه غیردقیق که به صورت تحلیلی است مورد بررسی قرار می‌دهد.

یکی از روش‌های توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری تخمین حداقل مربعات خطای وهیاست. در روش وهیا برای هموارسازی و حذف اغتشاشات از فیلترهای مختلف استفاده می‌شود. مسئله وهیا یک حداقل مربعات وزن دار است که برای محاسبه کواترنین‌های اولیه در توجیه سامانه‌های ناوبری مورد استفاده قرار می‌گیرد. بر همین اساس یک دسته  $n$  تایی از نقاط در دستگاه بدنی (Vi) و مرجع ناوبری (wi) در نظر بگیرید که مسئله وهیا به صورت رابطه‌ی (۱-الف) تعریف می‌شود.

$$err^2 = \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^n a_i |R * V_i + w_i|^2 \quad (1-الف)$$

$$\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\} \quad (1-ب)$$

در رابطه‌ی ۱ مقادیر  $a_i$  بردارهای وزنی و ماتریس  $R$  همان ماتریس تبدیلی است که منجر به حل توجیه اولیه غیر دقیق می‌گردد. در روش معمول توجیه اولیه از بردار شتاب جاذبه و سرعت زاویه‌ای زمین برای محاسبه ماتریس شرایط اولیه، به صورت تحلیلی استفاده خواهد شد. در این روش، فرض بر این است که سامانه ناوبری به صورت ساکن و تحت ارتعاشات حداقلی است. در این شرایط الگوریتم تنظیمات اولیه، با توجه به دستگاه ناوبری، بردارهای شتاب جاذبه و سرعت زاویه‌ای زمین به صورت رابطه ۲-الف و ب تعریف می‌گردد.

$$g^n = [0 \quad 0 \quad g]^T \quad (2-الف)$$

$$\omega_{ie}^n = [\omega_{ie} \cos L \quad 0 \quad -\omega_{ie} \sin L]^T \quad (2-ب)$$

جدول ۱- مشخصات فیلتر پایین گذر طراحی شده برای داده‌های شبیه‌سازی

مرتبه فیلتر: مرتبه میانه	آمپر گذر فیلتر: ۳ دسی بل
ساختار فیلتر: فرم مستقیم ۲	آمپر توقف فیلتر: ۸۰ دسی بل
فرکانس فیلتر: ۲۰۰ هرتز	فرکانس گذر فیلتر: ۰.۱ هرتز
مدل طراحی فیلتر: باترووت	فرکانس توقف فیلتر: ۱ هرتز

با توجه به اینکه استفاده از فیلتر پایین گذر باعث حذف نویز شده و انتظار می‌رود که نتایج شبیه سازی بهبود یابد اما به علت وجود خطاهای ناشی از تداخل فاز، نشست طیفی و... بردارهای مشاهده با خطای جدید مواجه می‌شوند که در ادامه سعی داریم تا با استفاده از فیلتر کالمن پارامترهای نویزدار را شناسایی کنیم.

## کاربرد فیلتر کالمن ماتریسی برای شناسایی درایه های ماتریسی تبدیل

همان طور که در قسمت قبل مشاهده شد به علت حذف نویز با استفاده از فیلتر پایین گذر، بردارهای اندازه گیری دچار خطاهایی شدند که از تداخل فاز اندازه گیری و نشست طیفی نشأت می‌گرفت. حال در ادامه به دنبال طراحی فیلتر کالمن ماتریسی برای شناسایی پارامترهای ماتریس DCM هستیم. با توجه به بردار جاذبه در دستگاه ناوبری و ماتریس های تبدیل از دستگاه زمین به دستگاه ناوبری ضربی  $(\beta)$  مانند رابطه‌ی ۱۰ تعریف می‌شود [۲۰].

$$\beta = -C_{e0}^{n0} \cdot C_{e(t)}^{e0} \cdot C_{n(t)}^{e(t)} \cdot g^n \quad (10)$$

در این رابطه ماتریس تبدیل دستگاه زمین به دستگاه زمین ثابت در زمان اولیه برابر است با رابطه‌ی ۱۱ که در زیر به آن اشاره می‌شود.

$$C_{e(t)}^{e0} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_{ie} \cdot t) & -\sin(\omega_{ie} \cdot t) & 0 \\ \sin(\omega_{ie} \cdot t) & \cos(\omega_{ie} \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

همچنین ماتریس تبدیل دستگاه ناوبری به دستگاه زمین برابر رابطه‌ی ۱۲ است.

$$C_{n(t)}^{e(t)} = \begin{bmatrix} \cos(90 + \lambda) & -\sin(90 + \lambda) & 0 \\ \sin(90 + \lambda) & \cos(90 + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90 - L) & -\sin(90 - L) \\ 0 & \sin(90 - L) & \cos(90 - L) \end{bmatrix} \quad (12)$$

حال با فرض ثابت بودن ماتریس های تبدیل  $C_{e0}^{b0}$  و ماتریس تبدیل  $C_{n(t)}^{b(t)}$  به یک مدل همانند رابطه‌ی ۱۳ دست خواهیم یافت که هدف تخمین ماتریس تبدیل در فضای حالت را محقق می‌سازد.

$$\beta = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\omega_{ie} \cdot t) & -\sin(\omega_{ie} \cdot t) & 0 \\ \sin(\omega_{ie} \cdot t) & \cos(\omega_{ie} \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$C_{i}^n = \begin{bmatrix} -\sin L \cos \omega t & -\sin L \sin \omega t & \cos L \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\cos L \cos \omega t & -\cos L \sin \omega t & -\sin L \end{bmatrix} \quad (8)$$

محاسبه ماتریس  $C_{ib0}^i$  از طریق مسئله وهبا محاسبه می‌شود به طوری که با محاسبه‌ی بردارهای  $g^i$  و  $g^{ib0}$  و قرار دادن آن در معادله وهبا ماتریس تبدیل  $C_{ib0}^i$  بدست خواهد آمد که می‌توان آن در رابطه ۱ قرار داد و ماتریس تبدیل از دستگاه بدنی به دستگاه ناوبری را در لحظه صفر محاسبه نمود. اما با فرض وجود اغتشاشات محیطی و وجود خطای سنسورهای شتاب‌سنج و ژيروسکوپ تخمین ماتریس  $C_{ib0}^i$  تخمین مناسبی نخواهد بود.

همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد محاسبه شتاب‌ها در دستگاه اینرسی و دستگاه بدنی ثابت در اینرسی همراه با نویز و اغتشاشات سنسورها می‌باشد. از این رو با در نظر گرفتن محدوده‌ی نویزها و خطاهای سیستم می‌توان یک فیلتر پایین گذر طراحی کرد تا بخش عمده‌ای از نویزهای داده‌ی سنسور را حذف نماید.

گفتنی است که در سال ۲۰۱۳ با استفاده از این روش توجیه اولیه همراه با فیلتر پایین گذر برای حذف اغتشاش از خروجی شتاب‌سنج، دقتی در حدود ۰.۰۰۶ درجه فرافز و ۰.۰۱ درجه در غلت و ۰.۰۷ درجه در سمت ارائه گردید [۱۹]. به عنوان مثال در توجیه اولیه سامانه های ناوبری در دریا، پس از آنالیز داده‌های کشتی در شرایط لنگرگاه، مشخص شده‌است که شتاب های تصادفی ناشی از جریان آب و امواج دریا بزرگتر از ۱/۳۲۰ هرتز می‌باشد. همچنین فرکانس دریافت آرام جاذبه خالص در مختصات اینرسی برابر رابطه‌ی ۹ است.

$$\frac{1}{84600 - \frac{V_E}{2\pi R \cos L}} \text{ Hz} \quad (9)$$

$V_E$  سرعت شرق در مختصات ناوبری،  $R$  شعاع زمین و  $L$  عرض جغرافیایی می‌باشند. از آنجاکه سرعت شرق کشتی در مقایسه با شعاع زمین بسیار کوچک است بنابراین از آن صرف‌نظر کرده و فرکانس آرام دریف جاذبه را ۱/۸۴۶۰۰ هرتز در نظر گرفته می‌شود. بنابراین به یک فیلتر پایین گذر برای استخراج جاذبه خالص نیاز خواهیم داشت. بر اساس تجربه مهندسی، برای طراحی فیلتر پایین گذر، از فیلتر پاسخ قطعی محدود<sup>۶</sup> در مرتبه ۴۸ استفاده شده‌است. اما در ادامه با توجه به اینکه شبیه سازی مدل ما بر اساس حرکت یک اتومبیل انجام می‌شود لذا اغلب داده‌های سنسور با مقدار بیش از ۱.۲۱۴ هرتز اغتشاش محسوب می‌شود؛ فیلتر پایین گذر با مشخصات جدول ۱ طراحی شده است [۲۰].

6. finite impulse response

$$W = [w_{c1} \ w_{c2} \ w_{c3}] \quad (۱۹-الف)$$

$$vec(W) \triangleq \begin{bmatrix} w_{c1} \\ w_{c2} \\ w_{c3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 1} \quad (۱۹-ب)$$

ماتریس‌های  $W_k, V_k$  نویز سفید و با توزیع گوسی و میانگین صفر در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین در الگوریتم فیلتر کالمن، فرم ماتریس‌های کواریانس خطا به صورت  $Q_k \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$  و همچنین  $R_k \in \mathbb{R}^{pq \times pq}$  در نظر گرفته می‌شود. اما برای تبدیل ضرایب متغیرهای حالت از مدل فیلتر کالمن ماتریسی به حالت برداری از ضرب کرونگر استفاده می‌شود که اثبات آن در مرجع [۲۱] ذکر شده است. حال با تعریف ضرب کرونگر اگر ماتریس  $X$  از دو طرف با یک ماتریس ضرب شده باشد رابطه‌ی ۲۰ برای آن برقرار است [۲۱].

$$vec(AXB) = (B^T \otimes A)vec(X) \quad (۲۰)$$

که در الگوریتم فیلتر کالمن برداری تخمین بردار حالت  $x$  به ازای زمان  $k$  به صورت رابطه‌ی ۲۱ مشخص می‌شود [۲۱].

$$\hat{x}_{k+1/k} = \Phi_k \cdot \hat{x}_{k/k} \quad (۲۱)$$

برای بدست آوردن ماتریس‌های اندازه‌گیری در فیلتر کالمن روند الگوریتم مشابه تخمین فیلتر کالمن حالت معمولی (برداری) در فضای حالت است. لذا با توجه به تعریف عملگر  $Vec$  و نیز ضرب کرونگر، رابطه‌ی ۲۲ بازنویسی می‌شود [۲۱].

$$Vec(\tilde{Y}_{k+1}) = Vec(Y_{k+1}) - \left\{ \sum_{S=1}^v [(G_{k+1}^S)^T \otimes H_{k+1}^S] \right\} \times Vec(\tilde{Y}_{k+1}) \quad (۲۲)$$

همچنین برای معادل سازی بین فیلتر کالمن ماتریسی و برداری می‌توان رابطه‌ی قبل را به شکل رابطه‌ی زیر بازنویسی کرد [۲۱].

$$\tilde{Y}_{k+1} = Y_{k+1} - \mathcal{H}_{k+1} \hat{x}_{k+1/k} \quad (۲۳)$$

گین فیلتر کالمن و به‌روزرسانی آن در حالت فیلتر کالمن ماتریسی با استفاده از ضرب کرونگر قابل بازنویسی است بر همین اساس با توجه کواریانس نویز اندازه‌گیری  $R_k = cov\{V_k\}$  رابطه‌ی ۲۴ تعریف می‌شود [۲۱].

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \mathcal{H}_{k+1} P_{k+1/k} \mathcal{H}_{k+1}^T + R_{k+1} \\ K_{k+1} &= P_{k+1/k} \mathcal{H}_{k+1}^T S_{k+1}^{-1} \end{aligned} \quad (۲۴)$$

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} \tilde{Y}_{k+1}$$

با در اختیار داشتن مقدار اولیه ماتریس فضای حالت و نیز ماتریس کواریانس خطا و استفاده از روابط ۲۱ تا ۲۴ می‌توان درایه‌های ماتریس فضای حالت را تخمین زد.

### طراحی فیلتر کالمن ماتریسی برای فرم ماتریس تبدیل

تخمین ماتریس تبدیل (کسینوس هادی) نیازمند شرایط ویژه ای است یعنی نمی‌توان هر ماتریسی را به عنوان ماتریس تخمین در نظر گرفت از این رو باید به سراغ ارائه‌ی مدل معادلات دیفرانسیل مبتنی

در واقع روند کار به این شکل است که پارامترهای ماتریس فوق با استفاده از فیلتر کالمن شناسایی می‌شود. لذا باید یک فضای حالت شامل ماتریس رابطه‌ی ۱۳ ایجاد کرد و آن را در الگوریتم فیلتر کالمن قرار داد که به صورت رابطه‌ی ۱۴ نمایش داده می‌شود [۲۰]. در این مدل پارامترهای مجهول جهت شناسایی در فیلتر کالمن  $\gamma_K$  و ماتریس اندازه‌گیری  $\bar{\beta}_{K+1}$  خواهند بود.

$$\begin{cases} \gamma_{K+1} = \gamma_K \\ \bar{\beta}_{K+1} = \gamma_{K+1} \cdot M_{K+1} + \partial_{K+1} \end{cases} \quad (۱۴)$$

ماتریس  $(M)$  به صورت زیر تعریف می‌شود که با زمان تغییر کرده و  $\partial_{K+1}$  شامل خطا و نویز اندازه‌گیری است. حال سعی داریم تا مدل ارائه شده، در رابطه‌ی ۱۴ را در فرم ماتریسی فیلتر کالمن قرار داده که به صورت رابطه‌ی ۱۶ ارائه می‌شود.

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\omega_{ie} \cdot t) & -\sin(\omega_{ie} \cdot t) & 0 \\ \sin(\omega_{ie} \cdot t) & \cos(\omega_{ie} \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

$$\begin{cases} x_{K+1} = \varphi \cdot x_K + \omega_K \\ z_{K+1} = H \cdot x_{K+1} + v_{K+1} \end{cases} \quad (۱۶)$$

### معرفی فیلتر کالمن ماتریسی

در این بخش تخمین کلی فیلتر کالمن زمان گسسته برای ماتریسی از متغیرهای حالت معرفی می‌شود. الگوریتمی که در این بخش ارائه می‌گردد تخمینی از یک ماتریس حالت و شناسایی درایه‌های آن بر اساس کواریانس خطای بردارهای اندازه‌گیری است که در مراجع به طور کامل اشاره شده است. این مقاله به کمک الگوریتم فیلتر کالمن ماتریسی توجیه اولیه سامانه‌های ناوبری را بهبود می‌بخشد [۲۱]. در ابتدا فرم فضای حالت ماتریسی به صورت رابطه‌ی ۱۷ تعریف می‌شود.

$$X_{k+1} = \sum_{r=1}^{\mu} \Phi_k^r \times X_k \times \Psi_k^r + W_k \quad (۱۷)$$

$$Y_{k+1} = \sum_{S=1}^v H_{k+1}^S \times X_{k+1} \times G_{k+1}^S + V_{k+1} \quad (۱۸)$$

که در آن  $X_k$  یک ماتریس فضای حالت از مرتبه‌ی  $R^{m \times n}$  خواهد بود و همچنین  $\Phi_k^r$  و  $\Psi_k^r$  به ترتیب عضو  $R^{n \times n}$  و  $R^{m \times m}$  هستند و ماتریس  $W_k$  نویز سفید بوده که اندازه سطر و ستون آن  $R^{m \times n}$  است. همچنین به طریق مشابه ماتریس اندازه‌گیری در فضای حالت ماتریسی به صورت رابطه‌ی ۱۸ تعریف می‌گردد [۲۱].

در معادله بالا  $Y_{k+1}$  ماتریس اندازه‌گیری از فضای ماتریسی  $R^{p \times q}$  خواهد بود ماتریس‌های  $G_{k+1}^S$  و  $H_{k+1}^S$  به ترتیب عضو  $R^{p \times m}$  و  $R^{n \times q}$  هستند و ماتریس  $V_{k+1}$  ماتریس نویز اندازه‌گیری است. همچنین برای معادل‌سازی حالت فیلتر کالمن ماتریسی و برداری و مقایسه این دو مدل، توسط عملگری با نام  $(Vec)$  انجام که به صورت رابطه‌ی ۱۹-الف و ب تعریف می‌شود.

به دستگاه مختصات ناوبری را شناسایی کرد که در ادامه با مقایسه‌ی موردی از یک مقاله نشان داده می‌شود که فیلتر کالمن ماتریسی می‌تواند فرآیند توجیه اولیه را به راحتی بهبود بخشد.

## شبیه سازی فیلتر کالمن ماتریسی برای توجیه اولیه سامانه ناوبری اینرسی

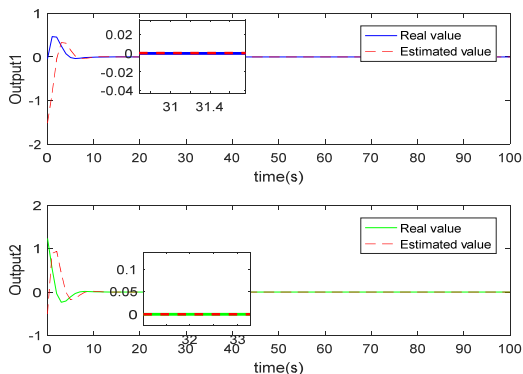
این بخش به مدل سازی و شبیه سازی فرآیند توجیه اولیه برای سامانه‌های ناوبری اینرسی و اعتبارسنجی الگوریتم فیلتر کالمن ماتریسی برای بهبود فرآیند توجیه اولیه می‌پردازد. بر همین اساس در بخش اول شبیه سازی، یک مدل ساده از الگوریتم فیلتر کالمن ماتریسی بررسی می‌شود تا صحت و دقت این الگوریتم، بدست آید. همچنین در بخش دوم شبیه سازی‌ها، سیستم ناوبری اینرسی در یک جسم متحرک آزمایش می‌شود و با استفاده از خروجی‌های سنسور شتاب‌سنج و ژيروسکوپ‌ها، فرآیند توجیه اولیه به کمک فیلتر کالمن ماتریسی بررسی و نتایج آن با تست یک سامانه‌ی ناوبری اینرسی در مرجع [۲۰] مقایسه می‌شود.

### شبیه سازی فیلتر کالمن ماتریسی برای یک مثال ساده

در این قسمت اجزای ماتریس دو در دو تخمین و شناسایی می‌شود. این مثال با استفاده از الگوریتم ارائه شده‌ی در مقاله، یک روند مشابه شناسایی فیلتر کالمن دارد اما برای حالت ماتریسی اجرا می‌شود. مشخصات این سیستم به صورت رابطه ۳۰ در دسترس است.

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} X_k \begin{bmatrix} 0.8 & -1 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} + W_k \\ Y_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X_{k+1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + V_{k+1} \\ \hat{X}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; P_0 = 0.2I_4; Q_k = 10^{-2}I_4; R_k = I_4 \end{aligned} \quad (30)$$

در رابطه‌ی ۳۰ معادلات دیفرانسیل سیستم ماتریسی ۲ در ۲ مشخص شده است که در آن مقدار اولیه تخمین ماتریس و نیز کواریانس خطاها و نویزهای سیستم تعیین می‌شوند. پس از اعمال شبیه سازی در نرم افزار متلب نتایج به صورت شکل ۱ مشخص شده است.



شکل ۱ - شناسایی درایه های ماتریس حالت با فیلتر کالمن

بر ویژگی‌های ماتریس دوران رفت و آن را در فرم فیلتر کالمن ماتریسی حل کرد. بر همین اساس فرض کنید که  $D_K$  یک ماتریس ۳ در ۳ از دستگاه مختصات بدنی جسم متحرک به دستگاه مختصات ناوبری باشد که قرار است با فیلتر کالمن ماتریسی شناسایی شود. از طرفی اگر سرعت زاویه‌ای بردارهای اندازه‌گیری بدنی را در نظر بگیریم ماتریس  $D_K$  با زمان به صورت رابطه ۲۶ تغییر می‌کند که به اثبات آن در مرجع [۲۱] اشاره شده است.

$$D_{K+1} = \Phi_K D_K + W_K \quad (25)$$

در رابطه‌ی ۲۵،  $W_K$  همان ماتریس نویز و اغتشاش است و ماتریس  $\Phi_K$  به صورت رابطه‌ی ۲۶ تعریف می‌شود که در آن، ماتریس اومگای تی  $[\omega_t \times]$  همان ماتریس شبهه متقارن حاصل از خروجی‌های دوران ژيروسکوپ‌ها در دستگاه بدنی است.

$$\Phi_K = \exp \left\{ \int_{t_K}^{t_{K+1}} -[\omega_t \times] dt \right\} \quad (26)$$

از طرفی نیز ماتریس اندازه‌گیری با توجه به تعداد بردارهای موجود تخمین زده می‌شود بر همین اساس با توجه به تعداد بردارهای اندازه‌گیری در دستگاه بدنی، رابطه‌ی ۲۷ برقرار است [۲۱].

$$b_K = D_K r_K C_K + V_K \quad (27)$$

در رابطه‌ی فوق  $r_K$  بردارهای اندازه‌گیری در دستگاه بدنی هستند که ابعاد آن ۳ در N در نظر گرفته می‌شود زیرا بستگی به میزان بردارهای مشاهده شده (N) دارد. این بردارهای اندازه‌گیری شامل خروجی‌های شتاب‌سنج در جهت محورهای  $Z, Y, X$  دستگاه مختصات بدنی جسم متحرک هستند. از طرفی نیز بردار  $V_K$  همان نویزهای اندازه‌گیری است که به مدل ما اضافه شده است. همچنین  $C_K$  همواره برابر ماتریس همانی می‌باشد که در قسمت‌های بعدی برای برقراری شرط تخمین ماتریس تبدیل، مقدار آن تغییر می‌کند. مهم ترین نکته در تخمین ماتریس تبدیل مختصات برقراری شرط ۲۸ است که به آن اشاره می‌گردد. این شرط برای متعامد بودن ماتریس‌های تبدیل بین دستگاه‌های مختصات پیش‌بینی شده است که یکی از ایده‌های این مقاله استفاده از رابطه‌ی ۲۹ و برقراری شرط ۲۸ در روند اجرای الگوریتم است.

$$D_K^T D_K = I_3 \quad (28)$$

برای حل این مشکل در شبیه سازی‌ها ضریب ماتریس اندازه‌گیری  $C_K$  که همواره برابر ماتریس همانی است به منظور برقراری شرط ماتریس تبدیل یعنی رابطه‌ی ۲۷، به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$C_K = \left( \frac{5}{2} \right) I_3 - \left( \frac{3}{2} \right) \bar{D}_K^T \bar{D}_K \quad (29)$$

با استفاده از روابط بدیهی ۲۵ تا ۲۹ می‌توان توسط فیلتر کالمن ماتریسی، مستقیماً درایه‌های ماتریس تبدیل از دستگاه بدنی

### اعمال فیلتر کالمن ماتریسی در ناوبری خودرو

در این بخش از شبیه‌سازی با حل توجیه اولیه یک سامانه ناوبری اینرسی با مسئله‌ی وهبا و استفاده از فیلتر پایین گذر برای حذف نویز و نیز استفاده از فیلتر کالمن ماتریسی به شناسایی پارامترهای ماتریس تبدیل و بهبود روند توجیه اولیه یک خودرو منجر می‌شود. در شکل ۲ سیستم ناوبری اینرسی برای تست توجیه اولیه با فیلتر کالمن ماتریسی مشخص شده است.

همان طور که در بخش ۱ یعنی استفاده از فیلترهای دیجیتال اشاره شد، نویز برداری توسط فیلتر پایین گذر با مشخصات جدول ۱ موجب القای نویز جدید به نتایج بدست آمده در توجیه اولیه می‌شود. از طرفی برای حل این مشکل از شناسایی پارامترهای ماتریس تبدیل به کمک فیلتر کالمن ماتریسی استفاده می‌شود. در این مثال دستگاه ناوبری در یک اتومبیل قرار گرفته است که زوایای رول، پیچ و هدینگ آن طبق رابطه‌ی زیر در حال تغییر است که پارامترهای آن به صورت رابطه‌ی ۳۱ در حال تغییر با زمان است [۲۰].

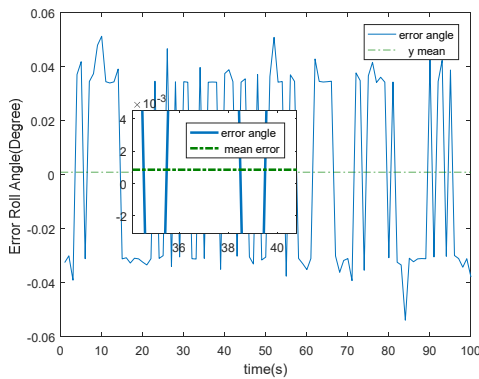
$$\begin{aligned} \theta &= 12 \sin(2\pi(0.125)t) \\ \psi &= 6 \sin(2\pi(0.15)t) \end{aligned} \quad (31)$$

همچنین تغییرات نویز ثابت و تصادفی ژيروسکوپ و شتاب‌سنج‌ها به صورت جدول ۲ قابل مشاهده است.

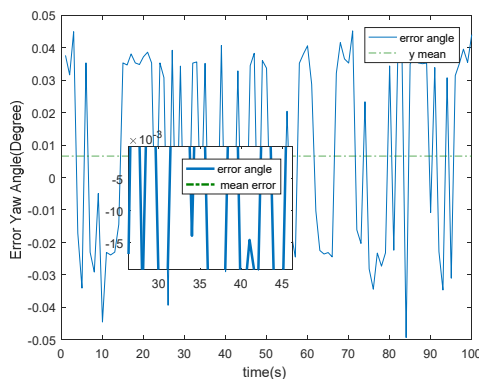
جدول ۲- مشخصات نویز سنسورهای اینرسی در خودرو

	نویز ژيروسکوپ (درجه بر ساعت)		نویز شتاب‌سنج (میکروجی)	
	نویز ثابت	نویز تصادفی	نویز ثابت	نویز تصادفی
محور X	۰.۰۱	۰.۰۱	۵۰.۰	۵۰.۰
محور Y	۰.۰۱	۰.۰۱	۵۰.۰	۵۰.۰
محور Z	۰.۰۱	۰.۰۱	۵۰.۰	۵۰.۰

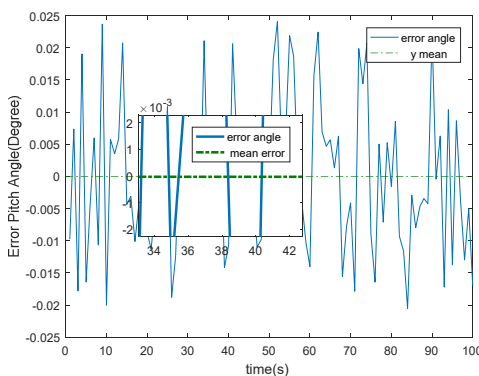
پس از شبیه‌سازی و استخراج ماتریس تبدیل مختصات زوایای واقعی حرکت را با استفاده از این ماتریس بدست می‌آید البته این زوایا تنها در زمان اولیه یعنی  $t=0$  محاسبه شده است اما برای افزایش دقت، حل مسئله وهبا با حل کیو داونپورت<sup>۷</sup> چندین مرتبه تکرار شده است که نتایج به دست آمده به صورت اشکال ۲، ۳ و ۴ مشخص می‌شود. در این شبیه‌سازی‌ها میزان خطای زوایای اوپلر تخمینی با حل توجیه اولیه و زوایای اوپلر حقیقی مقایسه شده است.



شکل ۲- مقایسه زاویه غلت در فرایند توجیه اولیه و مقدار واقعی



شکل ۳- مقایسه زاویه فراز در فرایند توجیه اولیه و مقداردهی

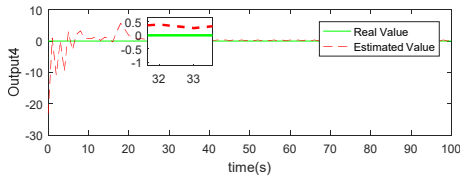
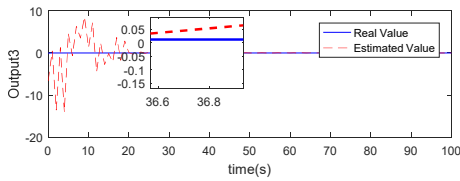


شکل ۴- مقایسه زاویه سمت در فرایند توجیه اولیه و مقدار واقعی

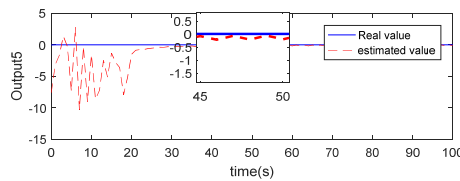
با توجه به آن که خطای زوایای بدست آمده در حد چند صدم درجه است اما مقدار ماکزیمم و مینیمم خطای بدست آمده نشان از دقت کم اندازه‌گیری در برخی از زمان‌ها دارد که به علت وجود نویز های اندازه‌گیری توسط شتاب سنج و ژيروسکوپ است. لذا برای برطرف کردن مشکل خطا، به دنبال استفاده از فیلتر دیجیتال پایین گذر می‌رویم که پارامترهای آن در جدول ۱ مشخص شده است پس از نویز برداری با استفاده از فیلتر کالمن به شناسایی مجدد درایه‌های ماتریس تبدیل (کسینوس هادی) می‌پردازیم و نتایج بدست آمده پس از فرایند توجیه اولیه برای تخمین زوایای اوپلر خودرو تکرار می‌شوند که نشان از بهبود خطای زوایای اوپلر دارد.

7. Davenport, s Q method

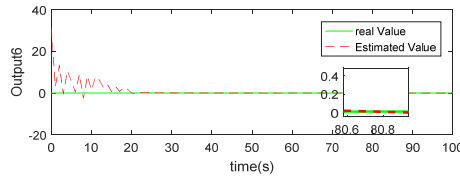
شکل‌های ۵ و ۶ میزان خطای اندازه‌گیری زوایای اویلر بدون استفاده از فیلتر کالمن و فرآیند نویزبرداری و خطای اندازه‌گیری زوایای اویلر با استفاده از فیلتر کالمن و فرآیند نویزبرداری را نشان می‌دهد.



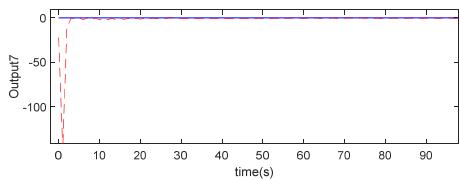
شکل ۸- شناسایی درایه‌های سوم و چهارم ماتریس تبدیل با فیلتر کالمن



شکل ۹- شناسایی درایه‌های پنجم و ششم ماتریس تبدیل با فیلتر کالمن

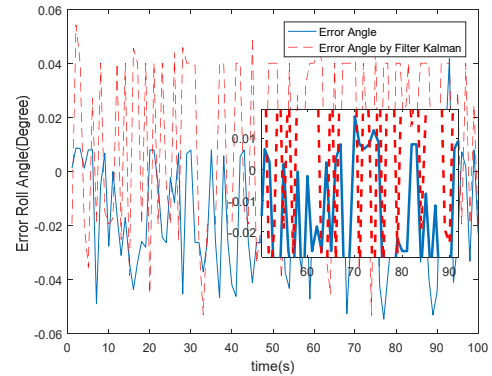


شکل ۱۰- شناسایی درایه‌های هفتم و هشتم ماتریس تبدیل با فیلتر کالمن

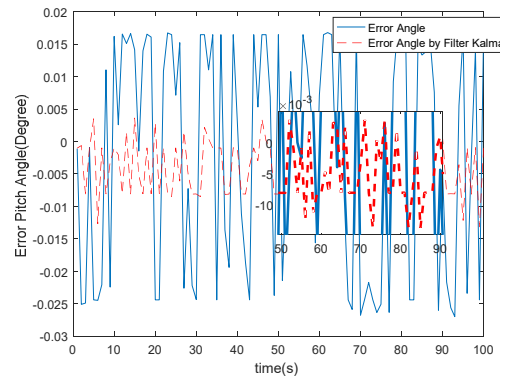


شکل ۱۱- شناسایی درایه‌های نهم و دهم ماتریس تبدیل با فیلتر کالمن

این در حالی است که با مقایسه تخمین فیلتر کالمن ارائه شده در مرجع [۲۰] می‌توان به سادگی مشاهده کرد که تخمین درایه‌های ماتریس تبدیل از وضعیت بهتری برخوردار هستند برای درک بهتر شکل ۱۰ مقادیر تخمینی فیلتر کالمن برای ماتریس تبدیل را نشان می‌دهد که پس از ۶۰۰ ثانیه برخی از درایه‌های ماتریس به خوبی شناسایی نشده‌اند و با نویز بسیار همراه هستند.

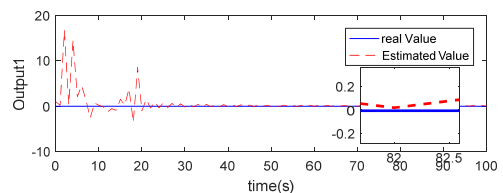


شکل ۵- مقایسه خطای زاویه غلت با استفاده از فیلتر کالمن

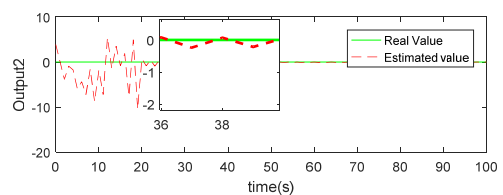


شکل ۶- مقایسه خطای زاویه فراز با استفاده از فیلتر کالمن

شناسایی پارامترهای ماتریس تبدیل توسط فیلتر کالمن ماتریسی در مدت ۱۰۰ ثانیه شبیه‌سازی شده است که نتایج آن در شکل‌های ۷ تا ۱۱ مشخص است. علت نویز سیگنال‌های شناسایی برای میزان کواریانس، خطای اندازه‌گیری است که اغلب درایه‌های ماتریس پس از ۲۰ ثانیه به مقدار حقیقی میرا می‌شوند.



شکل ۷- شناسایی درایه‌های اول و دوم ماتریس تبدیل با فیلتر کالمن

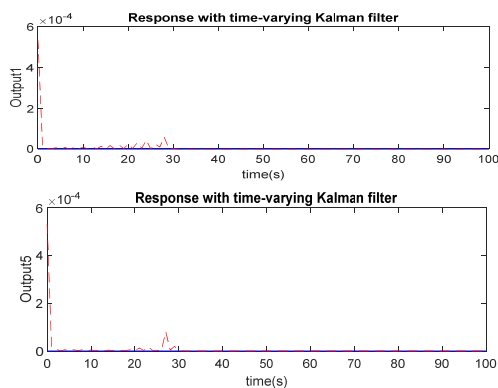




در جدول ۳ مشخص است که میانگین خطای زاویه‌ی غلت در سامانه ناوبری خودرو ۰.۰۰۳ و در زاویه‌ی فراز حدود ۰.۰۰۴ و در زاویه‌ی سمت نیز حدود ۰.۲۴۱۶ کاهش یافته است.

جدول ۳- مقایسه‌ی خطای زوایای اویلر با مرجع [۲۰]

زوایای اویلر	میانگین خطای در مدت ۱۰۰ ثانیه در مرجع [۲۰]	میانگین خطا در مدت ۱۰۰ ثانیه
زاویه غلت	۰.۰۱۷۶	۰.۰۱۴۰۷
زاویه فراز	-۰.۰۰۹۹	-۰.۰۰۵۵۸۹
زاویه سمت	۰.۲۴۴۵	۰.۰۰۲۸۲۱



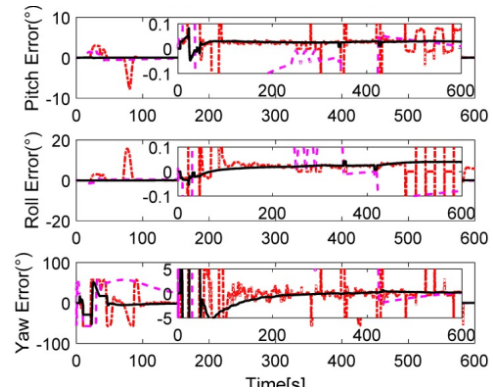
شکل ۱۴- تغییرات کواریانس خطا برای درایه‌های اول و پنجم ماتریس

همچنین تغییرات ماتریس کواریانس خطا برای درایه‌های اندازه‌گیری شده در فیلتر کالمن ماتریسی به شرح زیر است که آن پس از گذشت چند ثانیه به مقدار صفر میل می‌کند.

### نتیجه‌گیری

همان‌طور که پیش‌بینی شد، استفاده از فیلترهای دیجیتال برای حذف نویز شتاب‌سنج‌ها و ژيروسکوپ‌ها نه تنها موجب بهبود توجیه اولیه نمی‌شود بلکه ممکن است نویزها و خطاهای اندازه‌گیری جدیدی را اضافه نماید.

البته انتخاب فیلتر مناسب برای هر مورد شبیه‌سازی اهمیت دارد که باید بر اساس حدود نویزهای خطای اندازه‌گیری باشد. لذا برای حل مشکل حذف نویز روش شناسایی مدل مرجع با استفاده از فیلتر کالمن به کار گرفته شد تا مقادیر واقعی ماتریس تبدیل تخمین زده شود از این رو طراحی الگوریتم فیلتر کالمن برای ماتریس ۳ در ۳ محقق شد. سپس با استفاده از فیلتر کالمن ماتریسی درایه‌های ماتریس تبدیل را شناسایی و پس از تکرار چندباره‌ی نتایج شبیه‌سازی مشخص شد که این فیلتر می‌تواند اثر مثبتی در کاهش خطای تخمین زوایای اویلر در زمان اولیه داشته باشد. با توجه به مقایسه انجام شده با مورد مطالعه یعنی فرآیند توجیه اولیه در سامانه اینرسی خودرو و استفاده از داده‌ها و اطلاعات این مدل، می‌توان نتایج بهبود یافته را در تخمین خطای زوایای اویلر به وضوح مشاهده کرد.

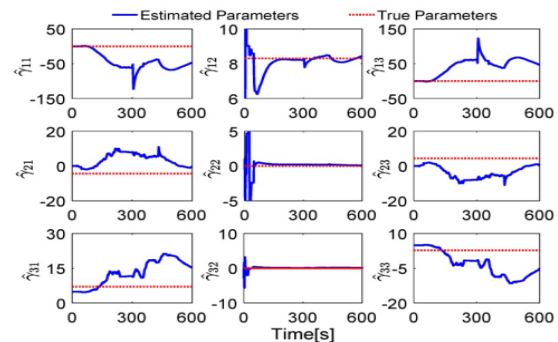


شکل ۱۲- شناسایی درایه‌های ماتریس تبدیل با فیلتر کالمن در مرجع [۲۰]

همان‌طور که در مقایسه زوایای اویلر قبل و پس از استفاده از فیلتر کالمن ماتریسی مشخص است خطای محاسبه زوایای اویلر با مقدار واقعی کاهش یافته است. همچنین برای سنجش صحت فیلتر کالمن ماتریسی، ماتریس تخمینی را در شرط متعامد بودن ماتریس‌های تبدیل قرار می‌دهیم یعنی معکوس ماتریس تخمینی تبدیل توسط فیلتر کالمن را در خود این ماتریس ضرب کرده تا برابر ماتریس همانی شود و صحت و دقت ماتریس تبدیل تخمین زده شده توسط فیلتر کالمن ماتریسی سنجیده شود. این مطلب در رابطه‌ی ۳۲ قابل مشاهده است.

$$\begin{bmatrix} 0.777 & 2.813 & -27.03 \\ -0.114 & -0.345 & 3.267 \\ 0.178 & 0.589 & -5.964 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0.777 & 2.813 & -27.03 \\ -0.114 & -0.345 & 3.267 \\ 0.178 & 0.589 & -5.964 \end{bmatrix} = I \quad (32)$$

برای مقایسه‌ی بهبود فرآیند توجیه اولیه با مورد خاص مطالعه شده<sup>۱</sup> خطای زوایای اویلر در مدت ۶۰۰ ثانیه فرآیند توجیه اولیه در شکل ۱۲ مشخص است. با توجه به مقدار میانگین خطا برای تخمین زوایای اویلر و مقایسه‌ی آن می‌توان نتیجه گرفت که میانگین خطای زوایای اویلر با روش فیلتر کالمن ماتریسی کاهش یافته است. همچنین جدول ۳ مقدار میانگین خطای زوایای اویلر در مرجع [۲۰] با روش پیشنهادی در این مقاله را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳- مقایسه خطای زوایای اویلر در مرجع [۲۰]

## مراجع

- [12] Shen C., Bai Z., Cao H., Xu K., Wang C., Zhang H., Wang D., Tang J. and Liu J. "Optical flow sensor/INS/magnetometer integrated navigation system for MAV in GPS-denied environment," *Journal of Sensors*, Vol. 2016.
- [13] Titterton, D. *Strapdown Inertial Navigation Technology*, AIAA, UK, 2004.
- [14] Xu X., Xu X., Zhang T., Li Y., Tong J., "A Kalman Filter for SINS Self-Alignment Based on Vector Observation. Sensors," Vol. 17, No. 2, 2017, p.264.
- [15] Li J., Xu J., Chang L. and Zha F., "An Improved Optimal Method for Initial Alignment," *J. Navig.* 2014; Vol. 67, Issue 4, pp.727-736.
- [16] He, H., Xu, J., Li, J., Li, F. and Zha, F., "Improved fast backtracking alignment approach for strapdown inertial navigation system," *J. Chin. Inert. Technol.* Vol. 23, 2015, pp. 179-183.
- [17] Lü, S., Xie, L., Chen, J. "New techniques for initial alignment of strapdown inertial navigation system," *J. Frankl. Inst.*, Vol. 346, 2009, pp. 1021-1037.
- [18] Shen C., Cao H., Li J., Tang J., Zhang X., Shi Y., Yang W., Liu J. Hybrid, "de-noising approach for fiber optic gyroscopes combining improved empirical mode decomposition and forward linear prediction algorithms," *Rev. Sci. Instrum.*, 87, 2016, 33305.
- [19] Li, Qian, Yueyang Ben, and Feng Sun., "A novel algorithm for marine strapdown gyrocompass based on digital filter." *Measurement*, Vol. 46, No.1, 2013, PP. 563-571.
- [20] Xiang, Xu, Xiaosu, Xu, Tao, Zhang, Yao, Li, and Zhicheng, Wang, "A Coarse Alignment Method Based on Digital Filters and Reconstructed Observation Vectors," *Sensors (Basel). Apr; Published online*, 2017.
- [21] Choukroun, D., Member, IEEE, Weiss, H., Member, IEEE, Bar-Itzhack, Fellow, IEEE, Oshman, Senior Member, IEEE Technion Israel Institute of Technology "Kalman Filtering for Matrix Estimation", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 42, No. 1, 2006.
- [1] Kalman, R.E., "A new approach to line filtering and prediction problems". *Transactions on ASME, Journal of Basic Engineering*, ser. D, Vol. 82, Issue 1, Mar. 1960, pp. 35-45.
- [2] Kalman, R.E. and Bucy, R.S., "New results in linear filtering and prediction theory," *Transactions on ASME, Journal of Basic Engineering*, Vol. 83, Issue 1, 1961, pp. 95-108.
- [3] Wertz, J.R. (Ed.), "Spacecraft Attitude Determination and Control," Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel, 1984.
- [4] Bar-Itzhack, I.Y. and Reiner, J., "Recursive attitude determination from vector observations," *DCM identification. Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 1, 1984, pp. 51-56.
- [5] Athans, M. and Tse, E., "A direct derivation of the optimal linear filter using the maximum principle," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 12, Issue 6, 1967, pp. 690-698.
- [6] Athans, M., "The matrix maximum principle," *Information and Control*, Vol. 11, 1967, pp. 592-606.
- [7] Baruch, M. and Bar-Itzhack, I.Y., "Optimal weighted orthogonalization of measured modes," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, 1978, pp. 346-351.
- [8] Golub, G.H. and Van Loan, C.F., "An analysis of the total least-squares problem". *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 17, 1980, pp. 883-893.
- [9] Van Huffel, S. and Vandewalle, J., *The total least squares problem: Computational aspects and analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1991.
- [10] Choukroun, D., Weiss, H., Bar-Itzhack, I.Y., and Oshman, Y., "Kalman filtering for matrix estimation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 42, No. 1, 2006, pp. 147-159.
- [11] Rogers, R.M. *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems*, Vol. 1, AIAA; Reston, VA, USA: 2003.