

مقاله علمی - پژوهشی

# ارائه یک ساختار واحد سنجش اینرسی، با قابلیت سنجش دوران بدون استفاده از ژيروسکوپ

محمدحسین شفیعی<sup>۱\*</sup>، میثم جوکاردهویی<sup>۲</sup> و بهروز صفری نژادیان<sup>۳</sup>

۱، ۲ و ۳- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

\*shafiei@sutec.ac.ir

در این مقاله ساختاری جدید برای یک واحد سنجش اینرسی ارائه می‌گردد که شامل سه دیسک دوار حول محورهای اصلی دستگاه بدنی است و روی هر دیسک یک شتاب‌سنج نصب می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود که ساختار پیشنهادی قابلیت کاهش اثر پارامترهای مزاحم شتاب‌سنجها مثل بایاس ثابت و متغیر و همچنین تضعیف نویز را دارد. به علاوه، در این ساختار می‌توان شتاب دوران وسیله را بدون استفاده از ژيروسکوپ اندازه‌گیری کرد. با توجه به ساختار دورانی این سامانه، نیاز است تا از شتاب‌سنجها به صورت مداوم نمونه‌برداری شود. جهت استفاده از اطلاعات نمونه برداری شده، باید محاسبات مربوطه در حالت گسسته-زمان انجام شود. در این مقاله روشی جهت ترکیب این اطلاعات ارائه گردیده و با بررسی معادلات مربوطه، عملکرد موفق این روش در کاهش اثر سه پارامتر بایاس ثابت و بایاس متغیر شتاب‌سنجها و نویز اندازه‌گیری نشان داده می‌شود. همچنین کارایی روش پیشنهادی در اندازه‌گیری شتاب دوران وسیله توسط شبیه‌سازی عددی نشان داده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** سامانه‌های ناوبری اینرسی، واحد سنجش اینرسی، واحد سنجش اینرسی دوار، واحد سنجش اینرسی بدون ژيروسکوپ

## علائم و اختصارات

$t$	زمان		
$T$	زمان نمونه‌برداری		
$W_Z$	نویز اندازه‌گیری شتاب‌سنج دوار حول محور $Z$ در دستگاه بدنی	$A$	بردار شتاب وارد شده به وسیله شتاب وارد شده به وسیله در راستای $X$ در دستگاه بدنی
$\omega$	سرعت دوران دیسکها بر حسب رادیان بر ثانیه	$A_X$	خروجی شتاب‌سنج دوار حول محور $Z$ در دستگاه بدنی
$\delta(t)$	تابع ضربه	$a_Z$	بایاس ثابت شتاب‌سنج دوار حول محور $Z$ در دستگاه بدنی
Inertial Navigation System (INS)	سیستم ناوبری اینرسی	$b_Z$	شتاب جانب مرکز وارد شده به شتاب‌سنج دوار حول محور $Z$
Inertial Measurement Unit (IMU)	واحد اندازه‌گیری اینرسی	$b^r_Z$	بایاس متغیر شتاب‌سنج دوار حول محور $Z$ در دستگاه بدنی
Gyro Free (GF)	ژيروسکوپ آزاد	$d_Z$	ماتریس دوران حول محور $Z$
Rotary Inertial Navigation Systems (RINS)	سیستم‌های ناوبری چرخشی	$R_Z$	

## مقدمه

ناوبری اینرسی را می‌توان مهم‌ترین روش ناوبری مستقل از اطلاعات منابع اندازه‌گیری خارجی دانست. به همین دلیل از این

۱. دانشیار (نویسنده مخاطب)

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

۳. استاد

تحلیل روابط، میزان کاهش اثر خطاهای بایاس، دریافت و نویز بررسی می‌شود. همچنین، در بخش اندازه‌گیری دوران، شیوه تخمین دوران وسیله بدون استفاده از ژيروسکوپ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت، کارایی ساختار پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرد.

## ساختارهای مشابه

تاکنون روش‌های متعددی بر مبنای RINS ارائه شده است که اساس کار همه آن‌ها دوران واحد سنجش اینرسی است. به طور مثال در [۹] کل واحد سنجش اینرسی حول محور Z در دستگاه بدنی دوران دارد، این عملکرد باعث کالیبره شدن شتاب‌سنج‌های IMU در راستای X و Y در دستگاه بدنی می‌شود. بنابراین، روش این مرجع توانایی کالیبره کردن شتاب‌سنج‌ها در هر سه راستا را ندارد.

از طرفی در [۱۰] دوران کل IMU حول دو محور Z و Y در ۱۰ مرحله و به صورت پریودیک پیشنهاد شده است. به صورت مشابه در [۱۱] نیز IMU طی سه مرحله دوران عمل کالیبراسون خودکار شتاب‌سنج‌های هر سه راستا را انجام می‌دهد. اما این مراحل به زمان زیادی نیاز دارند و از این رو توانایی اندازه‌گیری شتاب با سرعت تغییرات زیاد را ندارند. این در حالی است که در روش ارائه شده در این مقاله به دلیل دوران هم زمان هر سه شتاب‌سنج، در هر لحظه شتاب وارد شده به وسیله در هر جهت توسط دو شتاب‌سنج اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین روش این مقاله توانایی اندازه‌گیری شتاب با تغییرات سریع را دارد.

از طرف دیگر، جهت اندازه‌گیری سرعت دوران یک وسیله بدون استفاده از ژيروسکوپ روش‌هایی معرفی شده‌اند. این روش‌ها که به GF مشهور هستند، سرعت دوران وسیله را با استفاده از ترکیب اطلاعات دریافتی از شتاب‌سنج‌ها محاسبه می‌نمایند. به طور مثال در [۱۲] از ترکیب ۹ شتاب‌سنج و در [۱۳] با روشی جدید از ۶ شتاب‌سنج جهت اندازه‌گیری سرعت دوران استفاده شده است. اما روش این مقاله برای همین منظور تنها به سه شتاب‌سنج نیاز دارد.

نهایتاً، اگرچه تاکنون روش‌هایی جهت کالیبراسون خودکار به وسیله RINS و نیز روش‌هایی جهت اندازه‌گیری دوران وسیله با تکنیک GF ارائه شده‌اند، اما در این مقاله برای اولین بار ترکیب این دو تکنیک ارائه می‌شود. به صورتی که مزیت‌های هر دو روش از جمله کالیبراسون خودکار، هزینه ساخت پایین و عدم نیاز به ژيروسکوپ را دارد.

## تعریف مسئله

خروجی یک شتاب‌سنج را می‌توان به شکل زیر مدل کرد [۱۴]:

$$a_{out}(t) = a_I(t) + b + d(t) + w(t) \quad (1)$$

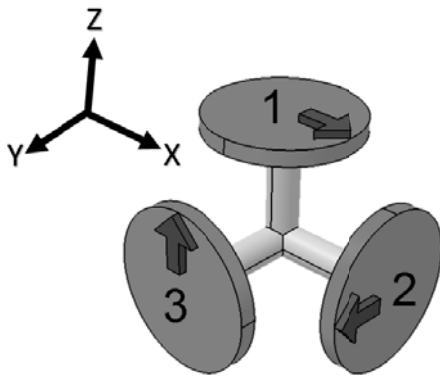
نوع ناوبری عموماً در شرایطی که امکان ارتباط بین وسیله با این منابع وجود ندارد، استفاده می‌شود [۱]. مشکل اساسی در این نوع ناوبری، خطای افزاینده آن در بازه‌های زمانی طولانی مدت است [۲]. این مشکل باعث کاهش کاربردهای این نوع ناوبری (به طور مستقل) شده است؛ به صورتی که تنها در بازه زمانی کوتاه مورد استفاده قرار می‌گیرد [۳].

تاکنون تلاش‌های زیادی جهت رفع مشکل خطای افزاینده در ناوبری اینرسی انجام شده است. برخی از این تحقیقات انجام شده، بر شیوه اتصال واحد سنجش اینرسی به بدنه وسیله‌ی متحرک متمرکز شده‌اند. نخستین روش اتصال واحد سنجش اینرسی به بدنه وسیله متحرک، روش صفحه پایدار<sup>۴</sup> بوده است [۴]. در این روش، سه شتاب‌سنج عمود برهم بر روی یک صفحه مستقل از دوران‌های وسیله قرار دارند. این روش معایب زیادی از جمله عدم کارایی در مقابله با شوک را دارد. برای بهبود مشکلات روش مذکور، روش دیگری که اصطلاحاً متصل به بدنه<sup>۵</sup> نامیده می‌شود، پیشنهاد شده است [۵]. در این روش، سه شتاب‌سنج عمود برهم بدون امکان حرکت نسبت به وسیله متحرک، به بدنه‌ی وسیله متصل شده‌اند. همچنین جهت اندازه‌گیری مقدار دوران وسیله نیز از سه ژيروسکوپ عمود برهم استفاده می‌شود. این شیوه اگرچه مشکلات روش صفحه پایدار را برطرف می‌نماید، اما تأثیر چندانی بر کاهش اثر خطای سنسورها ندارد.

اخیراً روش‌هایی با عنوان خود کالیبراسیون جهت کاهش اثر خطای سنسورهای واحد سنجش اینرسی در تعیین موقعیت وسیله معرفی شده‌اند. این روش‌ها که با عنوان سامانه‌های ناوبری متصل به بدنه با واحد سنجش اینرسی دوار مشهور هستند، از دوران واحد سنجش اینرسی جهت بهبود خطای موقعیت‌یابی استفاده می‌نمایند [۶]. هدف از دوران IMU رؤیت‌پذیر کردن خطای سنسورهاست [۷]. این عمل با افزایش اطلاعات دریافتی از IMU در حال دوران انجام می‌شود. به عنوان نمونه، در [۸] بدین منظور از حالت‌های خاص دوران با عنوان مدلاسیون دوران استفاده شده است.

در این مقاله نخست شیوه‌ای جدید جهت کاهش اثر خطای سنسورهای واحد سنجش اینرسی بر موقعیت‌یابی، در پرنده‌های دارای مداومت پروازی بالا و با تغییرات شتاب سریع ارائه می‌گردد. رویکرد این شیوه تغییر در چیدمان داخلی و نحوه اتصال واحد سنجش اینرسی به بدنه است. ساختار پیشنهادی شامل سه دیسک دوار است، که بر روی هر دیسک یک شتاب‌سنج نصب می‌شود. از آنجا که هر دیسک به صورت مداوم در حال دوران است، نیاز است از هر شتاب‌سنج در زوایای مشخص نمونه‌برداری شود. بدین منظور محاسبات باید به صورت گسسته - زمان انجام می‌شود. سپس با

4. Stable platform  
5. Strap down



شکل ۱- ساختار پیشنهادی مقاله شامل سه دیسک دوار و شتاب‌سنج نصب شده بر روی هر یک از دیسک‌ها

## معادلات دوران واحد سنجش اینرسی

مطابق با شکل ۱، هر شتاب‌سنج حول یک محور وسیله دوران دارد. با فرض یکسان بودن سرعت دوران دیسک‌ها، ماتریس‌های دوران حول محورها بدستگاه بدنی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند [۱۵]:

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_Y = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & 0 & -\sin(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\omega t) & 0 & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ 0 & -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

که در آن  $R_X, R_Y$  و  $R_Z$  به ترتیب ماتریس‌های دوران حول محورهای  $X, Y$  و  $Z$  و همچنین  $\omega$  سرعت دوران هر سه دیسک است. بردار شتاب وارد شده به وسیله به شکل زیر فرض می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{bmatrix} \quad (5)$$

در مرجع [۱۰]، ماتریس‌های معرفی شده در روابط (۴)-(۲) جهت دوران یک IMU با سه شتاب‌سنج ثابت شده در آن، نسبت به یک محور (یکی از محورهای  $X, Y$  یا  $Z$  تعیین شده است. اما در این مقاله هر دیسک دوار حول یک محور دوران دارد و هر دیسک دوار تنها دارای یک شتاب‌سنج است. بنابراین تنها یک سطر از ماتریس‌های  $R_X A$  و  $R_Y A$  و  $R_Z A$  در هر شتاب‌سنج استفاده می‌شود. با توجه به دوران هر شتاب‌سنج حول یک محور اصلی و مطابق با ماتریس‌های دوران، خروجی شتاب‌سنج‌های نصب شده روی صفحات ۱ و ۲ و ۳ نشان داده شده در شکل (۱) به ترتیب به صورت روابط (۶) تا (۸) خواهد بود:

در این معادله  $a_{out}(t)$  خروجی شتاب‌سنج،  $a_I(t)$  شتاب واقعی،  $b$  بایاس ثابت،  $d(t)$  بایاس متغیر و  $w(t)$  نویز اندازه‌گیری است. وجود این خطاها باعث کاهش دقت موقعیت‌یابی توسط سامانه ناوبری اینرسی می‌شود. هدف این مقاله، ارائه ساختاری جدید جهت کاهش اثر سه پارامتر فوق است.

جهت استخراج موقعیت وسیله، نیاز است تا پس از انتقال بردار شتاب به دستگاه اینرسی از  $a_{out}(t)$  دو بار انتگرال‌گیری شود. بدیهی است که وجود خطا در خروجی شتاب‌سنج، باعث ایجاد اختلاف شدید بین موقعیت واقعی و موقعیت تخمینی وسیله در درازمدت می‌شود.

یکی از عوامل ایجاد خطا در خروجی شتاب‌سنج، بایاس ثابت تصادفی<sup>۶</sup> است که با هر بار راه‌اندازی سیستم به صورت یک مقدار تصادفی ایجاد می‌شود و تا لحظه خاموش شدن سیستم همان مقدار باقی می‌ماند. بنابراین امکان تخمین مقدار آن به صورت غیر برخط وجود ندارد. از طرف دیگر بایاس متغیر نیز به مرور زمان به آهستگی تغییر می‌کند. درحقیقت، بایاس ثابت و متغیر بیشترین اثر را در ایجاد خطای تعیین موقعیت وسیله دارند.

در این مقاله، دستگاه بدنی وسیله شامل سه محور اصلی است. محور  $X$  در راستای جلوی وسیله و محور  $Y$  در راستای بال سمت چپ و محور  $Z$  که توسط قانون دست راست مشخص می‌شود.

## ساختار پیشنهادی

این ساختار شامل سه شتاب‌سنج نصب شده بر روی سه دیسک دوار است. هر دیسک حول یکی از محورهای اصلی وسیله دوران دارد که باعث کاهش اثر عوامل خطا در خروجی شتاب‌سنج‌ها می‌شود. به منظور مدل‌سازی ریاضی شتاب‌سنج‌ها در این مقاله از معادلات حاکم بر شتاب‌سنج‌های درحال دوران استفاده می‌شود. با توجه به ساختار دورانی سامانه، باید از شتاب‌سنج‌ها به صورت مداوم نمونه‌برداری شود. تعیین زاویه درست نمونه‌برداری تأثیر زیادی بر عملکرد سامانه دارد. با استفاده از این ساختار و معادلات مربوطه، نشان داده می‌شود که اثر پارامترهای مزاحم شتاب‌سنج‌ها از جمله بایاس ثابت و بایاس متغیر و نویز کاهش می‌یابد. در شکل (۱)، ساختار پیشنهادی به صورت گرافیکی نمایش داده می‌شود. در این شکل جهت پیکان محور حساسیت شتاب‌سنج است:

در این ساختار هر شتاب‌سنج امکان اندازه‌گیری شتاب در دو راستا را دارد؛ به عنوان مثال، شتاب‌سنج نصب‌شده روی دیسک شماره یک، توان اندازه‌گیری شتاب در راستای  $X$  و  $Y$  را دارد.

شتاب‌های وارد شده به وسیله در جهت محورهای اصلی به صورت مستقل از هم تشخیص داده شود. بنابراین، سرعت نمونه برداری از شتاب‌سنج‌ها باید چهار برابر سرعت دوران آنها باشد. یعنی،

$$T = \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) \quad (۱۵)$$

که در آن  $T$  زمان نمونه برداری است. اکنون برای گسسته سازی سیگنال لازم است. از خروجی معادلات (۱۲) تا (۱۴) نمونه برداری شود [۱۱]. خروجی نمونه برداری شده از شتاب‌سنج‌ها به صورت ذیل است:

$$\begin{aligned} a_z^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_z(t) \delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (A_x \cos(\omega(t - kT)) + \\ &A_y \sin(\omega(t - kT)) + b_z + b_z^r + \\ &d_z(t - kT) + w_z(t)) \delta(t - kT) \end{aligned} \quad (۱۶)$$

که در آن  $a_z^*(t)$  را اصطلاحاً سیگنال ستاره دار  $a_z(t)$  گویند. این سیگنال حاصل ضرب سیگنال  $a_z(t)$  در یک قطار ضربه است، که معادل سیگنال نمونه برداری شده  $a_z(t)$  است. به شکل مشابه  $a_y^*(t)$  و  $a_x^*(t)$  نیز محاسبه می‌شوند. برای ادامه محاسبات نیاز است تا این ساختار به حوزه گسسته انتقال یابد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_z[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} a_z(kT) \delta[n - k] \\ &= A_x \cos \left[ \frac{\pi}{2} n \right] + A_y \sin \left[ \frac{\pi}{2} n \right] + \\ &b_z + b_z^r + d_z[n] + w_z[n] \end{aligned} \quad (۱۷)$$

که در آن  $\delta[n]$  تابع ضربه گسسته زمان است [۱۶]. به طور مشابه برای کانال‌های X, Y داریم:

$$\begin{aligned} a_y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} a_y(kT) \delta[n - k] \\ &= A_x \sin \left[ \frac{\pi}{2} n \right] + A_z \cos \left[ \frac{\pi}{2} n \right] + \\ &b_y + b_y^r + d_y[n] + w_y[n] \end{aligned} \quad (۱۸)$$

$$\begin{aligned} a_x[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} a_x(kT) \delta[n - k] \\ &= A_y \cos \left[ \frac{\pi}{2} n \right] + A_z \sin \left[ \frac{\pi}{2} n \right] + b_x \\ &+ b_x^r + d_x[n] + w_x[n] \end{aligned} \quad (۱۹)$$

بنابراین شتاب‌سنج نصب شده روی دیسک ۱ قادر است شتاب‌های وارده به وسیله در جهت X, Y را اندازه گیری نماید. به عنوان نمونه شتاب وارده به وسیله در جهت X که توسط این شتاب‌سنج اندازه گیری شده به صورت ذیل است:

$$a_z(t) = [1 \ 0 \ 0](R_Z A) + b_z + d_z(t) + w_z(t) \quad (۶)$$

$$a_y(t) = [0 \ 0 \ 1](R_Y A) + b_y + d_y(t) + w_y(t) \quad (۷)$$

$$a_x(t) = [0 \ 1 \ 0](R_X A) + b_x + d_x(t) + w_x(t) \quad (۸)$$

در این معادلات  $d_x(t), d_y(t), d_z(t)$  به ترتیب بایاس متغیر شتاب‌سنج‌های نصب شده بر روی صفحات دوار حول محور X, Y, Z است. همچنین  $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$  به ترتیب خروجی شتاب‌سنج‌هاست. در نهایت،  $w(t)$  (با اندیس‌های مربوطه) نویز سفید اندازه گیری است. معادلات (۸)–(۶) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$a_z(t) = A_x \cos(\omega t) + A_y \sin(\omega t) + b_z + d_z(t) + w_z(t) \quad (۹)$$

$$a_y(t) = A_x \sin(\omega t) + A_z \cos(\omega t) + b_y + d_y(t) + w_y(t) \quad (۱۰)$$

$$a_x(t) = A_y \cos(\omega t) + A_z \sin(\omega t) + b_x + d_x(t) + w_x(t) \quad (۱۱)$$

با توجه به دوران دائم شتاب‌سنج‌ها، شتاب جانب مرکز نیز به آن‌ها وارد می‌شود. از آنجا که سرعت دوران ثابت فرض شده، مقدار این شتاب وارده ثابت خواهد بود. از این رو می‌توان این مقدار را مانند بایاس ثابت در نظر گرفت. با اضافه کردن شتاب جانب مرکز به معادلات (۹) تا (۱۱) داریم:

$$a_z(t) = A_x \cos(\omega t) + A_y \sin(\omega t) + b_z + b_z^r + d_z(t) + w_z(t) \quad (۱۲)$$

$$a_y(t) = A_x \sin(\omega t) + A_z \cos(\omega t) + b_y + b_y^r + d_y(t) + w_y(t) \quad (۱۳)$$

$$a_x(t) = A_y \cos(\omega t) + A_z \sin(\omega t) + b_x + b_x^r + d_x(t) + w_x(t) \quad (۱۴)$$

که در آن  $b_z^r, b_y^r, b_x^r$  به ترتیب شتاب جانب مرکز وارد شده به شتاب‌سنج‌های دوار حول محورهای X, Y, Z است.

### نمونه برداری

برای اندازه گیری شتاب وارده به وسیله، در جهت‌های سه گانه  $(X, Y, Z)$ ، باید از خروجی شتاب‌سنج‌ها در زمان‌های مشخصی نمونه برداری شود. با توجه به ضرایب  $A_x, A_y, A_z$  در معادلات (۱۲) تا (۱۴)، باید نمونه برداری در زوایای  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  انجام شود تا

در این معادلات  $x_Z[k]$  و  $z_Y[k]$  شتاب‌های وارد شده به وسیله در جهت محورهای  $Z, X$  است که توسط شتابسنج نصب شده روی دیسک شماره ۳ اندازه‌گیری می‌شود. این دیسک به طور مداوم حول محور  $Y$  در حال دوران است. به همین صورت  $y_X[k]$  و  $z_X[k]$  نیز به ترتیب شتاب وارد شده به وسیله در راستای محورهای  $Z, Y$  است که توسط شتابسنج نصب‌شده بر روی دیسک دوار حول محور  $X$  (دیسک شماره ۲) اندازه‌گیری شده است.

### کاهش بایاس متغیر

در معادلات (۲۱) تا (۲۶) بجای دریافت، تفاضل دریافت ظاهر می‌شود، به عنوان مثال برای دیسک دوار حول محور  $Z$  خواهیم داشت:

$$x_Z[k] = A_X + \frac{\Delta d_Z}{2} + \frac{w_Z[4n] - w_Z[4n-2]}{2} \quad (27)$$

$$y_Z[k] = A_Y + \frac{\Delta d_Z}{2} + \frac{w_Z[4n-3] - w_Z[4n-1]}{2} \quad (28)$$

به طور مشابه برای سایر شتابسنج‌ها داریم:

$$z_Y[k] = A_Z + \frac{\Delta d_Y}{2} + \frac{w_Y[4n] - w_Y[4n-2]}{2} \quad (29)$$

$$x_Y[k] = A_X + \frac{\Delta d_Y}{2} + \frac{w_Y[4n-3] - w_Y[4n-1]}{2} \quad (30)$$

$$y_X[k] = A_Y + \frac{\Delta d_X}{2} + \frac{w_X[4n] - w_X[4n-2]}{2} \quad (31)$$

$$z_X[k] = A_Z + \frac{\Delta d_X}{2} + \frac{w_X[4n] - w_X[4n-2]}{2} \quad (32)$$

با توجه به تغییرات کند دریف با زمان، مقدار  $\Delta d_Z$  بسیار کمتر از  $d_Z$  است. بنابراین در سیگنال‌های  $x_Z$  و  $y_Z$  تأثیر بایاس متغیر کاهش چشمگیری می‌یابد.

از طرف دیگر شتاب وارد شده به وسیله در یک راستا، توسط دو شتابسنج اندازه‌گیری شده می‌شود. جهت ترکیب اندازه‌گیری‌ها می‌توان از میانگین‌گیری استفاده کرد. به‌عنوان مثال شتاب وسیله در راستای  $X$  به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$X[k] = \frac{x_Z[k] + x_Y[k]}{2} = A_X + \frac{\Delta d_Z + \Delta d_Y}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_Z[4n] - w_Z[4n-2]}{2} + \frac{w_Y[4n-3] - w_Y[4n-1]}{2} \right) \quad (33)$$

بنابراین شیب دریافت موثر بر خروجی ساختار پیشنهادی به‌صورت زیر است:

$$\Delta d = \frac{\Delta d_Z + \Delta d_Y}{2} \quad (34)$$

از آنجاکه محدوده شیب دریافت هر شتابسنج مشخص است، می‌توان مقدار شیب دریافت معادله (۳۴) را مشخص نمود. فرض می‌شود هر دو سنسور از یک نمونه و دارای یک محدوده شیب دریافت به صورت رابطه (۳۵) هستند:

$$\begin{aligned} x_Z[k] &= \frac{a_Z[4n] - a_Z[4n-2]}{2}, (k = 4n) \\ x_Z[k] &= \frac{1}{2} (A_X \cos \left[ \frac{\pi}{2} (4n) \right] + A_Y \sin \left[ \frac{\pi}{2} (4n) \right] \\ &\quad + b_Z + b_{r_Z} + d_Z[4n] + w_Z[4n] \\ &\quad - (A_X \cos \left[ \frac{\pi}{2} (4n-2) \right] + A_Y \sin \left[ \frac{\pi}{2} (4n-2) \right] \\ &\quad + b_Z + b_{r_Z} + d_Z[4n-2] + w_Z[4n-2]) \end{aligned} \quad (20)$$

با توجه به این که

$$\cos \left( 4n \times \frac{\pi}{2} \right) = 1, \sin \left( 4n \times \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left( (4n-2) \times \frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$\sin \left( (4n-2) \times \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

معادله (۲۰) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x_Z[k] = A_X + \frac{d_Z[4n] - d_Z[4n-2]}{2} + \frac{w_Z[4n] - w_Z[4n-2]}{2} \quad (21)$$

### کاهش بایاس ثابت

چنانچه در رابطه (۲۱) مشاهده می‌شود، در اولین گام، بایاس ثابت و اثر شتاب جانب مرکز حذف شده‌اند، همچنین در مورد اندازه‌گیری شتاب  $Y$  توسط همان شتابسنج به طور مشابه خواهیم داشت:

$$y_Z[k] = A_Y + \frac{d_Z[4n-3] - d_Z[4n-1]}{2} + \frac{w_Z[4n-3] - w_Z[4n-1]}{2} \quad (22)$$

در معادلات (۲۱) و (۲۲)،  $x_Z[k]$  و  $y_Z[k]$  به ترتیب شتاب‌های اندازه‌گیری شده توسط شتابسنج دوار حول محور  $Z$ ، در راستای محورهای  $X$  و  $Y$  است. به طریقی مشابه خروجی دیگر سنسورها نیز به شکل ذیل به دست می‌آید:

$$z_Y[k] = A_Z + \frac{d_Y[4n] - d_Y[4n-2]}{2} + \frac{w_Y[4n] - w_Y[4n-2]}{2} \quad (23)$$

$$x_Y[k] = A_X + \frac{d_Y[4n-3] - d_Y[4n-1]}{2} + \frac{w_Y[4n-3] - w_Y[4n-1]}{2} \quad (24)$$

$$y_X[k] = A_Y + \frac{d_X[4n-3] - d_X[4n-1]}{2} + \frac{w_X[4n-3] - w_X[4n-1]}{2} \quad (25)$$

$$z_X[k] = A_Z + \frac{d_X[4n] - d_X[4n-2]}{2} + \frac{w_X[4n] - w_X[4n-2]}{2} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{w1-w2}{2}}^2 &= E\left\{\left(\frac{w1-w2}{2} - \frac{\overline{w1}-\overline{w2}}{2}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}(E\{(w1 - \overline{w1})^2\} + E\{(w2 - \overline{w2})^2\} - \\ &2E\{(w1 - \overline{w1})(w2 - \overline{w2})\}) \end{aligned} \quad (41)$$

با توجه به استقلال  $w1, w2$  می‌توان نتیجه گرفت،

$$\sigma_{\frac{w1-w2}{2}}^2 = \frac{1}{4}(E\{(w1 - \overline{w1})^2\} + E\{(w2 - \overline{w2})^2\} - 2E\{(w1 - \overline{w1})\}E\{(w2 - \overline{w2})\}) \quad (42)$$

از طرف دیگر داریم،

$$\frac{E\{(w1 - \overline{w1})\}E\{(w2 - \overline{w2})\}}{2} = 0$$

بنابراین معادله (۴۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{\frac{w1-w2}{2}}^2 = \frac{\sigma_{w1}^2}{4} + \frac{\sigma_{w2}^2}{4}$$

با توجه به اینکه هر دو نویز  $w1, w2$  از نویز  $w$  استخراج

شده‌اند، بنابراین  $\sigma_{w1} = \sigma_{w2}$ . با این فرض داریم:

$$\sigma_{\frac{w1-w2}{2}}^2 = \frac{\sigma_w^2}{2} \quad (43)$$

معادله (۴۳) مشابه اثر نویز در ساختارهای دوار معمول است.

در ادامه نویز اندازه‌گیری دو شتاب‌سنج را به شکل معادلات (۳۶) تا (۳۸)، باهم ترکیب می‌نماییم. جهت تعیین واریانس نویز حاصل از ترکیب فوق‌الذکر از روابط (۳۹) تا (۴۳) استفاده می‌نماییم. بنابراین واریانس نویز در این ساختار به شکل زیر خواهد بود:

$$\sigma_{\frac{1}{2}\left(\frac{wz[4n]-wz[4n-2]}{2} + \frac{wy[4n-3]-wy[4n-1]}{2}\right)}^2 = \frac{\sigma_{wz}^2}{4} \quad (44)$$

بنابراین، در این ساختار علاوه بر کاهش اثر بایاس ثابت و

متغیر، نویز اندازه‌گیری نیز کاهش می‌یابد و بنابراین امکان کاهش اثر پارامترهای نامطلوب در سه راستای  $X, Y, Z$  وجود دارد. همچنین این ساختار میزان کاهش نویز بیشتر از ساختارهای دوار معمول است.

## اندازه‌گیری دوران وسیله

تا این بخش از مقاله تنها شتاب‌های وارده به وسیله اندازه‌گیری شدند. اکنون می‌خواهیم توسط این ساختار که فقط شامل شتاب‌سنج‌ها و فاقد ژيروسکوپ است، دوران وسیله را نیز اندازه‌گیری کنیم. همانطور که اشاره شد، دوران شتاب‌سنج‌ها باعث ایجاد شتاب جانب مرکز در آن‌ها می‌شود. با فرض اینکه در ساختار پیشنهادی سرعت دوران دیسک‌ها همواره ثابت باشد، دوران وسیله باعث تغییر در شتاب جانب مرکز وارد شده به شتاب‌سنج‌ها می‌شود.

$$\Delta d_z = \Delta d_y = [\alpha, \beta] \quad (35)$$

با فرض فوق، محدوده شیب دریفت موثر بر معادله (۳۳) با محدوده شیب دریفت سنسورها برابر است. احتمال اینکه هر دو مقدار  $\Delta d_z$  و  $\Delta d_y$  همزمان حداکثر مقدار خود باشند، کم است. بنابراین شیب دریفت در معادله (۳۴) در بیشتر زمان‌ها کمتر از مقدار حداکثر مشخص شده در معادله (۳۵) است. با توجه به این نکته که شیب دریفت بسیار کمتر از مقدار دریفت است، می‌توان از آن صرف نظر نمود. بنابراین خروجی ساختار پیشنهادی به صورت زیر فرض می‌شود:

$$X[k] = A_x + \frac{1}{2}\left(\frac{wz[4n]-wz[4n-2]}{2} + \frac{wy[4n-3]-wy[4n-1]}{2}\right) \quad (36)$$

$$Y[k] = A_y + \frac{1}{2}\left(\frac{wz[4n-3]-wz[4n-1]}{2} + \frac{wx[4n]-wx[4n-2]}{2}\right) \quad (37)$$

$$Z[k] = A_z + \frac{1}{2}\left(\frac{wy[4n]-wy[4n-2]}{2} + \frac{wx[4n]-wx[4n-2]}{2}\right) \quad (38)$$

## کاهش نویز اندازه‌گیری

مطابق معادلات (۳۶) تا (۳۸)، نویز اندازه‌گیری متشکل از دو بخش است و هر بخش مربوط به نویز اندازه‌گیری یک سنسور است. فرض می‌شود که مشخصه‌های نویز اندازه‌گیری شتاب‌سنج‌ها یکسان باشند. بنابراین ابتدا تاثیر نویز یکی از شتاب‌سنج‌ها را محاسبه نموده و سپس مشخصه‌های نویز اندازه‌گیری کل را محاسبه می‌نماییم. از آنجا که نویز اندازه‌گیری موجود در معادله سفید فرض می‌شود، هیچ همبستگی بین نمونه‌های آن وجود ندارد. بنابراین نویز نمونه‌برداری شده از آن نیز سفید است. از این رو با فرض اینکه میانگین نویز، صفر و انحراف از معیار آن برابر  $\sigma$  باشد، دو سیگنال نویزی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$w1 = wz[4n] \quad n \in (Z^+)$$

$$w2 = wz[4n - 2] \quad n \in (Z^+)$$

همچنین در مورد واریانس  $w1, w2$  خواهیم داشت:

$$\sigma_{w1}^2 = E\{(w1 - \overline{w1})^2\} \quad (39)$$

$$\sigma_{w2}^2 = E\{(w2 - \overline{w2})^2\} \quad (40)$$

که در آن

$$\overline{w_i} = E(w_i) \quad i = 1, 2$$

اکنون برای سیگنال  $\frac{w1-w2}{2}$  داریم:

$$b_z^r = \frac{m \omega^2}{r} \quad (51)$$

که در آن  $m$  جرم شتابسنج،  $\omega$  سرعت دوران دیسک و شعاع دیسک دوار است. با ترکیب روابط (۵۰) و (۵۱) داریم:

$$\frac{\Delta b_z^r[k]}{2} = \frac{m \omega_z [4n-2]^2}{r} - \frac{m \omega_z [4n]^2}{r} \quad (52)$$

در نهایت، می‌توان مقدار تغییرات سرعت دوران دیسک را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$\Delta \omega_z = \sqrt{\frac{\Delta b_z^r[k] r}{2m}} \quad (53)$$

بنابراین، با استفاده از رابطه (۵۳) می‌توان شتاب دوران وسیله و بالطبع آن وضعیت زاویه‌ای وسیله را محاسبه نمود. این روابط برای سایر شتابسنج‌ها نیز صادق است. بنابراین امکان اندازه‌گیری دوران وسیله بدون استفاده از ژيروسکوپ وجود دارد.

### شبیه‌سازی

در این بخش، با استفاده از شبیه‌سازی، کارایی ساختار پیشنهادی مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور از شتاب‌های وارده به یک کوادکوپتر در حال پرواز در یک مسیر مشخص که از مرجع [۱۷] دریافت شده است، استفاده می‌شود. این کواد کوپتر جهت طی مسیر مورد نظر خود و مقابله با باد نیاز به اعمال شتاب در جهت‌های مختلف و دوران حول سه محور خود دارد. جهت مقایسه ساختار این مقاله و ساختارهای معمول از شتابسنج‌های مشابه در هر دو استفاده می‌شود. در جدول (۱) مشخصات شتابسنج‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی نمایش داده شده است:

جدول ۱- مؤلفه‌های فرض شده شتابسنج‌ها برای شبیه‌سازی

$\sigma^2$	drift	Bias	
0.01	0.002t	0.2	$a_x$
0.01	0.005t	-0.5	$a_y$
0.01	0.003t	0.5	$a_z$

در مرحله اول شتابسنج‌های  $a_x$  و  $a_y$  و  $a_z$  به ترتیب در جهت محورهای X, Y, Z به‌طور ثابت قرار می‌گیرند. در مرحله بعد، شتابسنج‌های  $a_x$  و  $a_y$  و  $a_z$  را به ترتیب حول محورهای X, Y, Z با سرعت زاویه‌ای  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  دوران می‌دهیم.

نتیجه مقایسه شتاب واقعی پرنده و شتاب اندازه‌گیری شده توسط شتابسنج‌های جدول (۱) توسط ساختار پیشنهادی و ساختارهای معمول در شکل‌های زیر نشان داده می‌شود:

در صورتی که جهت دوران وسیله هم راستا با جهت دوران دیسک باشد، شتاب جانب مرکز وارده به شتابسنج افزایش می‌یابد. عکس این قضیه نیز صادق است. بنابراین با اندازه‌گیری تغییرات شتاب جانب مرکز وارده به شتابسنج می‌توان دوران وسیله را نیز اندازه‌گیری نمود. در این بخش به نحوه اندازه‌گیری دوران وسیله با استفاده از شتابسنج‌ها می‌پردازیم، با تغییر در معادله (۲۰) به شکل زیر، خواهیم داشت:

$$E_z 1[k] = \frac{a_z [4n] + a_z [4n-2]}{2}, \quad k = 4n = \frac{1}{2} (A_x \cos \left[ \frac{\pi}{2} (4n) \right] + A_y \sin \left[ \frac{\pi}{2} (4n) \right]) + b_z + b_z^r [4n] + d_z [4n] + w_z [4n] + (A_x \cos \left[ \frac{\pi}{2} (4n-2) \right] + A_y \sin \left[ \frac{\pi}{2} (4n-2) \right]) + b_z + b_z^r [4n-2] + d_z [4n-2] + w_z [4n-2]) \quad (45)$$

با توجه به روابط مثلثاتی، معادله (۴۵) را می‌توان به صورت

زیر ساده سازی نمود:

$$E_z 1[k] = b_z + b_z^r [k] + \frac{d_z [4n] + d_z [4n-2]}{2} + \frac{w_z [4n] + w_z [4n-2]}{2} \quad (46)$$

با توجه به سرعت کم تغییرات دررفت، داریم:

$$E_z 1[k] = b_z + b_z^r [4n-1] + d_z [4n-1] + \frac{w_z [4n] + w_z [4n-2]}{2} \quad (47)$$

به طور مشابه، با تغییر در معادله (۲۲) به شکل زیر خواهیم داشت:

$$E_z 2[k] = b_z + b_z^r [4n-2] + d_z [4n-2] + \frac{w_z [4n-1] + w_z [4n-3]}{2} \quad (48)$$

اکنون معادلات (۴۷) و (۴۸) را به شکل ذیل ترکیب می‌نماییم:

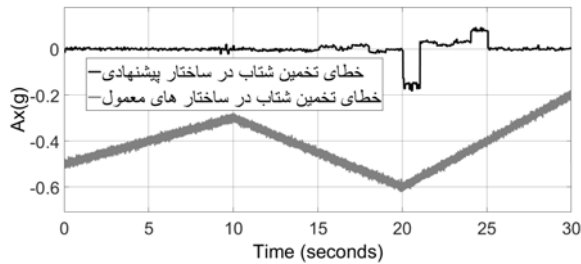
$$\frac{E_z 1[k] - E_z 2[k]}{2} = \frac{b_z^r [4n-1] - b_z^r [4n-2]}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_z [4n] + w_z [4n-2]}{2} - \frac{w_z [4n-1] + w_z [4n-3]}{2} \right) \quad (49)$$

با روندی مشابه روابط (۳۹) تا (۴۳) می‌توان اثبات کرد که واریانس نویز موجود در رابطه (۴۹) بسیار کم است. بنابراین معادله (۴۹) را می‌توان به شکل زیر ساده سازی نمود:

$$\frac{E_z 1[k] - E_z 2[k]}{2} = \frac{\Delta b_z^r [k]}{2} \quad (50)$$

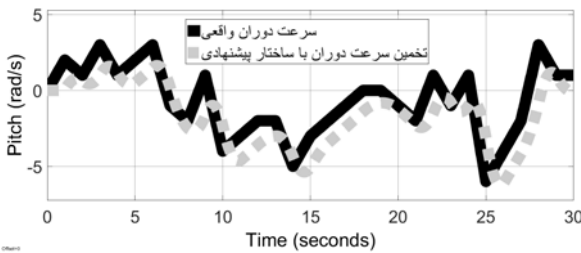
در ادامه با ترکیب رابطه (۵۰) و رابطه نیروی جانب مرکز، میزان دوران وسیله را محاسبه می‌نماییم. رابطه نیروی جانب مرکز به شکل رابطه (۵۱) است:

چنان که در شکل (۵) مشاهده می‌شود، با وجود عوامل نویز اندازه‌گیری، ساختار پیشنهادی توانایی تخمین سریع خطای شتاب‌سنج‌ها را دارد؛ از این رو جبران سازی خطای سنسورها به راحتی انجام می‌شود. در زیر نمودار خطای تخمین شتاب وارده به کوادکوپتر توسط ساختار پیشنهادی مقاله نمایش داده شده است.

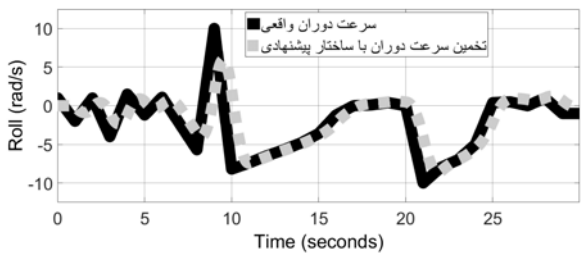


شکل ۵- نمودار خطای تخمین شتاب وارد شده به کوادکوپتر

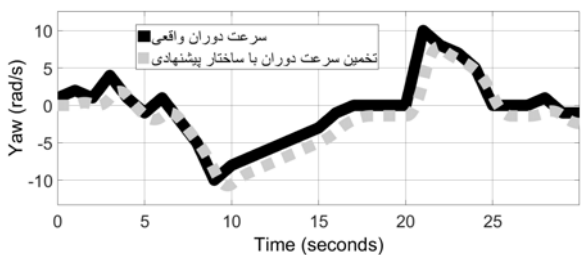
همان طور که در شکل (۶) مشاهده می‌شود، تخمین سریع خطای شتاب‌سنج‌ها و جبران‌سازی آن باعث کاهش شدید خطای تخمین شتاب وارده به کوادکوپتر می‌شود. در ادامه نتایج تخمین سرعت دوران نیز توسط ساختار پیشنهادی نشان داده می‌شود:



شکل ۶- نمودار سرعت دوران وسیله به شکل Pitch



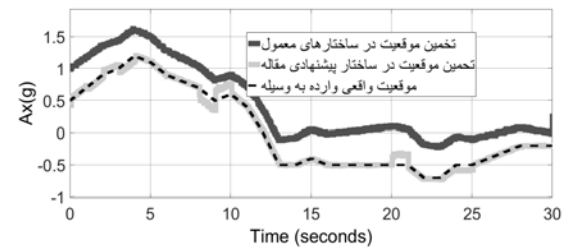
شکل ۷- نمودار سرعت دوران وسیله به شکل Roll



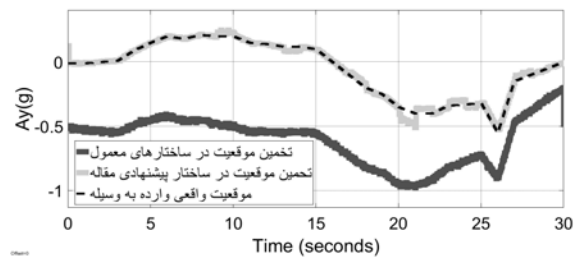
شکل ۸- نمودار سرعت دوران وسیله به شکل Yaw

همان‌گونه که در شکل‌های (۲) تا (۴) دیده می‌شود، ساختار پیشنهادی در این مقاله توانایی تخمین شتاب وارده به وسیله در سه جهت را دارد. در حقیقت، برخلاف ساختارهای معمول که توانایی حذف بایاس ثابت و متغیر را ندارند، در روش اینمقاله، توانایی مقابله با بایاس و دریافت به خوبی مشاهده می‌شود. همچنین چنان‌که در نمودارهای فوق دیده می‌شود، اگرچه در برخی از زمانها ساختار پیشنهادی دچار خطا در تخمین شتاب شده است، اما مقدار آن کمتر از ساختارهای موجود است و همچنین این خطا موقت بوده و ساختار مقاله به سرعت خطای تخمین را جبران‌سازی کرده و تخمین دقیق از شتاب را ارائه می‌دهد.

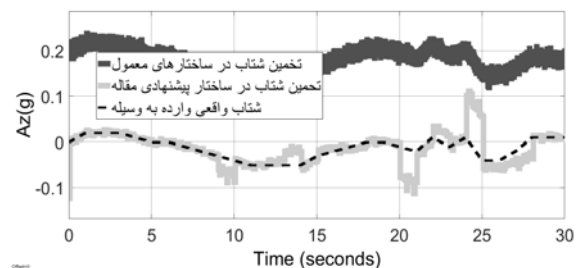
در ادامه به بررسی تخمین خطا توسط ساختار پیشنهادی مقاله می‌پردازیم. در نمودار شکل (۵) تخمین خطا توسط ساختار پیشنهادی مقاله نمایش داده شده است.



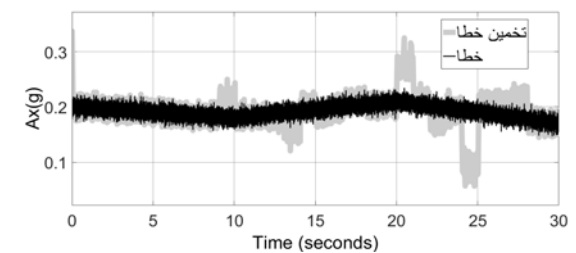
شکل ۹- نمودار شتاب وسیله در راستای محور X در دستگاه ناوبری



شکل ۱۰- نمودار شتاب وسیله در راستای محور Y در دستگاه ناوبری



شکل ۱۱- نمودار شتاب وسیله در راستای محور Z در دستگاه ناوبری



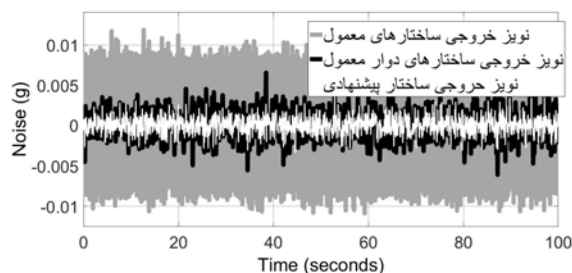
شکل ۱۲- تخمین خطا توسط ساختار پیشنهادی مقاله



- [3] Barbour, Neil, and George Schmidt, "Inertial sensor technology trends." *IEEE Sensors journal*, vol.1(4), pp.332-339, 2001.
- [4] Blakelock JH, *Automatic control of aircraft and missiles*, John Wiley & Sons; 1991.
- [5] Titterton, David, and John L. Weston. *Strapdown inertial navigation technology*, 2nd Edition, The Institution of Electrical Engineers, UK by MPG Books Limited, Bodmin, Cornwall, 2004.
- [6] Hu, Peida, Peng Xu, Bingxu Chen, and Qiuping Wu. "A self-calibration method for the installation errors of rotation axes based on the asynchronous rotation of rotational inertial navigation systems." *IEEE Trans. Ind. Electron.*, pp.65, no. 4, 2018.
- [7] Du, Shuang. "Self-alignment and calibration of a MEMS IMU: Improving observability and estimability by rotary motions of IMU." *Asian Journal of Control*, 2019.
- [8] Xing, Haifeng, Zhiyong Chen, Haotian Yang, Chengbin Wang, Zhihui Lin, and Meifeng Guo. "Self-Alignment MEMS IMU Method Based on the Rotation Modulation Technique on a Swing Base." *Sensors* 18, no. 4, 2018
- [9] Zha, Feng, Bai-qing Hu, Fang-jun Qin, and Yin-bo Luo. "A rotating inertial navigation system with the rotating axis error compensation consisting of fiber optic gyros." *Optoelectronics letters* Vol. 8, no. 2 (2012): pp. 146-149, doi:10.1007/s11801-012-1103-6.
- [10] Sun, Feng, Jianzhong Xia, Haiyu Lan, and Xintao Liu. "Research on integrated alignment of rotary strapdown inertial navigation system." In *Mechatronics and Automation (ICMA), 2012 International Conference on*, pp. 725-730. IEEE, 2012
- [11] Gao, Pengyu, Kui Li, Lei Wang, and Zengjun Liu. "A self-calibration method for tri-axis rotational inertial navigation system." *Measurement Science and Technology* 27, no. 11, 2016.
- [12] Schuler, A.R., Grammatikos, A. and Fegley, K.A., "Measuring rotational motion with linear accelerometers." *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, vol.(3), pp.465-472, 1967.
- [13] Chen, Jeng-Heng, Sou-Chen Lee, and Daniel B. DeBra. "Gyroscope free strapdown inertial measurement unit by six linear accelerometers." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 17, no. 2, 1994.
- [14] Hemmati, M. and Ma'somniea, M.A., "Inertial North Finding Algorithm for a moving, 12th Electrical Engineering Conference of Iran, 2004.
- [15] Zha, Feng, Jiang-ning Xu, Bai-qing Hu, and Fang-jun Qin. "Error analysis for SINS with different IMU rotation scheme." In *Informatics in Control, Automation and Robotics, (CAR), 2010 2nd International Asia Conference on*, vol. 1, pp. 422-425. IEEE, 2010.
- [16] Ogata, Katsuhiko. *Discrete-time control systems*. Vol. 2. Englewood Cliffs, NJ: PrenticeHall, 1995.
- [17] Alkowitz, Mohamad T., Victor Becerra, and William Holderbaum. "Body-centric modelling, identification, and acceleration tracking control of a quadrotor UAV." *International journal of modelling, identification and control*, vol. 24, no. 1, pp. 29-41, 2015.

مطابق شکل های (۷) تا (۹) ساختار پیشنهادی در سه راستا تخمین قابل قبول از سرعت دوران وسیله را ارائه می‌دهد. بنابراین ساختار پیشنهادی توان تخمین سرعت دوران وسیله را بدون استفاده از ژيروسکوپ دارد.

در ادامه تاثیر نویز اندازه‌گیری بر خروجی ساختارهای مختلف نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰- نویز اندازه‌گیری در ساختار مقاله و ساختارهای دوار معمول

همانطور که مشاهده می‌شود، ساختار پیشنهادی مقاله قابلیت کاهش واریانس نویز اندازه‌گیری را دارد و اثر نویز بر آن از ساختارهای دوار معمول کمتر است.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، ساختاری جدید جهت واحد سنجش اینرسی معرفی گردید. این ساختار شامل سه دیسک بود که هر یک به صورت مداوم و با سرعت ثابت حول یک محور اصلی در دستگاه بدنی دوران دارد. بروی هر یک از دیسک‌های یک شتاب‌سنج نصب شده است. با بررسی معادلات مربوط به شتاب‌سنج‌ها مشخص شد، ساختار پیشنهادی توان کاهش اثر پارامترهای بایاس، دریفت و نویز را در سه راستا دارد. سپس با استفاده از خواص شتاب جانبی مرکز روشی ارائه گردید که با استفاده از ساختار پیشنهادی و بدون نیاز به ژيروسکوپ دوران وسیله را نیز اندازه‌گیری می‌نماید. در یک ساختار با واحد سنجش اینرسی دوار، برای اولین بار اندازه‌گیری دوران بدون ژيروسکوپ ارائه شد. در نهایت با استفاده از شبیه‌سازی، کارایی ساختار پیشنهادی جهت موارد فوق بررسی شد.

## مراجع

- [1] Lawrence, Anthony, *Modern inertial technology: navigation, guidance, and control*, 1st Edition, Springer Science & Business Media, United States of America, 2012.
- [2] Jafari, M. Sanghari. A. and Roshanian, J., "Integrated Inertial Navigation with Positioning System for Increasing Orbital Module Navigation Accuracy," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 5, No. 3, 2012, pp. 11-19.