

# انتقال مداری بهینه با تراست کم با استفاده از روش هم‌نشانی مستقیم

رضا جمیل‌نیا<sup>۱\*</sup> و ابوالقاسم نقاش<sup>۲</sup>

۱ و ۲- دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی هوافضا

\*دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی هوافضا، صندوق پستی ۴۴۱۳-۱۵۸۷۵

jamilnia@aut.ac.ir

در مقاله حاضر، رویکرد جدیدی برای حل مسئله انتقال مداری بهینه با تراست کم پیشنهاد می‌شود. در این رویکرد، مسئله بهینه‌سازی مسیر انتقال مداری بهینه، با المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده تعریف می‌گردد. برای حل این مسئله، از روش هم‌نشانی مستقیم که یک روش عددی کارا برای حل مسائل کنترل بهینه است، استفاده می‌شود. با استفاده از این روش، مسئله بهینه‌سازی مسیر به‌طور کامل گسسته شده و تبدیل به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی می‌شود. این مسئله گسسته که تعداد بسیار زیادی متغیر دارد، با یک حل‌کننده برنامه‌ریزی غیرخطی قدرتمند به نام IPOPT حل می‌شود. در نهایت، مقادیر بهینه حالت و کنترل برای انتقال مداری بهینه با حداقل مصرف سوخت به‌دست می‌آیند.

**واژه‌های کلیدی:** انتقال مداری با تراست کم، المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده، بهینه‌سازی مسیر، کنترل بهینه، روش هم‌نشانی مستقیم، برنامه‌ریزی غیرخطی

## فهرست علائم

|       |  |          |  |
|-------|--|----------|--|
| $i_N$ | بردار یکه در راستای شمال محلی            |          |  |
| $i_n$ | بردار یکه در راستای عمودی                |          |  |
| $i_r$ | بردار یکه در راستای شعاعی                | $a$      | نیمه‌قطر بزرگ                            |
| $i_t$ | بردار یکه در راستای مماسی                | $a_d$    | بردار شتاب اغتشاشی                       |
| $J_k$ | اثرات گرانشی ناحیه‌ای                    | $e$      | خروج از مرکز                             |
| $k$   | یکی از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده | $e_N$    | راستای شمال محلی                         |
| $L$   | یکی از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده | $F$      | تابع هدف بهینه‌سازی                      |
| $P_k$ | چندجمله‌ای لژاندر                        | $f$      | یکی از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده |
| $p$   | یکی از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده | $f_x$    | تابع غیرخطی حالت                         |
| $R_e$ | شعاع زمین                                | $g$      | یکی از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده |
| $r$   | بردار موقعیت                             | $g_0$    | شتاب جاذبه زمین در سطح دریا              |
| $r_x$ | مؤلفه بردار موقعیت در راستای $x$         | $h$      | یکی از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده |
| $r_y$ | مؤلفه بردار موقعیت در راستای $y$         | $h_k$    | میزان اختلاف زمانی دو گره متوالی         |
| $r_z$ | مؤلفه بردار موقعیت در راستای $z$         | $I_{sp}$ | ضربه ویژه سوخت                           |
| $T$   | نیروی تراست                              | $i$      | شیب مداری                                |

یک بازه زمانی مشخص تعیین کند [۱]. گوئلن نیز، توانسته است با آزاد فرض کردن زمان انتقال و کمینه کردن آن، مسیر انتقال مداری را به ازای مصرف سوخت مشخصی به دست آورد [۲ و ۳]. آبرل و تاوبرت، با آزاد در نظر گرفتن زمان و مصرف سوخت، مسیرهای بهینه گوناگونی را برای انتقال مداری با مصرف سوخت کمینه تعیین کرده اند. آنها مسیرهای پرواز را به چندین فاز باتراست و بدون تراست تقسیم‌بندی کرده‌اند و ترکیب‌های مختلفی را از اینگونه پروازها پیشنهاد داده‌اند [۴]. ناه و وادالی، مسیرهای بهینه پرواز با تراست کم و مصرف سوخت کمینه را برای سیستم‌های پیشرانش با ضربه های ویژه سوخت مختلف به دست آورده‌اند [۵]. کولاسردو و کاسالینو، توانسته‌اند با در نظر گرفتن انتقال‌های مداری دایره‌ای ساده، حل بهینه را هم به صورت تحلیلی و هم به صورت عددی ارائه و آنها را با هم مقایسه کنند [۶]. پورتاکدوست و جلالی با تعریف مسئله انتقال مداری بهینه در مختصات کروی، معادلات شرایط لازم را با استفاده از روش غیرمستقیم به دست آورده و مسئله دو نقطه شرط مرزی<sup>۱</sup> را با استفاده از روش هم‌نشانی<sup>۲</sup> حل کرده‌اند [۷].

در تمامی این کارها برای حل مسائل بهینه‌سازی مسیر از روش‌های غیرمستقیم حل مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. دشواری‌های استفاده از روش‌های غیرمستقیم (به دلیل وجود فرایندهای تحلیلی برای تولید معادلات شبه‌حالت، شرایط بهینگی و شرایط مرزی و حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با دو یا چند نقطه شرط مرزی) سبب شده‌اند تا محققان در کارهای مذکور از مدل‌های ساده و فرضیات ساده‌کننده بسیاری استفاده کنند. همچنین با توجه به دشواری اعمال قیود مسیر و مرزبندی متغیرهای حالت و کنترل در روش‌های غیرمستقیم، در این کارها عموماً از این قیود صرف‌نظر شده است. با توجه به این مشکلات، گروه دیگری از محققان توجه خود را به استفاده از روش‌های مستقیم حل مسائل کنترل بهینه معطوف کرده‌اند. بتز، که از شاخص‌ترین محققان در زمینه بهینه سازی مسیر و بهینه‌سازی غیرخطی، برای حل مسائل انتقال مداری بهینه و سفرهای بین‌سیاره‌ای بهینه، از روش‌های پرتاب مستقیم<sup>۳</sup> و هم‌نشانی مستقیم<sup>۴</sup> استفاده نموده و برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی حاصله از روش برنامه‌ریزی مرتبه دو ترتیبی<sup>۵</sup> بهره برده است [۸-۱۱]. روش‌های مستقیم به دلیل امکان پیاده‌سازی کاملاً عددی آنها، قابلیت حل مسائل بهینه‌سازی مسیر با مدل‌های دینامیکی پیچیده را دارد و سرعت حل بالا و دقت حل بالایی دارند. یکی دیگر از موارد مهم در کارهای پیشین، تمایل به تفکیک

|                 |  |
|-----------------|--|
| t               | زمان   |
| t <sub>f</sub>  | زمان نهایی پرواز                                     |
| u               | بردار کنترل  |
| u <sub>n</sub>  | مؤلفه بردار کنترل در راستای عمودی                    |
| u <sub>r</sub>  | مؤلفه بردار کنترل در راستای شعاعی                    |
| u <sub>t</sub>  | مؤلفه بردار کنترل در راستای مماسی                    |
| V               | بردار سرعت   |
| V <sub>x</sub>  | مؤلفه بردار سرعت در راستای x                         |
| V <sub>y</sub>  | مؤلفه بردار سرعت در راستای y                         |
| V <sub>z</sub>  | مؤلفه بردار سرعت در راستای z                         |
| w               | وزن وسیله  |
| x               | بردار حالت   |
| Δ               | بردار شتاب اغتشاشی کل                                |
| Δ <sub>g</sub>  | بردار شتاب اغتشاشی گرانشی                            |
| Δ <sub>n</sub>  | مؤلفه بردار شتاب اغتشاشی در راستای عمودی             |
| Δ <sub>r</sub>  | مؤلفه بردار شتاب اغتشاشی در راستای شعاعی             |
| Δ <sub>T</sub>  | بردار شتاب اغتشاشی تراست                             |
| Δ <sub>t</sub>  | مؤلفه بردار شتاب اغتشاشی در راستای مماسی             |
| δ <sub>g</sub>  | بردار شتاب اغتشاشی گرانشی در دستگاه افقی محلی        |
| δ <sub>gn</sub> | مؤلفه بردار شتاب اغتشاشی گرانشی در راستای شمال محلی  |
| δ <sub>gr</sub> | مؤلفه بردار شتاب اغتشاشی گرانشی در راستای شعاعی محلی |
| θ               | آنومالی واقعی  |
| μ               | پارامتر گرانش  |
| τ               | پارامتر کنترل سوخت                                   |
| φ               | عرض جغرافیایی  |
| Ω               | طول گره صعودی  |
| ω               | آرگومان حضیض   |

## مقدمه

امروزه، در مأموریت‌های گوناگون هوافضایی، تعیین مسیر بهینه به منظور دستیابی به حداکثر کارایی مورد توجه قرار گرفته است. یکی از پیچیده‌ترین مسائل در حوزه بهینه‌سازی مسیر، انتقال مداری بهینه با تراست کم است. این مسئله به واسطه دینامیک بسیار غیرخطی و بازه زمانی طولانی پرواز به دلیل ناچیز بودن نیروی تراست در مقایسه با وزن وسیله، به عرصه‌ای برای رقابت میان طراحان مسیرهای بهینه تبدیل شده است.

تاکنون تلاش‌های گسترده‌ای برای حل این مسئله با رویکردهای گوناگون صورت گرفته است. کشیشیان، توانسته است مسیر انتقال مداری بهینه با مصرف سوخت کمینه را برای انتقال در

1. two point boundary value problem  
2. collocation  
3. direct shooting  
4. direct collocation  
5. sequential quadratic programming

تواند در برخی حالات ( $e=0, i=0, \omega=\pi/2$ ) منجر به تکنیکی گردد و فرآیند تعیین مسیر بهینه را با مشکل مواجه سازد.

برای رفع این مشکل، می‌توان از المان‌های مداری دیگری با نام المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده استفاده کرد. این المان‌ها فرم اصلاح‌شده‌ای از المان‌های مداری اعتدالی هستند که برای تمامی مقادیر خروج از مرکز ( $e$ ) قابل استفاده هستند.

المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده معنای فیزیکی ندارند، اما ابزاری سودمند برای پرهیز از وقوع تکنیکی در فرآیند حل مسائل بهینه‌سازی انتقال مداری استفاده می‌شوند.

معادلات حرکت انتقال مداری با استفاده از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده، به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۵]:

$$\dot{p} = \frac{2p}{q} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \Delta_t \quad (2)$$

$$\dot{f} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \Delta_r \sin L + [(q+1)\cos L + f] \frac{\Delta_t}{q} - (h \sin L - k \cos L) \frac{g \Delta_n}{q} \right] \quad (3)$$

$$\dot{g} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -\Delta_r \cos L + [(q+1)\sin L + g] \frac{\Delta_t}{q} + (h \sin L - k \cos L) \frac{f \Delta_n}{q} \right] \quad (4)$$

$$\dot{h} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2 \Delta_n}{2q} \cos L \quad (5)$$

$$\dot{k} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2 \Delta_n}{2q} \sin L \quad (6)$$

$$\dot{L} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{(h \sin L - k \cos L) \Delta_n}{q} + \sqrt{\mu p} \left( \frac{q}{p} \right)^2 \quad (7)$$

$$\dot{\omega} = -T(1 + 0.01\tau) / I_{sp} \quad (8)$$

در معادلات فوق، مقادیر  $p, q, f, g, h, k, L$ ، المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده هستند.

مقادیر  $s^2$  و  $q$  را نیز می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد:

$$q = 1 + f \cos L + g \sin L \quad (9)$$

$$s^2 = 1 + h^2 + k^2 \quad (10)$$

المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده با المان‌های مداری کلاسیک در ارتباط هستند و با دراختیار داشتن هر یک از دسته المان‌ها می‌توان دسته المان دیگر را به‌دست آورد:

$$a = \frac{p}{1 - f^2 - g^2} \quad (11)$$

$$e = \sqrt{f^2 + g^2} \quad (12)$$

مسیر پرواز انتقال مداری به چندین مسیر کوچک‌تر متصل به هم است که هر کدام از این مسیرهای کوچک را می‌توان در قالب مسئله‌ای مستقل بهینه کرد. اگرچه این رویکرد، امکان تبدیل مسئله سه‌بعدی را به چندین مسئله صفحه‌ای فراهم می‌سازد و از پیچیدگی معادلات حاکم می‌کاهد و نیز امکان پیاده‌سازی آسان‌تری دارد، اما سبب فاصله‌گرفتن پاسخ‌های نهایی از حل بهینه می‌شود. در حالی که با در نظر گرفتن یک مسیر سه‌بعدی، می‌توان به مسیری به مراتب بهینه‌تر دست یافت. از کارهای شاخصی که از رویکرد تفکیک مسیر استفاده کرده‌اند، می‌توان به مراجع [۱۲-۱۴] اشاره کرد.

در مقاله حاضر، با توجه به کارهای پیشین، رویکرد جدیدی برای بهینه‌سازی مسیر انتقال مداری با تراست کم ارائه شده است. در این رویکرد، با بهره‌گیری از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده برای بیان معادلات حاکم، روش هم‌نشانی مستقیم برای گسسته‌سازی مسئله کنترل بهینه و برنامه‌ریزی غیرخطی<sup>۷</sup> برای حل مسئله بهینه‌سازی غیرخطی مقید، امکان بهینه‌سازی مسیر انتقال مداری با تراست کم با سرعت بالا و دقت قابل قبول فراهم می‌شود. در این رویکرد از روش نقطه درونی اولیه - دوگان<sup>۸</sup> برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده می‌گردد.

## معادلات حرکت انتقال مداری

حرکت هر وسیله فضایی تحت نیروی مرکزی را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم به شکل زیر بیان کرد:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{a}_d \quad (1)$$

به رابطه (۱) فرم گاوسی معادله حرکت گفته می‌شود که در آن، شتاب اغتشاشی از شتاب جانب مرکز جدا شده است. عوامل گوناگونی نظیر نیروی بودن زمین، نیروی تراست و اثرات اجرام دیگر را می‌توان به عنوان عوامل اغتشاش در نظر گرفت. اگر شتاب اغتشاشی در رابطه (۱) صفر باشد، یک سیستم دوجرمی خواهیم داشت که پاسخ آن را می‌توان به صورت المان‌های مداری ثابت بیان نمود. در تعیین مسیرهای با تراست کم، استفاده از فرم گاوسی معادله حرکت سودمند است، زیرا مقدار شتاب اغتشاشی در این مسیرها بسیار کم بوده و پاسخ‌ها به صورت المان‌های مداری تقریباً ثابت قابل بیان خواهند بود.

به منظور استفاده از رابطه (۱) برای تحلیل انتقال مداری، لازم است تا دسته‌ای مناسب از المان‌های مداری انتخاب شود. به‌طور معمول، نخستین انتخاب، دسته المان‌های مداری کلاسیک  $(a, e, i, \omega, \Omega, \theta)$  است. استفاده از المان‌های مداری کلاسیک می

6. modified equinoctial orbital elements

7. Nonlinear Programming

8. Primal-Dual Interior Point

$$\delta g_N = \frac{-\mu \cos \phi}{r^2} \sum_{k=2}^4 \left( \frac{R_e}{r} \right)^k P'_k J_k \quad (30)$$

$$\delta g_r = \frac{-\mu}{r^2} \sum_{k=2}^4 (k+1) \left( \frac{R_e}{r} \right)^k P_k J_k \quad (31)$$

$$\sin \phi = \frac{2}{s^2} (h \sin L - k \cos L) \quad (32)$$

$$P_2 = (3 \sin^2 \phi - 1) / 2 \quad (33)$$

$$P_3 = (5 \sin^3 \phi - 3 \sin \phi) / 2 \quad (34)$$

$$P_4 = (35 \sin^4 \phi - 30 \sin^2 \phi + 3) / 8 \quad (35)$$

مقادیر  $P'_k$  که مشتقات  $P_k$  بر حسب  $\phi$  هستند نیز به راحتی و

با استفاده از روابط فوق محاسبه می‌شوند.

با بهره‌گیری از بردارهای یکه تعریف شده در رابطه (۲۶)،

می‌توان مقادیر شتاب اغتشاشی گرانشی را به دست آورد:

$$\Delta_g = \mathbf{Q}_r^T \delta \mathbf{g} \quad (36)$$

برای به دست آوردن شتاب اغتشاشی تراست، می‌توان از رابطه

زیر استفاده کرد:

$$\Delta_T = \frac{g_0 T (1 + 0.01 \tau)}{w} \mathbf{u} \quad (37)$$

بردار کنترل  $\mathbf{u}$  سه مؤلفه در جهات شعاعی، مماسی و عمودی

دارد و اندازه آن در طول مسیر برابر یک است. در واقع این بردار،

جهت نیروی تراست را در هر لحظه بیان می‌کند:

$$\mathbf{u} = [u_r \quad u_t \quad u_n] \quad (38)$$

### تعریف مسئله بهینه‌سازی

در انتقال مداری بهینه، هدف، تعیین مقادیر کنترل در طول مسیر

پرواز است، به گونه‌ای که وسیله بتواند با حداقل مصرف سوخت از

مدار مبدأ به مدار مقصد منتقل شود.

در مسئله حاضر، وزن وسیله هنگام رسیدن به مدار مقصد را

می‌توان به عنوان تابع هدف در نظر گرفت که باید بیشینه گردد. با

بیشینه شدن این مقدار، مصرف سوخت کمینه خواهد شد:

$$F = -w(t_f) \quad (39)$$

در این مسئله، متغیرهای حالت، المان‌های مداری اعتدالی

اصلاح شده و وزن وسیله است و متغیرهای کنترل، بردار تراست  $\mathbf{u}$  و

پارامتر کنترل سوخت  $\tau$  هستند. شرایط مرزی متغیرهای حالت که

مربوط به شرایط مدار مبدأ و مدار مقصد هستند، قیود اصلی این

مسئله هستند. از دیگر قیود این مسئله، می‌توان به واحد بودن بزرگی

بردار تراست  $\mathbf{u}$  در طول مسیر پرواز و محدود بودن مقدار ثابت  $\tau$

اشاره کرد:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_r^2 + u_t^2 + u_n^2} = 1 \quad (40)$$

$$i = \tan^{-1} \left( \frac{2\sqrt{h^2 + k^2}}{L - h^2 - k^2} \right) \quad (13)$$

$$\omega = \tan^{-1}(gh - fk, fh + gk) \quad (14)$$

$$\Omega = \tan^{-1}(k, h) \quad (15)$$

$$\theta = L - \Omega - \omega \quad (16)$$

با در اختیار داشتن المان‌های مداری اعتدالی اصلاح شده، مقادیر

جابه‌جایی و سرعت در دستگاه مختصات دکارتی را نیز می‌توان

محاسبه کرد:

$$r_x = \frac{P}{qs^2} (\cos L + \alpha^2 \cos L + 2hk \sin L) \quad (17)$$

$$r_y = \frac{P}{qs^2} (\sin L - \alpha^2 \sin L + 2hk \cos L) \quad (18)$$

$$r_z = \frac{2p}{qs^2} (h \sin L - k \cos L) \quad (19)$$

$$V_x = \frac{-1}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\sin L + \alpha^2 \sin L - 2hk \cos L + g - 2fhk + \alpha^2 g) \quad (20)$$

$$V_y = \frac{-1}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (-\cos L + \alpha^2 \cos L + 2hk \sin L - f + 2ghk + \alpha^2 f) \quad (21)$$

$$V_z = \frac{2}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (h \cos L + k \sin L + fh + gk) \quad (22)$$

در روابط فوق، مقدار  $\alpha^2$  با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha^2 = h^2 - k^2 \quad (23)$$

در مقاله حاضر، شتاب‌های گرانشی و تراست را به عنوان

شتاب‌های اغتشاشی در نظر می‌گیریم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta = \Delta_g + \Delta_T \quad (24)$$

معمولاً شتاب‌های اغتشاشی در جهات شعاعی، مماسی و

عمودی محاسبه و بیان می‌شوند. از این رو خواهیم داشت:

$$\Delta = \Delta_r \hat{i}_r + \Delta_t \hat{i}_t + \Delta_n \hat{i}_n \quad (25)$$

که در آن بردارهای یکه  $\hat{i}_r$ ،  $\hat{i}_t$  و  $\hat{i}_n$  را می‌توان از رابطه زیر

محاسبه کرد:

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \hat{i}_r & \hat{i}_t & \hat{i}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} & \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{r}\|} & \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\|} \end{bmatrix} \quad (26)$$

برای به دست آوردن شتاب اغتشاشی گرانشی، می‌توان از

روابط موجود برای اغتشاشات زمین غیرکروی استفاده کرد. این

روابط نوعاً در دستگاه مختصات افقی محلی تعریف می‌شوند:

$$\delta \mathbf{g} = \delta g_N \hat{i}_N - \delta g_r \hat{i}_r \quad (27)$$

$$\hat{i}_N = \frac{\mathbf{e}_N - (\mathbf{e}_N^T \hat{i}_r) \hat{i}_r}{\|\mathbf{e}_N - (\mathbf{e}_N^T \hat{i}_r) \hat{i}_r\|} \quad (28)$$

$$\mathbf{e}_N = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (29)$$

انتقال مداری بهینه آزاد است، باید خود این مقدار زمان نهایی را نیز یک متغیر در نظر گرفت و در محاسبه مقدار اختلاف زمانی ( $h_k$ ) در معادلات (۴۳) و (۴۴) لحاظ کرد.

برای حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی از حل‌کننده‌های گوناگونی می‌توان استفاده کرد. لیکن برای مسئله حاضر، به دلیل غیرخطی بودن شدید، بازه زمانی طولانی و تغییرات کم متغیرهای حالت، تنها از حل‌کننده‌های محدودی می‌توان استفاده کرد. حل‌کننده IPOPT به دلیل بهره‌مندی از الگوریتم‌ها و زیربرنامه‌های لازم برای حل مسائل این‌چینی، می‌تواند به عنوان یک انتخاب مناسب در نظر گرفته شود [۱۹-۲۱].

حل‌کننده IPOPT، مسائل بزرگ مقیاس برنامه‌ریزی غیرخطی را با روش نقطه درونی اولیه - دوگان حل می‌کند. برای تعریف مسئله برای این حل‌کننده، باید علاوه بر توابع هدف و قيود و معادلات حالت، مشتقات مراتب اول و دوم این توابع نسبت به تمامی متغیرهای بهینه‌سازی در قالب ماتریس‌های ژاکوبین و هسیان تعریف شوند. این ماتریس‌ها معمولاً تنگ هستند و درایه‌های زیادی از آنها دارای مقدار صفر هستند. این ماتریس‌ها را می‌توان با روش‌های عددی در هر تکرار محاسبه کرد و نیازی به انجام فرآیندهای تحلیلی برای محاسبه آنها نیست.

البته باید توجه داشت که برای دستیابی به حل دقیق و مطلوب، باید فرایندهایی نظیر تعیین تعداد گره‌ها، انتخاب روش گسسته‌سازی و مقیاس‌بندی صحیح متغیرها پیش از استفاده از این حل‌کننده صورت گیرد.

تعداد گره‌ها نقش مهمی در دقت و سرعت حل ایفا می‌کند. با انتخاب تعداد گره‌های کم، سرعت حل افزایش و دقت حل کاهش و با انتخاب تعداد گره‌های زیاد، سرعت حل کاهش و دقت حل افزایش می‌یابد. از این رو، باید به دنبال یک مقدار بهینه برای تعداد گره‌ها بود. این مقدار بهینه به دقت مطلوب طراح و سیستم سخت‌افزاری و نرم‌افزاری موجود برای انجام محاسبات وابسته است.

انتخاب روش گسسته‌سازی نیز در دقت حل تأثیرگذار است. روش‌های گسسته‌سازی گوناگونی نظیر اویلر، دوزنقه‌ای، رانجه‌کوتا و سیمپسون در حل این مسئله می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. با انتخاب روش‌های گسسته‌سازی پیچیده‌تر، دقت حل افزایش و سرعت حل کاهش می‌یابد. در مسئله انتقال مداری بهینه، استفاده از روش دوزنقه‌ای به‌رغم سادگی، منجر به پاسخ‌هایی با دقت بالا می‌شود.

در مسئله انتقال مداری بهینه به دلیل محدوده تغییرات گوناگون متغیرها، انجام فرآیند مقیاس‌بندی ضروری است. برای این منظور از روش‌های مقیاس‌بندی گرادینانی گوناگونی می‌توان بهره برد. اما از آنجاکه بازه تغییرات متغیرها تا حدود زیادی مشخص

$$\tau_L \leq \tau \leq 0 \quad (۴۱)$$

در رابطه فوق،  $\tau_L$  بیانگر حداقل مقدار قابل قبول پارامتر کنترل سوخت است.

## روش حل

در مقاله حاضر، از روش هم‌نشانی مستقیم برای حل مسئله بهینه‌سازی انتقال مداری بهینه استفاده می‌کنیم. در این روش با گسسته‌سازی کامل معادلات حرکت، امکان استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی برای حل مسئله بهینه‌سازی مسیر فراهم می‌شود. این گسسته‌سازی کمک می‌کند تا مقادیر مشتق موجود در معادلات حرکت به صورت یک عبارت ساده جبری درآمده و مسئله بهینه‌سازی مسیر به فرم استاندارد مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی درآید. برای انجام عملیات گسسته‌سازی لازم است تا بازه زمانی پرواز به قسمت‌های کوچک‌تر تبدیل شود. این کار به منظور تقریب بهتر مشتق الزامی است. در این روش به جای به دست آوردن توابع حالت و کنترل، مقادیر حالت و کنترل در نقاط ابتدا و انتهای بازه‌های زمانی کوچک‌تر به دست می‌آید. هرچه این بازه‌های زمانی کوچک‌تر انتخاب شوند، مقادیر به دست آمده برای متغیرهای حالت و کنترل دقیق‌تر خواهند بود. به هرکدام از نقاط تقسیم‌بندی زمان یک گره می‌گویند. معادلات حرکت را می‌توان به فرم کلی زیر بیان کرد:

$$\dot{x} = f_x(x(t), u(t), t) \quad (۴۲)$$

برای گسسته‌سازی مشتق می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\dot{x}^{(k)} = \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{h_k} \quad (۴۳)$$

با استفاده از رابطه فوق و تقریب دوزنقه‌ای مشتق، می‌توان معادلات قید مربوط به معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} - 0.5h_k(f_x^{(k)} + f_x^{(k+1)}) = 0 \quad (۴۴)$$

اکنون می‌توان با استفاده از گسسته‌سازی فوق، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را تعریف کرد. در این مسئله، مقادیر حالت و کنترل در هر یک از گره‌ها به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مطرح می‌شوند. در چنین حالتی ما با تعداد بسیار زیادی متغیر روبه‌رو خواهیم بود. همچنین در هر فاصله زمانی میان دو گره، معادلات حرکت به صورت قيود تساوی اعمال خواهند شد. یعنی برای کل مسئله به تعداد حاصل ضرب فواصل زمانی در تعداد متغیرهای حالت، معادلات قید وجود خواهد داشت. همچنین علاوه بر معادلات قید مذکور، معادلات قید دیگری نیز برای شرایط ابتدایی و انتهایی و سایر قيود وجود خواهند داشت. در واقع با گسسته‌سازی مسئله کنترل بهینه مسیر، به یک مسئله بسیار بزرگ بهینه‌سازی در برنامه‌ریزی غیرخطی خواهیم رسید [۱۶-۱۸]. چون مقدار زمان نهایی در مسئله

ذوزنقه‌ای، مسئله را گسسته‌سازی می‌نماییم که این گسسته‌سازی، تمامی معادلات حرکت و قید را شامل می‌شود.

با انجام فرآیندهای فوق، به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی با ۴۴۰۱ متغیر و ۳۶۰۳ قید تساوی خواهیم رسید. با بهره‌گیری از مقیاس‌بندی خطی، تمامی متغیرها را به محدوده یکسان  $[-0.5, 0.5]$  نگاشت می‌کنیم. در نهایت، با استفاده از حل‌کننده IPOPT و انجام تنظیمات لازم، این مسئله بزرگ مقیاس برنامه‌ریزی غیرخطی را حل می‌نماییم.

فرآیند حل مذکور در ۳۷۱ تکرار در مدت زمان ۶۲/۶۴۲ ثانیه (در رایانه‌ای با پردازشگر Pentium IV 3.2 GHz) به همگرایی مطلوب می‌رسد. مدت زمان مذکور، بیانگر سرعت بالای حل به‌رغم پیچیدگی چشمگیر مسئله و تعداد بسیار زیاد متغیر و قید در مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی است.

پس از پایان حل در حل‌کننده برنامه‌ریزی غیرخطی، میزان خطای  $KKT \times 10^{-7} \times 9/485$ ، میزان نقض قیود  $10^{-15} \times 5/663$  و مقدار پارامتر بریر (Barrier)  $10^{-8} \times 1$  است. این پارامترها در حل‌کننده IPOPT بیانگر میزان بهینگی تابع هدف و ارضای قیود و مرزبندی‌ها هستند [۱۹]. مقادیر به‌دست‌آمده برای پارامترهای مذکور در پایان حل، نشان‌دهنده دقت بالای حل هستند.

با انجام فرآیند بهینه‌سازی مسیر انتقال مداری برای مثال مطرح‌شده، زمان نهایی ۹۸۱۵۵ s، وزن نهایی N ۲۱۹/۴۵۶ و پارامتر کنترل سوخت ۲۰/۴۳- به‌دست می‌آید.

در شکل (۱) نمودار تغییرات متغیرهای حالت و کنترل با زمان رسم شده است. برای درک بهتر و ملموس‌تر نتایج به‌دست‌آمده، می‌توان این نتایج را با استفاده از روابط موجود، به المان‌های مداری کلاسیک تبدیل کرد. در شکل (۲) نتایج حاصل از بهینه‌سازی در قالب المان‌های مداری کلاسیک نشان داده شده است. در شکل (۳) مسیر بهینه به‌دست‌آمده برای این مثال در نمای سه‌بعدی و در دستگاه مختصات اینرسی ارائه شده است.

برای ارزیابی نتایج به‌دست‌آمده، با توجه به عدم وجود حل دقیق تحلیلی، تنها امکان مقایسه با نتایج حل دقیق عددی که در کارهای محققان دیگر به‌دست‌آمده است، وجود دارد. بتز، مثال حل‌شده در این مقاله را با بهره‌گیری از نرم‌افزار SOCS در آزمایشگاه فناوری محاسباتی و ریاضی شرکت بوئینگ و با استفاده از ابررایانه‌های موجود در آن مرکز با بیش از ۱۰۰۰۰ گره زمانی حل کرده است. او برای این مثال، زمان نهایی را s ۹۶۸۱۰، وزن نهایی را N ۲۲۰/۱۷۹ و پارامتر کنترل سوخت را ۹/۰۹- به‌دست آورده است. نحوه تغییرات تمامی متغیرهای حالت و کنترل با زمان نیز همانند نتایج ارائه‌شده در شکل‌های (۱) و (۲) هستند [۱۷، ۸].

است، می‌توان از روش‌های مقیاس‌بندی خطی ساده نیز استفاده کرد. یعنی محدوده تغییرات تمامی متغیرها را با استفاده از نگاشت‌های خطی در یک بازه یکسان قرار داد.

## حل یک مثال

اکنون به منظور بررسی روش بیان‌شده، یک مثال را مطرح و حل می‌نماییم. در این مثال می‌خواهیم انتقال مداری بهینه را برای یک وسیله فضایی با وزن N ۱۰۰۰، نیروی تراست ناچیز N ۴/۵ و ضربه ویژه سوخت s ۴۵۰ به‌دست آوریم. مدار مبدأ در این مثال، یک مدار دایره‌ای با ارتفاع ۲۷۸ Km و شیب  $28/5^\circ$  بوده و مدار مقصد، یک مدار بیضوی با ارتفاع اوج ۳۹۷۲۵ Km، ارتفاع حضیض ۶۴۸ Km شیب  $63/4^\circ$  و آرگومان حضیض  $27^\circ$  است.

با استفاده از روابط موجود برای تبدیل المان‌های مداری کلاسیک به المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده، می‌توان شرایط مرزی این مسئله را به‌دست آورد:

جدول ۱- شرایط مرزی

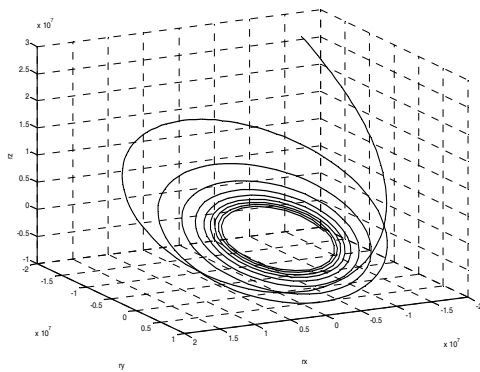
| شرایط ابتدایی                | شرایط انتهایی               |
|------------------------------|-----------------------------|
| $p = 12194238/675 \text{ m}$ | $p = 6655941/787 \text{ m}$ |
| $h = -0.254$                 | $\sqrt{f^2 + g^2} = 0.736$  |
| $f = g = k = 0$              | $\sqrt{h^2 + k^2} = 0.618$  |
| $L = \pi$                    | $fh + gk = 0$               |

همانگونه که در جدول (۱) ملاحظه می‌شود، شرایط انتهایی به صورت رابطه‌هایی میان متغیرهای حالت است و مقادیر ثابتی برای این متغیرها در نظر گرفته نمی‌شود. مقادیر ثابت لازم برای حل این مثال در جدول (۲) ارائه شده است:

جدول ۲- مقادیر ثابت

| واحد                    | مقدار                      | پارامتر  |
|-------------------------|----------------------------|----------|
| $\text{m/s}^2$          | ۹/۸۰۶۶۵                    | $g_0$    |
| m                       | ۶۳۷۸۱۴۰                    | $R_E$    |
| $\text{m}^3/\text{s}^2$ | $3/986.13 \times 10^{14}$  | $\mu$    |
|                         | -۵۰                        | $\tau_L$ |
|                         | $1.082/639 \times 10^{-6}$ | $J_2$    |
|                         | $-2/565 \times 10^{-6}$    | $J_3$    |
|                         | $-1/6.8 \times 10^{-6}$    | $J_4$    |

به منظور دستیابی به حل دقیق بهینه مثال مذکور، ۴۰۰ گره با فواصل زمانی مساوی در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از روش



شکل ۳- نمای سه‌بعدی مسیر در دستگاه مختصات اینرسی

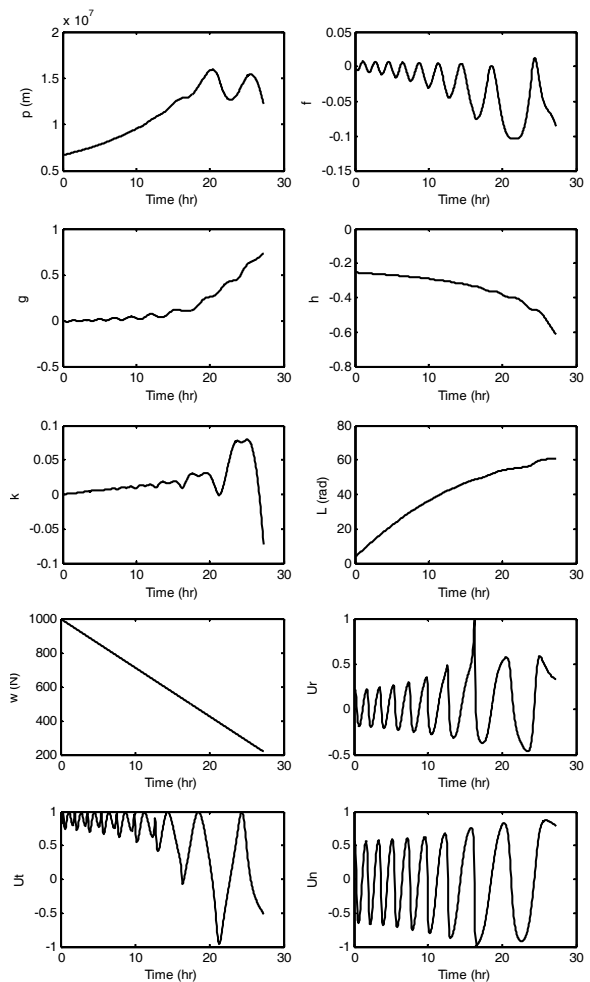
از مقایسه نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله با نتایج به‌دست‌آمده بتز می‌توان چنین نتیجه گرفت که با تعداد گره‌های کم نیز می‌توان به حل دقیق و قابل قبول دست یافت، مشروط بر اینکه فرآیند مقیاس‌بندی متغیرها و نیز انتخاب متغیرهای حالت به درستی صورت گرفته باشد. انتخاب المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده کمک می‌کند تا فرآیند حل دچار تکینگی نشود و نیاز به روش‌هایی برای رفع تکینگی نباشد. مقیاس‌بندی مطلوب نیز کمک می‌کند تا با تعداد محدودی گره زمانی، بتوان به دقت قابل قبولی از حل دست یافت.

### نتیجه‌گیری

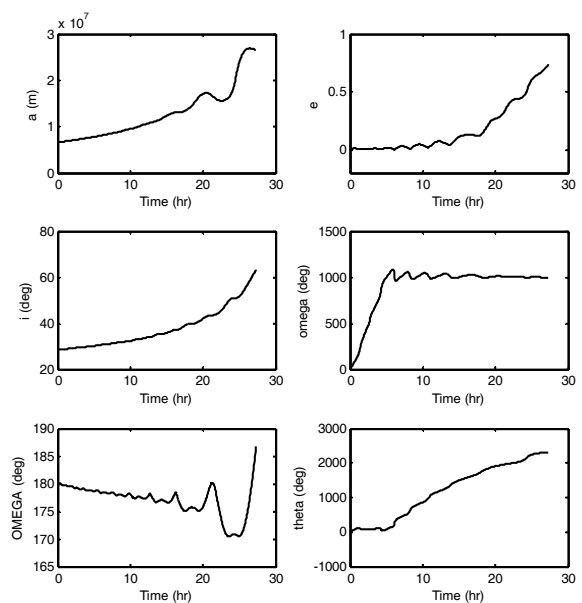
در مقاله حاضر، مسئله بهینه‌سازی انتقال مداری بهینه با تراست کم با بهره‌گیری از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده، روش هم‌نشانی مستقیم و برنامه‌ریزی غیرخطی به صورت دقیق حل شد.

استفاده از المان‌های مداری اعتدالی اصلاح‌شده کمک زیادی در حل سریع و دقیق این مسئله می‌کند، زیرا در هنگام حل هیچگونه تکینگی رخ نمی‌دهد. براین اساس، دیگر نیازی به استفاده از روش‌های مختلف برای رفع تکینگی وجود ندارد. با توجه به اینکه این روش‌ها عموماً منجر به تغییر مقادیر متغیرها در نقاط تکینه می‌شوند، در نتیجه سبب طولانی‌تر شدن و پیچیده‌تر شدن فرآیند بهینه‌سازی می‌شوند.

با استفاده از روش هم‌نشانی مستقیم، این مسئله کنترل بهینه، به‌رغم دینامیک بسیار غیرخطی، نوسانی و پیچیده خود به صورت دقیق حل شده است. همانگونه که می‌دانیم روش‌های متعددی برای حل مسائل کنترل بهینه وجود دارد، لیکن تعداد زیادی از این روش‌ها اساساً قادر به حل مسئله ای به این پیچیدگی نیستند. کارایی روش هم‌نشانی مستقیم در این مقاله به وضوح مشخص است که می‌تواند بدون هیچگونه ساده‌سازی در ساختار مسئله، آن را به صورت دقیق حل کند. در روش هم‌نشانی مستقیم به دلیل امکان پیاده‌سازی کاملاً عددی، می‌توان از مدل‌ها و معادلات بسیار پیچیده ای در تعریف مسائل استفاده کرد. این در حالی است که در روش‌های



شکل ۱- تغییرات متغیرهای حالت و کنترل بر حسب زمان



شکل ۲- تغییرات المان‌های مداری کلاسیک بر حسب زمان

- [7] Pourtakdoust, S. H. and Jalali, M. A., "Thrust Limited Optimal Three Dimensional Spacecraft Trajectories", *International Journal of Engineering*, Vol.14, No. 1, pp. 81-90.
- [8] Betts, J. T., "Using sparse nonlinear programming to compute low thrust orbit transfers", *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vo. 41, pp. 349-371, 1993.
- [9] Betts, J. T., "Survey of numerical methods for trajectory optimization", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, pp. 193-207, 1998.
- [10] Betts, J. T., "Very low thrust trajectory optimization", in *High Performance Scientific and Engineering Computing, Proceedings of the International FORTWIHR Conference on HPSEC*, Munich, 1998.
- [11] Betts, J. T., "Very low thrust trajectory optimization using a direct SQP method", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 120, pp. 27-40, 2000.
- [12] Zondervan, K. P., Wood, L. J. and Caughey, T. K., "Optimal low-thrust, three-burn orbit transfers with large plane changes", *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 32, No.4, pp. 407-428, 1984.
- [13] Kluever, C. A. and Pierson, B. L., "Optimal low-thrust Earth-Moon transfers with a switching function", *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 42, No. 3, pp. 269-284, 1994.
- [14] Schoenmaekers, J., Horas, D. and Pulido, J. A., "SMART-1 with solar electric propulsion to the Moon", *In Proceedings of the 16th International Symposium on Space Flight Dynamics*, California, pp. 114-120, 2001.
- [15] Walker, M., Ireland, B. and Owens, J., "A set of modified equinoctial orbit elements", *Journal of Celestial Mechanics*, Vol. 36, pp. 409-419, 1985.
- [16] Betts, J. T., "Survey of numerical methods for trajectory optimization", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No.2, pp. 193-207, 1998.
- [17] Betts, J. T., "Practical methods for optimal control using nonlinear programming", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2001.
- [18] VonStryk, O. and Bulirsch, R., "Direct and indirect methods for trajectory optimization", *Annals of Operations Research*, Vol. 37, pp. 357-373, 1992.
- [19] Wächter, A., *Introduction to IPOPT*, Carnegie Mellon University, 2008.
- [20] Wächter, A. and Biegler, L. T., "On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming", *Journal of Mathematical Programming*, Vol. 106, No. 1, pp. 25-57, 2006.
- [21] Wächter, A., An interior point algorithm for large scale nonlinear optimization with applications in process engineering, PhD thesis, Carnegie Mellon University, Pennsylvania, 2002.

غیرمستقیم به دلیل وجود فرآیندهای تحلیلی، چنین امکانی وجود ندارد.

در این مقاله، برخلاف رویکرد رایج در بهینه‌سازی مسیر انتقال مداری مبنی بر تفکیک مسیر، یک مسیر بهینه یکتواخت و پیوسته به دست آمده است. این مسیر سه‌بعدی و فضایی می‌تواند منجر به مصرف سوخت کمتری نسبت به مسیرهای تفکیکی گردد. البته، این یکپارچگی و سه‌بعدی بودن مسیر سبب پیچیده‌تر شدن فرآیند بهینه‌سازی می‌گردد.

به منظور حل مسئله گسسته‌سازی شده، از روش‌های گوناگون بهینه‌سازی می‌توان بهره برد، اما به دلیل در اختیار بودن معادلات حرکت و امکان تعریف ماتریس‌های ژاکوبین و هسیان، استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی می‌تواند منجر به تولید دقیق و سریع پاسخ‌های بهینه گردد. البته باید توجه داشت که استفاده از هر روش، مستلزم دقت بسیار در تعیین پارامترهای کلیدی آن روش است.

یکی از نکات حائز اهمیت در مقاله حاضر، جامعیت آن است. با استفاده از رویکرد در نظر گرفته شده و معادلات حرکت ارائه شده، می‌توان مسائل گوناگونی را در حوزه بهینه‌سازی مسیرهای فضایی حل کرد. از این رو مقاله حاضر می‌تواند زمینه‌ساز حل مسائل مختلفی در آینده شود.

## مراجع

- [1] Kechichian, J. A., "Optimal low-thrust transfer using variable bounded thrust", *Acta Astronautica*, Vol. 36, No. 7, pp. 357-365, 1995.
- [2] Guelman, M., "Earth to Moon transfer with a limited power engine", *American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, Scottsdale, Arizona, 1994.
- [3] Guelman, M. "Earth to Moon transfer with a limited power engine", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.18, No 5, pp. 1133-1138, 1995.
- [4] Oberle, H. J. and Taubert, K., "Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 95, No 2, pp. 243-262, 1997.
- [5] Nah, R. S. and Vadali, S. R., "Fuel-optimal low-thrust three-dimensional Earth-Mars trajectories", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 6, pp. 1100-1107, 2001.
- [6] Colasurdo, G. and Casalino, L. "Optimal low-thrust maneuvers in presence of Earth shadow", *American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Rhode Island, 2004.