

مقاله علمی - پژوهشی

کاربرد الگوریتم qEKF در تخمین وضعیت ماهواره با استفاده از حسگرهای مغناطیسی و خورشید

عباس سعیدی^۱، ناصر رهبر^{۲*}، محمدعلی علیرضاپوری^۳

۱، ۲ و ۳- مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

*Rahbar_nas@mut.ac.ir

تعیین و کنترل وضعیت موضوعی است که همراه با توسعه فناوری ماهواره با اقبال مواجه شده است. طی سال‌های گذشته روش‌های قطعی و تکراری برای تعیین وضعیت ماهواره‌ها به‌منظور بهبود عملکرد این تعیین وضعیت، توسعه فراوانی یافته و الگوریتم‌های متنوعی در این حوزه ارائه شده است. زیرسیستم تعیین وضعیت تأمین‌کننده داده‌های ورودی موردنیاز الگوریتم‌های تعیین موقعیت و کنترل وضعیت ماهواره است. در ماهواره‌های که در مدارهای نزدیک به زمین قرار می‌گیرند و از حسگرهای محدودی برای تعیین وضعیت بهره می‌گیرند، به‌طورمعمول از ترکیب روش‌های قطعی و تکراری تعیین وضعیت و در شرایطی که داده‌های یکی از حسگرها از دسترس خارج شود، از سوئیچ بین این روش‌ها استفاده می‌گردد. روش‌های قطعی و تکراری دارای مزایا و معایبی گوناگونی هستند و در این مقاله با استفاده از ایده ترکیب روش‌های قطعی و تکراری، روش qEKF برای تعیین وضعیت ماهواره به کار گرفته می‌شود. در توسعه مبانی ریاضی الگوریتم QEKF، از ایده فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای اصلاح روش تکراری Quest استفاده می‌شود و در نتیجه روشی جدید برای تخمین بردار حالت تشکیل شده از حالت‌های وضعیت و غیر وضعیت ماهواره توسعه داده می‌شود. برای ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، شبیه‌سازی‌های مختلفی برای یک ماهواره در مدار نزدیک به زمین که دارای حسگرهای خورشید، مغناطیسی و ژيروسکوپ سه محوره است، انجام گرفته و نتایج با روش SOAR مقایسه شده است. بررسی نتایج نشان‌دهنده عملکرد قابل قبول روش پیشنهادی در قیاس با دیگر روش‌ها در تخمین وضعیت ماهواره و بایاس ژيروسکوپ‌هاست.

واژه‌های کلیدی: ماهواره، تعیین وضعیت، فیلتر کالمن توسعه‌یافته، الگوریتم qEKF، روش q

مقدمه

با توجه به پیشرفت روزافزون صنایع هوافضایی و به‌خصوص صنعت ماهواره‌ای، در سال‌های اخیر محققان بسیاری به موضوع تعیین و کنترل وضعیت ماهواره پرداخته‌اند. مسئله تعیین وضعیت ماهواره وابستگی بسیاری به حسگرهای تعیین وضعیت مورد استفاده در ماهواره دارد. از سوی دیگر، محدودیت‌های اقتصادی باعث می‌گردد که در بسیاری از ماهواره‌ها، امکان استفاده از حسگرهای گران‌قیمت و دقیق فراهم نباشد. این امر باعث گشته است که مسئله تعیین وضعیت ماهواره با استفاده از حسگرهای ارزان‌قیمت مورد توجه قرار گیرد و در نتیجه موضوع توسعه الگوریتم‌های تعیین وضعیت

علائم و اختصارات

T	ماتریس وضعیت
y	بردار مشاهدات در دستگاه بدنه فضاپیما
n	بردار واحد مرجع مرتبط با اندازه‌گیری در دستگاه اینرسی
a_i	وزن‌های ثابت مرتبط با هر جفت بردار
θ	وضعیت
s	حالت‌های غیروضعیت

۱. کارشناس ارشد
۲. دانشیار (نویسنده مخاطب)
۳. دکتری

و وابستگی عملکرد فیلتر به دقت مدل نیز یکی از نقاط ضعف این روش‌ها است. بر این اساس، در این مقاله با استفاده از ایده ترکیب روش‌های تکراری و قطعی که در [10] با عنوان qEKF ارائه شده است، الگوریتمی را برای تخمین وضعیت یک ماهواره که در مداری نزدیک به زمین حرکت می‌کند توسعه می‌دهیم که تنها از حسگرهای مغناطیسی، ژيروسکوپ و حسگر خورشید بهره می‌گیرد. الگوریتم پیشنهادی به‌طور هماهنگ تخمین غیرخطی کواترنیون وضعیت را با استفاده از روش q داونپورت و تخمین غیرخطی حالات غیر وضعیت را در چارچوب فیلتر کالمن تکمیل یافته باهم ترکیب و برای تخمین حالات از تکنیک‌های فیلتر کالمن استفاده می‌کند. فیلتر qEKF در مقایسه با فیلترهای دیگری چون QUEST [17] این مزیت را دارد که قادر است علاوه بر حالات وضعیت، حالات غیر وضعیت را نیز تخمین بزند ولی فیلتر QUEST تنها قادر است تخمین بزند. فیلتر SOAR [17] هنگامی که کسوف رخ می‌دهد قابلیت تخمین حالات وضعیت و غیر وضعیت را ندارد ولی الگوریتم qEKF پیشنهادی همه این کمبودها و نقطه‌ضعف‌ها را با ملاحظات در نظر گرفتن تخمین وضعیت اولیه و استفاده از ایده فیلتر کالمن بر روی روش‌های قطعی برطرف می‌کند. بنابراین در ادامه و در بخش دوم به مسئله پایه‌ای وهبا به‌عنوان پایه تعیین وضعیت قطعی پرداخته می‌شود. پس آن و در بخش سوم به موضوع فیلتر qEKF پرداخته خواهد شد و مبانی ریاضی این فیلتر ارائه خواهد گردید. در بخش چهارم نیز به ارائه نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی برای تعیین وضعیت یک ماهواره که در مدار نزدیک به زمین حرکت می‌کند، ارائه می‌گردد و در نهایت در بخش پنجم جمع‌بندی مقاله ارائه خواهد شد.

مسئله وهبا، راه حل داونپورت و تحلیل

کواریانس خطای تخمین

از دیدگاه تعیین وضعیت، مسئله وهبا روشی برای محاسبه بردار وضعیت ماهواره با استفاده از حداقل‌سازی حداقل مربعات وزن‌دار خطای بین ماتریس وضعیت و بردارهای اندازه‌گیری است که لازم است دارای حداقل دو بردار اندازه‌گیری مستقل و غیر وابسته خطی باشیم [2] که این توصیف را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \|y_i - \mathbf{Tn}_i\|^2 \quad (\text{الف})$$

$$\sum_i a_i = 1 \quad (\text{ب})$$

که روابط فوق، \mathbf{T} ماتریس وضعیت، \mathbf{y} بردار مشاهدات در دستگاه بدنه فضاپیما، \mathbf{n} بردار واحد مرجع مرتبط با اندازه‌گیری در دستگاه

موردتوجه جدی محققان واقع شود [1-3]. حسگرهای مختلفی مانند ردیاب ستاره [4]، ناوبری جهانی، خورشیدی [5]، مغناطیسی [6]، اینرسی (ژایروها و شتاب‌سنج‌ها) و زمین [7] برای تعیین وضعیت ماهواره به کار گرفته می‌شوند [8]. در ماهواره‌های کوچک معمولاً از دو حسگر خورشیدی و حسگر مغناطیسی برای تعیین وضعیت ماهواره استفاده می‌گردد. لازم به ذکر است که حسگر خورشیدی در ماهواره‌های که در مدارهای نزدیک به زمین قرار دارند، در بخشی از مسیر حرکتی خود در سایه زمین قرار می‌گیرد و در این شرایط تنها حسگر مغناطیسی برای تعیین وضعیت به کار گرفته می‌شود.

در تعیین وضعیت فضاپیماها طیف گسترده‌ای از الگوریتم‌ها برای تعیین وضعیت با استفاده از داده‌های حسگرهای تعیین وضعیت مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش‌های تعیین وضعیت ماهواره به دودسته کلی روش‌های قطعی و تکراری تقسیم‌بندی می‌شوند [9]. روش تعیین وضعیت قطعی یا بدون حافظه، روشی است که وضعیت ماهواره را به‌صورت نقطه‌به‌نقطه^۴ تعیین می‌کند. در این روش حل مسئله تعیین وضعیت اغلب بدون در نظر گرفتن خواص آماری اندازه‌گیری‌های به‌دست‌آمده از حسگرهای وضعیت انجام می‌شود و لازم است که حداقل دو بردار اندازه‌گیری وضعیت یا به‌بیان دیگر دو حسگر تعیین وضعیت داشته باشیم [10]. یک سال پس از ارائه روش جبری برای تعیین وضعیت توسط هارولد بلک [11] خانم گریس وهبا مسئله تعیین وضعیت مشهور خود را منتشر کرد که برای هر تعداد بردار مشاهدات پاسخگو بود [12]. اولین الگوریتم عملی برای حل مسئله وهبا روش q بود که توسط داونپورت^۵ مطرح و توسط کیت^۶ [13] منتشر شد. روش‌های بسیاری برای حل این مسئله ارائه شده است که بسیاری از آن‌ها روش‌هایی عددی هستند. مهم‌ترین ضعف این الگوریتم‌ها آن است که قادر نیستند تا متغیرهای غیر وضعیت (مانند بایاس ژایروها) را تخمین بزنند و از سوی دیگر در صورت از دست دادن یک حسگر، این روش قادر به تخمین وضعیت ماهواره نخواهد بود [10].

در مقابل روش‌های قطعی، روش‌های تکراری تعیین وضعیت ماهواره علاوه بر داده‌های به‌دست‌آمده از حسگرهای وضعیت از مدل دینامیکی حرکت فضاپیما نیز بهره می‌گیرند تا قادر باشند مسیر حرکتی ماهواره را با دقت مناسبی تخمین بزنند. این روش‌ها عمدتاً مبتنی بر فیلترهای بیزین توسعه داده‌شده‌اند که از مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به خانواده فیلترهای کالمن و فیلترهای ذره‌ای اشاره کرد [14-16]. عدم قطعیت‌های موجود در مدل‌های دینامیکی

4. Point-to-Point
5. Davenport
6. Keat

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n a_i ([\mathbf{y}_i \times] [\mathbf{n}_i \times] + [\mathbf{n}_i \times] [\mathbf{y}_i \times]) \quad (۵-ه)$$

شاخص عملکرد به معادله (۶) تبدیل می‌شود:

$$G = \sigma + 2q_4 \mathbf{z}^T \mathbf{q}_v + \mathbf{q}_v^T \mathbf{H} \mathbf{q}_v \quad (۶)$$

که این شاخص با توجه به $\bar{\mathbf{q}}$ بیشینه می‌شود، پس می‌توان از جمله σ صرف نظر کرد. حال با تعریف ماتریس بهره \mathbf{K} به شکل رابطه (۱۱) مسئله بهینه‌سازی معادل این است که شاخص عملکرد G رابطه (۱۲) را بیشینه کنیم.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (۷-ف)$$

$$G = \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} \quad (۷-ب)$$

با حل این مسئله بهینه‌سازی به وسیله ضرایب لاگرانژ به رابطه $\mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} = \lambda \bar{\mathbf{q}}$ می‌رسیم که کواترنیون بهینه بردار ویژه مرتبط با بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس \mathbf{K} هست. در نتیجه مشاهده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار ویژه شاخص عملکرد را بیشینه می‌کند و پس از آن تخمین وضعیت بهینه را تولید می‌کند. ماتریس تخمین وضعیت را می‌توان به دو ماتریس وضعیت واقعی و خطای وضعیت $\delta \bar{\mathbf{q}}$ تجزیه کرد که در دستگاه بدنه تعریف شده است.

$$\mathbf{T}(\hat{\bar{\mathbf{q}}}) = \mathbf{T}(\delta \bar{\mathbf{q}}^*) \mathbf{T}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (۸)$$

هنگامی که در اندازه‌گیری‌ها خطا نداشته باشیم خطای وضعیت صفر خواهد بود که نتیجه مورد انتظار است و تخمین وضعیت با وضعیت واقعی معادل می‌شود. اگر خطاها در اندازه‌گیری‌ها لحاظ شوند، مدل اندازه‌گیری‌ها به روابط زیر تبدیل می‌شوند:

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{T} \mathbf{n}_i + \delta \bar{\mathbf{y}}_i \quad (۹-الف)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_i = \mathbf{n}_i + \delta \mathbf{n}_i \quad (۹-ب)$$

حال شاخص عملکرد چنین تغییر می‌کند:

$$G = \delta \bar{\mathbf{q}}^{*T} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & -\delta \mathbf{z} \\ -\delta \mathbf{z}^T & 0 \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{q}}^* \quad (۱۰-الف)$$

$$= \delta \bar{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & -\delta \mathbf{z} \\ \delta \mathbf{z}^T & 0 \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{q}} \quad (۱۰-ب)$$

$$\mathbf{H}_0 = \sum_{i=1}^n a_i ([\bar{\mathbf{y}}_i \times] [\mathbf{T} \bar{\mathbf{n}}_i \times] + [\mathbf{T} \bar{\mathbf{n}}_i \times] [\bar{\mathbf{y}}_i \times]) \quad (۱۰-ب)$$

$$\delta \mathbf{z} = -\sum_{i=1}^n a_i (\bar{\mathbf{y}}_i \times \mathbf{T} \bar{\mathbf{n}}_i) \quad (۱۰-ج)$$

فرم کلی مسئله مقدار ویژه همانند قبل در معادله (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{H}_0 \delta \mathbf{q}_v + \delta q_4 \delta \mathbf{z} = \delta \lambda \delta \mathbf{q}_v \quad (۱۱)$$

که مقدار ویژه بهینه $\delta \lambda$ مقدار کوچکی است، در حالتی که اندازه‌گیری‌ها مناسب باشند مقدار ویژه بهینه صفر است و با اضافه کردن نویز نتیجه نزدیک به ماتریس تکین داونپورت می‌شود. توجه داشته باشید که خطاها مقادیر کوچکی هستند ($\delta q_4 \approx 1$ و $\delta \lambda \delta \mathbf{q}_v \approx 0$) و حل مسئله خطای

اینرسی و a_i وزن‌های ثابت مرتبط با هر جفت بردار هستند [۳ و ۴]. در صورتی که دو بردار اندازه‌گیری وضعیت از حسگرهای خورشید و مغناطیسی به دست آیند، متغیرهای معرف این دو اندازه‌گیری و بردار مرجع مربوط در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱- بردارهای مرجع و اندازه‌گیری مدل‌های مختلف ماهواره

موقعیت ماهواره	مدل خورشید	بردار مرجع خورشید	اندازه‌گیری با حسگر خورشید
		\mathbf{n}_1	\mathbf{y}_1
مدل میدان مغناطیسی	مدل میدان مغناطیسی	بردار مرجع میدان مغناطیسی	اندازه‌گیری با حسگر مغناطیسی
		\mathbf{n}_2	\mathbf{y}_2

ماتریس \mathbf{T} در فضای کواترنین‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T}(\bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2q_4 [\mathbf{q}_v \times] + 2[\mathbf{q}_v \times]^2 \quad (۲-الف)$$

$$[\mathbf{q}_v \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲-ب)$$

با انجام عملیات ریاضی و برای کمینه کردن تابع هزینه J ، با تعریف B به عنوان ماتریس پروفایل کافی است عبارت زیر را بیشینه کنیم:

$$\max_{\bar{\mathbf{q}}} G = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{T}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{n}_i \quad (۳-الف)$$

$$B = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{y}_i \mathbf{n}_i^T \quad (۳-ب)$$

حال با توجه به خواص trace ماتریس، معادله (۳) را به صورت معادله (۴) بازنویسی و با جایگذاری (۳) در (۴) به معادله (۶) خواهیم رسید:

$$G = \text{trace}[G] = \text{trace} \left[\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{T} \mathbf{n}_i \right] \quad (۴-الف)$$

$$\Rightarrow G = \text{trace} [\mathbf{B}^T \mathbf{T}(\bar{\mathbf{q}})].$$

$$G = \text{trace} [\mathbf{B}^T] - 2q_4 \text{trace} [\mathbf{B}^T [\mathbf{q}_v \times]] + 2 \text{trace} [\mathbf{B}^T [\mathbf{q}_v \times]^2] \quad (۴-ب)$$

با توجه به سه جمله شاخص عملکرد و تعریف روابط زیر، شاخص عملکرد به فرم معادله (۵) تغییر خواهد کرد:

$$\text{trace} [\mathbf{B}^T] = \text{trace} [B] \equiv \sigma \quad (۵-الف)$$

$$-2q_4 \text{trace} [\mathbf{B}^T [\mathbf{q}_v \times]] = 2q_4 \mathbf{z}^T \mathbf{q}_v \quad (۵-ب)$$

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n a_i (\mathbf{y}_i \times \mathbf{n}_i) \quad (۵-ج)$$

$$2 \text{trace} [\mathbf{B}^T [\mathbf{q}_v \times]^2] = \mathbf{q}_v^T \mathbf{H} \mathbf{q}_v \quad (۵-د)$$

تابعی از وضعیت ماهواره هستند، به دست خواهد آمد. حالت بهینه خطی، با یک فیلتر کالمن به روزرسانی وضعیت را انجام داده و به عنوان اندازه گیری های جدید بکار می رود و حالت های غیر وضعیت روش qEKF و به روزرسانی کوواریانس ها تعمیم حالت بهینه خطی هستند. برای توسعه الگوریتم qEKF فرض کنید بردار اندازه گیری y به صورت زیر تعریف شود:

$$y = Hx + \eta \quad (۱۶)$$

که در این رابطه بردار حالت x ، ماتریس مشاهدات H و نویز سفید η با میانگین صفر و با کوواریانس مرتبط R می باشند. \hat{x}^- را به عنوان یک تخمین پیشین حالت با کوواریانس خطای تخمین P^- تعریف می کنیم و \hat{x}^+ نیز تخمین پسین حالت با کوواریانس خطای تخمین P^+ نشان داده می شود، همچنین خطاهای پیشین و پسین به ترتیب به وسیله رابطه های زیر نشان داده می شوند:

$$e^- = x - \hat{x}^- \quad (۱۷-الف)$$

$$e^+ = x - \hat{x}^+ \quad (۱۷-ب)$$

معادله به روزرسانی حالت (تخمین پسین حالت) و خطای تخمین پسین حالت به شکل زیر بیان می شود:

$$\hat{x}^+ = (I - KH)\hat{x}^- + Ky = \hat{x}^- + K(y - H\hat{x}^-) \quad (۱۸-الف)$$

$$e^+ = x - \hat{x}^+ = x - \hat{x}^- - K(Hx + \eta - H\hat{x}^-) \quad (۱۸-ب)$$

$$= e^- - K(He^- + \eta) = (I - KH)e^- - K\eta$$

که ماتریس K بهره کالمن و η نویز اندازه گیری است. می دانیم که تخمین دارای خطایی با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$P^- = E\{e^-(e^-)^T\} \quad (۱۹)$$

فرض می شود که خطاهای تخمین و نویز اندازه گیری ناهمبسته هستند، بنابراین؛ $E\{e^-\eta^T\} = 0$ است. بنابراین کوواریانس خطای تخمین پسین چنین تعریف می شود:

$$P^+ = E\{e^+(e^+)^T\} \quad (۲۰)$$

$$= (I - KH)P^-(I - KH)^T + KRK^T$$

که به عنوان فرمول جوزف برای به روزرسانی کوواریانس شناخته می شود [۱۰]. در فیلتر کالمن بهره K طوری انتخاب می شود که خطای تخمین را کمینه کند که با کمینه کردن trace کوواریانس خطای تخمین پسین انجام می شود.

$$\min_K \text{trace}[P^+] = \text{trace}[(I - KH)P^-(I - KH)^T + KRK^T] \quad (۲۱)$$

تخمین در حالی که مؤلفه های بردار خطای کوواریانس به فرم معادله (۱۲) باشند، به دست می آید:

$$\delta q_v = -H_0^{-1}\delta z \quad (۱۲-الف)$$

$$\delta \theta = 2\delta q_v \quad (۱۲-ب)$$

بنابراین، کوواریانس خطای وضعیت محاسبه می شود $[\delta]$:

$$P_{\theta\theta} = E\{\delta\theta\delta\theta^T\} = 4E\{\delta q_v\delta q_v^T\} \quad (۱۳)$$

$$= 4H_0^{-1}E\{\delta z\delta z^T\}H_0^{-T}$$

برای محاسبه کوواریانس $E\{\delta z\delta z^T\}$ با تقریب مرتبه اول داریم:

$$\delta z = -\sum_{i=1}^n a_i (\bar{y}_i \times T\bar{n}_i) = -\sum_{i=1}^n a_i [(y_i + \delta y_i) \times T(n_i + \delta n_i)]$$

$$\Rightarrow \delta z = -\sum_{i=1}^n a_i (y_i \times Tn_i + y_i \times T\delta n_i + \delta y_i \times Tn_i + \delta y_i \times T\delta n_i) \quad (۱۴)$$

$$\Rightarrow \delta z = -\sum_{i=1}^n a_i (y_i \times T\delta n_i + \delta y_i \times Tn_i)$$

با این فرض معمول که هر منبع خطا با دیگری ناهمبسته هستند نتیجه می شود که:

$$E\{\delta z\delta z^T\} = \sum_{i=1}^n a_i^2 \left\{ \begin{aligned} & [y_i \times T] E\{\delta n_i\delta n_i^T\} T^T [y_i \times]^T + \\ & [Tn_i \times] E\{\delta y_i\delta y_i^T\} [Tn_i \times]^T \end{aligned} \right\} \quad (۱۵)$$

در عمل، وضعیت واقعی و بردارهای اندازه گیری نامعلوم هستند و باید با مقادیر تخمین زده شده و اندازه گیری شده \bar{y}_i, \hat{T} و \bar{n}_i تخمین زده شوند. مهم است که توجه شود که مسئله وهبا مربع باقی مانده $\bar{y}_i - T(\hat{q})\bar{n}_i$ را کمینه می کند. در نتیجه تضمینی وجود ندارد که خطای کوواریانس که از طریق این روش به دست می آید کمترین باشد، به هر حال، این روش برای به دست آوردن یک تخمین وضعیت بهینه مفید است.

روش فیلتر کالمن تعمیم یافته Q (qEKF)

فیلتر کالمن ابزاری پایه برای تخمین بازگشتی است. در این بخش از آن به عنوان چارچوبی برای توسعه الگوریتم پیشنهادی استفاده می شود. فیلتر qEKF به روزرسانی وضعیت را بر پایه روش q انجام می دهد و سپس به روزرسانی حالت های غیر وضعیت را با استفاده از تکنیک فیلتر کالمن به انجام می رساند. بردار حالت بهینه و به روزرسانی کوواریانس در ابتدا برای حالت پارتیشن بندی شده (وضعیت و غیر وضعیت) و با فرض خطی بودن اندازه گیری هایی که

$$\hat{s}^+ = \hat{s}^- + K_s (y - H_0 \hat{\theta}^-) \quad (28)$$

با جایگذاری بهره بهینه از معادله (۲۵) و باقیمانده از معادله (۲۷) معادله جایگزین برای بهروزرسانی حالت غیروضعیت بهینه به صورت زیر خواهد شد:

$$\hat{s}^+ = \hat{s}^- + K_{s,opt} K_{\theta,opt}^{-1} \Delta \theta = \hat{s}^- + P_{s\theta}^- (P_{\theta\theta}^-)^{-1} \Delta \theta \quad (29)$$

برای تحلیل کوواریانس نیز مشابه قبل عمل کرده و خطای تخمین پسین حالت وضعیت و غیروضعیت به ترتیب چنین تعریف خواهد شد:

$$e_{\theta}^+ = (I - K_{\theta} H_0) e_{\theta}^- - K_{\theta} \eta \quad (30-الف)$$

$$e_s^+ = (I - K_s H_s) e_s^- - K_s \eta \quad (30-ب)$$

بهروزرسانی خطای کوواریانس برای همه حالت‌ها بیان می‌شود:

$$P^+ = E \left\{ e^+ (e^+)^T \right\} = (I - KH) P^- (I - KH)^T + KRK^T \quad (31)$$

حال بهروزرسانی کوواریانس همه حالت‌ها را با استفاده از معادلات (۲۴)، (۲۴-ب)، (۲۴-ج) و جایگذاری بهره بهینه از معادله (۲۲-ب) و ساده‌سازی مناسب به روابط زیر خواهیم رسید:

$$P_{\theta\theta}^+ = P_{\theta\theta}^- - K_{\theta,opt} W K_{\theta,opt}^T = P_{\theta\theta}^- (I - K_{\theta,opt} H_0)^T \quad (32-الف)$$

$$P_{\theta s}^+ = P_{\theta s}^- - P_{\theta\theta}^- H_0^T K_{s,opt}^T \quad (32-ب)$$

$$P_{s\theta}^+ = P_{s\theta}^- - K_{s,opt} H_0 P_{\theta\theta}^- \quad (32-ج)$$

$$P_{ss}^+ = P_{ss}^- - K_{s,opt} W K_{s,opt}^T \quad (32-د)$$

بعد از بهروزرسانی وضعیت، مأموریت باقی‌مانده برای فیلتر توسعه یافته، بهروزرسانی مناسب برای حالت‌های غیروضعیت است. این امر با استفاده از اطلاعات جدیدی که از بهروزرسانی حالت‌های وضعیت به دست آمده است، انجام می‌شود. در واقع از بهروزرسانی وضعیت $\hat{\theta}^+$ به عنوان اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم. با این شبه‌اندازه‌گیری $\hat{\theta}^+$ ماتریس $H_{\theta}^* = I_{3 \times 3}$ ماتریسی همانی است و ماتریس مشاهدات حالت غیروضعیت $H_s^* = 0$ صفر است. بنابراین، شبه‌اندازه‌گیری بدین صورت داده می‌شود:

$$y^* = \hat{\theta}^+ = \theta + \eta^+ \quad (33-الف)$$

$$\eta^+ = -e_{\theta}^+ \quad (33-ب)$$

توجه شود که برای باقیمانده مقادیر این بخش از بالانویس $(\cdot)^*$ برای شبه‌اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم. در اینجا، خطای تخمین پسین $-e_{\theta}^+$ با خطای تخمین پیشین e_{θ}^- ، e_s^- رابطه دارد. این ارتباط بایستی به‌طور صحیح محاسبه شود و از این رو تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \text{trace} [P^+]}{\partial K} = 0 = \frac{\partial}{\partial K} \text{trace} \left[(I - KH) P^- (I - KH)^T + KRK^T \right] \\ = \frac{\partial}{\partial K} \left(\text{trace} [P^-] + \text{trace} [-KHP^-] + \text{trace} [-P^-H^T K^T] + \text{trace} [KHP^-H^T K^T] + \text{trace} [KRK^T] \right) \quad (22-الف)$$

$$0 = -2P^-H^T + 2KHP^-H^T + 2KR$$

$$K(HP^-H^T + R)^{-1} = P^-H^T$$

$$K_{opt} = P^-H^T (HP^-H^T + R)^{-1} \quad (22-ب)$$

اکنون فرض کنید که علاوه بر تخمین بردار وضعیت، علاقه‌مند باشیم که متغیرهای دیگری را نیز تخمین بزینیم. فرض کنید که بردار حالت به شکل زیر تعریف شود:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ s \end{bmatrix} \quad (23)$$

که θ وضعیت و s حالت‌های غیروضعیت باشند. معمولاً، وضعیت زوایای سه‌گانه رول، پیچ و یاو و حالت غیروضعیت بایاس ژيروسکوپ است. ماتریس مشاهده، بهره و ماتریس‌های کوواریانس به‌طور مشابه پارتیشن‌بندی می‌شوند:

$$H = \begin{bmatrix} H_{\theta} & H_s \end{bmatrix} \quad (24-الف)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{\theta} \\ K_s \end{bmatrix} \quad (24-ب)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{\theta\theta} & P_{\theta s} \\ P_{s\theta} & P_{ss} \end{bmatrix} \quad (24-ج)$$

فرض می‌شود که اندازه‌گیری‌ها تابعی از وضعیت θ ، و مستقل از حالت‌های غیروضعیت هستند. بهره بهینه کالمن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_{opt} = \begin{bmatrix} K_{\theta,opt} \\ K_{s,opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\theta\theta}^- H_0^T \\ P_{s\theta}^- H_0^T \end{bmatrix} W^{-1} \quad (25-الف)$$

$$W = H_0 P_{\theta\theta}^- H_0^T + R \quad (25-ب)$$

در نتیجه، معادله بهروزرسانی مانده چنین تعریف خواهد شد:

$$\hat{\theta}^+ = \hat{\theta}^- + K_{\theta} (y - H_{\theta} \hat{\theta}^-) \quad (26-الف)$$

$$\varepsilon = y - H_{\theta} \hat{\theta}^- \quad (26-ب)$$

همچنین می‌توان مانده را برحسب بهره کالمن و تابعی از وضعیت نوشت:

$$\varepsilon = K_{\theta,opt}^{-1} \Delta \theta \quad (27-الف)$$

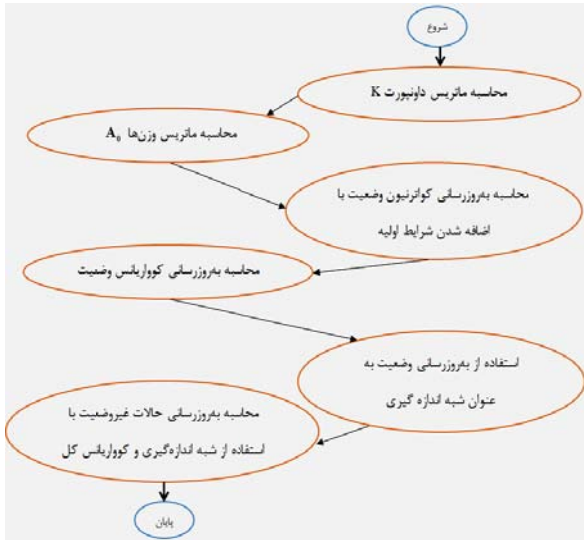
$$\Delta \theta = \hat{\theta}^+ - \hat{\theta}^- \quad (27-ب)$$

که $\Delta \theta$ بهروزرسانی وضعیت بهینه است. برای حالت‌های غیروضعیت داریم:

و به روزرسانی حالت غیروضعیت نیز به شکل زیر انجام می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \hat{s}^* &= \hat{s}^- + K_s^* (y^* - \hat{\theta}^-) = \hat{s}^- + K_s^* (\hat{\theta}^+ - \hat{\theta}^-) \\ &= \hat{s}^- + P_{s0}^- (P_{00}^-)^{-1} \Delta \theta \end{aligned} \quad (42)$$

در انتهای این بخش به صورت شماتیک، فرایند اجرای این الگوریتم در شکل ۲ معرفی شده است:



شکل ۲- فرایند اجرای الگوریتم پیشنهادی

شبیه سازی تخمین وضعیت ماهواره با استفاده حسگرهای خورشیدی و مغناطیسی و با استفاده از الگوریتم qEKF

در این بخش با انجام شبیه سازی برای یک ماهواره فرضی در مدار نزدیک به زمین، عملکرد الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته و عملکرد آن را با الگوریتم SOAR مقایسه می‌شود. پارامترهای شبیه سازی در جدول ۲ ارائه شده است. مرکز زمین به عنوان مرکز دستگاه مختصات مرجع در نظر گرفته می‌شود و دستگاه اینرسی و دستگاه بدنه ماهواره، دستگاه‌های مورد استفاده برای محاسبه وضعیت هستند... با فرض غیرفعال بودن زیرسیستم کنترل وضعیت ماهواره، اندازه سرعت زاویه‌ای آن در هر سه محور حرکتی، ثابت فرض می‌شود که بردار سرعت در طول مسیر تغییر جهت می‌دهد. ماهواره دارای حسگرهای خورشیدی، مغناطیسی و ژيروسکوپ است. فرض می‌شود که بردارهای واقعی میدان مغناطیسی و خورشید در دسترس است و بردارهای اندازه گیری آغشته به نویز است که در جدول ۲، پارامترهای شبیه سازی ارائه شده است. وزن‌های اسکالر مسئله وهبا با در نظر گرفتن مدل اندازه گیری QUEST به صورت $1/\sigma_{sun}^2$

$$C^* = \begin{bmatrix} C_\theta^* \\ C_s^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \left\{ e_\theta^- (\eta^*)^T \right\} \\ E \left\{ e_s^- (\eta^*)^T \right\} \end{bmatrix} \quad (34)$$

با جایگذاری برای e_θ^+ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_\theta^* &= -E \left\{ e_\theta^+ (e_\theta^+)^T \right\} = -E \left\{ e_\theta^- (e_\theta^-)^T \right\} (I - K_0 H_0)^T \\ &= -P_{00}^- (I - K_0 H_0)^T \end{aligned} \quad (35-الف)$$

$$\begin{aligned} C_s^* &= -E \left\{ e_s^+ (e_s^+)^T \right\} = -E \left\{ e_s^- (e_s^-)^T \right\} (I - K_0 H_0)^T \\ &= -P_{s0}^- (I - K_0 H_0)^T \end{aligned} \quad (35-ب)$$

خواهیم داشت:

$$(I - K_{0,opt} H_0)^T = (P_{00}^-)^{-1} P_{00}^+ \quad (36)$$

با این فرض که یک بهره وضعیت بهینه، $K_{0,opt}$ داشته باشیم، ماتریس‌های کواریانس ساده سازی می‌شوند:

$$C_\theta^* = -P_{00}^+ \quad (37-الف)$$

$$C_s^* = -P_{s0}^+ (P_{00}^-)^{-1} P_{00}^+ \quad (37-ب)$$

با توجه به معادلات فوق بهره بهینه چنین به دست خواهد آمد:

$$K^* = (P H^T + C^*) \left(H^* P H^T + R^* + H^* C^* + C^* H^T \right)^{-1} \quad (38)$$

همچنین خواهیم داشت:

$$H^* = \begin{bmatrix} H_\theta^T & H_s^T \end{bmatrix} = [I \ 0]$$

$$R^* = E \left\{ \eta^* (\eta^*)^T \right\} = P_{00}^+$$

$$K^* = \begin{bmatrix} K_\theta^* \\ K_s^* \end{bmatrix}$$

که در این روابط داریم:

$$K_\theta^* = (P_{00}^- + C_\theta^*) (P_{00}^- + P_{00}^+ + C_\theta^* + C_\theta^{*T})^{-1} \quad (39-الف)$$

$$K_s^* = (P_{s0}^- + C_s^*) (P_{00}^- + P_{00}^+ + C_\theta^* + C_\theta^{*T})^{-1} \quad (39-ب)$$

همچنین با جایگذاری و ساده سازی خواهیم داشت:

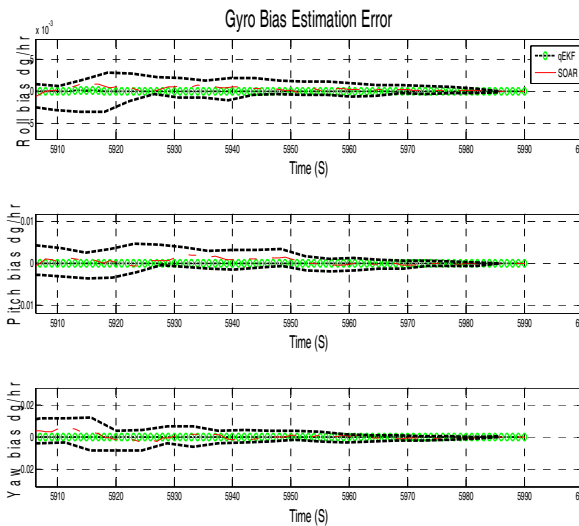
$$K_\theta^* = (P_{00}^- - P_{00}^+) (P_{00}^- + P_{00}^+ - P_{00}^- - P_{00}^+)^{-1} = I \quad (40)$$

با استفاده از $\hat{\theta}^+$ به عنوان یک شبه اندازه گیری، اطلاعات اضافی در مورد وضعیت به دست می‌آید. بهره بهینه K_s^* با روشی مشابه به وسیله جایگزینی مقادیر مناسب برای $C_\theta^* \cdot C_s^*$ و P_{00}^+ به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} K_s^* &= \left(P_{00}^- - P_{s0}^- (P_{00}^-)^{-1} P_{00}^+ \right) \left(P_{00}^- + P_{00}^+ - P_{00}^- - P_{00}^+ \right)^{-1} \\ &= P_{s0}^- \left[I - (I - K_{0,opt} H_0)^T \right] \left[P_{00}^- \left(I - (I - K_{0,opt} H_0)^T \right) \right]^{-1} \\ &= P_{s0}^- H_0^T K_{0,opt}^T \left(P_{00}^- H_0^T K_{0,opt}^T \right)^{-1} = P_{s0}^- (P_{00}^-)^{-1} \end{aligned} \quad (41)$$

مثال اول: تعیین وضعیت با استفاده از حسگرهای مغناطیسی و خورشیدی

در این مثال فرض می‌شود که در تمام دوره مداری به صورت سنکرون از داده‌های حسگرهای مغناطیسی و خورشید استفاده شده و تخمین بایاس ژایرو و زوایای غلت، فراز و سمت ماهواره با استفاده از الگوریتم qEKF انجام می‌گیرد. برای مقایسه نتایج با الگوریتم SOAR نیز مقایسه می‌شود. نتایج این شبیه‌سازی در شکل ۲ ارائه شده است. در شکل ۲-الف، خطای تخمین وضعیت و در شکل ۲-ب، خطای تخمین بایاس ژایروها ترسیم شده است. در این شکل‌ها منحنی با رنگ مشکی نشان دهنده پوش حداکثر خطای تخمین در یکصد اجرای مختلف الگوریتم است. بررسی این شکل‌ها نشان‌دهنده عملکرد تقریباً مشابه دو الگوریتم فوق با فرض در اختیار داشتن داده‌های دو حسگر مغناطیسی و خورشید در کل مدار ماهواره است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود با گذشت زمان و پیشرفت الگوریتم، خطای تخمین برای هر سه پارامتر غلت، فراز و سمت به صفر میل می‌کند. همچنین خطای بایاس نیز به صفر میل کرده و نشان‌دهنده عملکرد مناسب‌تر تخمین حالت بایاس ژایرو توسط روش qEKF نسبت به روش SOAR است.



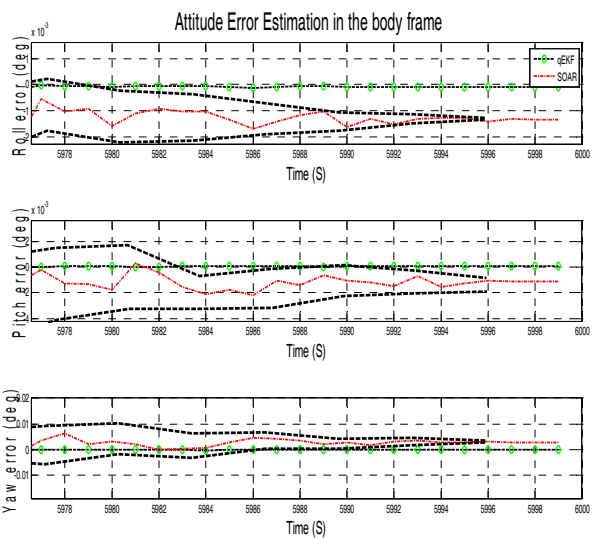
ب: خطای تخمین بایاس ژایروها

و $1/\sigma_{mag}^2$ به ترتیب برای حسگر خورشید و حسگر مغناطیس‌سنج انتخاب می‌گردند بردار حالت شامل زوایای غلت، فراز و سمت ماهواره و بایاس ژایروسکوپ است.

جدول ۲- پارامترهای شبیه‌سازی

نویز حسگر خورشید	σ_{sun}	۰/۸ درجه
نویز حسگر مغناطیسی	σ_{mag}	۲۲۰ نانو تسلا
نویز ژایرو (Angular Random Walk)	σ_v	$3.3 \times 10^{-7} \text{ rad/sec}^5$
بایاس ژایرو (Angular Random Walk)	σ_u	$3.3 \times 10^{-10} \text{ rad/sec}^{1.5}$
بردار حالت	$x = [\theta \ s]^T$	زوایای اویلر و بایاس سه ژایرو
زمان نمونه‌برداری	T_s	یک ثانیه
زمان شبیه‌سازی	T_f	۶۰۰۰ ثانیه
مدار ماهواره		• مدار دایروی در فاصله ۶۲۲ کیلومتری از سطح زمین • صفحه مداری ۴۵ درجه

با سه مثال، عملکرد الگوریتم پیشنهادی در تخمین وضعیت ماهواره و تخمین بایاس ژایروها مورد بررسی و مقایسه با دیگر روش‌ها قرار می‌گیرد. از آنجاکه سرعت زاویه‌ای ماهواره ثابت فرض شده است، در ارائه نتایج تنها خطای تخمین وضعیت مورد توجه قرار گرفته است.



الف: خطای تخمین وضعیت

شکل ۲- خطای تخمین وضعیت و بایاس ژایرو با استفاده از دو روش qEKF و SOAR در مثال-۱

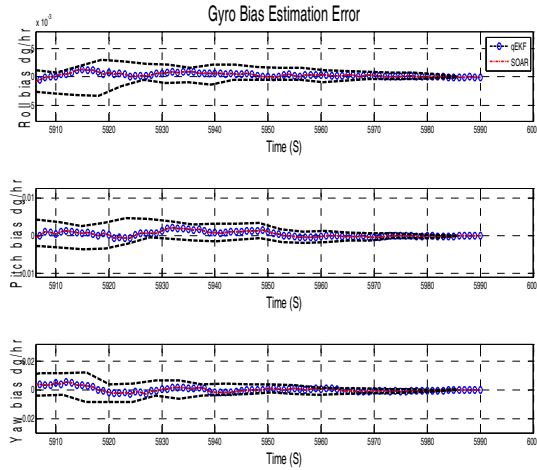
مثال در شکل ۳ نمایش داده شده است. در شکل ۳-الف خطای تخمین وضعیت و در شکل ۳-ب خطای تخمین بایاس ژایروها برای دو روش qEKF و SOAR ارائه شده است. شکل ۳ نشان‌دهنده میل کردن خطای تخمین وضعیت به صفر هم‌زمان با پیشرفت الگوریتم است. در شکل ۳-ب نیز مشخص است که

مثال دوم: تعیین وضعیت با حسگر مغناطیس‌سنج

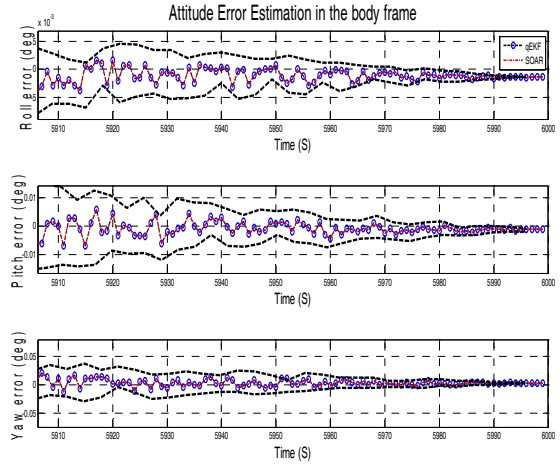
در این مثال فرض شده است که تنها از حسگر مغناطیسی برای تعیین وضعیت استفاده گردد. در این مثال داده حسگر خورشید به صورت یک بردار ثابت و در واقع برداری ایده‌آل در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی و روش SOAR برای این

هستند با دقت خوبی وضعیت و بایاس ژایروها را تخمین بزنند و در این شرایط عملکرد این دو الگوریتم تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد.

خطای تخمین بایاس ژایروها نیز به تدریج به صفر همگرا شده است. در واقع این مثال نشان دهنده این موضوع است که در صورت در اختیار داشتن داده‌های دقیق از دو حسگر، هر دو الگوریتم‌ها قادر



ب: خطای تخمین بایاس ژایروها



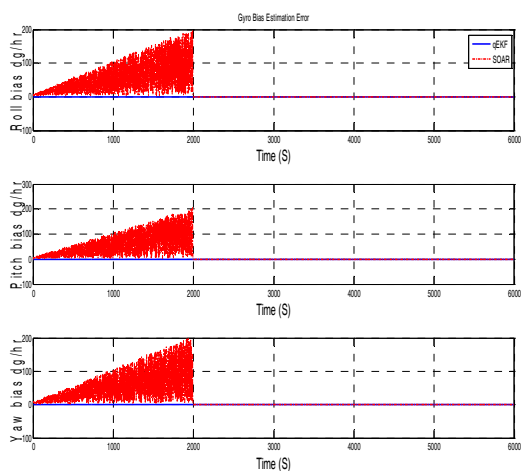
الف: خطای تخمین وضعیت

شکل ۳- خطای تخمین وضعیت و بایاس ژایروها با استفاده از دو روش qEKF و SOAR در مثال

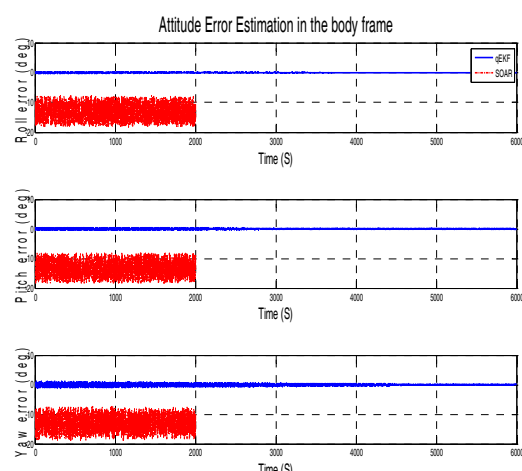
در شکل ۴ ترسیم شده است. در شکل ۴-الف، خطای تخمین وضعیت ماهواره و در شکل ۴-ب، خطای تخمین بایاس ژایروها ترسیم شده است. در هر دو شکل مشخص است که روش پیشنهادی عملکرد بسیاری بهتری نسبت به الگوریتم SOAR به خصوص در شرایطی که ماهواره در سایه زمین است، دارد. در واقع روش SOAR به دلیل آن که روشی تکراری است، بدون داده حسگر خورشید قابل استفاده نخواهد بود. این مثال به خوبی نشان دهنده برتری روش پیشنهادی در تخمین حالت‌های وضعیت و غیروضعیت ماهواره با استفاده از داده‌های حسگر مغناطیسی و ژایروها نسبت به روش‌های قطعی یا گام‌به‌گام است.

مثال سوم: اندازه‌گیری آسنکرون با استفاده از حسگر مغناطیسی و حسگر خورشید

در این مثال اندازه‌گیری‌های انجام شده توسط حسگرهای مغناطیسی و حسگر خورشیدی به دلیل وقوع کسوف، در بخشی از مدار ماهواره هم‌زمان نیستند. در فاصله زمانی بین ۲۰۰۰ تا ۳۸۰۰ ثانیه (از ۶۰۰۰ نمونه) داده‌ای از حسگر خورشیدی به علت وقوع کسوف موجود نیست و از این رو در این بازه زمانی، تخمین صرفاً بر اساس داده‌های حسگر مغناطیسی انجام می‌گیرد. پس از این بازه زمانی و با خارج شدن ماهواره از سایه زمین، داده‌های حسگر خورشیدی نیز برای تخمین مورد استفاده قرار می‌گیرد. نتایج شبیه‌سازی این مثال



ب: خطای تخمین بایاس ژایروها



الف: خطای تخمین وضعیت

شکل ۴- خطای تخمین وضعیت و بایاس ژایرو با استفاده از دو روش qEKF و SOAR در مثال ۳

attitude determination system for a nano-satellite," in *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, 2018, p. 6933.

- [4] B. Hou, Z. He, H. Zhou, and J. I. C. J. o. A. S. Wang, "Integrated design and accuracy analysis of star sensor and gyro on the same benchmark for satellite attitude determination system," vol. 6, no. 4, pp. 1074-1080, 2019.
- [5] S. Judd *et al.*, "Attitude determination and control system (ADCS), sun sensor, and star tracker," ed: Google Patents, 2019.
- [6] S. Sabzevari, A. Vali, M. H. Ferdowsi, M. R. J. I. R. Arvan, Sonar, and Navigation, "Observability analysis and design of two nested filters for the satellite attitude estimation with magnetometer-only," vol. 14, no. 4, pp. 607-618, 2020.
- [7] T. N. T. Nguyen, K. L. Cahoy, and M. K. Quadri, "Attitude determination using earth horizon sensors," ed: Google Patents, 2019.
- [8] A. M. Tavakoli, A. Faghihi and S. Mohammad M. Dehghan, "Sun Vector and Magnetic Vector Simulation for Hardware in the Loop Tests," vol. 10, no. 1, pp. 47-53, 2017.
- [9] M. H. J. N. Y. Kaplan, John Wiley and I. Sons, . 427 p., "Modern spacecraft dynamics and control," 1976.
- [10] T. Ainscough, R. Zanetti, and J. Christian, "Q-Method Extended Kalman Filter," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 38, pp. 752-760, 04/01 2015.
- [11] H. D. J. A. j. Black, "A passive system for determining the attitude of a satellite," vol. 2, no. 7, pp. 1350-1351, 1964.
- [12] G. Wahba, "A least squares estimate of satellite attitude," *SIAM Review*, vol. 7, no. 3, pp. 409-409, 1965.
- [13] J. Keat, "Analysis of least-squares attitude determination routine DOAOP," Technical Report CSC/TM-77/6034, Comp. Sc. Corp 1977.
- [14] X. Chen, L. Cao, P. Guo, and B. J. I. T. Xiao, "A higher-order robust correlation Kalman filter for satellite attitude estimation," 2019.
- [15] N. Li, W. Ma, W. Man, L. Cao, and H. J. T. J. o. N. Zhang, "Multiple Robust High-degree Cubature Kalman Filter for Relative Position and Attitude Estimation of Satellite Formation," *Published online by Cambridge University Press*, vol. 72, no. 5, pp. 1254-1274, 2019.
- [16] A. Junoh, S. Yaacob, M. Hasan, and N. Hamzah, "The study of particle filter for satellite angular rate estimation without rate sensor measurement," *MATEC Web of Conferences*, vol. 150, 2018.
- [17] C. Hajiyev and D. M. Guler, "Review on gyroless attitude determination methods for small satellites," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 90, pp. 54-66, 2017.

جمع بندی

محدودیت‌های دو روش تعیین وضعیت قطعی و تکراری باعث شده است که ایده ترکیب این دو روش برای توسعه الگوریتم‌های تعیین وضعیت مورد توجه محققان این حوزه قرار گیرد. از ایده فیلتر کالمن توسعه یافته به عنوان روشی تکراری و روش Quest به عنوان روشی قطعی برای توسعه الگوریتم qEKF بهره گرفته شده است که در این مقاله کاربرد این روش برای تعیین وضعیت ماهواره در مدارهای نزدیک به زمین و با استفاده از حسگرهای مغناطیسی و خورشیدی مورد ارزیابی قرار گرفته است. علاوه بر این، روش‌های قطعی کارایی مناسبی در تخمین حالت‌های غیروضعیت مانند بایاس ژایروها را ندارند و روش پیشنهادی برای این چالش نیز غلبه می‌کند. مبانی ریاضی موضوع در این مقاله به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت و معادلات الگوریتم qEKF برای تخمین هم‌زمان حالت‌های وضعیت و غیر وضعیت استخراج شد. با انجام شبیه‌سازی‌های مختلف، که تاثیر شرایط مختلف عملکردی ماهواره را بر زیرسیستم تعیین وضعیت شبیه‌سازی می‌کنند، عملکرد این روش مورد ارزیابی قرار گرفت. مقایسه نتایج با روش SOAR به عنوان یکی از روش‌های کارا در تعیین وضعیت ماهواره نشان‌دهنده عملکرد قابل قبول روش پیشنهادی برای تعیین وضعیت ماهواره با استفاده از حسگرهای خورشیدی و مغناطیسی در قیاس با دیگر روش‌ها دارد. روش پیشنهادی حتی در زمان قرارگیری ماهواره در سایه خورشید نیز عملکرد قابل قبولی دارد و این عملکرد مناسب در تخمین بایاس ژایروها نیز تداوم دارد. از این رو می‌توان با استفاده از این الگوریتم، تعیین وضعیت ماهواره را مدارهای نزدیک به زمین با دقت قابل قبولی انجام داد بدون این‌که نیازی باشد تا بین الگوریتم‌های قطعی و تکراری سوئیچ کرد.

مراجع

- [1] J. C. Springmann, "Satellite Attitude Determination with Low-Cost Sensors," 2013.
- [2] A. Hossein Adami and M. Nosratollahi, "Introducing of Attitude Determination System of a LEO Satellite with Orbital Maneuver Mission," *Journal of Space Science and Technology (JSST)*, vol 4. no. 4, pp. 1-10, 2012.
- [3] P. Moonjelly, M. Ambalavanan, D. Filmer, and J. Longuski, "Development of a low-cost, low-power