

# کنترل بهینه وضعیت ماهواره با عملگر چرخ عکس‌عملی

سید حسن میری رکن‌آبادی<sup>۱\*</sup>، سید مهران میرشمس<sup>۲</sup> و امیرعلی نیکخواه<sup>۳</sup>

۱. کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۲. دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۳. استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

\*تهران، صندوق پستی ۳۳۸۱-۱۶۷۶۵

Miri@sina.kntu.ac.ir

در این مقاله مدل‌سازی مانور وضعیت بهینه هر ماهواره برای تحصیل وضعیت مطلوب با استفاده از عملگرهای فعال چرخ عکس‌عملی انجام گرفته است. بدین ترتیب، ابتدا دینامیک حرکت وضعی ماهواره‌ای که در سیستم کنترل وضعیت آن از چرخ‌های عکس‌عملی به‌عنوان عملگر فعال استفاده شده است؛ استخراج و معادلات به صورت فضای حالت بیان شده‌اند. به منظور استخراج معادلات دقیق، معادلات الکتریکی چرخ عکس‌عملی و دینامیک ماهواره کوپل شده‌است و روش‌های اجتناب از اشباع چرخ عکس‌عملی نیز در مدل‌سازی وارد شده است. سپس کنترل بهینه مانور وضعیت ماهواره با چرخ عکس‌عملی، و قانون کنترلی تنظیم‌کننده درجه دوم خطی (LQR) با موفقیت انجام شده است. نتایج شبیه‌سازی با دیگر مراجع مرتبط با موضوع مقایسه شده است و حکایت از آن دارد که ماهواره مفروض پس از گذشت اندک زمانی و با اعمال تلاش کنترلی حداقل به وضعیت دلخواه برسد و پایدار شود. همچنین مانور سریع وضعیت برای چرخش سریع ماهواره و تحصیل وضعیت مطلوب ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: مانور وضعیت ماهواره، چرخ عکس‌عملی، کنترل بهینه خطی، عدم اشباع

## مقدمه

چرخ‌های عکس‌عملی از جمله وسایل تبادل ممتوم زاویه‌ای<sup>۱</sup> هستند که در پایدارسازی وضعیت ماهواره<sup>۲</sup> و مانورهای وضعیت آن استفاده می‌شوند. در روش تبادل ممتوم، عضو چرخان دیگری که آزادی حرکت دورانی نسبت به ماهواره دارد، با ماهواره تعامل دارد و می‌تواند اندازه حرکت ماهواره را تغییر دهد و آن را از اثر گشتاورهای مزاحم وارده مصون نگه دارد یا ماهواره را به اندازه زاویه دلخواهی بچرخاند. چرخ عکس‌عملی شامل یک چرخ طیار و یک موتور است. موتور، چرخ طیار را راه می‌اندازد و باید گشتاور لازم را برای مانورهای کنترل وضعیت ماهواره فراهم آورد. در حالت عادی که ماهواره در حالت تعادل مطلوب قرار دارد، موتور خاموش و چرخ متوقف است. در صورتی که نیاز باشد

ماهواره در جهت خاصی دوران کند، چرخ عکس‌عملی با موتور در خلاف آن جهت به حرکت در می‌آید و اندازه حرکت لازم را به ماهواره می‌دهد، یا اگر گشتاورهای مزاحم بخواهند ماهواره را حول محوری منحرف کنند؛ سنسورهای وضعیت انحراف مربوطه را اندازه‌گیری می‌کنند و کنترلر نیز فیدبکی با جریان تغذیه چرخ عکس‌عملی برقرار می‌کند و سپس گشتاور کنترلی جبران‌کننده گشتاور خارجی تولید و به ماهواره وارد می‌شود.

لیچون لای<sup>۳</sup> به همراه همکارانش در سال ۲۰۰۷، تنها به کنترل بهینه زمان مانور برای فضاییای صلب توسط چرخ عکس‌عملی اقدام کرده‌اند [۱].

در سال ۱۹۹۸، چن<sup>۱</sup> و استین<sup>۲</sup> به کنترل بهینه یک ماهواره ارتفاع پایین و مدیریت اندازه حرکت چرخ عکس‌عملی با استفاده از

1. Momentum exchange devices  
2. Attitude stabilization

3. Li-Chun Lai

که در آن  $\tilde{I}$  تانسور اینرسی و همان گونه که مشاهده می شود به صورت ماتریسی متقارن خواهد بود.

بردار اندازه حرکت زاویه ای چرخ های عکس العملی  $\vec{h}_w$  نیز از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\vec{h}_w = \begin{bmatrix} h_{wx} \\ h_{wy} \\ h_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{wx} \omega_{wx} \\ I_{wy} \omega_{wy} \\ I_{wz} \omega_{wz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

و از طرفی داریم:

$$\begin{bmatrix} \omega_{wx} \\ \omega_{wy} \\ \omega_{wz} \end{bmatrix} = \vec{\omega}_b + \vec{\omega}_{w/b}$$

$$= \vec{\omega}_{BI} + \begin{bmatrix} \omega_{w/b|x} \\ \omega_{w/b|y} \\ \omega_{w/b|z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{wx} \\ \dot{\theta}_{wy} \\ \dot{\theta}_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x + \dot{\theta}_{wx} \\ \omega_y + \dot{\theta}_{wy} \\ \omega_z + \dot{\theta}_{wz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

اگر  $\vec{\omega}_{BI}$  بردار سرعت زاویه ای دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی،  $\vec{\omega}_{BR}$  بردار سرعت زاویه ای دستگاه بدنی نسبت به دستگاه مرجع و  $\vec{\omega}_{RIB}$  بردار سرعت زاویه ای دستگاه مرجع نسبت به دستگاه اینرسی باشد که در دستگاه بدنی بیان می شود، رابطه این سه سرعت زاویه ای، به صورت ذیل خواهد بود:

$$\vec{\omega}_{BI} = \vec{\omega}_{BR} + \vec{\omega}_{RIB} \quad (5)$$

ماتریس انتقال  $A_{\psi\theta\phi}$  با ترتیب  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  با سه حرکت متوالی دستگاه مختصات مرجع را بر بدنی منطبق می کند.  $A_{\psi\theta\phi}$  یک ماتریس کسینوس های هادی است و به عبارتی دیگر چرخش دستگاه مختصات بدنی را نسبت به دستگاه مختصات مرجع نشان می دهد و بر حسب زوایای اوایلر و خطی به شکل ذیل بیان می شود [۴]:

$$A_{\psi\theta\phi} \cong \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

در مورد  $\vec{\omega}_{BR}$  باید رابطه نرخ تغییرات زوایای اوایلر را به مؤلفه های سرعت زاویه ای در یک دستگاه مرجع معین به دست بیاوریم. با فرض سه دوران اوایلر با ترتیب  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  یعنی  $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$  اگر  $\vec{\omega}_{BR} = [p \ q \ r]^T$  باشد، داریم:

$$\vec{\omega}_{BR} = [p \ q \ r]^T = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T \quad (7)$$

همچنین از رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$\vec{\omega}_{RIB} = A_{\psi\theta\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi\omega_0 \\ -\omega_0 \\ \phi\omega_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

تنظیم کننده درجه دوم خطی<sup>۳</sup> پرداخته اند. در این مقاله، جهت پرهیز از اشباع گشتاوردهنده های مغناطیسی، تراستر و ترکیب آن ها استفاده شده است [۲]. یون هتوک<sup>۴</sup> و همکارانشان نیز در سال ۲۰۰۵، به کنترل بهینه چرخ عکس العملی و هدایت آن جهت پرهیز از اشباع پرداخته اند [۳].

بر اساس مطالعات صورت گرفته هیچ رابطه صریحی از دینامیک حرکت ماهواره ای که تنها شامل عملگر چرخ عکس العملی است، موجود نیست. در این مقاله، این روابط استخراج شده و به بیان معادلات حالت این سیستم می پردازیم؛ سپس با در نظر گرفتن مشخصات فنی ماهواره ای نمونه و چرخ عکس العملی آن و با انتخاب ماتریس های وزنی مناسب به محاسبه ماتریس بهره از روش تنظیم کننده درجه دوم خطی خواهیم پرداخت و در فضای شبیه سازی، مانوری بهینه از تغییر وضعیت دلخواه ارائه خواهد شد. به منظور پرهیز از اشباع چرخ های عکس العملی نیز علاوه بر انتخاب توابع وزنی، از روش های قید جریان درخواستی و قید سرعت بیشینه عملکرد چرخ عکس العملی استفاده شده است که به نوبه خود نوآوری و ابتکاری بسیار مناسب است و کارایی این امور به روشنی در نتایج مشهود می شود.

## تحلیل دینامیک وضعیت و به دست آوردن معادلات حرکت یک ماهواره شامل چرخ های عکس العملی

همچنان که بر مبنای قوانین نیوتن نیروی وارد بر جسم با تغییرات زمانی اندازه حرکت خطی متناسب است؛ این رابطه در مورد گشتاور وارد بر جسم صلب و آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت زاویه ای نیز صادق است؛ به بیان ریاضی داریم [۴]:

$$\sum_{i=1}^n \vec{T}_i = \dot{\vec{h}} \Big|_I = \dot{\vec{h}} + \vec{\omega} \times \vec{h} \quad (1)$$

که در آن  $\dot{\vec{h}}$  مشتق زمانی بردار اندازه حرکت زاویه ای است. از طرفی بردار اندازه حرکت زاویه ای یک سیستم کامل  $\vec{h}$ ، مجموع اندازه حرکت زاویه ای بدنه صلب  $\vec{h}_b = [h_x \ h_y \ h_z]^T$  و اندازه حرکت زاویه ای وسایل تبادل ممتوم (در اینجا فقط چرخ های عکس العملی)  $\vec{h}_w = [h_{wx} \ h_{wy} \ h_{wz}]^T$  است.

بردار اندازه حرکت زاویه ای بدنه صلب ماهواره  $\vec{h}_b$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{h}_b = \tilde{I} \vec{\omega}_{BI} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

1. Xiaojiang Chen  
2. Willem H. Steyn  
3. Linear Quadratic Regulator (LQR)  
4. Choi Yoonhyeok

$$\begin{aligned} \vec{T}_{GG} &= 3\omega_0^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & \phi \\ 1 & 0 & \phi \\ -\phi & -\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta \\ \phi \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\cong 3\omega_0^2 \begin{bmatrix} \phi(I_z - I_y) \\ \theta(I_z - I_x) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

حال به استخراج معادلات دینامیکی موتور الکتریکی برای چرخ عکس‌العملی خواهیم پرداخت. از مرجع [۴] داریم:

$$I_w(\dot{\omega}_s + \dot{\omega}_w) = K_M i_M - B(\omega_s + \omega_w) - T_F \quad (14)$$

که در آن  $\omega_s = \omega_{BI}$  سرعت زاویه‌ای ماهواره،  $\omega_w = \dot{\theta}_w$  سرعت زاویه‌ای چرخ عکس‌العملی،  $K_M$  ثابت ضریب گشتاور،  $i_M$  جریان فاز،  $B$  ضریب میرایی ویسکوز سیستم مکانیکی و  $T_F$  گشتاور ناشی از اصطکاک خشک است.

می‌دانیم که برای استخراج معادلات حالت باید معادلات دینامیکی موتور چرخ عکس‌العملی را نیز در معادلات خطی دینامیک وضعیت حرکت ماهواره، وارد نماییم. با صرف نظر از سرعت زاویه‌ای ماهواره در مقابل سرعت زاویه‌ای چرخ عکس‌العملی در گشتاور اتلافی ویسکوز، می‌توان معادلات خطی دینامیک وضعیت حرکت ماهواره شامل معادلات دینامیکی موتور الکتریکی از چرخ عکس‌العملی را به صورت جامع زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} (I_x - I_{wx})\ddot{\phi} + 4\omega_0^2(I_y - I_z)\phi + \omega_0(I_y - I_z - I_x + I_{wx})\dot{\psi} + \\ K_{Mx}i_{Mx} - B_x\dot{\theta}_{wx} - T_{Fx} - I_{wx}\dot{\theta}_{wx}\omega_0 = T_{dx} \\ (I_y - I_{wy})\ddot{\theta} + 3\omega_0^2(I_x - I_z)\theta + K_{My}i_{My} - B_y\dot{\theta}_{wy} - T_{Fy} = T_{dy} \\ (I_z - I_{wz})\ddot{\psi} + \omega_0^2(I_y - I_x)\psi + \omega_0(I_x + I_z - I_y - I_{wz})\dot{\phi} + \\ K_{Mz}i_{Mz} - B_z\dot{\theta}_{wz} - T_{Fz} + I_{wx}\dot{\theta}_{wx}\omega_0 = T_{dz} \end{cases} \quad (15)$$

## استخراج معادلات حالت سیستم از معادلات

### حرکت

تا اینجا معادلات حرکت را در دستگاه بدنی به‌دست آورده‌ایم. می‌دانیم که در به‌دست آوردن معادلات حالت، در صورتی که در معادلات، مشتقات بالاتر از مشتق مرتبه اول از متغیرهای حالت وجود داشته باشد از کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم که نتیجه آن افزایش تعداد معادلات یعنی افزایش تعداد متغیرهای حالت در عوض کاهش مرتبه است که در این مسئله با تعریف مشتق زوایای اویلر به‌عنوان متغیرهای حالت سه متغیر دیگر به معادلات حالت افزوده می‌شوند. از طرفی سرعت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی نیز به‌عنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته خواهند شد. فرم خطی نمایش ریاضی یا معادلات حالت سیستم به قرار زیر است [۵]:

که در آن  $\omega_0$  سرعت مداری ماهواره است. از روابط (۷) و (۸) برای  $\vec{\omega}_{BI}$  خواهیم داشت:

$$\vec{\omega}_{BI} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\psi\omega_0 \\ -\omega_0 \\ \phi\omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \psi\omega_0 \\ \dot{\theta} - \omega_0 \\ \dot{\psi} + \phi\omega_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

با توجه به اینکه معادلات در دستگاه بدنی نوشته شده‌اند، با فرض انطباق دستگاه بدنی بر محورهای اصلی، ماتریس  $\vec{I}$  قطری است و با جایگذاری (۹) در (۲) خواهیم داشت:

$$\vec{h}_b = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \psi\omega_0 \\ \dot{\theta} - \omega_0 \\ \dot{\psi} + \phi\omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x(\dot{\phi} - \psi\omega_0) \\ I_y(\dot{\theta} - \omega_0) \\ I_z(\dot{\psi} + \phi\omega_0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

و با جایگذاری (۹) در (۴) بردار اندازه حرکت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی  $\vec{h}_w$  نیز به قرار زیر خواهد بود:

$$\vec{h}_w = \begin{bmatrix} I_{wx}(\dot{\phi} - \psi\omega_0 + \dot{\theta}_{wx}) \\ I_{wy}(\dot{\theta} - \omega_0 + \dot{\theta}_{wy}) \\ I_{wz}(\dot{\psi} + \phi\omega_0 + \dot{\theta}_{wz}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

اینک به محاسبه مشتق زمانی اندازه حرکت زاویه‌ای بدنه ماهواره و چرخ عکس‌العملی می‌پردازیم. از رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{h}} \Big|_I &= \dot{\vec{h}} + \vec{\omega}_{BI} \times \vec{h} = \dot{\vec{h}}_b \Big|_I + \dot{\vec{h}}_w \Big|_I \\ &= (\dot{\vec{h}}_b + \vec{\omega}_{BI} \times \vec{h}_b) + (\dot{\vec{h}}_w + \vec{\omega}_{BI} \times \vec{h}_w) \\ &= \begin{bmatrix} I_x(\dot{\phi} - \psi\omega_0) \\ I_y\dot{\theta} \\ I_z(\dot{\psi} + \phi\omega_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_y - I_z)\psi\omega_0 + (I_y - I_z)\phi\omega_0^2 \\ 0 \\ (I_x - I_y)\dot{\phi}\omega_0 - (I_x - I_y)\psi\omega_0^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} I_{wx}\dot{\theta}_{wx} \\ I_{wy}\dot{\theta}_{wy} \\ I_{wz}\dot{\theta}_{wz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_{wz}\dot{\theta}_{wz}\omega_0 \\ 0 \\ I_{wx}\dot{\theta}_{wx}\omega_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

گشتاورهای وارده به ماهواره را به صورت مجموع  $\vec{T}_C$  گشتاور کنترلی،  $\vec{T}_{GG}$  گشتاور اغتشاشی گرادیان جاذبه و  $\vec{T}_d = [T_{dx} \quad T_{dy} \quad T_{dz}]^T$  سایر گشتاورهای اغتشاشی وارده بر ماهواره از قبیل گشتاورهای اغتشاشی آیرودینامیکی، مغناطیسی و بادهای خورشیدی بیان می‌کنیم. جهت کنترل بهینه چرخ‌های عکس‌العملی فرض کرده‌ایم که هیچ گشتاور کنترلی خارجی به ماهواره اعمال نمی‌شود و تنها با تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی، مانور کنترل وضعیت ماهواره را اعمال می‌نماییم. پس در رابطه مذکور، بردار گشتاور کنترلی برابر با صفر خواهد بود؛ یعنی  $\vec{T}_C = 0$ . گشتاور گرادیان جاذبه برای ماهواره نیز به قرار زیر است:

برای نمایش معادلات خطی دینامیک وضعیت حرکت ماهواره و چرخ عکس‌العملی به فرم خطی معادلات حالت ابتدا باید رابطه (۱۶) را مهیای این مسئله کنیم و بر اساس رابطه (۱۷) بیان نماییم. بدین ترتیب معادلات حالت سیستم ماهواره و چرخ عکس‌العملی استخراج شده که می‌توان آن‌ها را به شکل ماتریس رابطه (۱۸) بیان کرد.

$$\dot{X} = AX + Bu + C \quad (16)$$

همان‌طور که گفته شد متغیرهای حالت و کنترل را به قسم زیر تعریف می‌نماییم:

$$X = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ \dot{\theta}_{wx} \ \dot{\theta}_{wy} \ \dot{\theta}_{wz}]^T$$

$$u = [i_{Mx} \ i_{My} \ i_{Mz}]^T \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\omega_0^2 \frac{I_z - I_y}{I_x - I_{wx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 \frac{I_x - I_y + I_z - I_{wx}}{I_x - I_{wx}} & \frac{B_x}{I_x - I_{wx}} & 0 & \omega_0 \frac{I_{wz}}{I_x - I_{wx}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_0^2 \frac{I_z - I_x}{I_y - I_{wy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{I_y - I_{wy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \frac{-I_x + I_y - I_z + I_{wz}}{I_z - I_{wz}} & 0 & 0 & \omega_0^2 \frac{I_x - I_y}{I_z - I_{wz}} & 0 & -\omega_0 \frac{I_{wx}}{I_z - I_{wz}} & 0 & \frac{B_z}{I_z - I_{wz}} \\ 4\omega_0^2 \frac{I_y - I_z}{I_x - I_{wx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 \frac{I_y - I_z}{I_x - I_{wx}} & -\frac{B_x I_x}{I_{wx}(I_x - I_{wx})} & 0 & -\omega_0 \frac{I_{wz}}{I_x - I_{wx}} \\ 0 & 0 & 3\omega_0^2 \frac{I_x - I_z}{I_y - I_{wy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_y I_y}{I_{wy}(I_y - I_{wy})} & 0 \\ 0 & \omega_0 \frac{I_x - I_y}{I_z - I_{wz}} & 0 & 0 & \omega_0^2 \frac{I_y - I_x}{I_z - I_{wz}} & 0 & \omega_0 \frac{I_{wx}}{I_z - I_{wz}} & 0 & -\frac{B_z I_z}{I_{wz}(I_z - I_{wz})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_{Mx}}{I_x - I_{wx}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_{My}}{I_y - I_{wy}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_{Mz}}{I_z - I_{wz}} \\ \frac{K_{Mx} I_x}{I_{wx}(I_x - I_{wx})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{My} I_y}{I_{wy}(I_y - I_{wy})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{Mz} I_z}{I_{wz}(I_z - I_{wz})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_{Fx} + T_{dx}}{I_x - I_{wx}} \\ 0 \\ \frac{T_{Fy} + T_{dy}}{I_y - I_{wy}} \\ 0 \\ \frac{T_{Fz} + T_{dz}}{I_z - I_{wz}} \\ -\frac{T_{Fx} I_x + T_{dx} I_{wx}}{I_{wx}(I_x - I_{wx})} \\ \frac{T_{Fy} I_y + T_{dy} I_{wy}}{I_{wy}(I_y - I_{wy})} \\ \frac{T_{Fz} I_z + T_{dz} I_{wz}}{I_{wz}(I_z - I_{wz})} \end{bmatrix} \quad (18)$$

### شبیه‌سازی کنترل بهینه خطی

یکی از روش‌های کنترلی معمول در مباحث کنترل بهینه، کنترل LQR است. در این روش یک تابع شاخص هزینه، مانند تابع ذیل در نظر گرفته می‌شود [۵]:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (20)$$

که در آن، توابع وزنی  $Q$  و  $H$  ماتریس‌های حقیقی متقارن نیمه معین مثبت و  $R$  ماتریس حقیقی متقارن معین مثبت هستند. ماتریس  $Q$  میزان وزن و هزینه خطای دنباله‌روی (انحراف از شرایط مطلوب) را نمایندگی می‌کند.  $R$  میزان وزن و اهمیت مصرف انرژی برای عملگر کنترلی را بیان می‌کند. تعیین این دو

معادلات حالت سیستم ماهواره برای مد دینامیک وضعیت ماهواره و چرخ عکس‌العملی به دست آمد؛ حال باید داده‌های مربوط به یک ماهواره نمونه را در این معادلات جایگزین کرد. همه این مراحل جایگزینی در نرم‌افزار متلب انجام پذیرفته است. داده‌های ماهواره و چرخ عکس‌العملی مورد نظر ساخته شده به قرار زیر هستند [۴ و ۶]:

$$I_x = 1000 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_y = 500 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_z = 700 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_w = 0.1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$B = 0.001 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

$$K_M = 0.2 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$$

$$T_F = T_d = 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

همچنین سرعت مداری زیر برای ارتفاع مدار دایروی ۱۰۰۰ کیلومتر از سطح زمین را در نظر می‌گیریم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{398600}{(6378 + 1000)^3}} = 0.00099623 \text{ rad/s} \quad (19)$$

بزرگ‌تر باشد، سیستم دارای پاسخ‌های سریع‌تری است؛ حال با لحاظ این واقعیت که ماهواره مفروض، یک ماهواره بزرگ است و پاسخ ماهواره به چرخ‌های عکس‌العملی به آرامی صورت می‌گیرد، باید اندازه  $R$  در مقایسه با  $Q$  تا حد ممکن کوچک انتخاب شود. با این توضیحات، مقدار اختیار شده در شبیه‌سازی مقدار ذیل است:

$$R = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

خط قرمزی که در کاهش اندازه  $R$  در مقایسه با  $Q$  محدودیت ایجاد می‌کند، سرعت اشباع چرخ‌های عکس‌العملی است. این مقدار از  $R$ ، پس از سعی و خطا و مشاهده نتایج شبیه‌سازی متناظر با انتخاب‌های مختلف، پیشنهاد شده است. مقدار مزبور، هم سیستم را به اندازه کافی در میراسازی حالت‌ها، چابک و توانمند می‌سازد و هم باعث می‌شود جریان بیشینه اعمالی از محدوده تأمین فراتر نرود تا به سرعت اشباع نرسیم و مصرف انرژی بالایی نداشته باشیم. این مسئله را از نتایج شبیه‌سازی که در ادامه خواهند آمد، می‌توان دریافت.

مقادیر ویژه سیستم نیز به قرار زیر خواهند بود:

$$\text{eigenvalue} = \begin{bmatrix} -0.000490307105669 + 0.000714007746799i \\ -0.000490307105669 - 0.000714007746799i \\ -0.000490300888603 + 0.000714008604090i \\ -0.000490300888603 - 0.000714008604090i \\ -0.010000006217066 + 0.000000070639649i \\ -0.010000006217066 - 0.000000070639649i \\ -0.000000017546738 + 0.001336281806415i \\ -0.000000017546738 - 0.001336281806415i \\ -0.009999964906523 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود؛ مقادیر ویژه سیستم همگی در سمت چپ محور موهومی و در ناحیه پایدار قرار دارند.

حال با توجه به انتخاب مقادیر  $Q$  و  $R$  مقدار ماتریس بهره، به‌دست آمده و در محیط شبیه‌سازی سیمولینک در کنترلر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شبیه‌سازی صورت گرفته کافی است تا فقط وضعیت اولیه و وضعیت نهایی مورد انتظار از ماهواره در شبیه‌سازی وارد شوند. به عنوان مثال ماهواره مفروض از حالت سکون در وضعیت اولیه  $\phi_{initial} = 0.06 \text{ rad}$ ،  $\theta_{initial} = -0.08 \text{ rad}$  و  $\psi_{initial} = 0.04 \text{ rad}$  به حالت سکون در وضعیت نهایی  $\phi_{final} = -0.08 \text{ rad}$ ،  $\theta_{final} = 0.04 \text{ rad}$  و  $\psi_{final} = -0.06 \text{ rad}$  طی یک مانور وضعیت توسط کنترلر بهینه شبیه‌سازی شده، خواهد

ماتریس با توجه به طبیعت سیستم، نیازمندی‌های عملکردی، محدودیت‌های هزینه‌ای و همچنین قید بیشینه توان تحمل عملگرهای کنترلی، صورت می‌پذیرد. در کنترل وضعیت ماهواره، به‌منظور بهینه‌سازی مصرف انرژی، زمان و تلاش کنترلی و به‌دست‌آوردن ماتریس بهره بهینه، روش LQR را برگزیده‌ایم. در این روش با حل معادله ریکاتی مقدار ماتریس بهره به‌دست می‌آید. از آنجا که در معادلات حالت استخراج شده، ماتریس‌های  $A$  و  $B$  مستقل از زمان هستند، به تبع آن ماتریس‌های  $Q$ ،  $R$  و  $P$  را نیز می‌توان مستقل از زمان اختیار کرد و بنا بر مرجع [۵] برای معادله ریکاتی داریم:

$$Q - PBR^{-1}B^T P + PA + A^T P = 0$$

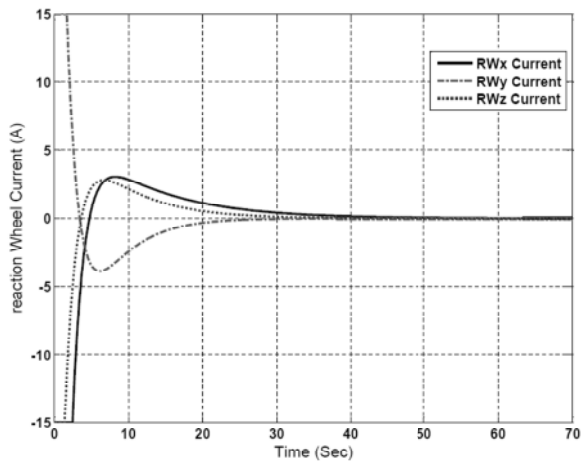
$$u^*(t) = -K_{3 \times 9} X(t), K_{3 \times 9} = -R_{9 \times 9}^{-1} B_{9 \times 3}^T P_{9 \times 9} \quad (21)$$

برای حل آن از برنامه نوشته شده در قالب یک m فایل در نرم‌افزار مطلب استفاده شده است. این برنامه با گرفتن ورودی‌ها یعنی ماتریس‌های  $A$  و  $B$  استخراج شده و ماتریس‌های  $Q$  و  $R$  اختیاری، مقدار ماتریس بهره  $K$  را با حل معادله ریکاتی محاسبه می‌کند.

انتخاب  $Q$  و  $R$  در این روش مهم است. همان‌طور که اشاره شد؛ با مصالحه بین نیازمندی‌های عملکردی و محدودیت‌های هزینه‌ای تعیین ماتریس  $Q$  توسط طراح انجام می‌گیرد. با توجه به تعداد حالت‌های معادله حالت،  $Q$  ماتریسی  $9 \times 9$  و  $R$  ماتریسی  $3 \times 3$  خواهد بود. مشابه آنچه در [۷] داریم، این ماتریس‌ها را قطری انتخاب می‌نماییم. در این تحلیل، با توجه به اینکه ماهواره مفروض، یک ماهواره بزرگ است و بر حسب آن که چرخ‌های عکس‌العملی باید مانور را در زمان کوتاهی به انجام رسانند و به‌رغم اهمیت رسیدن ماهواره به وضعیت جدید و سرعت چرخش صفر، سرعت چرخ‌های عکس‌العملی اهمیت بالایی دارند؛ برای  $Q$  مقدار ذیل پیشنهاد می‌شود:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

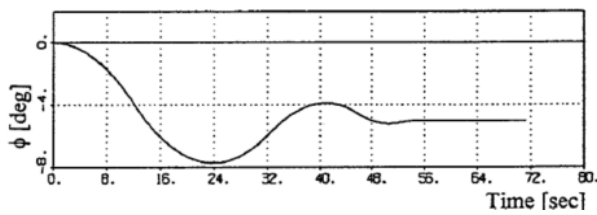
با توجه به تعداد ورودی‌های کنترلی چنان که گفتیم  $R$  ماتریسی  $3 \times 3$  خواهد بود. با توجه به اینکه هیچ کدام از این سه ورودی بر دیگری تفضیل و برتری معناداری ندارند؛ همگی دارای وزن یکسانی خواهند بود. هرچه اندازه  $Q$  در مقابل  $R$



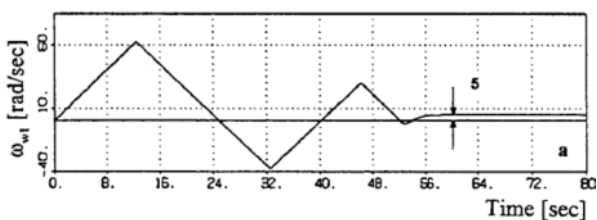
شکل ۴- جریان مورد نیاز چرخ‌های عکس‌العملی در یک مانور وضعیت شبیه‌سازی شده

همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌نمایید؛ تغییرات زوایای اوپلری تحت عنوان مانور تغییر وضعیت به خوبی به انجام رسیده است و در پایان بدون نیاز به هیچ عملگر کمکی جهت میراسازی اغتشاشات محتمل وارده بر ماهواره حین و پس از فعالیت چرخ عکس‌العملی، ماهواره به حالت پایدار می‌رسد و به خوبی در وضعیت دلخواه واقع می‌شود.

شکل‌های (۲) و (۳) نیز به ترتیب سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره و چرخ‌های عکس‌العملی را در حین انجام این مانور وضعیت نشان می‌دهند. مطابق آنچه مشاهده می‌نمایید، همان‌طور که مورد انتظار است؛ به سرعت زاویه‌ای صفر در پایان مانور وضعیت می‌رسیم که این امر نشان از صحت عملکرد کنترلر طراحی شده و پایداری ماهواره پس از اجرای مانور وضعیت دلخواه دارد.

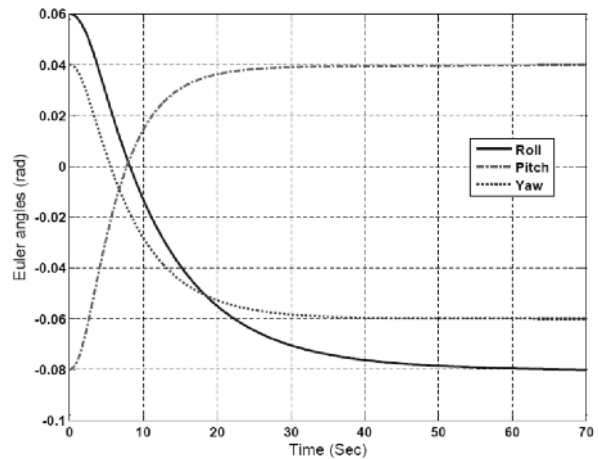


شکل ۵- تغییر زاویه رول در مانور وضعیت در مرجع [۴]

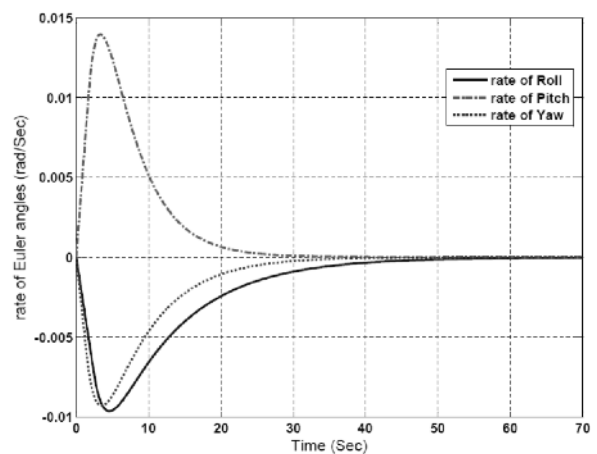


شکل ۶- پایدار نشدن چرخ عکس‌العملی در مانور وضعیت موجود در مرجع [۴]

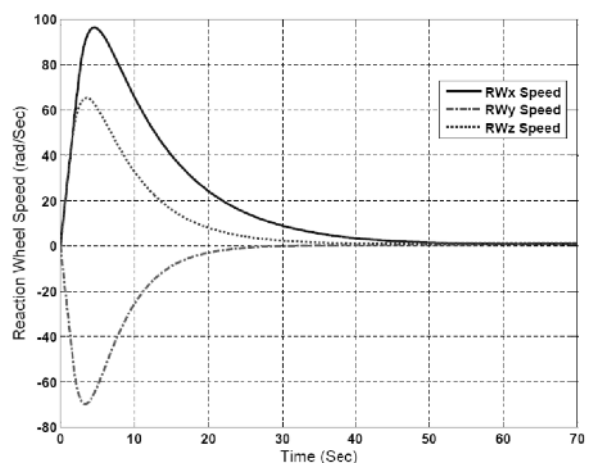
رسید. چگونگی انجام این مانور وضعیت را در شکل (۱) مشاهده می‌کنید:



شکل ۱- تغییرات زوایای اوپلری در یک مانور وضعیت شبیه‌سازی شده

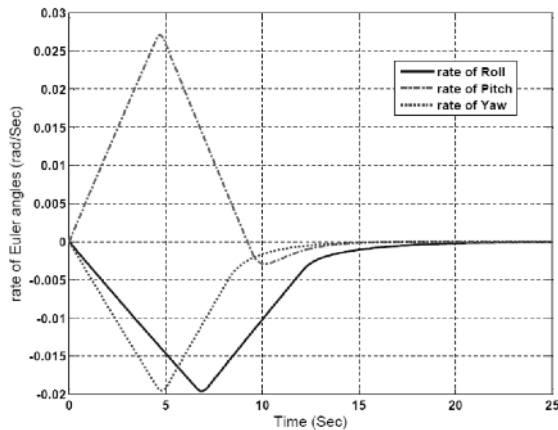


شکل ۲- نرخ تغییرات زوایای اوپلری در یک مانور وضعیت شبیه‌سازی شده

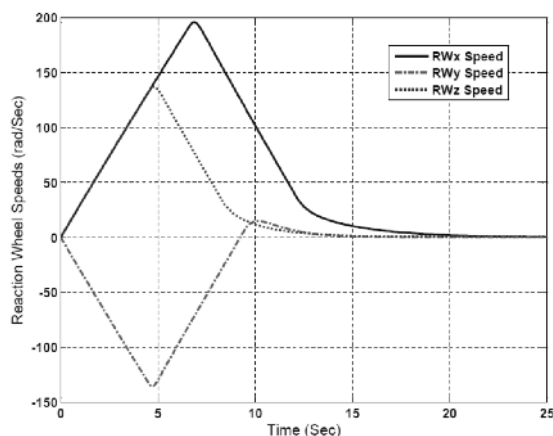


شکل ۳- سرعت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی در یک مانور وضعیت شبیه‌سازی شده

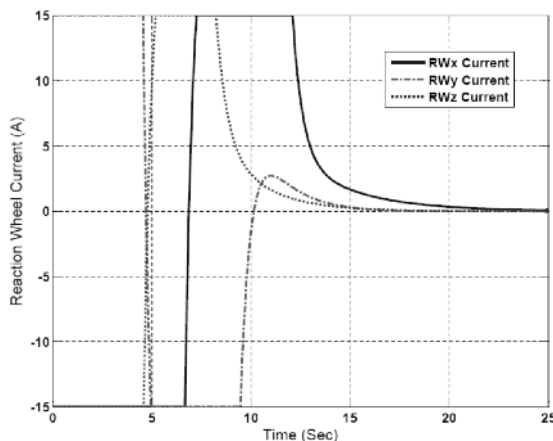
حائز اهمیت بوده و در این مورد تلاشی را ارائه کرده‌ایم که همراه با زمان کوتاه مورد نیاز مانور، انرژی مصرفی نیز در قبال آن بهینه باشد و به عبارتی یک تلاش بهینه جهت انجام یک مانور سریع را معرفی کرده‌ایم.



شکل ۸- نرخ تغییرات زوایای اولیه در یک مانور وضعیت سریع شبیه‌سازی شده



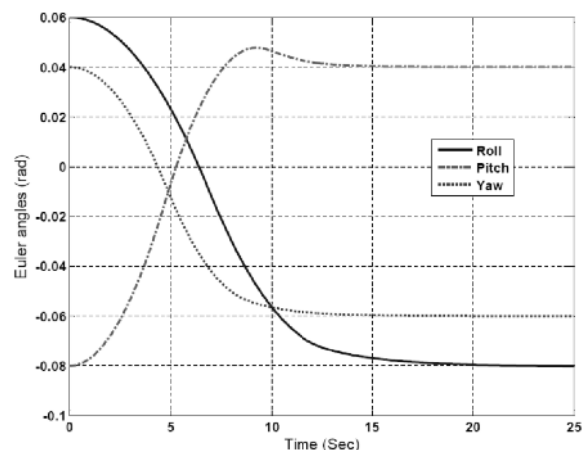
شکل ۹- سرعت زوایای چرخ‌های عکس‌عملی در یک مانور وضعیت سریع شبیه‌سازی شده



شکل ۱۰- جریان مورد نیاز چرخ‌های عکس‌عملی در یک مانور وضعیت سریع شبیه‌سازی شده

کنترل وضعیت ماهواره با افزودن تعداد چرخ‌ها به بیش از سه عدد، از بهینه‌گی دور خواهد شد. به‌عنوان یک شاهد می‌توان مانور وضعیت ارائه شده در مرجع [۴] که در شکل‌های (۵) و (۶) آورده شده‌است، اشاره کرد. مشاهده می‌شود تغییرات زوایای اولیه نامطلوب است و تلاش کنترلی مضاعفی را می‌طلبد، از همه بدتر اینکه بدون اعمال مدیریت بر سرعت چرخ‌های عکس‌عملی مقادیر نهایی آنها در پایان مانور به صفر نخواهد رسید و مصرف انرژی ادامه دارد. همان‌طور که در شکل (۴) نیز مشاهده می‌کنید؛ جریان مورد نیاز چرخ‌های عکس‌عملی به سبب کاهش میزان انرژی مصرفی، دارای محدودیت هستند. بر حسب این نمودار می‌توان متغیرهای کنترلی جریان را به چرخ‌های عکس‌عملی اعمال کرده و مانور وضعیت را برای ماهواره کنترل کرد. این مانور شامل یک تلاش بهینه است؛ زیرا که جریان مصرفی و زمان هر دو دارای میزان قابل قبول و بهینه‌ای هستند.

چنانچه بخواهیم مانور را در زمان طولانی‌تر از این زمان (حدود ۶۳ ثانیه) و با مصرف انرژی کمتری انجام دهیم یا آن را در زمان کوتاهی و با مصرف انرژی بیشتری به پایان برسانیم؛ این مسئله با تغییر توابع وزنی و در نتیجه ماتریس بهره امکان‌پذیر است. اما این مانورها، تلاش بهینه متداول نبوده و اهداف خاص کمینه‌کردن انرژی مصرفی یا زمان انجام مانور را دنبال می‌کنند. به عنوان مثال برای انجام یک مانور سریع<sup>۱</sup> با تغییر مناسب مقادیر ماتریس‌های وزنی  $Q$  و  $R$ ، نتایج نشان داده شده در شکل‌های ۷ تا ۱۰ حاصل شدند:



شکل ۷- تغییرات زوایای اولیه در یک مانور وضعیت سریع شبیه‌سازی شده

اگرچه مانور وضعیت به مراتب سریع‌تر و در زمانی حدود ۲۳ ثانیه صورت پذیرفته است، اما همان‌طور که در شکل (۱۰) مشاهده می‌کنید؛ جریان الکتریکی و به تبع آن انرژی مورد نیاز به مراتب بیشتر از تلاش بهینه حالت قبل است. اما بدیهی است که در مواردی سرعت انجام مانور بر خلاف انرژی مصرفی بسیار

## 1. Slew manoeuver

ماتریس‌های وزنی در روش LQR و در نظر گرفتن قیود جریان درخواستی و سرعت بیشینه عملکرد چرخ عکس‌العملی، مانور بهینه وضعیت ماهواره با مصرف زمان و انرژی حداقل به انجام رسیده و پس از تحویل وضعیت مطلوب ماهواره به خوبی پایدار شده است. در انتها جهت نشان دادن کارایی روش و مدل‌سازی انجام شده، چند نمونه از مسائلی که قبلاً در مراجع دیگر بررسی شده بود، حل شده و بهبود نتایج نشان داده شده است.

## مراجع

- [1] Lai, L. Ch., Yang, Ch. Ch. and Wu, Ch. J., "Time-Optimal Maneuvering Control of a Rigid Spacecraft," *Acta Astronautica*, Vol. 60, Issue 10-11, 2007, pp.791 – 800.
- [2] Chen, X. and Steyn, W. H., "Optimal Combined Reaction-Wheel Momentum Management for LEO Earth-Pointing Satellites," *12<sup>th</sup> AIAA/USU Conference on Small Satellites*, 1998.
- [3] Yoonhyeok, Ch., Hyunjae, L. and Hyochoong, B., "Optimal Reaction Wheel Steering Law for Saturation Avoidance," *Proceedings of the Aircraft Symposium*, Vol. 43<sup>rd</sup>, pp. 65, 2005.
- [4] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control a Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, 1997.
- [۵] کرک، دونالد. *مقدمه‌ای بر تئوری کنترل بهینه*، ترجمه سیدکمال‌الدین نیک‌روش، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، چاپ چهارم، ۱۳۸۲.
- [6] Lyshevski, S. E., *Electromechanical Systems, Electric Machines, and Applied Mechatronics*, CRC Press, 2000.
- [7] Pedersen, D. R., Grunnet, J. D., Larsen, J. A., Laursen, K. K., Kolakowska, E. and Amo, I. P., Attitude Control System for AAUSAT-II, Aalborg University, Institute of Electronic Systems, Project Period IAS8, February 2<sup>nd</sup> - June 2<sup>nd</sup>, 2004.

اگرچه مانور وضعیت به مراتب سریع‌تر و در زمانی حدود ۲۳ ثانیه صورت پذیرفته است، اما همان‌طور که در شکل (۱۰) مشاهده می‌نمایید؛ جریان الکتریکی و به تبع آن انرژی مورد نیاز به مراتب بیشتر از تلاش بهینه حالت قبل است. اما بدیهی است که در مواردی سرعت انجام مانور برخلاف انرژی مصرفی بسیار حائز اهمیت است و در این مورد تلاشی را ارائه کرده‌ایم که همراه با زمان کوتاه مورد نیاز مانور، انرژی مصرفی نیز در قبال آن بهینه باشد و به عبارتی یک تلاش بهینه جهت انجام یک مانور سریع را معرفی کرده‌ایم.

در خاتمه، پژوهش انجام شده در ارتباط با طراحی، ساخت و تست عملگرهای چرخ عکس‌العملی مورد نیاز برای یک شبیه‌ساز ماهواره بوده است [۸].

## نتیجه‌گیری

در این مقاله کنترل بهینه وضعیت یک ماهواره زمین‌گرا<sup>۱</sup> در مدار پایین (LEO) مجهز به عملگرهای چرخ عکس‌العملی با استفاده از رگولاتور بهینه خطی (LQR) درجه دوم مدل‌سازی و شبیه‌سازی شد.

سعی شده است، معادلات دقیق حالت سیستم با کوپل کردن معادلات الکتریکی نسبتاً دقیق چرخ‌های عکس‌العملی و دینامیک حرکت وضعی ماهواره و همچنین اعمال روش‌های اجتناب از اشباع چرخ عکس‌العملی به دست آید. بدین ترتیب تعداد ۹ متغیر حالت شامل وضعیت‌ها و سرعت‌های وضعی ماهواره و سرعت‌های چرخ‌ها به دست آمده‌اند. ورودی‌های کنترلی نیز شامل جریان‌های تغذیه چرخ‌ها هستند. در بخش طراحی سیستم کنترلر با انتخاب مناسب