

# مانور سه‌محوره ماهواره الاستیک همراه با کنترل فعال ارتعاشات

محمد سینجلی<sup>۱\*</sup>، جعفر روشنی‌یان<sup>۲</sup> و علی غفاری<sup>۳</sup>

۱- سازمان فضایی ایران

۲- دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

\*خ آفریقا، خ سایه

msayanjali@yahoo.com

در این مقاله، معادلات حرکت وضعی مانور سه‌محوره ماهواره الاستیک - با استفاده از روش اجزای محدود برای بیان جابه‌جایی ضمیمه الاستیک - استخراج شده است. به‌منظور انجام مانور وضعیت، یک کنترلر برای مانور وضعیت ماهواره طراحی شده است و کنترلر جداگانه‌ای برای حذف ارتعاشات ضمیمه الاستیک که به‌دلیل عملکرد سیستم کنترل وضعیت ایجاد می‌شود، طراحی شده است. از ترکیب دو روش مد لغزشی و بازگشت به عقب به‌منظور طراحی کنترلر وضعیت استفاده شده است. کنترلر ارتعاشات با استفاده از روش فیدبک مثبت مکان طراحی شده و از پیزوالکتریک به‌عنوان سنسور و عملگر برای کنترل فعال ارتعاشات استفاده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** ماهواره الاستیک، مانور سه‌محوره، کنترل مدلغزشی، کنترل فعال ارتعاشات

## مقدمه

به‌صورت تحلیلی [۱] یا با استفاده از نرم‌افزارهای اجزای محدود محاسبه کرد. روش‌های متفاوت کنترلی به‌منظور طراحی کنترلر وضعیت ماهواره الاستیک به‌کارگرفته شده است. در مقاله‌های [۲] و [۴] از روش کنترل بهینه استفاده شده است. در این مقالات معادلات خطی وضعیت به‌کارگرفته شده ولی بحث مقاوم بودن کنترلر مدنظر قرار نگرفته است. در [۴] کنترلر بدون خطی‌سازی معادلات وضعیت و با استفاده از تئوری لیاپانوف طراحی شده است. کنترلر مدلغزشی در [۵] و [۶] مورد استفاده قرار گرفته است. در مقاله‌های [۷] و [۸] از روش‌های کنترل مقاوم و با مدل‌سازی عدم قطعیت، کنترلر طراحی شده است. در [۹] از ترکیب دو کنترلر جداگانه به‌منظور انجام مانور وضعیت ماهواره الاستیک استفاده شده است. به‌طوری‌که یک کنترلر برای تغییر جهت ماهواره و کنترلر دیگر به‌منظور حذف ارتعاشات ضمیمه الاستیک - با استفاده از عملگر و سنسور پیزوالکتریک - استفاده شده است. در این مقاله نیز از همین استراتژی استفاده شده است. به‌طوری‌که از ترکیب دو

ماهواره‌ها به‌منظور تولید توان الکتریکی ملزم به استفاده از آرایه‌های خورشیدی هستند و در صورتی‌که مساحت سطوح جانبی ماهواره برای چسباندن سلول‌های خورشیدی کافی نباشد از آرایه‌های خورشیدی بازشونده استفاده می‌شود. به‌دلیل محدودیت جرمی در طراحی ماهواره‌ها این آرایه‌های خورشیدی از مواد با چگالی کم ساخته می‌شوند و در نتیجه با تحریکات کوچک همانند اغتشاشات خارجی یا با حرکت وضعی ماهواره مدهای ارتعاشی این آرایه‌ها تحریک می‌شود و به‌دلیل خاصیت میرایی پایین آنها این ارتعاشات تا زمان نسبتاً طولانی باقی می‌ماند. در مدل‌سازی و طراحی کنترلر وضعیت این کلاس از ماهواره‌ها، حتماً باید خاصیت الاستیک بودن ضمامم در نظر گرفته شود. در صورتی‌که کنترلر بدون در نظر گرفتن این خاصیت طراحی شود، می‌تواند باعث ایجاد ناپایداری دینامیکی سیستم شود. معادلات حرکت وضعیت ماهواره الاستیک را می‌توان

$$e = dc^E \quad (2)$$

$d$  ثابت کرنش پیزوالکتریک و  $c^E$  ماتریس شامل خواص فیزیکی پیزوالکتریک همانند مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و... است.  $\varepsilon^S$  ماتریس ثابت دی الکتریک ماده است. خواص ماده پیزوالکتریک در جدول (۱) بیان شده است.

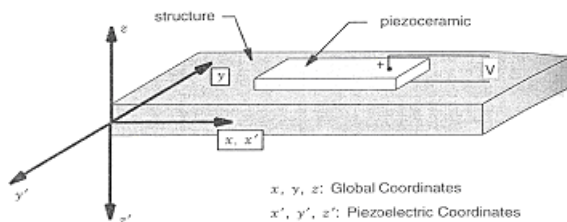
جدول ۱- خواص فیزیکی ماده پیزوالکتریک

| Property                     | Symbol   | Value                 | Unit     |
|------------------------------|----------|-----------------------|----------|
| Strain constant              | $d_{31}$ | $166 \times 10^{-12}$ | $(m/V)$  |
|                              | $d_{32}$ | $166 \times 10^{-12}$ |          |
|                              | $d_{33}$ | $360 \times 10^{-12}$ |          |
| Relative dielectric constant | $K_3$    | 1700                  |          |
| Young's modulus              | $E_{11}$ | $6.3 \times 10^{10}$  | $N/m^2$  |
| Density                      | $\rho$   | 7600                  | $Kg/m^3$ |

### معادلات مانور تک محوره

المان تیر را همانند شکل (۲) در نظر بگیرید که روی آن پیزوالکتریک نصب شده است. اصل تعمیم یافته همیلتون برای سازه پیزوالکتریکی برابر است با [۱]:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V + W_e) + \delta W] dt = 0 \quad (3)$$



شکل ۲- المان پیزوالکتریکی

به طوری که  $T$  انرژی جنبشی سیستم،  $V$  انرژی پتانسیل،  $W_e$  انرژی الکتریکی سیستم و  $W$  بیانگر کار نیروهای غیر پایستار است:

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s (\dot{x} + \dot{w})^2 + \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p (\dot{x} + \dot{w})^2$$

$$V = \frac{1}{2} \int_{V_s} S^T(x) T(x) + \frac{1}{2} \int_{V_p} S^T(x) T(x)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_p} E^T(x) D(x)$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n_f} f(x_i) \delta w(x_i) + \sum_{j=1}^{n_q} q_j \delta \varphi(x_j) + u \delta \theta \quad (4)$$

روش کنترلی بازگشت به عقب و کنترلر مدلفزشی، کنترلر وضعیت طراحی شده است و از روش PPF با استفاده از عملگر و سنسور پیزوالکتریک، ارتعاشات به صورت فعال کنترل شده است.

## مدل سازی ماهواره الاستیک همراه با پیزوالکتریک

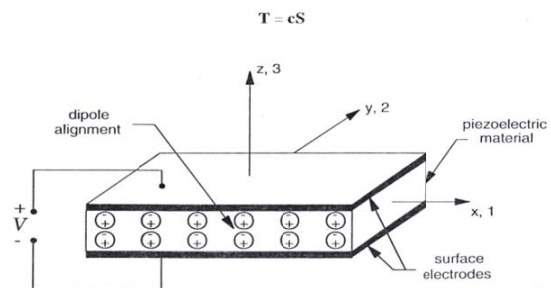
مدل ماهواره شامل یک بخش صلب مرکزی است که به آن دو ضمیمه الاستیک متصل شده است. ضمیمه‌های الاستیک به صورت تیر اویلر- برنولی یک سردرگیر- یک سر آزاد مدل شده است. جابه جایی ضمیمه الاستیک فقط در راستای محور  $y$  در نظر گرفته شده است. در ابتدا معادلات حرکت وضعی ماهواره به نحوی که فقط در صفحه  $xz$  بچرخد استخراج شده و در ادامه نحوه تعمیم این معادله به معادلات مانور سه محوره بیان شده است. برای استخراج معادلات حرکت وضعیت، در ابتدا معادله حرکت یک المان تیر که روی آن پیزوالکتریک نصب شده، استخراج شده و در ادامه معادلات حرکت کل ماهواره محاسبه شده است.

### مدل سازی پیزوالکتریک

در شکل (۱)، هندسه شماتیک پیزوالکتریک نشان داده شده است. هنگامی که به دو سر پیزوالکتریک ولتاژ اعمال شود مولکول‌های داخلی pzt جابه جا شده و باعث تغییر شکل سازه می‌شود، به این خاصیت، خاصیت مستقیم پیزوالکتریک گفته می‌شود. این مواد هنگامی که تحت کرنش یا تغییر شکل قرار بگیرند در آنها بار الکتریکی ایجاد می‌شود که به این خاصیت، خاصیت معکوس پیزوالکتریک گفته می‌شود. معادلات حاکم بر رفتار pzt عبارتند از [۱۰]:

$$D = \varepsilon^S E + e S$$

$$T = -e^T E + c^E S \quad (1)$$



شکل ۱- هندسه شماتیک پیزوالکتریک

$D$  میزان بار الکتریکی تولید شده بر واحد سطح (charge/area)،  $E$  میدان الکتریسته،  $S$  کرنش و  $T$  تنش است.  $e$  ثابت ماده پیزوالکتریک است که می‌توان به صورت (۲) بیان کرد:

$$c^E = \begin{bmatrix} \frac{E_p}{1-\nu_p^2} & \frac{E_p \nu_p}{1-\nu_p^2} & 0 \\ \frac{E_p \nu_p}{1-\nu_p^2} & \frac{E_p}{1-\nu_p^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_p}{2(1-\nu_p)} \end{bmatrix} \quad (۹)$$

به ترتیب نسبت پواسون و مدول یانگ است. ماتریس چرخش میدان الکتریکی  $R_E$  برابر است با:

$$R_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

اپراتور دیفرانسیل الکتریکی  $L_\varphi^T$  بیانگر پلورازسیون در راستای  $z$  است و برابر است با:

$$L_\varphi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

برای دستگاه مختصاتی که در شکل (۱) نشان داده شده است ماتریس ثابت کرنش پیزوالکتریک برابر است با:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

ماتریس ظرفیت پیزوالکتریک برابر است با:

$$C_p = \int_{V_p} \Phi_v^T(x) [L_\varphi^T R_E^T \varepsilon^S R_E L_\varphi] \Phi_v(x) dV_p \quad (۱۳)$$

ماتریس ثابت دی الکتریک پیزوالکتریک برابر است با:

$$\varepsilon^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1^S \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

با فرض اینکه ولتاژ فقط در یک راستای پیزوالکتریک اعمال می‌شود آنگاه ماتریس ظرفیت خازن برابر است با:

$$C_p = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1^S A_p}{h_p} \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

به ترتیب ضخامت و مساحت پیزوالکتریک است. با اسمبل کردن المان‌ها معادلات حرکت مربوط به مانور تک محوره ماهواره الاستیک همراه با سازه پیزوالکتریک به دست می‌آید.

### معادلات وضعیت مانور سه محوره

در این بخش معادلات مربوط به مانور سه محوره ماهواره الاستیک استخراج شده است. برای استخراج معادلات حرکت از معادله اویلر استفاده شده است. معادله اویلر بیان می‌کند که نرخ تغییر اندازه

در روابط فوق  $S$  کرنش،  $T$  تنش،  $E$  میدان الکتریکی،  $D$  بار الکتریسیته،  $u$  ورودی کنترلی و  $\theta$  میزان چرخش صلب است. مقدار جابه‌جایی در راستای یک المان و پتانسیل الکتریکی در راستای المان پیزوالکتریک با استفاده از روش اجزای محدود با معادله (۵) بیان می‌شود.  $\varphi_r$  شکل مد،  $r(t)$  جابه‌جایی و چرخش در انتهای المان،  $\varphi_v$  شکل مد برای توزیع پتانسیل الکتریکی و  $\nu$  مقدار پتانسیل در انتهای المان است.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^4 \varphi_r^i(x) r(t) \quad (۵)$$

$$\varphi(x,t) = \sum_{i=1}^m \varphi_v^i(x) \nu(t)$$

با جایگذاری (۵) در (۴) و با جایگذاری در (۳) معادلات حرکت المان تیر پیزوالکتریک در حال چرخش به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} M_{\theta\theta}^s + M_{\theta\theta}^p & M_{\theta q}^s + M_{\theta q}^p \\ M_{q\theta}^s + M_{q\theta}^p & M_{qq}^s + M_{qq}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_s + K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta \end{bmatrix} \nu = \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \end{bmatrix} f \quad (۶)$$

$$q = \Theta^T r + C_p \nu$$

به طوری که  $q$  میزان بار الکتریسته است که در پیزوالکتریک تولید شده است. نمادهایی که تاکنون استفاده نشده است عبارتند از:

$$M_{qq}^p = \int_{V_p} \Phi_r^T(x) \rho_s(x) \Phi_r(x) dV_s(x)$$

$$K_p = \int_{V_p} [L_w \Phi_r(x)]^T R_S^T c^E R_S [L_w \Phi_r(x)] dV_p(x) \quad (۷)$$

$$\Theta = \int_{V_p} [L_w \Phi_r(x)]^T R_S^T e^T [R_E L_\varphi \Phi_v(x)] dV_p(x)$$

$$C_p = \int_{V_p} \Phi_v^T(x) [L_\varphi^T R_E^T \varepsilon^S L_\varphi] \Phi_v(x) dV_p(x)$$

روابط فوق برای هر المان پیزوالکتریک اعم از تیر، صفحه و ... صادق است.

$R_S$  ماتریس چرخش کرنش است که مطابق با دستگاه مختصاتی که در شکل (۱) نشان داده شده است برابر است با

$$R_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (۸)$$

ماتریس سختی پیزوالکتریک  $c^E$  برابر است با:

$$H_f = \int_{M_{elastic}} \vec{R} \times \dot{\vec{R}} dm \quad (19)$$

$$H_{tip} = m_t \vec{R} \times \dot{\vec{V}} \Big|_{x=L}$$

$\dot{\vec{R}}$  مشتق زمانی بردار  $R$  در دستگاه مختصات اینرسی است. به منظور استفاده از معادلهٔ اوپلر باید نرخ تغییر زمانی اندازهٔ حرکت زاویه‌ای محاسبه شود، یعنی:

$$M = \frac{dH}{dt} \Big|_I = \dot{H}_{c,I} + 2 \frac{d}{dt} \left( \int_{M_e} \vec{R} \times \dot{\vec{R}} dm \right) \Big|_I \quad (20)$$

$$2\dot{H}_{tip,I}$$

به طوری که  $I$  بیانگر مشتق در دستگاه مختصات اینرسی است. در رابطهٔ فوق اندازهٔ حرکت برای یک جزء الاستیک و یک جرم متمرکز محاسبه شده است و با فرض اینکه دو ضمیمه الاستیک از لحاظ خصوصیت‌های هندسی و فیزیکی یکسان باشند، به منظور محاسبهٔ اندازهٔ حرکت زاویه‌ای کل، مقدار اندازهٔ حرکت هر جزء در عدد ۲ ضرب شده است.

چون  $H_c$  (اندازهٔ حرکت زاویه‌ای بخش صلب) برداری در دستگاه مختصات بدنی است، بنابر قوانین دینامیک کلاسیک مشتق زمانی بردار  $H_c$  در دستگاه مختصات اینرسی برابر است با:

$$\dot{H}_{c,I} = \dot{H}_{c,B} + \omega \times H_c \quad (21)$$

مشتق زمانی اندازهٔ حرکت بخش الاستیک برابر است با:

$$\dot{H}_{f,I} = \int_{M_{elastic}} \vec{R} \times \frac{d^2 R}{dt^2} \Big|_I dm \quad (22)$$

شتاب المان  $dm$  در دستگاه مختصات اینرسی است که برابر است با:

$$a = \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \Big|_I = \ddot{R} \Big|_b + \dot{\omega} \times R + 2\omega \times \dot{R} + \omega \times (\omega \times R) = \quad (23)$$

$$= a_1 \hat{b}_1 + a_2 \hat{b}_2 + a_3 \hat{b}_3$$

با استفاده از قانون اوپلر خواهیم داشت:

$$\dot{H} = \dot{H}_c + \dot{\omega} \times H_c + 2 \int R \times a dm + 2m_t R \times a \Big|_{x=l} = u \quad (24)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۲۳) در رابطهٔ (۲۴) خواهیم داشت:

حرکت زاویه‌ای جسم برابر است با مقدار مماس خارجی که به جسم اعمال شده است، به عبارت دیگر:

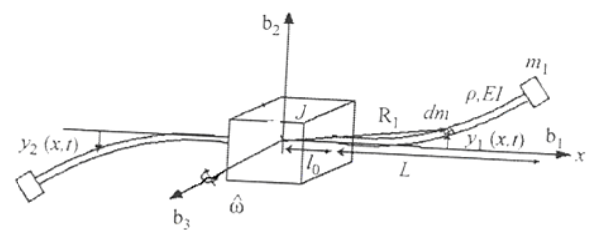
$$M = \frac{d^2 H}{dt^2} \Big|_N \quad (16)$$

دستگاه مختصات اینرسی ( $N$ ) است. اندازهٔ حرکت زاویه‌ای ماهوارهٔ الاستیک از سه بخش تشکیل شده است (شکل ۳):

۱. اندازهٔ حرکت زاویه‌ای بخش صلب

۲. اندازهٔ حرکت زاویه‌ای بخش الاستیک

۳. اندازهٔ حرکت زاویه‌ای جرم‌های متمرکز انتهایی (در صورت وجود)



شکل ۳- هندسه شماتیک ماهواره

مطابق با مرجع [۳] اندازهٔ حرکت بخش صلب برابر است با:

$$H_c = I_1 \omega_1 \hat{b}_1 + I_2 \omega_2 \hat{b}_2 + I_3 \omega_3 \hat{b}_3 \quad (17)$$

$I_1, I_2, I_3$  ممان‌های اصلی اینرسی و  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  سرعت زاویه‌ای ماهواره است. (رابطهٔ فوق با این فرض به دست آمده است که محور ممان‌های اصلی اینرسی بر محورهای دستگاه مختصات بدنی منطبق باشند).

برای به دست آوردن اندازهٔ حرکت بخش الاستیک و جرم متمرکز انتهایی، بردار مکان المان جرمی  $dm$  روی ضمیمهٔ الاستیک را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R = x \hat{b}_1 + w \hat{b}_2 \quad (18)$$

$x$  فاصلهٔ المان جرمی  $dm$  تا مبدأ مختصات و  $w$  میزان جابه‌جایی المان در راستای محور  $\hat{b}_2$  به دلیل ارتعاش ضمیمه است. (در این مقاله فرض شده است که المان جرمی  $dm$  فقط در راستای محور  $\hat{b}_2$  جابه‌جا شود). اندازهٔ حرکت بخش الاستیک  $H_f$  و جرم متمرکز انتهایی  $H_{tip}$  برابر است با:

راستاست و در نتیجه معادله (۲۸) بیانگر حرکت مانور تک محوره است که صورت کلی آن در مراجع موجود است یا به عبارت دیگر معادله (۲۸) جایگزین بخش سوم معادله (۲۵) شده است.

### طراحی کنترلر

در این مقاله با استفاده از ترکیب دو روش مدل‌گزشی و برگشت به عقب کنترلر وضعیت ماهواره طراحی شده است. هدف کنترلر در این مقاله این است که ماهواره از وضعیت اولیه خود به وضعیت مطلوب (مانور وضعیت) برود و همچنین ارتعاشات به وجود آمده در ضمیمه الاستیک به دلیل حرکت ضمیمه‌ها با استفاده از پیزوالکتریک با سرعت بیشتری میرا گردد. در طراحی سطح لغزش مسئله الاستیک بودن ماهواره لحاظ شده است که در ادامه بیان خواهد شد. با توجه به اینکه میرایی مدهای ارتعاشی ضمیمه الاستیک بسیار پایین است و زمان زیادی برای از بین رفتن این ارتعاشات لازم است و به دلیل اینکه این ارتعاشات در دینامیک وضعیت ماهواره مؤثر است در نتیجه به منظور نشانه‌روی دقیق ماهواره از روش کنترل فعال ارتعاشات برای حذف ارتعاش سیستم استفاده شده است. از پیزوالکتریک به عنوان سنسور و عملگر برای کنترل ارتعاشات استفاده شده است.

### طراحی کنترلر فعال ارتعاشات

معادله ارتعاشی ضمیمه الاستیک با استفاده از معادله (۲۸) به صورت زیر به دست می‌آید

$$M_{rr}\ddot{r} + K_{qq}r = Fv \quad (29)$$

$v$  ولتاژ پیزوالکتریک و  $r$  میزان جابه‌جایی و چرخش در گره‌های المان است. طراحی کنترلر فعال ارتعاشات شامل چندین مرحله است که در ادامه بیان شده است. همان‌طور که از معادله (۲۹) مشخص است، فرم معادله در نظر گرفته شده خطی است اما با توجه به اینکه ارتعاشات ضمیمه الاستیک کوچک است در نتیجه مدل خطی برای سیستم اعتبار خواهد داشت. به علاوه پایداری سیستم کنترلر فعال ارتعاشات در شبیه‌سازی رؤیت شده است.

معادله فوق در مختصات نودال بیان شده است. این معادله برای هر سازه بزرگ می‌تواند از مرتبه ۱۰۰۰ یا بیشتر باشد. به همین جهت طراحی کنترلر با استفاده از معادله (۲۹) کار بسیار سختی است. در ابتدا باید معادله (۲۹) به مختصات مدال تبدیل شود تا بتوان با در نظر گرفتن چند مد اول ارتعاشی سیستم به طراحی کنترلر پرداخت. بعد از این مرحله انتخاب نحوه چیدمان سنسورها و عملگرها پیزوالکتریکی است. چیدمان پیزوالکتریک‌ها به دو صورت

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + \\ 2\left(\int ya_3 dm + m_t la_3(x=l)\right) = u_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_3 - I_2)\omega_1\omega_3 + \\ 2\left(\int xa_3 dm + m_t la_3(x=l)\right) = u_2 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 + \\ 2\left(\int (xa_2 - ya_1) dm + m_t (la_2(x=l) - ya_1(x=l))\right) \\ = u_3 \end{aligned}$$

با تعریف

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left( \int ya_3 dm + m_t la_3 \Big|_{(x=L)} \right) \\ \tau_2 &= \left( \int xa_3 dm + m_t la_3 \Big|_{(x=L)} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\tau_3 = \left( \int (xa_2 - ya_1) dm + \int m_t \left( la_2 \Big|_{(x=L)} - ya_1 \Big|_{(x=L)} \right) \right)$$

فرم ماتریسی معادله (۲۵) برابر است با:

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + 2\tau = u \quad (27)$$

به طوری که  $J = \text{diag}[I_1, I_2, I_3]$  ماتریس ممان اینرسی و به طوری که  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$  ممان وارده بر ماهواره ناشی از ارتعاش ضمیمه‌های الاستیک است. این ممان که ممان عکس‌العملی داخلی نامیده می‌شود، بیانگر ارتباط بین حرکت چرخشی ماهواره و ارتعاش ضمیمه است. معادلات (۲۵) معادلات غیرخطی وضعیت ماهواره الاستیک هستند.

همان‌طور که قبلاً بیان شد، در این مقاله فرض شده است که ارتعاش ضمیمه الاستیک فقط در راستای محور  $b_2$  است و یا به عبارت دیگر فقط چرخش ماهواره حول محور  $b_3$  باعث تحریک مدهای ارتعاشی ضمیمه می‌شود. در نتیجه می‌توان معادله حرکت ماهواره در صفحه را که به وسیله بردارهای  $b_1, b_2$  درست می‌شود ترکیبی از روابط مربوط به مانور تک محوره و اثر ممان ژيروسکوپی در نظر گرفت. در نتیجه می‌توان معادله (۲۵) را با رابطه زیر جایگزین کرد:

$$[M] \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_3 \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ q \end{Bmatrix} = \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_3 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \frac{I_2 - I_1}{I_3} \right) \omega_2 \omega_1$$

با داشتن مقادیر  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  می‌توان از رابطه (۲۶) مقادیر  $\tau_1, \tau_2$  محاسبه کرد و در معادلات (۲۵) جایگزین کرد. به عبارت دیگر در استخراج معادلات فرض شده است که جابه‌جایی ضمیمه الاستیک فقط در یک

کلی تقسیم می‌شود:

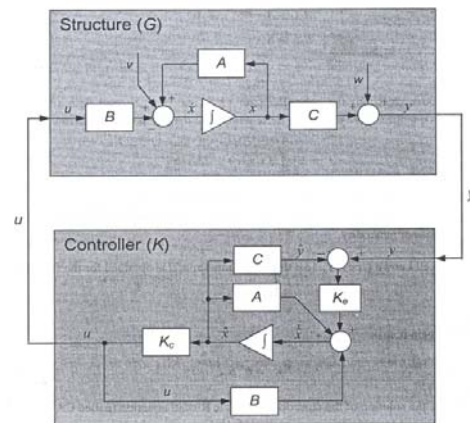
۱. چیدمان مجتمع

۲. چیدمان غیر مجتمع

در چیدمان مجتمع عملگر و سنسور پیزوالکتریکی در یک مکان قرار دارند به این صورت که در بخش پایین سازه الاستیک سنسور و در همان مکان در بخش بالایی سازه عملگر پیزوالکتریکی قرار دارد. در چیدمان غیرمجتمع محل قرارگیری سنسور و عملگر در مکان‌های متفاوت است. برای طراحی کنترلر از روش کنترل بهینه LQG استفاده شده است.

دیاگرام بلوکی سیستم کنترلی LQG در شکل (۴) نشان داده شده است. این سیستم شامل یک فرایند پایدار (یا سازه الاستیک)  $G$  و کنترلر  $K$  است. خروجی اندازه‌گیری شده فرایند  $y$  به کنترلر فرستاده می‌شود. در مورد سازه‌های پیزوالکتریکی خروجی فرایند برابر با ولتاژ خروجی سنسورهای پیزوالکتریکی است. فرایند با معادلات فضای حالت (۳۰) توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx + w \end{aligned} \quad (30)$$



شکل ۴- دیاگرام بلوکی کنترلر LQG

$x$  بردار حالت سیستم است. فرایند توسط ورودی تصادفی  $v$  مغتشش می‌شود و خروجی اندازه‌گیری شده با  $w$  مختلط می‌شود. نویز  $v$  که نویز فرایند نامیده می‌شود دارای کواریانس  $V = E(vv^T)$  و  $w$  نویز اندازه‌گیری است که دارای کواریانس  $W = E(ww^T)$  است.

سیگنال کنترلی متناسب با متغیرهای حالت تخمین زده شده فرایند  $\hat{x}$  است. (با توجه به اینکه متغیرهای حالت فرایند که جابه‌جایی المان‌ها هستند قابل اندازه‌گیری نیستند باید از تخمین این متغیرها استفاده کرد). معادلات تخمین‌گر با توجه به شکل (۴) برابر است با:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}) \quad (31)$$

با استفاده از معادله (۳۱) و شکل (۴) معادله فضای حالت کنترلر از ورودی  $y$  به خروجی  $u$  برابر است با:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - Bk_c - K_e C)\hat{x} + K_e y \\ u &= -K_c \hat{x} \end{aligned} \quad (32)$$

در معادلات فوق بهره‌های کنترلر  $K_c$  و تخمین‌گر  $K_e$  مجهول است. این بهره‌ها به نحوی انتخاب می‌شود که تابع هزینه  $J$  می‌نیم شود:

$$J^2 = E \left( \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) \right) \quad (33)$$

در مرجع [۱۰] نشان داده شده است که تابع هزینه فوق با انتخاب ماتریس کنترلر به صورت زیر می‌نیم می‌شود:

$$\begin{aligned} u &= -K_c \hat{x} \\ K_c &= B^T S_c \end{aligned} \quad (34)$$

$S_c$  جواب معادله ریکاتی جبری کنترل است:

$$A^T S_c + S_c A - S_c B B^T S_c + Q = 0 \quad (35)$$

بهره بهینه تخمین برابر است با

$$K_e = S_e C^T \quad (36)$$

$S_e$  جواب معادله جبری ریکاتی تخمین‌گر است:

$$A S_e + S_e A^T - S_e C^T C S_e + V = 0 \quad (37)$$

### طراحی کنترلر مانور سه‌محوره

در طراحی کنترلر از ترکیب روش بازگشت به عقب و مدل‌گزشی استفاده شده است. در ابتدا پروفیل سرعت زاویه‌ای را که کوآرنیون سیستم را از وضعیت اولیه به وضعیت مطلوب ببرد استخراج می‌شود و با استفاده از کنترلر مد لغزشی و طراحی سطوح لغزش مناسب سرعت زاویه ماهواره بر پروفیل سرعت زاویه مطلوب منطبق می‌شود. البته باید توجه داشت که پروفیل سرعت زاویه در هر لحظه محاسبه می‌شود. برای استخراج پروفیل سرعت زاویه تابع لیاپانوف به صورت زیر تعریف شده است:

$$V = \frac{1}{2} e^T P e \quad (38)$$

$$e_i = q_{i,d} - q_i \quad (i=1,2,3)$$

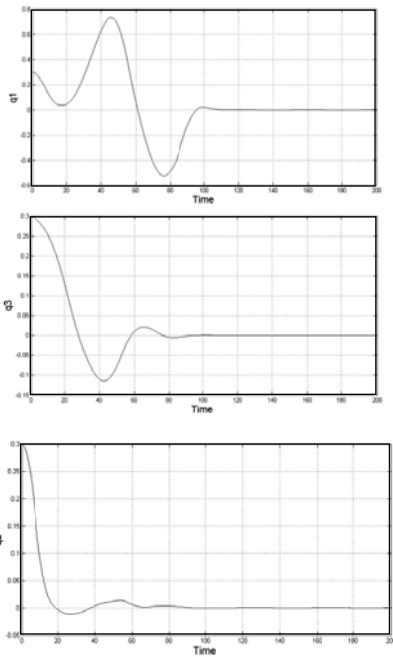
$q_i$  کوآرنیون در لحظه  $t$ ،  $q_{i,d}$  کوآرنیون مطلوب،  $e_i$  خطای کوآرنیون و  $P$  ماتریس مثبت معین است.

جدول ۲- پارامترهای شبیه‌سازی و بهره کنترل

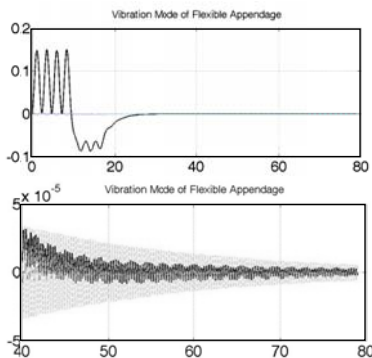
|                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| 5 m                    | طول ضمیمه الاستیک    |
| 662 N/m <sup>2</sup>   | مدول الاستیسته ضمیمه |
| 8.75 kg/m <sup>2</sup> | چگالی ضمیمه          |
| 2                      | تعداد پیزوالکتریک    |

$$K_e = \begin{bmatrix} -0.0249 & -0.0029 & -0.4204 & 0.9934 \\ 0.0029 & 0.0064 & 0.9073 & -0.1144 \end{bmatrix}$$

$$K_c = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$



شکل ۵- پارامترهای CRP بدون کنترل ارتعاشات



شکل ۶- مدهای ارتعاشی همراه با کنترل ارتعاشات

$\dot{V}$  (مشتق تابع لیپانوف نسبت به زمان) برابر است با:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) \quad (39)$$

$$\dot{e} = -\dot{q}_i$$

از رابطه سینماتیک جسم در فضای سه بعدی خواهیم داشت:

$$\dot{q} = Q\omega \quad (40)$$

با جایگذاری (۴۰) در (۳۹) خواهیم داشت:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (-Q\omega)^T P e + \frac{1}{2} e^T P (-Q\omega) \quad (41)$$

باید  $\omega$  (بردار سرعت زاویه مطلوب) را به نحوی انتخاب کنیم

که  $\dot{V} < 0$  باشد. با انتخاب

$$\omega = Q^T P e \quad (42)$$

و جایگذاری (۴۲) در (۴۱) خواهیم داشت:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} (e^T P^T Q Q^T P e + e^T P Q Q^T P e) \quad (43)$$

ترم داخل پرانتز مثبت معین است و در نتیجه  $\dot{V} < 0$

تا این مرحله پروفیل سرعت زاویه در لحظه  $t$  استخراج شده

است. سطوح لغزش به نحوی طراحی می‌شود که سرعت زاویه‌ای

ماهواره منطبق بر سرعت زاویه‌ای مطلوب باشد.

سطوح لغزش به صورت زیر انتخاب شده است:

$$s_i = \omega_i - \omega_{i,d} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (44)$$

و بردار کنترل به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$u_i = A \operatorname{sign}(s_i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (45)$$

## شبیه‌سازی

با استفاده از نرم‌افزار متلب / سیمولینک مدل دینامیکی ماهواره

الاستیک و کنترلر شبیه‌سازی شده است و نتایج شبیه‌سازی در

دو حالت مختلف ارائه شده است (شکل ۵ و جدول ۲). در حالت

اول از روش کنترلر فعال ارتعاشات استفاده نشده است و در

حالت دوم این روش مورد استفاده قرار گرفته است. همان‌طور که

در شکل‌های (۹) و (۱۰) دیده می‌شود، در صورتی که از روش

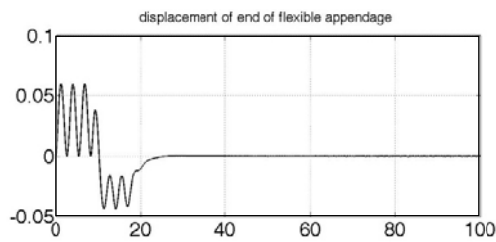
کنترل ارتعاشات استفاده شود جابه‌جایی انتهایی ضمیمه

الاستیک کمتر خواهد شد. این امر را می‌توان در شکل‌های (۶)

و (۷) نیز مشاهده کرد به طوری که مقدار مدهای ارتعاشی در

صورتی که از روش کنترلر فعال ارتعاشات استفاده نشود، دو برابر

حالتی است که از این روش استفاده شود.



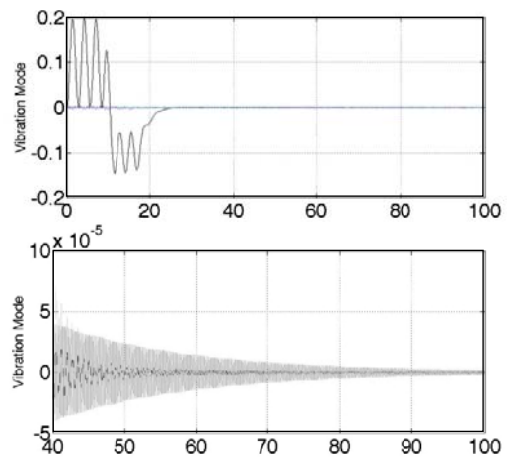
شکل ۱۰- جابه‌جایی انتهای ضمیمه بدون کنترل ارتعاشات

## نتیجه‌گیری

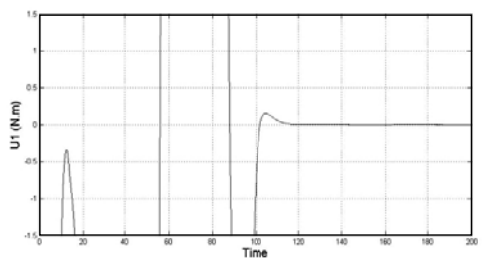
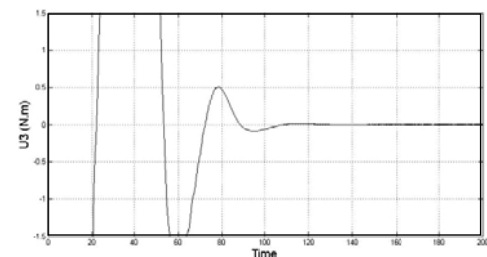
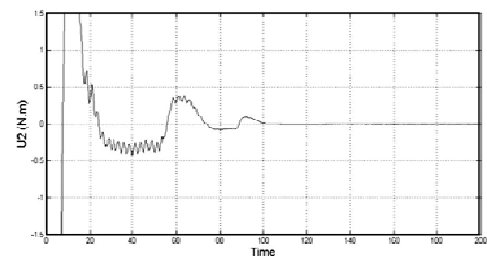
در این مقاله روش مدل‌سازی معادلات حرکت و وضعیت ماهواره که روی سازه آن سنسور و عملگر پیزوالکتریک نصب شده، بیان شده است. کنترلر وضعیت با استفاده از ترکیب روش‌های بازگشت به عقب و مدل‌گزشی طراحی شده است. همان‌طور که شکل‌ها نشان می‌دهد؛ ممان مورد نیاز برای رسیدن به سطوح لغزش تعریف شده نسبتاً بزرگ است که باید در ساختار کنترلر تغییراتی ایجاد شود. همان‌طور که نشان داده شده است، استفاده از کنترلر ارتعاشات باعث می‌شود که مدهای ارتعاشی ضمیمه‌های الاستیک سریع‌تر مستهلک شود.

## مراجع

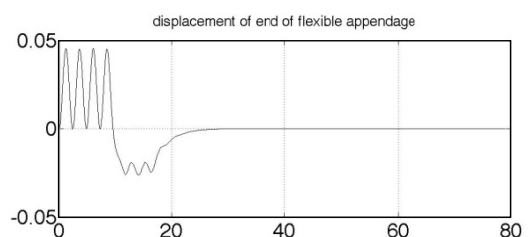
- [1] Junkins, John L., Kim, Youdan. *Introduction to Dynamic and Control of Flexible Structure*, AIAA, 1998.
- [2] Martin, D. and Bryson, E. "Attitude Control of a Flexible Spacecraft," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 3, No. 1, JAN-FEB. 1980.
- [3] Sidi, Marcel J., *Spacecraft Dynamic and Control, A Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, 1995.
- [4] Fujii, H., Ohtsuka, T. and Udou, S., "Mission Function Control for a Slew Maneuver Experiment," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 14, No. 5, 1991.
- [5] Bang, Hyochoong, Cheol-Keun Ha and Hyung Kim, Jin. "Flexible Spacecraft Attitude Maneuver by Application of Sliding Mode Control," *Acta Astronautica*, 2005.
- [6] Hu, Qinglei and Ma, Guangfu. "Variable Structure Control and Active Vibration Suppression of Flexible Spacecraft during Attitude Maneuver," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 9, pp 307-317, 2005.
- [7] Skullestad, Aage and Gilbert, M. "H-Infinity Control of a Gravity Gradient Stabilized Satellite," *Control Engineering Practice*, Vol. 8, pp 975-983, 2000.
- [8] Le Ballois, Sandrine and Duc, Gilles. "H-Infinity Control of an Earth Observation Satellite," *Journal of Guidance, Control and Dynamic*, Vol. 19, No. 3, May-June 1996.
- [9] Hu, Qinglei and Ma, Guangfu. "Variable Structure Control and Active Vibration Suppression of Flexible Spacecraft during Attitude Maneuver," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 9, pp 307-317, 2005.
- [10] Gawronski, Wodek K., *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*, Springer, 2000.



شکل ۷- مدهای ارتعاشی بدون کنترل ارتعاشات



شکل ۸- سیگنال‌های کنترلی



شکل ۹- جابه‌جایی انتهای ضمیمه با کنترل ارتعاشات