

هدایت حلقه‌بسته با قید بردار سرعت نهایی با ضریب وزنی متغیر با زمان برای شکل‌دهی پروفیل دستور شتاب

سید حمید جلالی نائینی

استادیار، گروه مهندسی هوافضا، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

تهران، پل نصر، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده فنی و مهندسی

shjalalinaini@modares.ac.ir

در این تحقیق، حل تحلیلی هدایت حلقه‌بسته با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی با اعمال ضریب وزنی متغیر با زمان در معیار عملکرد حداقل انتگرال مجذور دستور شتاب با استفاده از تئوری کنترل بهینه به دست آمده است. دینامیک سیستم، خطی و از مرتبه دلخواه منظور شده و مدل پسا خطی، اما با ضریب متغیر با زمان فرض شده است. همچنین فرض شده است که اندازه و جهت نیروی پیشران وسیله پروازی قابل تغییر و کنترل باشد. در ادامه، ضرایب وزنی متفاوتی به منظور کاربرد در مأموریت‌های مختلف پیشنهاد و عملکرد قانون هدایت بررسی شده است. ضرایب وزنی بنابر نوع مأموریت ممکن است به گونه‌ای انتخاب شود تا شتاب مانوری در لحظات حداکثر فشار دینامیکی، جدایش مراحل یا در لحظه نهایی صفر یا حداقل شود.

واژه‌های کلیدی: هدایت، کنترل بهینه، حداقل مجذور دستور شتاب، ضریب وزنی متغیر با زمان

مقدمه

در دهه ۶۰ میلادی، تئوری کنترل مدرن به خصوص تئوری کنترل بهینه در مطالعات قوانین هدایت وسایل پروازی به کار برده شد [۴]. تئوری کنترل بهینه یکی از ابزارهای مهم در توسعه قوانین هدایت است. با توجه به این که کنترل بهینه خطی حل عمومی دارد، در ابتدا اغلب مطالعات انجام شده در مسائلی با دینامیک خطی بر مبنای معیار عملکرد حداقل انتگرال مجذور دستور شتاب بوده است. البته وسایل پرتاب ماهواره به دلیل ظاهر شدن عبارات سینوس و کسینوس در معادلات حرکت و عدم کنترل بر اندازه نیروی پیشران از این موضوع مستثنی است و روش حل مسئله در آن بر مبنای معادلات غیرخطی و به طور معمول معیار عملکرد حداقل زمان بوده است.

روش دیگری در منابع و مراجع تحت عنوان هدایت صریح نام‌گذاری شده است. در این روش، هدف این است که با طراحی پروفیل دستور شتاب به صورت تابعی از زمان و معلوم فرض کردن آن، رابطه‌ای به دست آید تا فرم حلقه‌بسته آن را ارائه دهد. این روش را نخستین بار، چری با فرض سیستم کنترل ایده‌آل و با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی ارائه کرد [۵] و طی زمان تکمیل شد. به

قوانین هدایت از لحاظ کنترل شرایط پایانی وسیله پروازی می‌تواند به سه دسته کلی طبقه‌بندی شود. در دسته اول که به طور معمول به آن، قوانین هدایت رهگیری گفته می‌شود، هدف این است که وسیله پروازی به نقطه‌ای ثابت یا متحرک در فضا برسد. در این حالت، بردار سرعت نهایی وسیله پروازی در لحظه نهایی اهمیتی ندارد. این دسته از قوانین هدایت در مرجع [۱] بطور نسبتاً جامعی ارائه شده است. در دسته دوم، علاوه بر رسیدن به نقطه مورد نظر در فضا، زاویه نهایی نیز اهمیت دارد. از این دسته از قوانین هدایت تحت نام قوانین هدایت رهگیری با شکل‌دهی مسیر پرواز نیز نام برده می‌شود. مرجع [۲] به بخشی از این قوانین هدایت اشاره کرده است. اما در دسته سوم، علاوه بر موقعیت نهایی، بردار سرعت نهایی نیز مهم است. دسته اخیر، به طور خلاصه در مراجع [۳] و [۴] ذکر شده است. البته شرایط نهایی در بعضی قوانین هدایت بنابر کاربرد به صورت ترکیبی است. به طور نمونه، زاویه نهایی ممکن است تنها در صفحه قائم یا صفحه افق مقید باشد.

پروفیل دستور شتاب را شکل‌دهی کرد. شکل‌دهی پروفیل دستور شتاب برای هدایت با قید بردار موقعیت نهایی از طریق روابط هدایت صریح ممکن است ساده‌تر باشد؛ اما برای هدایت با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی، استفاده از ضریب وزنی متغیر با زمان بر حسب کاربرد و برای ارضای قیود مسیر ممکن است نتیجه بهتری دهد.

مدل سیستم

معادله حرکت وسیله پروازی که به صورت جرم نقطه‌ای P مدل شده‌است را به صورت زیر در نظر بگیرید [۱۰]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -c(t)\mathbf{v} + \mathbf{a}_c + \mathbf{g}(t) \quad (1)$$

که در آن \mathbf{r} بردار موقعیت، \mathbf{v} بردار سرعت و \mathbf{a}_c بردار شتاب وسیله پروازی ناشی از دستور شتاب \mathbf{u} است. به عبارت دیگر، \mathbf{a}_c آن مقدار از دستور شتاب است که عملاً اجرا شده‌است. کلیه این بردارها نسبت به یک مرجع اینرسی (XYZ) نوشته شده‌است (شکل ۱). همچنین $\mathbf{g}(t)$ نمایانگر بردار شتاب جاذبه است که تابعی برداری از زمان فرض شده‌است. اما در مدل مذکور، شتاب ناشی از نیروی پسا (یا مجموع نیروی پسا و پیشران بر حسب کاربرد و نوع تخمین) به صورت $-c(t)\mathbf{v}$ در مدل زمین غیرچرخان تقریب زده شده‌است. لازم به ذکر است که در مدل مفروض، جهت نیروی پسا به‌طور صحیح منظور شده‌است؛ اما ضریب $c(t)$ با توجه به مسیر وسیله پروازی باید تخمین زده شود. در این خصوص، روابط تقریبی در مرجع [۱۰] ارائه شده است که در اینجا نیز کاربرد دارد.

سیستم کنترل وسیله پروازی به صورت خطی و از مرتبه دلخواه n و با ضرایب متغیر با زمان در نظر گرفته شده‌است. همچنین سیستم کنترل در سه کانال x ، y و z مستقل و یکسان فرض شده‌است. نمایش سیستم کنترل مفروض در فضای حالت در کانال y به صورت

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_{yc} \\ \dot{\mathbf{q}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \mathbf{a}_{12}(t) \\ \mathbf{a}_{21}(t) & \mathbf{a}_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{yc} \\ \mathbf{q}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \mathbf{b}_2(t) \end{bmatrix} u_y \quad (2)$$

نوشته می‌شود. این نوع مدل‌سازی سیستم کنترل برای اولین بار در مسائل هدایت در مراجع [۱۳] و [۱۴] به کار برده شده‌است. در رابطه اخیر، $a_{11}(t)$ و $b_1(t)$ اسکالر، $\mathbf{a}_{12}^T(t)$ ، $\mathbf{a}_{21}(t)$ و $\mathbf{b}_2(t)$ بردارهای $(n-1)$ بعدی و $\mathbf{a}_{22}(t)$ ماتریسی با ابعاد $(n-1) \times (n-1)$ است. همچنین a_{yc} اسکالر و اولین متغیر حالت سیستم کنترل است. پایین‌نویس "y" نمایانگر مؤلفه در کانال y است. بردار $(n-1)$ بعدی \mathbf{q}_y شامل باقی متغیرهای

طور نمونه، روش مذکور برای سیستم کنترل خطی با دینامیک رسته دلخواه برای هدایت میانی و پایانی در مرجع [۶] توسعه یافت. در مسائل کنترل بهینه خطی با قیود نهایی، استفاده از تغییر متغیر خطای تلاش صفر، حل مسئله کنترل بهینه را ساده می‌کند. تغییر متغیر مذکور در مرجع [۷] معرفی و سپس برای کاربرد در قوانین هدایت در مراجع متعددی به کار برده شده‌است. به طور نمونه در مراجع [۶] و [۸] از تغییر متغیر مذکور استفاده شده‌است. این روش برای سیستم با ماتریس ورودی غیرخطی نیز مفید است [۹]. اما موضوع دیگر، تکمیل مدل دینامیکی سیستم در مسئله بهینه‌سازی است. این مدل از اوایل کار روی مسئله در دهه ۶۰ میلادی تاکنون برای حل مسئله کنترل بهینه تکمیل شده‌است. این موضوع به این معنا نیست که مدل دینامیکی ناشناخته بوده و سپس تکمیل شده‌است؛ بلکه برای این که مسئله کنترل بهینه، حل حلقه‌بسته داشته‌باشد، مدل دینامیکی سیستم در ابتدا ساده منظور شده‌است. ساده‌ترین مدل دینامیکی مسئله، معادله یک‌بعدی برای شتاب وسیله پروازی به‌عنوان جرم نقطه‌ای و با فرض کل شتاب وارده برابر دستور شتاب است. در مراحل بعد، مدل‌های دوبعدی و سه‌بعدی و اعمال شتاب جاذبه منظور شده‌است. مشکل اصلی در اعمال نیروهای آیرودینامیکی و نیروی پیشران برای مرحله پروازی در جو غلیظ است. این مدل به تدریج تکمیل شده و در مرجع [۱۰] مدل خطی تکامل‌یافته‌ای برای مسئله ارائه شده که در این تحقیق از آن استفاده شده‌است.

همان‌طور که ذکر شد، دلیل اصلی استفاده گسترده از معیار عملکرد حداقل انتگرال مجذور دستور شتاب، وجود حل عمومی برای مسائل خطی است. یکی از روش‌های بهبود عملکرد، به طور نمونه، به منظور حداقل کردن مصرف سوخت یا حداقل کردن تلفات انرژی جنبشی، بهینه‌سازی ضرایب ناوبری به دست آمده از حل حلقه‌بسته با معیار عملکرد حداقل انتگرال مجذور دستور شتاب است. این کار برای ماژول ماه‌نشین فضاپیماي آپولو انجام شده‌است [۳]. موارد متعددی در این زمینه قابل ذکر است. اما روش دیگر، اعمال ضریب وزنی متغیر با زمان برای مجذور دستور شتاب در معیار عملکرد است. این روش در مرجع [۱۱] برای هدایت با قید بردار موقعیت نهایی و در مرجع [۱۲] برای مسئله هدایت با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی و به‌منظور صفر کردن دستور شتاب نهایی برای سیستم کنترل ایده‌آل ارائه شده‌است.

در این مقاله، ضریب وزنی متغیر با زمان در معیار عملکرد حداقل مجذور دستور شتاب برای مسئله هدایت بهینه با مدل تکامل‌یافته خطی و با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی (با فرض قابل تغییر و کنترل بودن بردار نیروی پیشران) اعمال شده‌است. با انتخاب تابع مناسب برای ضریب وزنی متغیر با زمان می‌توان

$$\alpha_i(t_f, t) = \int_t^{t_f} \beta_i(t_f, \xi) [b_1(t)\phi_{11}^A(\xi, t) + \Phi_{12}^A(\xi, t)\mathbf{b}_2(t)] d\xi \quad (7)$$

$$\beta_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^{\eta} c(\xi)d\xi\right) d\eta \quad (8)$$

$$\beta_2(t, t_0) = \exp\left(-\int_{t_0}^t c(\xi)d\xi\right) \quad (9)$$

در حالتی که تنها بردار موقعیت نهایی مقید باشد، تنها از رابطه (۵) استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که مدل دینامیکی وسیله پروازی در این تحقیق و روابط (۹-۱) از مرجع [۱۵] اقتباس شده است.

هدایت بهینه بدون قید سرعت نهایی

در ابتدا، روابط قانون هدایت بهینه برای سیستم (۴) بدون قید سرعت نهایی استخراج می‌شود. همان‌طور که ذکر شد، در مسائل کنترل بهینه خطی با قیود نهایی، استفاده از تغییر متغیر خطای تلاش صفر، حل مسئله کنترل بهینه را ساده می‌کند. حال مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

مطلوبست حل بهینه برای حداقل کردن معیار عملکرد:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_c} \mathbf{u}^T R(t) \mathbf{u} dt \quad (10)$$

به ازای t_c معلوم و از پیش تعیین $(t_0 \leq t \leq t_c \leq t_f)$ و ماتریس وزنی متقارن حقیقی $R(t) > 0$ منوط به قید معادله دیفرانسیل:

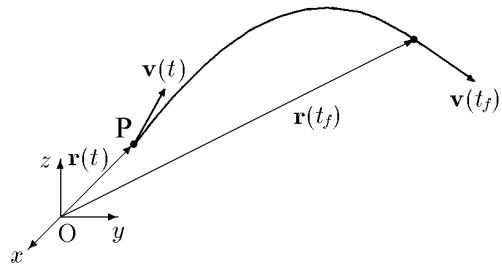
$$\frac{d}{dt} \mathbf{ZEM}(t) = -\alpha_1(t_f, t) \mathbf{u} \quad (11)$$

و شرایط اولیه و نهایی $\mathbf{ZEM}(t_0) = \mathbf{ZEM}_0$ و $\mathbf{ZEM}(t_c) = \mathbf{0}$. لازم به ذکر است که زمان نهایی در مسئله بهینه‌سازی اولیه برابر t_f است و زمان t_c زمانی است که بعد از آن ورودی کنترل \mathbf{u} صفر است. اما با تغییر متغیر خطای تلاش صفر و برای ساده‌شدن عملیات ریاضی می‌توان زمان نهایی مسئله جدید را t_c منظور کرد. لذا تابع هامیلتونی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T R(t) \mathbf{u} - \mathbf{p}^T \alpha_1(t_f, t) \mathbf{u} \quad (12)$$

که در آن \mathbf{p} ضریب لاگرانژ است. از مشتق جزئی تابع هامیلتونی نسبت به ورودی کنترل، رابطه ورودی کنترل بر حسب ضریب لاگرانژ به دست می‌آید.

حالت کانال y سیستم کنترل است. مؤلفه کانال y دستور شتاب نیز با u_y نمایش داده می‌شود.



شکل ۱- هندسه مسئله هدایت با قید موقعیت و سرعت نهایی

با فرض اینکه ماتریس انتقال حالت برای ماتریس سیستم کنترل کانال y از معادله حالت (۲) معلوم باشد، با افراز به چهار زیرماتریس به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Phi^A(t, t_0) = \begin{bmatrix} \phi_{11}^A(t, t_0) & \Phi_{12}^A(t, t_0) \\ \Phi_{21}^A(t, t_0) & \Phi_{22}^A(t, t_0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ابعاد زیرماتریس‌های Φ_{ij}^A ها مشابه ابعاد زیرماتریس‌های متناظر a_{ij} ها با i و j مشابه است ($i = 1, 2$). بنابراین، معادله حالت سیستم در کانال y به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ v_y \\ a_{yc} \\ \mathbf{q}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & -c(t) & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & a_{11}(t) & \mathbf{a}_{12}(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{21}(t) & \mathbf{a}_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v_y \\ a_{yc} \\ \mathbf{q}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1(t) \\ \mathbf{b}_2(t) \end{bmatrix} u_y + \begin{bmatrix} 0 \\ g_y(t) \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4)$$

با توجه به اینکه سیستم کنترل در سه کانال x, y و z مستقل و یکسان فرض شده است، معادله حالت (۴) که معرف رفتار دینامیک سیستم است برای دو کانال x و z نیز به طور مشابه نوشته می‌شود. انتخاب جهات دستگاه مختصات ممکن است به گونه‌ای باشد که شتاب جاذبه در یک راستا، دو راستا یا در هر سه راستا مؤلفه داشته باشد.

با استفاده از تغییر متغیر خطای تلاش صفر در موقعیت (ZEM) و خطای تلاش صفر در سرعت (ZEV) می‌توان نوشت [۱۴]:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{ZEM}(t) = -\alpha_1(t_f, t) \mathbf{u} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{ZEV}(t) = -\alpha_2(t_f, t) \mathbf{u} \quad (6)$$

که در آن t_f زمان نهایی است و ($i = 1, 2$):

$$\mathbf{u} = \frac{f(t)\mathbf{ZEM}}{\int_t^{t_c} \alpha_1(t_f, \xi) f(\xi) d\xi} \quad (21)$$

با مقایسه رابطه دستور شتاب بهینه با ضریب وزنی $r(t)$ از رابطه (۲۰) با دستور شتاب هدایت صریح از رابطه اخیر، نتیجه می‌شود که اگر $f(t)$ متناسب با $r(t)$ با $\alpha_1(t_f, t)$ انتخاب شود، رابطه هدایت صریح همان حل منتج از هدایت بهینه با انتگرال مجذور دستور شتاب با اعمال ضریب وزنی $r(t)$ می‌شود. به‌طور نمونه اگر $f(t)$ مطابق پیشنهاد مرجع [۶] متناسب با $\text{sgn}[\alpha_1(t_f, t)] |\alpha_1(t_f, t)|^n$ انتخاب شود، ضریب وزنی معادل به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$r(t) = \frac{1}{|\alpha_1(t_f, t)|^{n-1}}, \quad n \geq 1 \quad (22)$$

توجه این که $f(t)$ را می‌توان برای بازه‌ای از زمان صفر منظور کرد؛ اما $r(t)$ را نمی‌توان صفر قرار داد. برای این منظور، $r(t)$ را باید مقدار بسیار بزرگی قرار داد تا عملاً مقدار \mathbf{u} بسیار کوچک شود.

هدایت بهینه با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی

حال حل بهینه مسئله هدایت به‌منظور کمینه‌سازی انتگرال مجذور دستور شتاب با اعمال ضریب وزنی متغیر با زمان برای رسیدن به بردار موقعیت و سرعت نهایی معلوم به‌دست می‌آید. توجه اینکه زمان نهایی t_f نیز از قبل مشخص شده‌است. در حالت اول که تنها قید بردار موقعیت نهایی مطرح بود، شکل‌دهی دستور شتاب با استفاده از حل صریح مطابق مرجع [۶] به آسانی قابل دستیابی بود؛ اما در حالتی که قید بردار سرعت نهایی اضافه شود، استفاده از روش اعمال ضریب وزنی متغیر با زمان، بنابر کاربرد می‌تواند مناسب‌تر باشد. در ادامه و پس از حل تحلیلی مسئله، به این موضوع به‌طور مشروح پرداخته می‌شود. لذا مسئله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

مطلوبست حل بهینه به منظور حداقل کردن معیار عملکرد (۱۰) به ازای t_c معلوم و منوط به قیود (۵) و (۶) و شرایط اولیه $\mathbf{ZEM}(t_0) = \mathbf{ZEM}_0$ و $\mathbf{ZEV}(t_0) = \mathbf{ZEV}_0$ و شرایط نهایی $\mathbf{ZEM}(t_c) = \mathbf{0}$ و $\mathbf{ZEV}(t_c) = \mathbf{0}$

لذا تابع هامیلتونی برای مسئله مذکور به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T R(t) \mathbf{u} - \mathbf{p}_m^T \alpha_1(t_f, t) \mathbf{u} - \mathbf{p}_v^T \alpha_2(t_f, t) \mathbf{u} \quad (23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = R^{-1}(t) \alpha_1(t_f, t) \mathbf{p} \quad (13)$$

چون تابع هامیلتونی تابعی از متغیر \mathbf{ZEM} نیست، لذا ضریب لاگرانژ \mathbf{p} ، برداری ثابت می‌شود. با جایگذاری برای ورودی کنترل از رابطه (۱۳) در رابطه (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{ZEM}(t) = -\alpha_1^2(t_f, t) R^{-1}(t) \mathbf{p} \quad (14)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق در بازه زمانی t_0 تا t_c (و یا t تا t_c) و اعمال شرایط اولیه و نهایی، ضریب لاگرانژ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{p} = \left[\int_{t_0}^{t_c} \alpha_1^2(t_f, t) R^{-1}(t) dt \right]^{-1} \mathbf{ZEM}(t_0) \quad (15)$$

یا

$$\mathbf{p} = \left[\int_t^{t_c} \alpha_1^2(t_f, \xi) R^{-1}(\xi) d\xi \right]^{-1} \mathbf{ZEM}(t) \quad (16)$$

با جایگذاری دو رابطه اخیر در رابطه (۱۳)، دستور شتاب نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{u}(t) = R^{-1}(t) \alpha_1(t_f, t) \left[\int_{t_0}^{t_c} \alpha_1^2(t_f, t) R^{-1}(t) dt \right]^{-1} \mathbf{ZEM}(t_0) \quad (17)$$

$$\mathbf{u} = R^{-1}(t) \alpha_1(t_f, t) \left[\int_t^{t_c} \alpha_1^2(t_f, \xi) R^{-1}(\xi) d\xi \right]^{-1} \mathbf{ZEM}(t) \quad (18)$$

توجه به این که رابطه (۱۷) حل ورودی کنترل را بر حسب زمان می‌دهد؛ در حالی که رابطه (۱۸) ورودی کنترل (دستور شتاب) را به‌صورت حلقه‌بسته ارائه می‌کند.

در صورتی که $R(t)$ اسکالر فرض شود و با $r(t)$ نمایش داده شود، نتایج به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\alpha_1(t_f, t) \mathbf{ZEM}(t_0)}{r(t) \int_{t_0}^{t_c} \alpha_1^2(t_f, t) / r(t) dt} \quad (19)$$

یا

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha_1(t_f, t) \mathbf{ZEM}}{r(t) \int_t^{t_c} \alpha_1^2(t_f, \xi) / r(\xi) d\xi} \quad (20)$$

در هدایت صریح مطابق مرجع [۶]، اگر حل دستور شتاب به‌صورت $\mathbf{u} = f(t) \mathbf{ZEM}(t_0)$ فرض شود، حل حلقه‌بسته به‌صورت زیر

نتیجه می‌شود:

در روابط اخیر، آرگومان تمام ضرایب A_{ij} عبارت (t_c, t_0) است که به علت اختصار قید نشده‌است. توجه این که رابطه (۳۲)، حل دستور شتاب بر حسب زمان را می‌دهد. به منظور به‌دست آوردن حل حلقه- بسته ورودی کنترل، می‌توان از روابط (۲۵) و (۲۶) از زمان t تا t_c انتگرال گرفت و سپس قیود مسئله در زمان t و زمان نهایی را اعمال کرد تا رابطه ماتریسی زیر منتج شود:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(t_c, t) & A_{12}(t_c, t) \\ A_{12}(t_c, t) & A_{22}(t_c, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZEM} \\ \mathbf{ZEV} \end{bmatrix} \quad (۳۳)$$

با به‌دست آوردن ضرایب لاگرانژ با استفاده از رابطه معکوس ماتریس (۲۹) و جایگذاری در رابطه ورودی کنترل (۲۴)، دستور شتاب حلقه‌بسته نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & R^{-1}(t)[\alpha_1(t_f, t)(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12})^{-1} \\ & + \alpha_2(t_f, t)(A_{12} - A_{11}A_{12}^{-1}A_{22})^{-1}]\mathbf{ZEM} \\ & + R^{-1}(t)[\alpha_1(t_f, t)(A_{12} - A_{22}A_{12}^{-1}A_{11})^{-1} \\ & + \alpha_2(t_f, t)(A_{22} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]\mathbf{ZEV} \end{aligned} \quad (۳۴)$$

در رابطه فوق، آرگومان تمام ضرایب A_{ij} عبارت (t_c, t) است که به علت اختصار نوشته نشده‌است.

مسئله به ازای $R(t)$ اسکالر که با $r(t)$ نمایش داده می‌شود، ساده می‌شود. در این حالت، رابطه (۲۷) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{11}(t_c, t_0)I & a_{12}(t_c, t_0)I \\ a_{12}(t_c, t_0)I & a_{22}(t_c, t_0)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZEM}(t_0) \\ \mathbf{ZEV}(t_0) \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

که در آن، I ماتریس همانی ۳ در ۳ است و $(i, j = 1, 2)$:

$$a_{ij}(t_c, t) = \int_t^{t_c} \frac{\alpha_i(t_f, \xi)\alpha_j(t_f, \xi)}{r(\xi)} d\xi \quad (۳۶)$$

توجه این که در نوتاسیون حاضر، a_{11} دو متغیر را شامل می‌شود که نباید با هم اشتباه گرفت. یکی از تعریف در رابطه (۲) و دیگری از رابطه (۳۶). از این به بعد، تنها a_{11} از تعریف رابطه (۳۶) در روابط ظاهر می‌شود. با استفاده از رابطه ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11}I & a_{12}I \\ a_{12}I & a_{22}I \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \begin{bmatrix} a_{22}I & -a_{12}I \\ -a_{12}I & a_{11}I \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

ضرایب لاگرانژ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{p}_m = \frac{a_{22}(t_c, t)\mathbf{ZEM} - a_{12}(t_c, t)\mathbf{ZEV}}{a_{11}(t_c, t)a_{22}(t_c, t) - a_{12}^2(t_c, t)} \quad (۳۸)$$

که در آن \mathbf{p}_m و \mathbf{p}_v ضرایب لاگرانژ هستند. از مشتق جزئی تابع هامیلتونی نسبت به ورودی کنترل می‌توان نوشت:

$$\mathbf{u} = R^{-1}(t)[\alpha_1(t_f, t)\mathbf{p}_m + \alpha_2(t_f, t)\mathbf{p}_v] \quad (۲۴)$$

از آنجا که تابع هامیلتونی تابعی از متغیرهای \mathbf{ZEM} و \mathbf{ZEV} نیست، لذا ضرایب لاگرانژ بردارهای ثابتی می‌شود. با جایگذاری برای ورودی کنترل از رابطه (۲۲) در روابط (۵) و (۶) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{ZEM}(t) = & -\alpha_1^2(t_f, t)R^{-1}(t)\mathbf{p}_m \\ & - \alpha_1(t_f, t)\alpha_2(t_f, t)R^{-1}(t)\mathbf{p}_v \end{aligned} \quad (۲۵)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{ZEV}(t) = & -\alpha_1(t_f, t)\alpha_2(t_f, t)R^{-1}(t)\mathbf{p}_m \\ & - \alpha_2^2(t_f, t)R^{-1}(t)\mathbf{p}_v \end{aligned} \quad (۲۶)$$

با انتگرال‌گیری از زمان t_0 تا t_c از دو رابطه اخیر و اعمال شرایط اولیه و نهایی مسئله می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(t_c, t_0) & A_{12}(t_c, t_0) \\ A_{12}(t_c, t_0) & A_{22}(t_c, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZEM}(t_0) \\ \mathbf{ZEV}(t_0) \end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

که در آن $(i, j = 1, 2)$:

$$A_{ij}(t_c, t) = \int_t^{t_c} \alpha_i(t_f, \xi)\alpha_j(t_f, \xi)R^{-1}(\xi) d\xi \quad (۲۸)$$

با استفاده از رابطه معکوس یک ماتریس مربعی افزایش شده به چهار زیرماتریس مربعی با ابعاد یکسان به‌صورت زیر:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}B)^{-1} & (B - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AB^{-1}D)^{-1} & (D - BA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

ضرایب لاگرانژ به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m = & (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12})^{-1}\mathbf{ZEM}(t_0) \\ & + (A_{12} - A_{22}A_{12}^{-1}A_{11})^{-1}\mathbf{ZEV}(t_0) \end{aligned} \quad (۳۰)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_v = & (A_{12} - A_{11}A_{12}^{-1}A_{22})^{-1}\mathbf{ZEM}(t_0) \\ & + (A_{22} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}\mathbf{ZEV}(t_0) \end{aligned} \quad (۳۱)$$

با جایگذاری برای ضرایب لاگرانژ در رابطه (۲۴)، ورودی کنترل حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & R^{-1}(t)[\alpha_1(t_f, t)(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12})^{-1} \\ & + \alpha_2(t_f, t)(A_{12} - A_{11}A_{12}^{-1}A_{22})^{-1}]\mathbf{ZEM}(t_0) \\ & + R^{-1}(t)[\alpha_1(t_f, t)(A_{12} - A_{22}A_{12}^{-1}A_{11})^{-1} \\ & + \alpha_2(t_f, t)(A_{22} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]\mathbf{ZEV}(t_0) \end{aligned} \quad (۳۲)$$

تناسبی از فرمولاسیون جدید نیز قابل تفسیر است. لازم به ذکر است که در مرجع [۱۱] رابطه (۴۳) به ازای $r(t) = t_{go}^2$ و در مرجع [۱۲] به ازای $r(t) = t_{go}^n$ به دست آمده است.

ب) برای هدایت با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی رابطه (۳۶) به صورت زیر ساده می شود:

$$a_{ij}(t_c, t) = \int_t^{t_c} \frac{(t_f - \xi)^{4-i-j}}{r(\xi)} d\xi \quad (44)$$

فرم حلقه بسته دستور شتاب نیز با ساده سازی رابطه (۴۰) به صورت

$$\mathbf{u} = \frac{[t_{go} a_{22}(t_c, t) - a_{12}(t_c, t)]\mathbf{ZEM}}{r(t)[a_{11}(t_c, t)a_{22}(t_c, t) - a_{12}^2(t_c, t)]} + \frac{[a_{11}(t_c, t) - t_{go} a_{12}(t_c, t)]\mathbf{ZEV}}{r(t)[a_{11}(t_c, t)a_{22}(t_c, t) - a_{12}^2(t_c, t)]} \quad (45)$$

نوشته می شود. اما حل دستور شتاب بر حسب زمان به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{[t_{go} a_{22}(t_c, t_0) - a_{12}(t_c, t_0)]\mathbf{ZEM}_0}{r(t)[a_{11}(t_c, t_0)a_{22}(t_c, t_0) - a_{12}^2(t_c, t_0)]} + \frac{[a_{11}(t_c, t_0) - t_{go} a_{12}(t_c, t_0)]\mathbf{ZEV}_0}{r(t)[a_{11}(t_c, t_0)a_{22}(t_c, t_0) - a_{12}^2(t_c, t_0)]} \quad (46)$$

ج) هدایت حلقه بسته با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی با ضریب وزنی $r(t) = 1/t_{go}^n$ برای مرحله پایانی پرواز به صورت زیر نتیجه می شود ($n \geq 0$):

$$\mathbf{u} = \frac{(n+2)[(n+3)\mathbf{ZEM} - (n+1)t_{go}\mathbf{ZEV}]}{t_{go}^2} \quad (47)$$

حل مسئله اخیر در مرجع [۱۲] ارائه شده است.

د) هدایت حلقه بسته با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی به ازای ضریب وزنی $r(t) = 1/t_{cg}^n$ و $n > 0$ به صورت زیر نتیجه می شود ($t_{cg} = t_c - t$):

$$\mathbf{u} = \frac{(n+2)\{[(n+3)\mathbf{ZEM} - [(n+3)t_{go} - 2t_{cg}]\mathbf{ZEV}]\}}{t_{cg}^2} \quad (48)$$

به ازای $t_c = t_f$ رابطه اخیر به صورت رابطه (۴۷) ساده می شود.

انتخاب ضریب وزنی متغیر با زمان

با انتخاب ضریب وزنی متغیر با زمان می توان دستور شتاب وسیله پروازی را به شکل نسبتاً مطلوبی درآورد. با توجه به اینکه حل

$$\mathbf{p}_v = \frac{-a_{12}(t_c, t)\mathbf{ZEM} + a_{11}(t_c, t)\mathbf{ZEV}}{a_{11}(t_c, t)a_{22}(t_c, t) - a_{12}^2(t_c, t)} \quad (39)$$

در نتیجه با جایگذاری دو رابطه اخیر در رابطه (۲۴)، دستور شتاب حلقه بسته حاصل می شود:

$$\mathbf{u} = \frac{[\alpha_1(t_f, t)a_{22}(t_c, t) - \alpha_2(t_f, t)a_{12}(t_c, t)]\mathbf{ZEM}}{r(t)[a_{11}(t_c, t)a_{22}(t_c, t) - a_{12}^2(t_c, t)]} + \frac{[\alpha_2(t_f, t)a_{11}(t_c, t) - \alpha_1(t_f, t)a_{12}(t_c, t)]\mathbf{ZEV}}{r(t)[a_{11}(t_c, t)a_{22}(t_c, t) - a_{12}^2(t_c, t)]} \quad (40)$$

برای به دست آوردن حل دستور شتاب بر حسب زمان کافی است که در رابطه اخیر به جای ضرایب $a_{ij}(t_c, t)$ مقادیر $a_{ij}(t_c, t_0)$ و به جای \mathbf{ZEM} و \mathbf{ZEV} به ترتیب $\mathbf{ZEM}(t_0)$ و $\mathbf{ZEV}(t_0)$ جایگذاری شود.

حالت خاص: سیستم کنترل ایده آل و حرکت در خلا

در حالتی که سیستم کنترل ایده آل لحاظ شود و با فرض حرکت در خلا، توابع آلفا به طور قابل توجهی ساده می شود:

$$\alpha_1(t_f, t) = t_{go}, \quad \alpha_2(t_f, t) = 1 \quad (41)$$

که در آن $t_{go} = t_f - t$. حال رابطه دستور شتاب برای چند حالت مختلف به دست می آید:

الف) رابطه (۲۰) در حالت هدایت تنها با قید بردار موقعیت نهایی به صورت زیر ساده می شود:

$$\mathbf{u} = \frac{t_{go}\mathbf{ZEM}}{r(t)\int_t^{t_c} (t_f - \xi)^2 / r(\xi) d\xi} \quad (42)$$

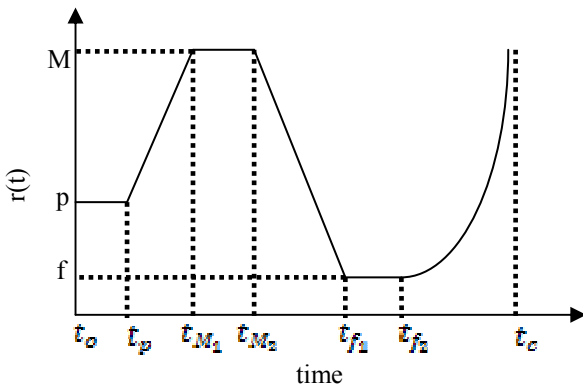
همچنین دستور شتاب به ازای ضریب وزنی $r(t) = t_{go}^n$ برای هدایت پایانی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{u} = \frac{3-n}{t_{go}^2}\mathbf{ZEM} \quad n < 3 \quad (43)$$

در صورتی که n مثبت باشد، ضریب وزنی $r(t) = t_{go}^n$ سبب کاهش دستور شتاب در اوایل پرواز می شود. در رابطه فوق، ضریب ناوربری مؤثر در هدایت تناسبی حقیقی^۱ به صورت $N' = 3 - n$ می شود. به ازای n های منفی، اعمال ضریب وزنی مذکور سبب افزایش ضریب ناوربری مؤثر در اوایل پرواز می شود. همان طور که ملاحظه می شود، تأثیر ضریب ناوربری مؤثر در دستور شتاب هدایت

1. True proportional navigation

به طور نمونه، شکل (۵) پروفیل ضریب وزنی را برای ارضای ترکیبی از قیود نشان می‌دهد. در فاصله زمانی t_{M1} تا t_{M2} با اعمال ضریب وزنی بالا از مقدار دستور شتاب به شدت کاسته می‌شود. این موضوع برای جدایش مراحل یا حداکثر فشار دینامیکی مناسب است. همچنین هدف این است که در زمان نهایی هدایت میانی که با t_c نمایش داده شده‌است، دستور شتاب صفر شود. در فاصله زمانی t_{f1} تا t_{f2} مقدار ضریب وزنی حداقل است، لذا اعمال شتاب مانوری بالا در این بازه زمانی برای قانون هدایت آزاد گذاشته شده‌است. لازم به ذکر است که دلیل استفاده از پروفیل‌های خطی، ساده کردن محاسبات ضرایب هدایت است.



شکل ۵- پروفیل ضریب وزنی برای ارضای ترکیبی از قیود مسیر

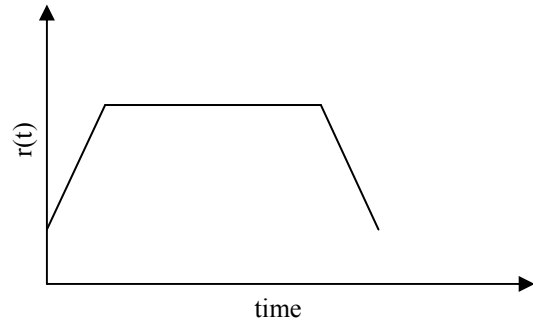
نمایش ریاضی تابع ضریب وزنی برای پروفیل شکل (۵) به صورت زیر است:

$$r(t) = \begin{cases} \text{FP1: } kt_{cg}^{-n} & t_{f2} \leq t < t_c \\ \text{FP2: } f & t_{f1} \leq t < t_{f2} \\ \text{FP3: } A_1 t + B_1 & t_{M2} \leq t < t_{f1} \\ \text{FP4: } M & t_{M1} \leq t < t_{M2} \\ \text{FP5: } A_2 t + B_2 & t_p \leq t < t_{M1} \\ \text{FP6: } p & t_0 \leq t < t_p \end{cases} \quad (49)$$

که در آن عبارت FP1 تا FP6 نمایانگر مرحله پروازی است. در اینجا، ترتیب شماره‌گذاری از مرحله آخر به اول انجام شده‌است. بنابراین برای هر مرحله پروازی، یک دسته ضرایب از رابطه (۳۶) برای محاسبه قانون هدایت به دست می‌آید:

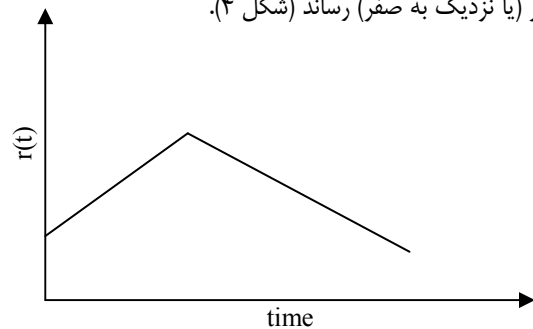
$$a_{ij}(t_c, t) = \begin{cases} \text{FP1: } a_{ij}^{P1}(t_c, t) & t_{f2} \leq t < t_c \\ \text{FP2: } a_{ij}^{P2}(t_c, t) & t_{f1} \leq t < t_{f2} \\ \text{FP3: } a_{ij}^{P3}(t_c, t) & t_{M2} \leq t < t_{f1} \\ \text{FP4: } a_{ij}^{P4}(t_c, t) & t_{M1} \leq t < t_{M2} \\ \text{FP5: } a_{ij}^{P5}(t_c, t) & t_p \leq t < t_{M1} \\ \text{FP6: } a_{ij}^{P6}(t_c, t) & t_0 \leq t < t_p \end{cases} \quad (50)$$

بهینه مسئله هدایت برای معیار عملکرد حداقل انتگرال قدرمطلق دستور شتاب با فرضیات ساده‌شونده، دو ضربه در زمان اولیه و نهایی است، برای کاهش انتگرال قدرمطلق دستور شتاب می‌توان ضریب وزنی $r(t)$ را در معیار عملکرد (۱۰) مانند نمودار شکل (۲) اعمال کرد.

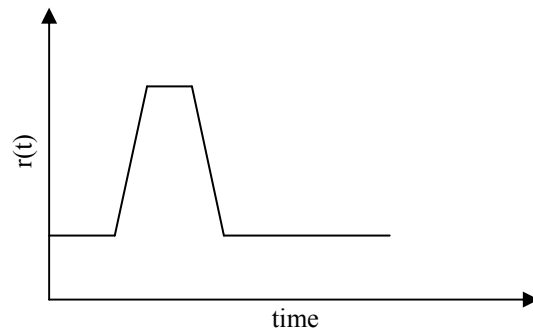


شکل ۲- پروفیل ضریب وزنی برای کاهش مصرف سوخت

همچنین برای وقتی که فشار دینامیکی حداکثر است، با اعمال ضریب وزنی می‌توان از مقدار دستور شتاب کاست. به طور نمونه می‌توان از پروفیل شکل (۳) استفاده کرد. در هنگام جدایش مراحل یا بوسترها می‌توان با اعمال ضریب وزنی، مقدار دستور شتاب را به صفر (یا نزدیک به صفر) رساند (شکل ۴).



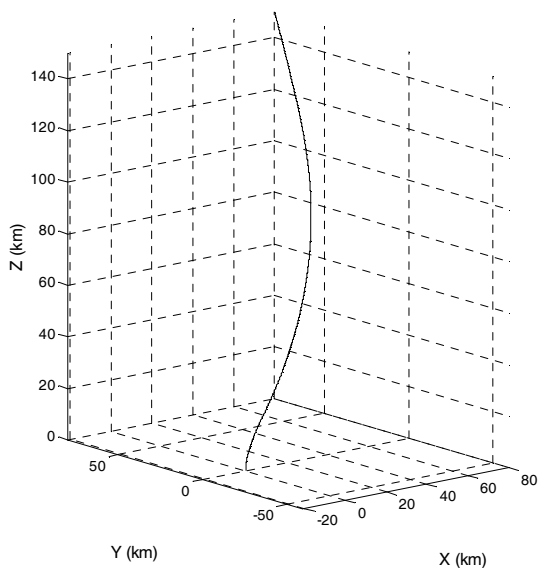
شکل ۳- پروفیل ضریب وزنی برای کاهش مانور در زمان حداکثر فشار دینامیکی



شکل ۴- پروفیل ضریب وزنی برای کاهش مانور در زمان جدایش مراحل

به منظور صفرکردن دستور شتاب در زمان نهایی در هدایت میانی می‌توان از رابطه $r(t) = 1/t_{cg}^n$ استفاده کرد.

نتایج شبیه‌سازی پرواز در شکل‌های (۷) و (۸) نمایش داده شده‌است. مسیر حرکت وسیله پروازی در شکل (۷) ترسیم شده‌است. در شکل (۸) نمودار دستور شتاب حلقه‌بسته و حل تحلیلی آن مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است که این دو نمودار به جز در لحظه نهایی هدایت (زمان ۱۲۰ ثانیه)، بر هم منطبق است. در حل تحلیلی، دستور شتاب در لحظه نهایی دقیقاً صفر می‌شود؛ اما در حل حلقه‌بسته به علت صفر شدن مخرج کسر در رابطه هدایت، دستور شتاب در لحظات نهایی، مقدار بزرگی پیدا می‌کند. این موضوع برای قوانین هدایت بهینه مشترک است و روش‌های متعددی برای حذف آن وجود دارد که در اینجا نیز صادق است و ربطی به ضریب وزنی (رابطه ۴۹) ندارد. ساده‌ترین روش، قطع دستور شتاب برای چند صدم ثانیه قبل از لحظه نهایی است که سبب خطای نهایی قابل ذکری نخواهد شد؛ چرا که پروفیل دستور شتاب نیز به سمت صفر می‌رود. برای مسئله مذکور به ازای گام زمانی انتگرال‌گیری ۰/۰۰۲ ثانیه و صفر کردن دستور شتاب در فاصله زمانی دوصدم ثانیه آخر، خطای موقعیت ۰/۰۲ متر و خطای سرعت ۰/۰۰۱ متر بر ثانیه می‌شود. نکته دیگر که باید توجه کرد این است که نیازی نیست که ضریب وزنی برای جدایش مراحل آنقدر بزرگ انتخاب شود تا دستور شتاب صفر شود؛ بلکه اگر دستور شتاب مقدار کوچکی داشته‌باشد، در عمل و در زمان مورد نظر می‌توان دستور شتاب صفر اعمال کرد. با توجه به اینکه قانون هدایت به‌صورت حلقه‌بسته است، این تفاوت تأثیری در عملکرد ندارد. البته این موضوع برای لحظه نهایی صادق نیست، چرا که دیگر زمانی برای جبران آن باقی نمی‌ماند؛ لذا ضریب وزنی انتخاب‌شده در لحظات نهایی هدایت به سمت بی‌نهایت می‌رود. لازم به ذکر است که حداکثر مجاز دستور شتاب به‌گونه‌ای انتخاب شده‌است که عملکرد قانون هدایت در شکل‌دهی پروفیل دستور شتاب (شکل ۸) به‌خوبی مشخص باشد.



شکل ۷- مسیر حرکت وسیله پروازی

لازم به ذکر است در صورتی که خواسته شود ضریب وزنی در بازه زمانی $[0, t_c]$ پیوسته باشد، کافی است به جای t_c مقدار $t_c^+ = t_c + \varepsilon$ را جایگذاری کرد و سپس برای ε مقدار بسیار کوچکی انتخاب کرد. البته در صورتی که از جواب نهایی برای $\varepsilon \rightarrow 0$ حد گرفته شود، همان جواب قبل حاصل می‌شود.

نتایج شبیه‌سازی

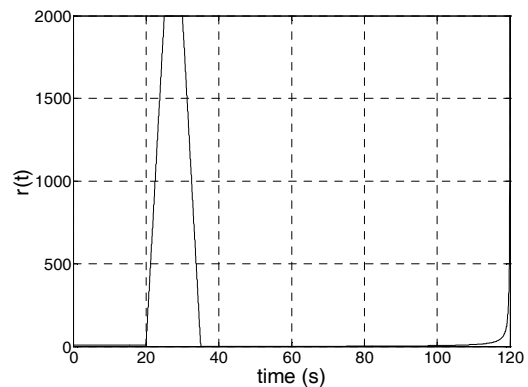
برای این که تأثیر پروفیل ضریب وزنی در شکل‌دهی دستور شتاب بررسی شود و قابلیت روش مذکور مشخص شود از کد شبیه‌سازی پرواز برای حل مسئله استفاده می‌شود. فرض کنید وسیله پروازی قرار است به یک وسیله فضایی دیگر متصل شود. برای این حالت لازم است شتاب مانوری برای زمان کوتاهی قبل از مرحله اتصال صفر شود تا وضعیت زاویه‌ای آن برای اتصال تصحیح شود. لذا ۲۰ ثانیه زمان برای این منظور اختصاص داده شده‌است. حال ۱۴۰ ثانیه آخر پرواز را در نظر بگیرید. ضریب وزنی مطابق رابطه (۴۹) با ضرایب زیر:

$$t_p = 20, t_{M1} = 25, t_{M2} = 30, t_{f1} = 35,$$

$$t_{f2} = 60, t_c = 120, t_f = 140,$$

$$n = 1, f = 2, p = 10, M = 2000$$

انتخاب شده و پروفیل آن در شکل (۶) نمایش داده شده‌است. سیستم کنترل وسیله پروازی را ایده‌آل فرض کنید. ضرایب هدایت در بخش ضمیمه ارائه شده‌است. مبدأ دستگاه مختصات $Oxyz$ را بر روی موقعیت اولیه وسیله پروازی و محور z را محور قائم در مدل زمین تخت در نظر بگیرید. در لحظه اولیه (یعنی $t_f - 140$) سرعت وسیله پروازی ۵۰۰ متر بر ثانیه و تنها در راستای قائم و به سمت بالاست. بردار موقعیت نهایی $\mathbf{r}(t_f) = [80 \ 80 \ 150]^T$ بر حسب کیلومتر و بردار سرعت نهایی مطلوب $\mathbf{v}(t_f) = [2000 \ 3000 \ 500]^T$ بر حسب متر بر ثانیه منظور شده‌است.



شکل ۶- نمودار پروفیل ضریب وزنی بر حسب زمان

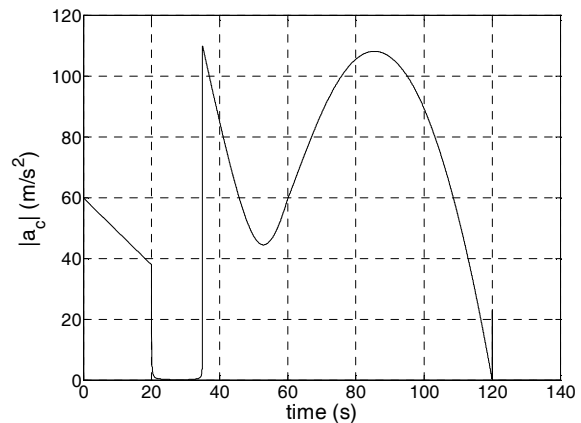
میانی را ارضاء نمی‌کنند. در حالتی که قیود میانی مسیر نیز اضافه شود، انتظار می‌رود که ΔV افزایش یابد.

نمودارهای دستور شتاب برای قانون هدایت میانی (۴۸) به ازای $n = 1$ و قانون هدایت با ضریب وزنی متغیر با زمان در شکل (۹) نمایش داده شده‌است. برای جلوگیری از افزایش ناگهانی دستور شتاب در لحظات نهایی، به ازای 0.2 ثانیه آخر دستور شتاب صفر منظور شده‌است (همچنین برای نتایج جدول (۱). ماهیت قانون هدایت بهینه با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی (و بدون قیود میانی) این است که در بازه زمانی ابتدایی و انتهایی، دستور شتاب حداکثر می‌شود و در زمان‌های میانی مقدار آن کاهش می‌یابد. لذا کاهش دستور شتاب در زمان‌های میانی برای دو قانون هدایت ناشی از این موضوع است (بجز بازه زمانی ۲۰ تا ۳۵ ثانیه که بخاطر اعمال ضریب وزنی در هدایت با ضریب وزنی متغیر با زمان است).

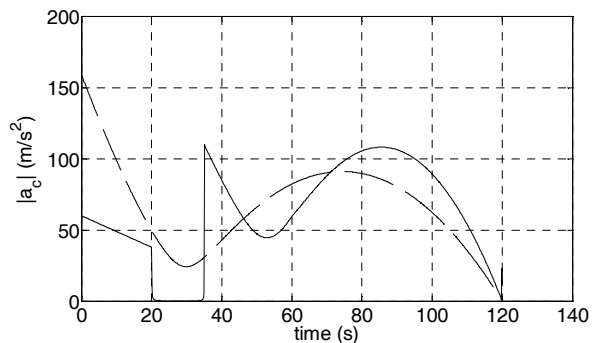
جدول ۱- مقایسه قوانین هدایت با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی

قانون هدایت	خطای موقعیت نهایی (m)	خطای سرعت نهایی (m/s ²)	ΔV (m/s)
هدایت پایانی با $n = 0$ ، رابطه (۴۷)	۰/۰۱	۱/۳۹	۵۲۱۶/۷
هدایت پایانی با $n = 1$ ، رابطه (۴۷)	۰/۰۰	۰/۰۰	۶۶۲۶/۹
هدایت میانی با $n = 0$ ، رابطه (۴۸)	۴۱/۵	۲/۱	۶۰۵۵/۹
هدایت میانی با $n = 1$ ، رابطه (۴۸)	۰/۰۱	۰/۰۰	۷۹۹۵/۰
هدایت با ضریب وزنی متغیر با زمان	۰/۰۲	۰/۰۰	۷۴۰۳/۷

با تغییر ضرایب وزنی و تنظیم زمان‌های مربوطه می‌توان علاوه بر شکل‌دهی دستور شتاب (به منظور ارضای قیود دستور شتاب) مصرف سوخت را نیز کاهش داد. این موضوع در جدول (۲) به ازای مقادیر مختلف ضریب وزنی f ذکر شده‌است. البته همان‌طور که با افزایش ضریب وزنی f ، مقدار ΔV کاهش یافته- است، مقدار دستور شتاب اولیه افزایش می‌یابد. لذا انتخاب مقدار f ، مصالحه‌ای بین مصرف سوخت و دستور شتاب اولیه است.



شکل ۸- نمودار دستور شتاب بر حسب زمان



شکل ۹- پروفیل دستور شتاب برای هدایت با ضریب وزنی متغیر با زمان (خط توپر) و قانون هدایت (۴۸) به ازای $n = 1$ (خطچین).

برای بررسی عملکرد قانون هدایت با ضریب وزنی متغیر با زمان، خطای موقعیت و سرعت نهایی و مقدار $\Delta V = \int_0^{t_f} |\mathbf{u}(t)| dt$ با چهار قانون هدایت دیگر مقایسه شده و در جدول (۱) درج شده‌است. رابطه قانون هدایت بهینه با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی (به منظور کمینه‌کردن انتگرال مجذور دستور شتاب) در اکثر منابع هدایت موجود است [۴-۲]. نتایج شبیه‌سازی به ازای این قانون هدایت در سطر اول جدول (۱) نمایش داده شده‌است. در سطر دوم جدول، نتایج به ازای قانون هدایت مرجع [۱۲] با قید اضافی دستور نهایی صفر نشان داده شده‌است. در این دو قانون هدایت، دستور شتاب تا زمان $t_f = 140$ ادامه دارد، در صورتی که هدف این بوده‌است که دستور شتاب بعد از $t_c = 120$ ثانیه صفر باشد و این دو قانون هدایت شرط اخیر را ارضاء نمی‌کند. در سطر سوم و چهارم جدول مذکور، نتایج قانون هدایت میانی (۴۸) با یک مرحله بدون هدایت در انتهای مسیر، ذکر شده‌است. همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، ΔV برای هدایت با قید شتاب نهایی صفر ($n = 1$) از حالت هدایت بدون قید شتاب نهایی صفر ($n = 0$) بیشتر شده‌است. اما چهار قانون هدایت مذکور قیود

جدول ۲- تأثیر ضریب وزنی f در عملکرد قانون هدایت با ضریب وزنی متغیر با زمان

f	$ \mathbf{u}(0) $ (m/s ²)	ΔV (m/s)
۰/۵	۲۰/۹۲	۷۹۰۴/۲
۱	۳۶/۹۳	۷۶۷۱/۱
۲	۵۹/۹۹	۷۴۰۳/۷
۳	۷۶/۰۱	۷۲۸۰/۲
۴	۸۷/۹۵	۷۲۳۰/۱
۵	۹۷/۳۳	۷۲۱۹/۸

نتیجه گیری

در این تحقیق، ماتریس وزنی متغیر با زمان در معیار عملکرد حداقل انتگرال مجذور دستور شتاب برای مسئله هدایت بهینه با قید بردار موقعیت و سرعت نهایی برای مرحله میانی و پایانی پرواز به منظور شکل‌دهی پروفیل دستور شتاب، اعمال شده و حل بهینه حلقه‌بسته به‌دست آمده‌است. دینامیک سیستم کنترل، خطی و از مرتبه دلخواه منظور شده و مدل پسا خطی، اما با ضریب متغیر با زمان فرض شده‌است. همچنین فرض شده‌است که اندازه و جهت نیروی پیشران موتور قابل تغییر و کنترل باشد. این موضوع سبب گستردگی کاربرد روش پیشنهادی می‌شود. در ادامه، ضرایب وزنی متفاوتی به منظور کاربرد در مأموریت‌های مختلف پیشنهاد و عملکرد قانون هدایت برای یک ضریب وزنی ترکیبی بررسی شده‌است. همان‌طور که در شبیه‌سازی پرواز نیز نشان داده‌شد، پروفیل ضریب وزنی بنابر نوع مأموریت ممکن است به گونه‌ای انتخاب شود تا شتاب مانوری در لحظات حداکثر فشار دینامیکی، جدایش مراحل یا در لحظه نهایی صفر یا حداقل شود. از دیگر نتایج این مطالعه، به‌دست آوردن رابطه پروفیل دستور شتاب در هدایت صریح و ضریب وزنی اعمالی در معیار عملکرد حداقل انتگرال مجذور دستور شتاب است. در پایان نیز، روشی برای اصلاح فرمولاسیون پیشنهادی برای فعالیت آتی و کاربرد احتمالی در وسایل پرتاب ماهواره به عنوان برنامه فراز حلقه‌بسته بهینه ارائه شده‌است که بررسی قابلیت اعمال آن نیاز به تکمیل روش مذکور و شبیه‌سازی پرواز دارد.

ضمیمه: ضرایب قانون هدایت

ضرایب قانون هدایت از رابطه (۳۶) به ازای ضریب وزنی (۴۹) برای شش مرحله پرواز به‌صورت زیر محاسبه شده‌است:

$$a_{12}^{P1}(t_c, t) = \frac{t_{cg}^{n+1}}{k} \left[\frac{t_{cg}}{n+2} + \frac{t_f - t_c}{n+1} \right] \quad (53)$$

$$a_{22}^{P1}(t_c, t) = \frac{1}{k(n+1)} t_{cg}^{n+1} \quad (54)$$

پیشنهادها

روش ارائه‌شده برای وسایل پروازی که سیستم کنترل آن بر مبنای دستور شتاب کار می‌کند، قابل پیاده‌سازی است. لذا می‌توان برای فضاپیمها به شرط کنترل بر روی اندازه و جهت نیروی پیشران بکار برده شود. همچنین برای فضاپیمهایی شبیه شاتل فضایی، اما با کنترل آیرودینامیکی در مرحله صعود و موشک‌های رهگیر با کنترل آیرودینامیک، قابل پیاده‌سازی است. لازم به ذکر است که تخمین پروفیل سرعت موشک برای مسیر آتی در قوانین هدایت پیشرفته یک موضوع متداول است [۱۶-۱۸]. البته روش مذکور با اصلاحاتی ممکن است برای وسایل پرتاب ماهواره نیز قابل استفاده باشد. این موضوع نیاز به تحقیق بیشتر بر مبنای اصلاحات پیشنهادی دارد و موضوع تحقیق آتی نویسنده است. با توجه به این که سیستم کنترل وسایل پرتاب ماهواره به‌طور معمول بر اساس دستور سرعت زاویه-ای کار می‌کند، دستور شتاب باید به دستور سرعت زاویه‌ای تبدیل شود. برای این منظور، ابتدا شتاب جانبی از رابطه

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_m \quad (51)$$

محاسبه می‌شود که در آن، بردار \mathbf{e}_m یکه سرعت است. سپس دستور زاویه‌ای حمله (α_c) برای مراحل پروازی Pi محاسبه می‌شود:

$$\alpha_c^{Pi} = \frac{m}{\bar{q} S_{ref} C_{L\alpha}} u_n^{Pi} \quad (52)$$

که در آن \bar{q} فشار دینامیکی، S_{ref} سطح مرجع و $C_{L\alpha}$ شیب ضریب برا نسبت به زاویه حمله است. در مرحله بعد، باید از روی دستور زاویه حمله، دستور سرعت زاویه‌ای محاسبه شود. البته برای بهینه‌سازی مسئله، ابتدا باید به‌صورت معکوس عمل کرد. به‌عبارت دیگر، ابتدا با استفاده از حل عددی، دستور سرعت زاویه‌ای بهینه محاسبه شود که این مرحله از کار، به‌صورت روتین برای وسایل پرتاب ماهواره انجام می‌شود و در مراجع [۱۹] و [۲۰] این موضوع به خوبی تشریح شده‌است. سپس از روی آن باید ضریب وزنی

$$s_u = 2 - R_u \left(\frac{i+j}{2} \right), s_d = 2 - R_d \left(\frac{i+j}{2} \right) \quad (۶۴)$$

و $R_u(\cdot)$ اپراتور گرد کردن به سمت پایین و $R_d(\cdot)$ اپراتور گرد کردن به سمت بالاست.

مراجع

- [1] Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 4th ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, 199, AIAA, 2002.
- [2] Lin, C. F., *Modern Navigation, Guidance, and Control Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [3] Battin, R. H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, Revised Edition, AIAA Education Series, USA, 1999.
- [4] Bryson, A. E. and Ho, Y. C., *Applied Optimal Control*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass, 1969.
- [5] Cherry, G. W., "A General, Explicit, Optimizing Guidance Law for Rocket-Propelled Spaceflight," *AIAA/ION Astrodynamics Guidance and Control Conference*, Paper No. 64-638, Los Angeles, CA, 1964.
- [6] Jalali-Naini, S. H., "Modern Explicit Guidance Law for High-Order Dynamics," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 5, 2004, pp. 918-922.
- [7] Slater, G. L., "A Transformation Approach to the Terminal Control Problem," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 9, 1976, pp.1206-1209.
- [8] Shima, T. and Shinar, J., "Time-Varying Linear Pursuit-Evasion Game Models with Bounded Control," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 3, 2002, pp. 425-432.
- [9] Jalali-Naini, S. H., "Formulation of Zero-Effort Miss for Nonlinear Input Matrix with Application to Guidance Laws," *The 9th Iranian Aerospace Conference*, Tehran, Iran, 2010.
- [10] Jalali-Naini, S. H. and Pourtakdoust, S. H., "Modern Midcourse Guidance Law in the Endoatmosphere," *AIAA Navigation, Guidance, and Control Conference*, Paper No. 6291, San Francisco, CA, 2005.
- [11] Anderson, G. M., "Effect of Performance Index/Constraint Combinations on Optimal Guidance Laws for Air-to-Air Missiles," *IEEE 1979 National Aerospace Electronics NAECON 1979*, pp. 765-771.
- [12] Ohlmeyer, E. J. and Phillips, C. A., "Generalized Vector Explicit Guidance," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, 2006, pp. 261-268.
- [13] Rusnak, I. and Meir, L., "Optimal Guidance Law for Acceleration Constrained Missile and Maneuvering Target," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 26, No. 4, 1990, pp. 618-624.
- [14] Rusnak, I. and Meir, L., "Modern Guidance Law for High-Order Autopilot," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 14, No. 5, 1991, pp. 1056-1058.
- [15] Jalali-Naini, S. H. and Pourtakdoust, S. H., "On the Predicted Error of Atmospheric Guidance Laws,"

$$a_{11}^{P1}(t_c, t) = \frac{t_{cg}^{n+1}}{k} \left[\frac{(t_f - t_c)^2}{n+1} + \frac{2(t_f - t_c)}{n+2} t_{cg} + \frac{t_{cg}^2}{n+3} \right] \quad (۵۵)$$

$$a_{ij}^{P2}(t_c, t) = \frac{1}{(5-i-j)f} \left[t_{go}^{5-i-j} - (t_f - t_{f2})^{5-i-j} \right] + a_{ij}^{P1}(t_c, t_{f2}) \quad (۵۶)$$

$$a_{ij}^{P3}(t_c, t) = \frac{1}{A_1} \left(t_f + \frac{B_1}{A_1} \right)^{4-i-j} \ln \left(\frac{f}{A_1 t + B_1} \right) + \frac{s_u}{2A_1^3} [f^2 - (A_1 t + B_1)^2] - \frac{s_d}{A_1} \left(2t_f + \frac{2B_1}{A_1} \right)^{s_u} (t_{f1} - t) + a_{ij}^{P2}(t_c, t_{f1}) \quad (۵۷)$$

$$a_{ij}^{P4}(t_c, t) = \frac{1}{(5-i-j)M} \left[t_{go}^{5-i-j} - (t_f - t_{M2})^{5-i-j} \right] + a_{ij}^{P3}(t_c, t_{M2}) \quad (۵۸)$$

$$a_{ij}^{P5}(t_c, t) = \frac{1}{A_2} \left(t_f + \frac{B_2}{A_2} \right)^{4-i-j} \ln \left(\frac{M}{A_2 t + B_2} \right) + \frac{s_u}{2A_2^3} [M^2 - (A_2 t + B_2)^2] - \frac{s_d}{A_2} \left(2t_f + \frac{2B_2}{A_2} \right)^{s_u} (t_{M1} - t) + a_{ij}^{P4}(t_c, t_{M1}) \quad (۵۹)$$

$$a_{ij}^{P6}(t_c, t) = \frac{1}{(5-i-j)p} \left[t_{go}^{5-i-j} - (t_f - t_p)^{5-i-j} \right] + a_{ij}^{P5}(t_c, t_p) \quad (۶۰)$$

که در آن

$$k = f(t_c - t_{f2})^n \quad (۶۱)$$

$$A_1 = \frac{f - M}{t_{f1} - t_{M2}}, \quad B_1 = \frac{M t_{f1} - f t_{M2}}{t_{f1} - t_{M2}} \quad (۶۲)$$

$$A_2 = \frac{M - p}{t_{M1} - t_p}, \quad B_2 = \frac{p t_{f1} - M t_p}{t_{M1} - t_p} \quad (۶۳)$$

- [۱۹] فخری نوشابادی، م.، طراحی برنامه فراز بهینه به روش ترکیبی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۴.
- [۲۰] پورتاکدوست، س.، ح.، فخری، م. و اسدیان، ن.، «توسعه محیط طراحی یکپارچه برای برنامه ریزی مسیر صعود بهینه»، فصلنامه علمی- پژوهشی علوم و فناوری فضایی، جلد ۱، شماره ۱، صفحات ۱-۱۰، پاییز ۱۳۸۷.
- [۲۱] جلالی نائینی، س. ح.، تعمیم معادلات خطای تلاش صفر برای قوانین هدایت در داخل اتمسفر با کاربرد در مرحله میانی پرواز، رساله دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، بهمن ۱۳۸۶.
- Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol. 80, No. 3, 2008, pp. 262-273.
- [16] Hough, M. E., "Optimal Guidance and Nonlinear Estimation for Interception of Accelerating Targets," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 18, No. 5, 1995, pp. 959-968.
- [17] Cho, H., Ryoo, C. K. and Tahk, M. J., "Closed-Form Optimal Guidance Law for Missiles of Time-Varying Velocity," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 19, No. 5, 1996, pp. 1017-1022.
- [18] Cho, H., Ryoo, C. K. and Tahk, M. J., "Implementation of Optimal Guidance Laws Using Predicted Missile Velocity Profiles," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 22, No. 4, 1999, pp. 579-588.