

# طراحی قانون هدایت با استفاده از روش پایداری زمان کوتاه

ایمان محمدزمان<sup>۱\*</sup> و حمیدرضا مؤمنی<sup>۲</sup>

۱ و ۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس

\*تهران، جلال آل احمد، پل گیشا

mohammadzaman@modares.ac.ir

در این مقاله یک قانون هدایت به منظور پایداری حلقه هدایت با وجود دینامیک مرتبه اول رهگیر با استفاده از روش پایداری زمان کوتاه طراحی شده است. با توجه به این که مسئله درگیری رهگیر و هدف در یک مدت زمان محدود تعریف می شود، لذا استفاده از مفاهیم پایداری زمان کوتاه در آنالیز پایداری حلقه هدایت اهمیت خاصی دارد. قانون ارائه شده علاوه بر نرخ چرخش خط دید، که در هدایت تناسبی مورد استفاده قرار می گیرد، از شتاب رهگیر نیز در محاسبه قانون هدایت استفاده کرده است. شرط پایداری به دست آمده یک عبارت تحلیلی برای محدوده پایداری حلقه هدایت بر اساس زمان پرواز است که وابسته به پارامترهای سیستم و بهره های قانون هدایت است. با انتخاب و تنظیم بهره های حلقه هدایت، شرط پایداری قانون هدایت جدید نسبت به قانون هدایت تناسبی دارای فضای پایداری بیشتر است و محافظه کاری کمتری دارد.

واژه های کلیدی: هدایت تناسبی، پایداری زمان کوتاه، دینامیک رهگیر

## مقدمه

قانون هدایت تناسبی، روشی متداول در هدایت فاز نهایی رهگیرهاست و مقالات زیادی به بررسی عملکرد آن پرداخته اند [۱-۳]. این روش برای حالت دینامیک ایده آل رهگیر که در آن تأخیری بین اندازه گیری نرخ چرخش خط دید و شتاب اعمالی به رهگیر وجود ندارد، عملکرد مناسبی دارد و منجر به برخورد نقطه ای بین رهگیر و هدف بدون مانور می گردد [۴]. ولیکن در حالت واقعی با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر، در انتهای مسیر برخورد، نرخ چرخش خط دید به سمت واگرایی میل می کند بنابراین شتاب رهگیر نیز افزایش می یابد و حلقه هدایت به سمت ناپایداری حرکت می کند. این واگرایی تأثیر زیادی در فاصله زدست دهی<sup>۳</sup> گذاشته است و عملکرد حلقه هدایت را کاهش می دهد [۵-۸].

تابحال پاسخ بسته ای برای حلقه هدایت تناسبی با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر، ارائه نشده است. ولیکن می توان به

بررسی اثر دینامیک رهگیر و بهره حلقه هدایت در پایداری حلقه هدایت پرداخت. مرجع [۵] به آنالیز قانون هدایت تناسبی با وجود دینامیک رهگیر می پردازد و شروط کافی برای برقراری پایداری حلقه هدایت را با استفاده از تعمیم روش پایداری کالمن - یاکوبویچ - پوپوف ارائه کرده است. در این مرجع، یک عبارت تحلیلی از زمان باقیمانده تا برخورد برای تضمین پایداری بیان کرده است. مرجع [۶] نتایج ارائه شده در مرجع [۵] را بسط داده و از روش ملاک دایره برای به دست آوردن شرط پایداری حلقه هدایت استفاده کرده است. با استفاده از ملاک دایره، شرایط کافی پایداری برای هر زمان پرواز دلخواه به دست می آید و نتایج مرجع [۵] را که فقط برای زمان های پرواز طولانی مورد استفاده قرار می گرفت بسط داده است. در مرجع [۷] با استفاده از ملاک دایره، شروط کافی پایداری حلقه هدایت با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر برای قانون هدایت متناسب با چرخش خط دید را ارائه کرده است. در مرجع [۸] با استفاده از تعریف پایداری زمان کوتاه<sup>۴</sup> شروط کافی پایداری حلقه هدایت با

۱. دانشجوی دکتری

۲. دانشیار (نویسنده مخاطب)

4. Short Time Stability

3. Miss Distance

هدایت پرداخته شده‌است و رفتار مسیرهای حالت در یک بازه زمانی مشخص شده با در نظر گرفتن دینامیک مرتبه اول برای رهگیر بررسی می‌گردد. قانون هدایت ارائه شده در این مقاله، از شتاب رهگیر و نرخ چرخش خط دید بین رهگیر و هدف، بازخورد<sup>۵</sup> می‌گیرد و در نهایت یک عبارت تحلیلی برای برقراری پایداری زمان کوتاه حلقه هدایت ارائه می‌کند. با استفاده از شرط به دست آمده، می‌توان بهره‌های حلقه هدایت را طوری تنظیم کرد که ناحیه همگرایی افزایش یابد. همچنین آنالیز پایداری حلقه هدایت نشان داده است که پایداری قانون هدایت جدید محافظه‌کاری کمتری نسبت به پایداری قانون هدایت تناسبی دارد و ناحیه همگرایی آن افزایش یافته است.

### سینماتیک نسبی بین رهگیر و هدف

مطابق شکل (۱)، سینماتیک نسبی بین رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{r} = -2\frac{\dot{R}}{R}r + \frac{1}{R}(a_{t_0} - a_{m_0}) \quad (1)$$

که در آن  $R$  فاصله نسبی هدف و رهگیر،  $\dot{R}$  مشتق اول فاصله نسبی هدف و رهگیر نسبت به زمان،  $r$  نرخ چرخش خط دید و  $a_{m_0}$  و  $a_{t_0}$  به ترتیب شتاب هدف و رهگیر در راستای عمود بر خط دید هستند. اگر رهگیر با سرعت نزدیک‌شوندگی ثابت  $V_C$  به هدف برخورد کند، برد  $R$  به سادگی به صورت  $R = V_C t_{go}$  نمایش داده می‌شود که در آن  $t_{go}$  نشان‌دهنده زمان باقیمانده تا برخورد بین رهگیر و هدف است. همچنین  $V_C = -\dot{R}$  است. در نتیجه معادله غیرخطی (۱) تبدیل به معادله خطی زیر می‌شود:

$$V_C t_{go} \dot{r} - 2V_C r = -a_{m_0} + a_{t_0} \quad (2)$$

با تعریف متغیر  $\delta = V_C r$ ، معادله (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{\delta} = \frac{2}{t_{go}}\delta + \frac{1}{t_{go}}(-a_{m_0} + a_{t_0}) \quad (3)$$

در بسیاری از مقالات، دینامیک رهگیر و اتوپیلوت را به صورت ایده‌آل در نظر می‌گیرند و  $a_{m_0}$  همان فرمان شتاب ایجاد شده توسط قانون هدایت است. ولیکن در حالت واقعی، سیستم پرنده شامل دینامیک وسیله پرنده، اتوپیلوت و عملگر است و در نظر گرفتن این دینامیک در طراحی قانون هدایت ممکن است حتی منجر به ناپایداری حلقه هدایت شود. به طور کلی دینامیک رهگیر در حالت حلقه بسته و با وجود اتوپیلوت را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

در نظر گرفتن قانون هدایت تناسبی و دینامیک رهگیر را به دست آورده است. شروط به دست آمده در این حالت محافظه‌کاری کمتری نسبت به پایداری پوپوف دارد.

موارد بیان شده با در نظر گرفتن هدایت تناسبی مانند قانون هدایت اعمالی به رهگیر است که به آنالیز حلقه هدایت با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر پرداخته است. اما برای طراحی قانون هدایت می‌توان از ایده پایداری زمان کوتاه استفاده کرد - تابحال طراحی قانون هدایت با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر با استفاده از ایده پایداری زمان کوتاه گزارش نشده است. مرجع [۳] با استفاده از تئوری کنترل کلاسیک و قانون هدایت تناسبی، به طراحی قانون هدایت برای نزدیک شدن شتاب واقعی رهگیر به فرمان شتاب پرداخته است. این مقاله از شتاب رهگیر برای بهبود فاصله از دست‌دهی استفاده کرده است ولیکن پایداری حلقه هدایت و شروط لازم برای تضمین همگرایی حالت‌های سیستم ارائه نشده است. در مرجع [۹] کلاس جدیدی از قوانین هدایت تناسبی با استفاده از روش لیاپانوف و حل مسئله پایداری با فرض ایده‌آل بودن دینامیک رهگیر به دست آمده است. تابع لیاپانوف در این حالت، مربع نرخ چرخش خط دید در نظر گرفته شده است. مرجع [۱۰] به جای استفاده از تقریب کوچک بودن زاویه خط دید در مرجع [۹]، از حالت کلی غیرخطی استفاده کرده است. مرجع [۱۱] یک روش به منظور انتخاب متغیرهای مورد استفاده در سنتز لیاپانوف پیشنهاد کرده است که از رخ دادن حالت تکین در مرجع [۹] و [۱۰] جلوگیری می‌کند. مرجع [۱۲] نتایج به دست آمده از مرجع [۱۰] را به حالت سه بعدی تعمیم داده است. قوانین هدایت اشاره شده، بر اساس تئوری لیاپانوف طراحی شده است و پایداری نمایی یا مجانبی را بررسی می‌کنند. این قوانین نرخ چرخش خط دید را با گذشت زمان به بی‌نهایت به سمت صفر یا همسایگی کوچکی از آن هدایت می‌کنند. این موارد با مشاهدات عملی مطابقت ندارد. در بسیاری از کاربردها، زمان هدایت نهایی بسیار کوتاه و گاهی اوقات در حد چند ثانیه بوده است؛ به طوری که قانون هدایت باید محدود بودن نرخ چرخش خط دید را در زمان محدود تضمین کند. در پایداری زمان کوتاه، پایداری در مدت زمان محدودی تعریف و بررسی می‌شود [۱۳]. مرجع [۱۴] نیز با ارائه رویکردی جدید از پایداری زمان محدود، یک قانون هدایت با همگرایی زمان محدود بر اساس نامساوی دیفرانسیلی لیاپانوف ارائه کرده است. این قانون در حالت‌های خاص مشابه قانون هدایت مد لغزشی است و شرط پایداری زمان محدود را نیز ارضا می‌کند، ولی دینامیک رهگیر در این مقاله به صورت ایده‌آل در نظر گرفته شده است.

در این مقاله، با استفاده از تئوری پایداری زمان کوتاه [۱۵] و استفاده از آن در آنالیز پایداری حلقه هدایت، به طراحی قانون

یک سیستم می‌تواند پایداری مجانبی لیپانوف داشته باشد ولی به صورت زمان کوتاه پایدار نباشد و بالعکس [۱۵]. پایداری مجانبی لیپانوف برای مطالعه رفتار سیستمی در یک بازه زمانی به اندازه کافی بزرگ مناسب است؛ درحالی‌که پایداری زمان کوتاه برای بررسی رفتار سیستم‌های با بازه زمانی محدود مناسب است. نتایج پایداری زمان محدود در مرجع [۸] برای حالت‌های عمومی‌تر شامل وزن‌های متغیر با زمان حالت‌ها و باندهای متغیر با زمان بسط داده شده است و شرایط کافی برای پایداری زمان محدود هدایت تناسبی ارائه شده است. در این مقاله از نتایج به دست آمده در مرجع [۸] برای طراحی قانون هدایت جدید با استفاده از پایداری زمان کوتاه استفاده می‌شود.

تعریف ۱ (پایداری زمان کوتاه [۸]): یک سیستم خطی متغیر با زمان به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t), \quad x \in R^n, \quad F(t) \in R^{n \times n} \quad (۸)$$

با توجه به ماتریس مثبت معین  $P(t) \in R^{n \times n}$ ،  $C(t) \in R_+$ ،  $C_0 \in R_+$  و  $T \in R_+$  سیستم (۸) پایدار P زمان کوتاه گفته می‌شود اگر

$$x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) \leq C_0 \quad (۹)$$

دالالت بر:

$$x^T(t)P(t)x(t) \leq C(t) \quad (۱۰)$$

در بازه زمانی  $[t_0, t_0 + T]$  داشته باشد.

ماتریس مثبت معین  $P(t)$  یک وزن متغیر با زمان بر روی حالت‌هاست و اسکالر  $C(t)$  مشخص‌کننده باند متغیر با زمان نرم حالت در زمان  $t$  است. یک شرط لازم برای پایداری P زمان محدود در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱ (شرط لازم برای پایداری P زمان محدود [۸]): فرض می‌شود ماتریس متقارن مثبت معین  $P(t) \in R^{n \times n}$  به صورت  $P(t) = N^T(t)N(t)$  تجزیه شده که  $N(t) \in R^{n \times n}$  یک ماتریس غیرتکین است و ماتریس  $U(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(t) \equiv (\dot{N}N^{-1})^T + \dot{N}N^{-1} + (NFN^{-1})^T + NFN^{-1} \quad (۱۱)$$

آن‌گاه سیستم (۸) پایداری P زمان محدود با توجه به  $P(t)$ ،  $C(t)$ ،  $C_0$  و  $T$  است اگر ماتریس  $H(t)$  که به صورت زیر تعریف می‌شود برای تمامی زمان‌های  $t \in [t_0, t_0 + T]$  معین منفی نباشد.

$$\dot{x}_m = F_m x_m + G_m a_{mc} \quad (۴)$$

$$a_{m\theta} = H_m x_m \quad (۵)$$

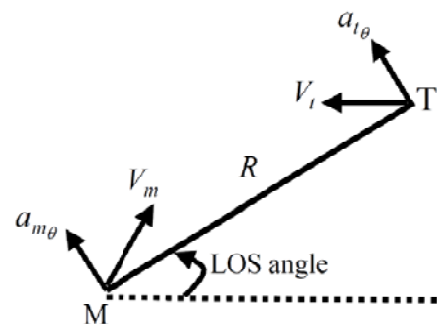
که در آن  $x_m$  حالت‌های جسم پرنده،  $F_m$ ،  $G_m$  و  $H_m$  ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب و  $a_{mc}$  فرمان شتاب تولید شده توسط قانون هدایت است. در این مقاله، قانون هدایت به صورت فیدبک حالت از  $a_{m\theta}$  و  $\delta$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$a_{mc} = K_1 \delta + K_2 a_{m\theta} \quad (۶)$$

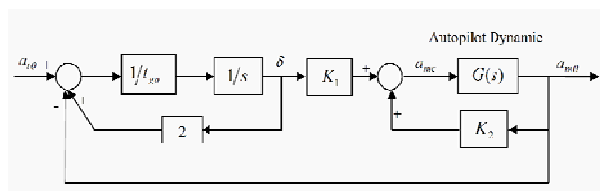
با استفاده از معادلات (۳) تا (۶)، دینامیک حلقه هدایت به صورت معادلات دیفرانسیل خطی متغیر با زمان همگن زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/t_{go} & (-1/t_{go})H_m \\ K_1 G_m & F_m + G_m K_2 H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1/t_{go})a_{t\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

در شکل (۲)، بلوک دیاگرام حلقه هدایت با قانون هدایت جدید و در نظر گرفتن دینامیک رهگیر نشان داده شده است. در این شکل  $K_1$  و  $K_2$  بهره‌های حلقه هدایت با توجه به قانون ارائه شده مطابق رابطه (۷) است و  $G(s)$  تابع تبدیل دینامیک رهگیر یا به عبارت دیگر دینامیک اتوپیلوت است که در این مقاله به صورت سیستم درجه اول در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- سینماتیک نسبی رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی



شکل ۲- بلوک دیاگرام حلقه هدایت با استفاده از قانون هدایت جدید

## پایداری زمان کوتاه

در سیستمی با شرایط اولیه محدود، اگر حالت‌های آن در یک بازه زمانی معین از حد مشخصی تجاوز نکنند به آن پایداری زمان کوتاه گفته می‌شود [۱۳-۱۵]. باید توجه داشت که پایداری مجانبی لیپانوف و پایداری زمان محدود دو مفهوم مجزا است و

حلقه هدایت آشیانه یاب شامل دینامیک جستجوگر، کامپیوتر هدایت و دینامیک رهگیر است. در این مقاله، جستجوگر به صورت یک انتگرال گیر خالص مدل شده است که نرخ چرخش خط دید را بدون تأخیر تولید می کند. کامپیوتر هدایت به صورت یک تابع جبری که فرمان شتاب را با استفاده از اطلاعات به دست آمده از جستجوگر محاسبه می کند، مدل شده است. دینامیک رهگیر و اتوپایلویت که شامل دینامیک وسیله، اتوپایلویت و عملگر است، به صورت سیستم درجه یک مدل شده است. بدون ازدست دادن عمومیت مسئله، بهره dc تابع تبدیل رهگیر از فرمان هدایت به شتاب رهگیر، یک فرض شده است. به عبارت دیگر  $H_m F_m^{-1} G_m = -1$  است و این بدان معناست که شتاب رهگیر در حالت ماندگار، فرمان هدایت را تعقیب می کند. همچنین فرض می شود دینامیک رهگیر و اتوپایلویت به صورت یک سیستم درجه یک مدل شده است:

$$\frac{a_{m0}(s)}{a_{mc}(s)} = \frac{1}{\alpha s + 1} \quad (19)$$

که معادل تحقق فضای حالت با  $F_m = -1/\alpha$ ،  $G_m = 1/\alpha$  و  $H_m = 1$  است. با استفاده از تبدیل  $\xi = \varepsilon \zeta$ ، معادله (۱۷) و (۱۸) به صورت رابطه (۲۰) نوشته می شود.

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{t_{go}} + \frac{K_1}{t_{go}(K_2-1)} & \frac{-1}{t_{go}} \frac{\alpha}{(K_2-1)} \varepsilon \\ \frac{2K_1}{\alpha t_{go} \varepsilon} + \frac{K_1^2}{\alpha t_{go}(K_2-1) \varepsilon} & \frac{(K_2-1)}{\alpha} - \frac{K_1}{t_{go}(K_2-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{t_{go}} \left( 2 + \frac{K_1}{(K_2-1)} \right) & \frac{1}{t_{go}} \left( \frac{-\alpha}{(K_2-1)} \varepsilon + \frac{2K_1}{\alpha \varepsilon} + \frac{K_1^2}{\alpha(K_2-1) \varepsilon} \right) \\ \frac{1}{t_{go}} \left( \frac{-\alpha}{(K_2-1)} \varepsilon + \frac{2K_1}{\alpha \varepsilon} + \frac{K_1^2}{\alpha(K_2-1) \varepsilon} \right) & \frac{2(K_2-1)}{\alpha} - \frac{2K_1}{t_{go}(K_2-1)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در آن  $\varepsilon$  یک پارامتر آزاد برای کاهش محافظه کاری شرط پایداری است. دقت شود که معنای فیزیکی پایداری زمان کوتاه وابسته به پارامترهایی مانند  $P(t)$ ،  $C(t)$  و  $C_0$  دارد. در این مقاله، این پارامترها بر اساس تعریف زیر از پایداری حلقه هدایت مشخص شده اند.

تعریف ۲ (پایداری حلقه هدایت): یک حلقه هدایت پایدار گفته می شود اگر خاصیت های زیر ارضا شوند:

خاصیت ۱: حالت های رهگیر و اتوپایلویت محدود باشند.

خاصیت ۲: نرخ چرخش خط دید محدود باشد.

خاصیت ۳: فرمان شتاب محدود باشد.

مطابق رابطه (۶)، فرمان شتاب با استفاده از نرخ چرخش خط دید و حالت خروجی رهگیر و اتوپایلویت (شتاب رهگیر) محاسبه

$$H(t) \equiv \left[ -U + \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} I \right] \quad (12)$$

## طراحی قانون هدایت با استفاده از تئوری پایداری زمان کوتاه

از دیدگاه عملی، از آن جا که حلقه هدایت در مدت زمان محدودی عمل می کند، استفاده از ایده پایداری زمان کوتاه برای بررسی مفهومی قانون هدایت ارائه شده مناسب است. در این قسمت به بررسی پایداری زمان محدود قانون هدایت ارائه شده پرداخته می شود.

لم ۱: یک سیستم خطی متغیر با زمان به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \quad (13)$$

اگر پارامترهای سیستم  $F(t)$  و  $G(t)$  و ورودی  $u(t)$  شروط زیر را ارضا کنند:

$$\|F(t)\| > \varepsilon_F, \quad \|G(t)\| < \delta_G, \quad \|u(t)\| < \delta_u \quad (14)$$

که  $\varepsilon_F > 0$ ،  $\delta_G < \infty$  و  $\delta_u < \infty$  آن گاه محدود بودن  $\|\dot{x}(t)\|$  بیان کننده محدود بودن  $\|x(t)\|$  است [۸].

لم ۱، استفاده از  $\|\dot{x}_m(t)\|$  به جای  $\|x_m(t)\|$  را برای تست محدود بودن  $\|x_m(t)\|$  توصیه می کند. با توجه به مفهوم لم ۱، بردار حالت جدید  $\xi$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\xi \equiv \dot{x}_m \quad (15)$$

آن گاه  $x_m$  بر اساس ترم های  $\xi$  و  $\delta$  به صورت زیر به دست می آید:

$$x_m = (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} \xi - (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} K_1 G_m \delta \quad (16)$$

همچنین دینامیک حلقه هدایت که در معادله (۷) بیان شد با فرض هدف بدون مانور بر اساس  $\xi$  و  $\delta$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{\delta} = \left( \frac{2}{t_{go}} + \frac{1}{t_{go}} H_m (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} K_1 G_m \right) \delta - \frac{1}{t_{go}} H_m (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} \xi \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \left\{ -\frac{1}{t_{go}} K_1 G_m H_m (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + (F_m + G_m K_2 H_m) \right\} \xi + K_1 G_m \left\{ \frac{2}{t_{go}} + \right. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\left. \frac{1}{t_{go}} H_m (F_m + G_m K_2 H_m)^{-1} K_1 G_m \right\} \delta$$

شرط به دست آمده از این روابط را می توان برای تعیین پارامترهای سیستم و طراحی قانون هدایت نیز استفاده کرد. در حالت خاص اگر  $K_2 = 0$  در نظر گرفته شود، قانون هدایت، تبدیل به هدایت تناسبی می شود و شروط پایداری آن به صورت زیر است:

$$K_1 = N \geq 2 \quad (28)$$

$$t_{go} \geq K_1 \alpha \quad (29)$$

که در آن  $N$  ضریب ناوبری تناسبی است. این شروط درست مطابق شروط به دست آمده در مراجع مختلف برای پایداری زمان کوتاه هدایت تناسبی است [۸]. با توجه به رابطه (۲۷) مشاهده می شود که قانون طراحی شده جدید حد پایداری بیشتری نسبت به هدایت تناسبی دارد و با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی می توان به نتایج بهتری نسبت به هدایت تناسبی رسید. مطابق شرط (۲۳) و (۲۷) هرچه مقدار  $K_2$  کاهش یابد و به سمت اعداد منفی تر میل کند، ناحیه پایداری افزایش می یابد. با افزایش محدوده پایداری حلقه هدایت، عملکرد رهگیر در برخورد با هدف نیز بهبود می یابد و خطای ازدست دهی صفر و فاصله ازدست دهی کاهش می یابد. همچنین به صورت تحلیلی می توان عملکرد حلقه هدایت را بررسی کرد و مقادیر اولیه مناسبی مانند سرعت اولیه رهگیر، زاویه پرتاب و ... را مشخص کرد تا پایداری حلقه هدایت در مدت زمان بیشتری تضمین شود و نهایتاً عملکرد رهگیر بهبود یابد.

محدوده پایداری قانون هدایت تناسبی و قانون هدایت جدید در شکل (۳)، نمایش داده شده است. با تعریف  $\eta^* = t_{go}^* / \alpha$  که در آن  $t_{go}^*$  کوچک ترین حد زمان باقیمانده تا برخورد به منظور حفظ پایداری حلقه هدایت است، می توان تغییرات  $\eta^*$  را بر حسب تغییرات  $K_2$  مشاهده کرد. مطابق شکل برای  $K_1 = N = 5$ ، شرط پایداری قانون هدایت تناسبی یک شرط ثابت و بدون تغییر نسبت به  $K_2$  بوده ولی در قانون هدایت جدید،  $\eta^*$  با کاهش  $K_2$ ، کاهش یافته و لذا محدوده پایداری حلقه هدایت افزایش می یابد.

شرط پایداری قانون هدایت طراحی شده با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴) و (۲۷) بر حسب مقادیر مختلف  $K_2$  و  $K_1 = 2(1 - K_2)$  و به ازای مقادیر مختلف ثابت زمانی دینامیک رهگیر در شکل (۴)، نشان داده شده است. مشاهده می شود که برای یک ثابت زمانی مشخص، با کاهش بهره  $K_2$  محدوده پایداری حلقه هدایت افزایش می یابد. همچنین، افزایش ثابت زمانی منجر به کاهش ناحیه پایداری حلقه هدایت شده است.

می شود. لذا محدود بودن آن ها باعث محدود ماندن فرمان شتاب خواهد بود و برآورده شدن خاصیت ۱ و ۲ منجر به برآورده شدن خاصیت ۳ می شود.

یکی دیگر از پارامترهای مهم در بررسی قانون هدایت، میزان فاصله ازدست دهی صفر است. تعریف فاصله ازدست دهی صفر بدین صورت است که اگر هدف بر روی مسیر فعلی خود و بدون مانور حرکت کند و رهگیر مانور، اصلاحی دیگری انجام ندهد چه فاصله ای بین رهگیر و هدف ایجاد می شود. این فاصله با فرض زمان باقیمانده تا برخورد نسبتاً کوچک و دینامیک نسبتاً سریع رهگیر به صورت تقریبی با رابطه زیر بیان می شود [۸]:

$$ZEM(t) = \delta(t)t_{go}^2 \quad (22)$$

بنابراین طبق خاصیت ۲ و رابطه (۲۱)، با گذشت زمان به سمت  $t_F$  فاصله ازدست دهی صفر به سمت صفر میل می کند و لذا شرط برخورد بین رهگیر و هدف نیز برآورده می شود. با افزایش ناحیه پایداری حلقه هدایت، زمان پایداری حلقه هدایت افزایش می یابد و این به معنای آن است که به ازای  $t_{go}$  کوچک تری پایداری برقرار است و لذا فاصله ازدست دهی صفر کمتر می شود و به سمت برخورد نقطه ای با هدف در زمان  $t_F$  پیش می رود.

تعریف ۲ می تواند به صورت مسئله پایداری  $P$  زمان محدود به وسیله انتخاب مناسب وزن  $P$  و باند مناسب برای  $x^T P x$  فرموله شود. برای مثال مطابق [۸] می توان  $P(t)$  به صورت ماتریس واحد و  $C(t)$  یک عدد ثابت در نظر گرفته شود و  $U(t)$  به صورت رابطه (۲۲) به دست می آید.

با توجه به رابطه (۲۲)، شرط کافی برای پایداری زمان محدود با استفاده از قضیه ۱ به صورت زیر است:

$$K_2 < 1 \quad (23)$$

$$K_1 \geq 2(1 - K_2) \quad (24)$$

$$t_{go} \geq \frac{K_1 \alpha}{(K_2 - 1)^2} + \frac{(-\alpha^2 \varepsilon^2 + 2K_1(K_2 - 1) + K_1^2)^2}{\alpha \varepsilon^2 (8K_2 - 8 + 4K_1)(K_2 - 1)^2} \quad (25)$$

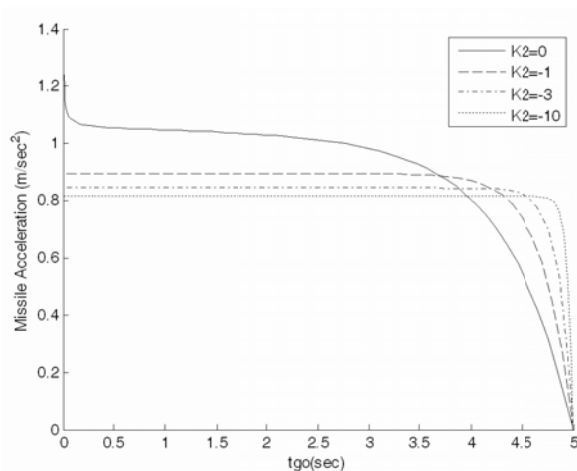
به منظور کمینه کردن حد پایین  $t_{go}$  در شرط پایداری (۲۵)، پارامتر آزاد  $\varepsilon$  به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{K_1^2 - 2K_1 + 2K_1 K_2}}{\alpha} \quad (26)$$

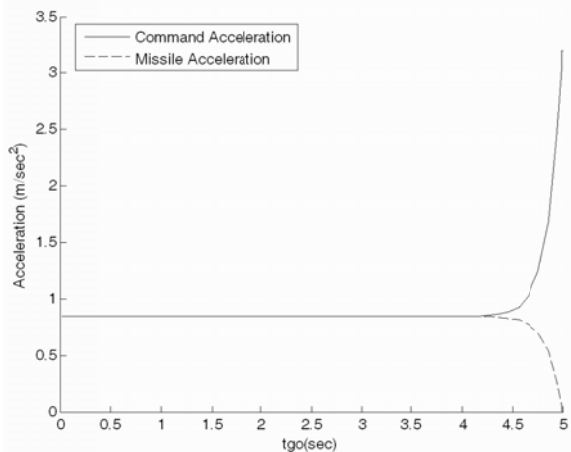
و لذا رابطه (۲۵) به صورت زیر ساده تر می شود:

$$t_{go} \geq \frac{K_1 \alpha}{(K_2 - 1)^2} \quad (27)$$

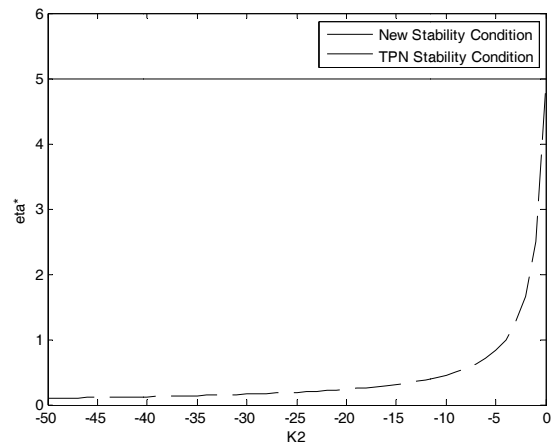
با توجه به روابط پایداری (۲۳) و (۲۴) و (۲۷) برای قانون هدایت جدید و روابط (۲۸) و (۲۹) برای قانون هدایت تناسبی می‌توان گفت اگر ثابت زمانی دینامیک رهگیر  $\alpha = 0.5$  و شرط ناپایداری  $t_{go} = 1.5$  برای هر دو قانون فرض شود، باید در قانون هدایت تناسبی  $N = 3$  در نظر گرفته شود و در صورت هدایت جدید می‌توان بهره‌های حلقه هدایت را به صورت  $K_1 = 12, K_2 = -1$  در نظر گرفت. در شکل (۷)، خطای ازدست‌دهی صفر برای این دو قانون نشان داده شده است. با توجه به این که شرط ناپایداری در هر دو قانون یکسان در نظر گرفته شده است ولیکن قانون هدایت جدید منجر به خطای ازدست‌دهی کمتری نسبت به قانون هدایت تناسبی شده و این مسئله نشان‌دهندهٔ محافظه‌کاری کمتر و ناحیهٔ پایداری بیشتر این قانون است. همچنین فاصلهٔ ازدست‌دهی قانون جدید نیز نسبت به هدایت تناسبی کمتر شده است.



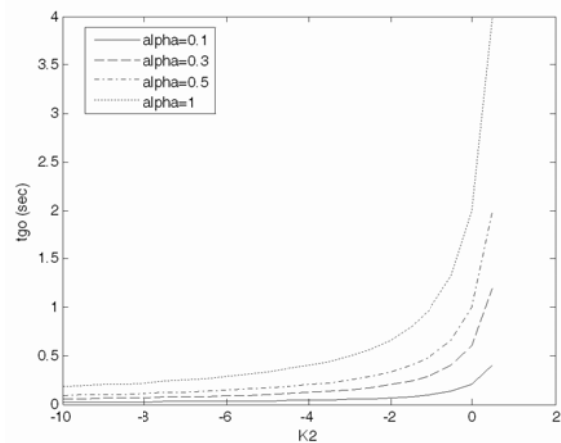
شکل ۵- شتاب رهگیر در قانون هدایت جدید به ازای  $\alpha = 0.5$  و مقادیر مختلف  $K_2$



شکل ۶- شتاب رهگیر و فرمان شتاب در قانون هدایت جدید به ازای  $K_2 = -3$  و  $K_1 = 8, \alpha = 0.5$



شکل ۳- مقادیر  $\eta^*$  بر اساس شرط قانون هدایت جدید و هدایت تناسبی

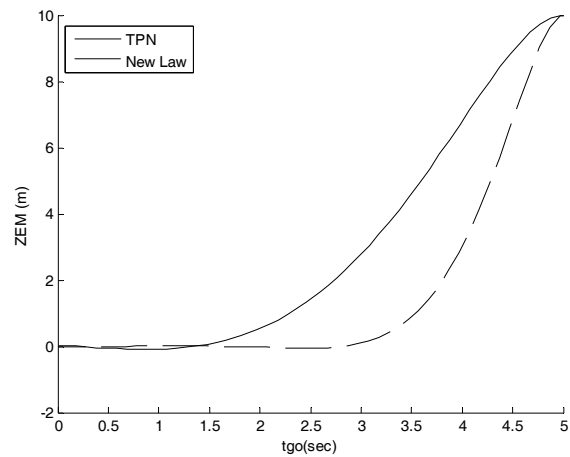
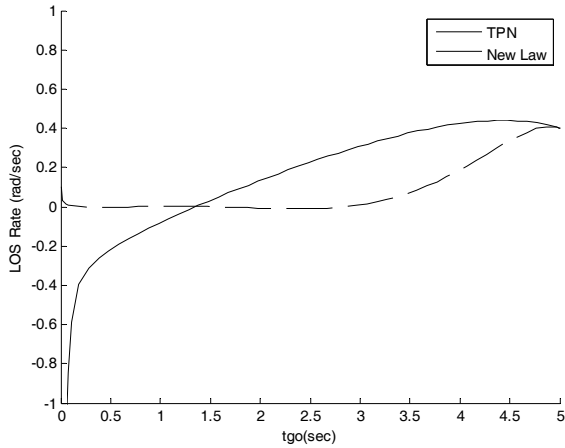


شکل ۴- محدودهٔ پایداری حلقهٔ هدایت نسبت به  $K_2$  و به ازای مقادیر مختلف ثابت زمانی دینامیک رهگیر

## نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت به شبیه‌سازی عملکرد قانون هدایت طراحی شده و تحلیل نتایج پایداری زمان کوتاه آن پرداخته شده است. روابط سینماتیکی خطی شده برای بیان حرکت نسبی بین رهگیر و هدف در نظر گرفته شده است. برای تمامی شبیه‌سازی‌ها مطابق مرجع [۸]، مقدار اولیهٔ فاصلهٔ ازدست‌دهی صفر برابر با ۱۰ متر در نظر گرفته شده و شرایط اولیهٔ متغیر حالت  $\delta(t)$  با توجه به رابطهٔ (۲۱) به صورت مقادیر مختلف  $K_2$ ،  $K_1 = 2(1 - K_2)$ ،  $\alpha = 0.5$  و زمان پایانی  $T_f = 5$  نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با کاهش بهرهٔ  $K_2$  شتاب سیستم به سمت مقادیر کمتر یا به عبارتی پایداری بیشتر رفته است و این نکته مطابق نتیجهٔ به‌دست آمده در قسمت قبل است. در شکل (۶) شتاب رهگیر و فرمان شتاب در قانون هدایت جدید به ازای  $\alpha = 0.5$ ،  $K_1 = 8$  و  $K_2 = -3$  نشان داده شده است.

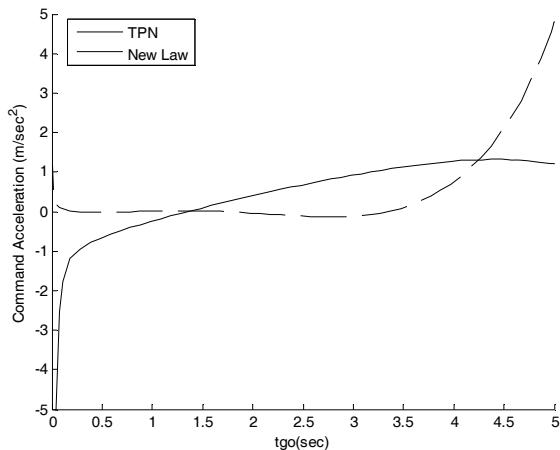
اعمال این شتاب با استفاده از نیروهای آیرودینامیکی در انتهای زمان پرواز نباشد.



شکل ۷- خطای ازدست‌دهی صفر به ازای  $\alpha = 0.5$  در قانون هدایت جدید و قانون هدایت تناسبی ( $N = 3$ ) ( $K_1 = 12, K_2 = -1$ )

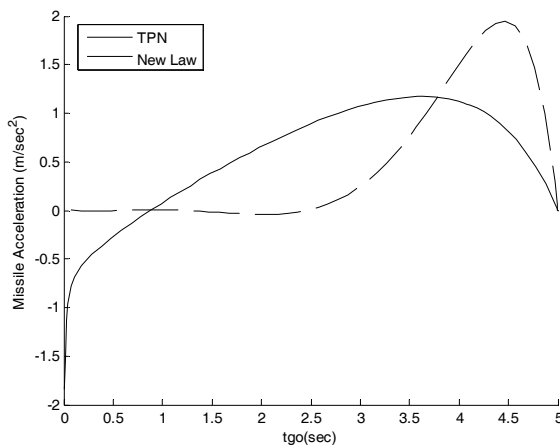
شکل ۸- نرخ چرخش خط دید به ازای  $\alpha = 0.5$  در قانون هدایت جدید و قانون هدایت تناسبی ( $N = 3$ ) ( $K_1 = 12, K_2 = -1$ )

در شکل (۸)، نرخ چرخش خط دید برای مقادیر ذکر شده در بالا برای قانون هدایت جدید و قانون هدایت تناسبی رسم شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است، نرخ چرخش خط دید در قانون هدایت جدید به سمت صفر میل کرده و در لحظات پایانی پرواز نیز محدود است. ولیکن در هدایت تناسبی، نرخ چرخش خط دید در لحظات پایانی پرواز نامحدود شده و این مسئله باعث بروز ناپایداری در لحظات پایانی و فاصله ازدست‌دهی غیرصفر می‌شود. همچنین قانون هدایت جدید باعث قرارگرفتن رهگیر به صورت سریع بر روی خط دید می‌شود بنابراین نرخ چرخش خط دید سریع‌تر از قانون هدایت تناسبی صفر شده است.



شکل ۹- فرمان شتاب در قانون هدایت جدید و هدایت تناسبی

در شکل (۹)، فرمان شتاب ناشی از هر دو قانون هدایت نشان داده شده است. در قانون هدایت تناسبی، فرمان شتاب در لحظات انتهایی پرواز به سرعت افزایش می‌یابد که در این سناریو به ۴۰- متر بر مجذور ثانیه در لحظه پایانی می‌رسد. ولیکن در قانون هدایت جدید، بیشترین دامنه فرمان شتاب در حدود ۵ متر بر مجذور ثانیه است.



شکل ۱۰- شتاب رهگیر در قانون هدایت جدید و هدایت تناسبی

در شکل (۱۰) شتاب اعمالی به رهگیر در هر دو قانون هدایت نشان داده شده است. در قانون جدید، پس از شروع هدایت، شتاب بیشتری نسبت به هدایت تناسبی به رهگیر اعمال می‌شود و در بقیه طول مسیر، شتاب رهگیر تقریباً برابر صفر است و رهگیر بر روی مسیر برخورد قرارگرفته است. این بدان معناست که استراتژی قانون جدید آن است که در ابتدای شروع هدایت، سعی دارد رهگیر را بر روی مسیر برخورد قراردهد. ولیکن در هدایت تناسبی، شتاب رهگیر در لحظات پایانی زیاد می‌شود و با توجه به اینکه در حالت واقعی سرعت رهگیر در ابتدای اعمال قانون هدایت در فاز آشیانه‌یابی بیشتر از لحظات پایانی آن است، لذا ممکن است رهگیر قادر به

Time Stability Approach to Proportional Navigation Systems Analysis”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 853-861.

- [7] Kim, J. J. and Lyou, J., “Absolut Stability Margin in Missile Guidance Loop”, *SICE-ICASE International Joint Conference*, Korea, 2006, pp. 851-855.
- [8] Rew, D. Y., Tahk, M. J., and Cho, H., “Short Time Stability of Proportional Navigation Guidance Loop”, *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 32, No. 4, 1996, pp. 1107-1115.
- [9] Yanushevsky, R. and Boord, W., “Lyapunov Approach to Guidance Laws Design”, *Nonlinear Analysis*, 2005, pp. 743-749.
- [10] Yanushevsky, R. and Boord, W., “New Approach to Guidance Law Design”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 28, No.1, 2005, pp. 162-166.
- [11] Lechevin, N. and Rabbath, C. A., “Lyapunov-Based Nonlinear Missile Guidance”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 27, No.6, 2005, pp. 1096-1102.
- [12] Yanushevsky, R., “Concerning Lyapunov-Based Guidance”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 29, No.2, 2006, pp. 509-511.
- [13] Pardeep, S. and Shrivastava, S. K., “Stability of Dynamic Systems: an Overview”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 13, No.3, 1990, pp. 385-393.
- [14] Zhou, D. and Sun, S., “Guidance Laws with Finite Time Convergence”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 6, 2009, pp. 1838-1846.
- [15] Amato, F., Ariola, M. and Cosentino, C., “Finite-Time Stability of Linear Time-Varying Systems: Analysis and Controller Design”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 55, No. 4, 2010, pp. 1003-1008.

## نتیجه گیری

در این مقاله، یک قانون هدایت با استفاده از تئوری پایداری زمان کوتاه و با در نظر گرفتن دینامیک مرتبه اول رهگیر طراحی شده است. قانون ارائه شده، علاوه بر استفاده از نرخ چرخش خط دید از شتاب رهگیر نیز برای تولید فرمان شتاب استفاده می‌کند. محدوده پایداری بر اساس زمان باقیمانده تا برخورد برای دینامیک درجه اول رهگیر به دست آمده و شرط پایداری به ازای بهره‌های مختلف حلقه هدایت مورد تحلیل قرار گرفته است. شرط پایداری قانون هدایت ارائه شده در مقایسه با هدایت تناسبی ناحیه پایداری بیشتری دارد و به ازای شرایط مساوی ناپایداری، عملکرد بهتری را از خود نشان می‌دهد.

## مراجع

- [1] Zarchan, P., “Tactical and Strategic Missile Guidance,” *AIAA Series*, 4<sup>th</sup> Edition, Vol. 199, 2002, p. 743.
- [2] Shneydor, N. A., *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*, Horwood Series in Engineering Science, 1998.
- [3] Yanushevsky, R., *Modern Missile Guidance*, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2008.
- [4] Guelman, M., “A Qualitative Study of Proportional Navigation,” *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES7, No. 4, 1971, pp. 637-643.
- [5] Guelman, M., “The Stability of Proportional Navigation Systems”, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 1990, pp. 586-590.
- [6] Gurfil, P., Jodorkovsky, M., and Guelman, M., “Finite