JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی
جلد ۳/ شمارهٔ ۳ و ۴/ پاییز و زمستان ۱۳۸۹
ص. ص ۵۸-۵۳

بررسی اثر منظم‌سازی و تغییر متغیر مستقل در سرعت حل مسئلهٔ دو جسم اختلالی

مهدی جعفری‌ندوشن[1*] و محسن تیوای[2]

۱- دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی
۲- گروه صنایع فضایی، صاایران

*تهرانپارس، وفادار شرقی
mehdi88@gmail.com

در این مقاله تأثیر منظم‌سازی در سرعت حل مسئلهٔ دو جسم در مقایسه با روش‌های معمول دیگر بررسی شده است. هدف از به‌کارگیری این روش، کاهش حجم محاسبات و دست‌یابی به دقت کافی در کم‌ترین زمان ممکن است. در واقع با خطی‌سازی معادلهٔ حرکت و تغییر متغیر مستقل از زمان به زاویهٔ آنومالی حقیقی، در عین امکان افزایش دقت، زمان اجرای برنامه به میزان چشم‌گیری کاهش می‌یابد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی بیانگر این موضوع هستند که استفاده از این روش چه در محاسبات آن‌برد (On-board) و چه در شبیه‌سازی‌های طولانی (Long Term) مناسب‌تر و با کارآیی بالاتر از سایر روش‌های مرسوم چه در روش اختلالات ویژه و چه در روش اختلالات عمومی است.

واژه‌های کلیدی: مسئله دو جسم اختلالی، منظم‌سازی

مقدمه

به‌کارگیری شبیه‌سازی در طراحی و ساخت سیستم‌های هوافضایی به دلیل پیچیدگی ساختاری آن‌ها و همچنین هزینهٔ بالای زمانی و مالی انجام آزمایش در سطح واقعی، نه تنها منطقی بلکه لازم به‌نظر می‌رسد. صحت این موضوع به‌طور خاص در شاخهٔ مهندسی فضایی بدیهی‌تر است، چرا که مهیا ساختن زمینه برای انجام آزمایش‌ها و تست‌ها مستلزم حضور در فضاست. ضمن این‌که به عنوان مثال، بررسی تغییر پارامترهای مداری یک ماهواره در طول عمر عملکردی به غیر از استفاده از شبیه‌سازی امری امکان‌ناپذیر است؛ لذا استفاده از شبیه‌سازی نیز اجتناب‌ناپذیر است.

شبیه‌سازی را می‌توان به‌کارگیری مدل ساخته شده از پدیده و مسئلهٔ واقعی به‌منظور مطالعه و پیش‌بینی عملکرد سیستم واقعی دانست. بدین ترتیب شبیه‌سازی بررسی، مطالعه و آزمایش عملکرد سیستم، اثر تغییرات محیطی بر عملکرد سیستم، مشاهدهٔ رفتار جزء به جزء سیستم، بررسی و مطالعهٔ دینامیکی در زمان واقعی و اثر افزودن عناصر جدید به سیستم را ممکن می‌سازد.

در طراحی و تحلیل مدار ماهواره از آن‌جا که امکان تجربه بررسی حرکت به صورت واقعی در مدار، مخصوصاً در تخمین طول عمر و تغییر پارامترهای مداری وجود ندارد، استفاده از شبیه‌سازی تنها راه حل مسئله است.

مدل ساخته شده برای بررسی حرکت ماهواره در حضور تمام عوامل محیطی، مبتنی بر قوانین سه گانه و گرانش نیوتن است که با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل برداری مرتبهٔ دوم نمایش داده می‌شود که برای حل به شش معادلهٔ اسکالر مرتبهٔ اول شکسته می‌شود. در رابطه (۱) $\ddot{\vec{x}}$ و $\vec{x}$ به ترتیب بردار شتاب و بردار موقعیت ماهواره در دستگاه اینرسی، μ ثابت گرانشی و $\vec{a}_p$ نیز بردار شتاب

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد (نویسندهٔ مخاطب)
۲. کارشناسی ارشد

اختلالی در دستگاه اینرسی هستند. وجود دستگاه معادلات غیرخطی و کوپل و همچنین غیرهمگن بودن آن، نیاز استفاده از روش‌های با عملکرد بالا و دقت کافی را افزایش می‌دهد. انتگرال‌گیری مستقیم از معادلات، زمان اجرای برنامه زیادی را می‌طلبد. بخصوص که هدف از حل و شبیه‌سازی مطالعه رفتار متغیرها در زمان طولانی چند ماه و چند سال باشد.

$$\ddot{\bar{x}} + \frac{\mu}{|\bar{x}|^3}\bar{x} = \bar{a}_p \qquad (۱)$$

تاکنون روش‌های مختلفی برای بررسی مسئلهٔ دوجسم اختلالی ابداع شده‌اند که در دو دسته روش اختلالات ویژه و روش اختلالات عمومی دسته‌بندی می‌شوند. در دستهٔ اول با استفاده از محاسبات عددی، معادلهٔ فوق به‌طور مستقیم حل می‌شود. دستهٔ دوم به دنبال بررسی تغییر المان‌های مداری به واسطهٔ حضور اختلالات است و به معادلهٔ حرکت توجهی ندارد. هر کدام از این روش‌ها مزایا و معایب خود را دارند. ولی در همهٔ این روش‌ها زمان اجرای برنامه با خطای قابل قبول، مسئلهٔ مهم و مشکل‌سازی به شمار می‌رود. در این مقاله به سراغ ارائهٔ روشی می‌رویم که با حفظ و حتی بهبود دقت حل، زمان اجرای برنامه را به میزان زیادی کاهش دهد. این روش برای هر نوع مداری مناسب است. مخصوصاً برای مدارهای دایروی که خروج از مرکز در آن‌ها صفر است یا مدارهای استوایی که زاویهٔ میل مداری صفر دارند، این روش دچار تکینگی نشده و قابل استفاده است.

وجود ترم $1/r^2$ در معادلهٔ حرکت نه تنها موجب تکین شدن معادله می‌شود بلکه خطای عددی خطیری با خود به همراه دارد [۱]. منظم‌سازی به معنی از بین بردن این تکینگی در معادلات حاکم است. برای انجام عملیات منظم‌سازی و ارائهٔ رابطهٔ کلی برای انواع مدارها از تکنیک‌ها و ابزارهای مختلفی از قبیل کواترنیون‌ها [۲]، خطی‌سازی [۳] و تبدیل ساندمن [۴] استفاده می‌کنیم.

دستگاه مختصات

حرکت یک ماهواره تحت تأثیر نیروی گرانشی زمین تحت عنوان مسئلهٔ دوجسم مطرح می‌شود. شکل کلی معادلات حرکت در حضور عوامل اختلالی نسبت به دستگاه اینرسی زمین مرکز با معادلهٔ (۱) بیان می‌شود. از آن‌جاکه حرکت مداری در صفحه صورت می‌گیرد، بیان معادلهٔ حرکت در دستگاه مختصات مداری مناسب‌تر به‌نظر می‌رسد. بدین منظور دستگاه مختصات مداری زیر را تعریف می‌کنیم [۲]:

دستگاه مختصات را به‌گونه‌ای درنظر می‌گیریم که بردار یکه $\bar{i}$ در راستای بردار موقعیت، $\bar{x}$ و بردار یکه $\bar{k}$ در راستای بردار اندازهٔ حرکت خطی، $\bar{h}$ باشد. بردار یکه $\bar{j}$ را نیز طوری تعریف می‌کنیم که این سه بردار یک دستگاه راستگرد را تشکیل دهند. یعنی:

$$\bar{i} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \frac{\bar{x}}{R} \qquad (۲)$$

$$\bar{k} = \frac{\bar{x}\times\bar{v}}{|\bar{x}\times\bar{v}|} = \frac{\bar{h}}{h} \qquad (۳)$$

$$\bar{j} = \bar{k}\times\bar{i} \qquad (۴)$$

در رابطهٔ (۲) R بیانگر مقدار بردار موقعیت و در رابطهٔ (۳) $\bar{V}$ بردار سرعت ماهواره است. بدیهی است که این دستگاه اینرسی نبوده و بردارهای یکهٔ آن با زمان تغییر می‌کنند. بردار

$$\bar{\omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k} \qquad (۵)$$

را بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه مداری می‌نامیم. نرخ تغییرات بردارهای یکه دستگاه مختصات مداری را ابتدا با مشتق‌گیری از روابط (۲) و (۳) به‌دست می‌آوریم. سپس از قاعدهٔ مشتق بردار استفاده کرده و حاصل هر دو را برابر قرار می‌دهیم.

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{\bar{v}}{R} - \frac{\dot{R}}{R^2}\bar{x} = \bar{\omega}\times\bar{i} = r\bar{j} - q\bar{k} \qquad (۶)$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{1}{h}\frac{d\bar{h}}{dt} - \frac{\dot{h}}{h^2}\bar{h} = \bar{\omega}\times\bar{k} = -p\bar{j} + q\bar{i} \qquad (۷)$$

لذا مقادیر مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای عبارت خواهد بود از:

$$p = -\frac{1}{h}\left(\frac{d\bar{h}}{dt}.\bar{j}\right) \qquad (۸)$$

$$q = 0 \qquad (۹)$$

$$r = \frac{1}{R}\left(\bar{v}.\bar{j}\right) \qquad (۱۰)$$

با استفاده از تعریف بردار اندازهٔ حرکت خطی و معادله (۱) می‌توان نوشت که

$$\frac{d\bar{h}}{dt}.\bar{j} = -Ra_{p_k} \qquad (۱۱)$$

از طرفی بردار سرعت در صفحهٔ مداری است. گرچه وجود اختلالات یکتایی صفحهٔ مداری را ملغی می‌کند، ولی بردار سرعت در دستگاه مداری در هر لحظه، همواره در صفحه است و دارای دو مؤلفهٔ شعاعی و عمودی است. یعنی:

$$\bar{v} = v_R\bar{i} + v_\perp\bar{j} \qquad (۱۲)$$

از طرفی

$$v_\perp = \frac{h}{R} = \bar{v}.\bar{j} \qquad (۱۳)$$

با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۳) می‌توان به روابط جدیدی برای p و r رسید.

$$p = \frac{R}{h} a_{p_{\bar{k}}} \tag{۱۴}$$

$$r = \frac{h}{R^2} \tag{۱۵}$$

معادلات حرکت در دستگاه مختصات مداری

حال به استخراج معادلات حرکت در دستگاه مختصات مداری می‌پردازیم. از آن‌جا که دستگاه مختصات مداری غیراینرسی است، بنابراین معادله حرکت به شکل زیر خواهد بود:

$$\ddot{R}\bar{i} + 2\dot{R}\bar{\omega}\times\bar{i} + R\left[\dot{\bar{\omega}}\times\bar{i} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{i}\right)\right] = -\frac{\mu}{R^2}\bar{i} + \bar{a}_p \tag{۱۶}$$

با استفاده از مقادیر مولفه‌های سرعت زاویه‌ای می‌توان معادله برداری فوق را به شکل سه معادلهٔ اسکالر زیر بازنویسی کرد:

$$\ddot{R} - Rr^2 + \frac{\mu}{R^2} = a_{p_{\bar{i}}} \tag{۱۷}$$

$$\frac{d}{dt}\left(R^2 r\right) = Ra_{p_{\bar{j}}} \tag{۱۸}$$

$$Rpr = a_{p_{\bar{k}}} \tag{۱۹}$$

معادلهٔ (۱۹) رابطه‌ای جبری و در واقع همان رابطهٔ (۱۴) است. با استفاده از معادلات (۱۷) و (۱۸) و تعریف رابطهٔ سرعت شعاعی به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= v_R \\ \frac{dv_R}{dt} &= \frac{h^2}{R^3} - \frac{\mu}{R^2} + a_{p_{\bar{i}}} \\ \frac{dh}{dt} &= Ra_{p_{\bar{j}}} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول فوق توصیف‌کنندهٔ حرکت ماهواره در حضور عوامل اختلالی است. ملاحظه می‌شود که در حضور اختلالات دیگر مقدار اندازهٔ حرکت خطی ثابت نیست و به واسطهٔ مؤلفه در صفحهٔ نیروهای اختلالی تغییر می‌کند. می‌توان با اعمال شرایط اولیهٔ مناسب و استفاده از الگوریتم عددی مناسب، مستقیماً از معادلات فوق انتگرال‌گیری کرد و به جواب دست پیدا کرد. اما به‌منظور افزایش عملکرد و بهبود سرعت و دقت حل دستگاه معادلات فوق را در طی دو مرحله منظم‌سازی می‌کنیم.

تغییر متغییر مستقل

با تغییر متغیر مستقل از زمان به یک متغیر جدید، عملکرد الگوریتم حل بهبود می‌یابد. مخصوصاً در مورد مدارهای بیضوی که تعداد گام زیادی برای انتگرال‌گیری در حوالی نقطهٔ اوج باید طی شود تا به دقت مطلوب دست پیدا کنیم [۴]. با به‌کارگیری این تغییر متغیر اندازهٔ گام زمانی با استفاده از تبدیل ساندمن به صورت تحلیلی تغییر می‌کند. صورت کلی تبدیل ساندمن عبارت است از:

$$dt = cR^n ds \tag{۲۱}$$

که در آن t زمان، c برای مسئلهٔ دو جسم عدد ثابت و s متغیر مستقل جدید هستند. مقدار توان n و عدد ثابت c با توجه به انتخاب s تعیین می‌شوند. با انتخاب $n = 2$ و $c = 1/h$ متغیر مستقل جدید، معادل آنومالی حقیقی خواهد بود. یعنی:

$$dt = \frac{R^2}{h} d\nu \tag{۲۲}$$

با اعمال این تغییر متغیر یک معادله به دستگاه معادلات (۲۰) افزوده شده که بیانگر تغییر زمان به عنوان تابعی از زاویهٔ آنومالی حقیقی است. نتیجهٔ مفید این تبدیل آن است که دیگر نیازی به حل مسئلهٔ کپلر نخواهد بود. معادلات جدید عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\nu} &= \frac{R^2}{h} \\ \frac{dR}{d\nu} &= v_R \frac{R^2}{h} \\ \frac{dv_R}{d\nu} &= \frac{h}{R} - \frac{\mu}{h} + \frac{R^2}{h} a_{p_{\bar{i}}} \\ \frac{dh}{d\nu} &= \frac{R^3}{h} a_{p_{\bar{j}}} \end{aligned} \tag{۲۳}$$

با استفاده از تکنیک تغییر متغیر، می‌توان زمان را با متغیر دیگر به نحوی تعویض کرد که به‌وسیلهٔ یک الگوریتم انتگرال‌گیری با گام ثابت هم بتوان مسائل مختلف را با عملکرد مطلوبی حل کرد. در واقع با این تبدیل، تغییرات گام زمانی کنترل شده خواهد بود. یعنی تغییرات با گام ثابت در متغیر مستقل جدید (در این‌جا آنومالی حقیقی) باعث تغییر در گام طی شده توسط زمان می‌شود. به عبارت دیگر

$$\Delta t = \frac{R^2}{h} \Delta\nu \tag{۲۴}$$

رفع تکینگی

وجود تکینگی در معادلات، روند انتگرال‌گیری و دقت نتایج را به مخاطره می‌اندازد. لذا رفع تکینگی از معادلات حرکت اهمیت ویژه دارد. سی‌دی [۲] با تغییر متغیر $u = 1/R$ تکینگی معادلهٔ حرکت دو جسم غیراختلالی را از بین برده و معادلهٔ غیرخطی را به معادلهٔ خطی تبدیل کرده است. در این‌جا نیز از این تغییر متغیر استفاده می‌کنیم تا

معادلات شکل مناسب‌تری پیدا کنند. با اعمال این تغییر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\nu} &= \frac{1}{u^2 h}\\
\frac{du}{d\nu} &= -\frac{v_R}{h}\\
\frac{dv_R}{d\nu} &= uh - \frac{\mu}{h} + \frac{1}{u^2 h} a_{p_i}\\
\frac{dh}{d\nu} &= \frac{1}{u^3 h} a_{p_j}
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

دستگاه معادلات (۲۵) با متغییر مستقل آنومالی حقیقی با فرض معلوم بودن توابع نیروهای اختلالی آمادهٔ انتگرال‌گیری است. اما قبل از هر چیزی باید رابطهٔ بین دستگاه مختصات اینرسی و دستگاه مختصات مداری تعیین شود. چرا که نیروی اختلالی ناشی از عدم کرویت زمین یا نیروی اختلالی حاصل از فشار تشعشی خورشید در دستگاه اینرسی بیان می‌شوند. در حالی‌که معادلات در دستگاه مختصات مداری نوشته شده‌اند. لذا باید تبدیل دستگاه مختصات اینرسی به مداری و بالعکس معلوم شود.

ماتریس تبدیل

با توجه به زوایای اویلر و دوران حول محورهای مختصات یک دستگاه به منظور انطباق بر دستگاه جدید، دستگاه مختصات اینرسی (x,y,z) با مجموعه دوران‌های زیر حول محورهای مختصات به دستگاه مختصات مداری (i,j,k) تبدیل می‌شود [۲].

$$\begin{matrix} x & & i\\ y & \rightarrow z,x,z \rightarrow & j\\ z & & k \end{matrix} \tag{۲۶}$$

از ۴ المان مداری ν، i، ω و Ω به عنوان معادل زوایای اویلر بین دو دستگاه اینرسی و مداری استفاده می‌کنیم. که ماتریس تبدیل زیر را تشکیل می‌دهند:

$$\begin{bmatrix}
c(\omega+\nu)c\Omega - cis(\omega+\nu)s\Omega & c(\omega+\nu)s\Omega + s(\omega+\nu)cic\Omega & s(\omega+\nu)si\\
-s(\omega+\nu)c\Omega - cic(\omega+\nu)s\Omega & -s(\omega+\nu)s\Omega + c(\omega+\nu)cic\Omega & c(\omega+\nu)si\\
sis\Omega & -sic\Omega & ci
\end{bmatrix} \tag{۲۷}$$

که در آن s بیانگر $\sin$ و c بیانگر $\cos$ است. نکتهٔ نگران‌کننده، تکین‌شدن ماتریس فوق در زوایای حدی است که فرایند انتگرال‌گیری را مختل می‌کند. به عنوان مثال اگر مدارها دایروی و استوایی باشد یا نوع مدار تغییر کند، ماتریس فوق در ارائهٔ تبدیل مناسب با مشکل مواجه می‌شود. لذا استفاده از کواترنیون‌ها، قابلیت اطمینان بیشتری دارد و در نتیجه ضمن حفظ عمومیت روش، انتگرال‌گیری به مخاطره نمی‌افتد. فرم کلی ماتریس تبدیل با توجه به کواترنیون‌ها به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix}
1-2\left(q_2^2+q_3^2\right) & 2q_1q_2-2q_4q_3 & 2q_1q_3+2q_4q_2\\
2q_1q_2+2q_4q_3 & 1-2\left(q_1^2+q_3^2\right) & 2q_2q_3-2q_4q_1\\
2q_1q_3-2q_4q_2 & 2q_2q_3+2q_4q_1 & 1-2\left(q_1^2+q_2^2\right)
\end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

مقادیر q_4,q_3,q_2,q_1 با توجه به المان‌های مداری محاسبه می‌شوند.

بدین ترتیب ارتباط بین دو دستگاه مشخص شد. اما این رابطه تا زمانی معتبر است که مقادیر المان‌های مداری ثابت باشند، درحالی‌که می‌دانیم در حضور اختلالات، المان‌های مداری تغییر می‌کنند. لذا باید سیر تکاملی کواترنیون‌ها استخراج شوند. مورتن [۵] سیر تکاملی کواترنیون‌ها را این‌گونه بیان می‌کند:

$$\begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt}\\ \frac{dq_2}{dt}\\ \frac{dq_3}{dt}\\ \frac{dq_4}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1\\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2\\ -q_2 & q_2 & q_4 & q_3\\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p\\ q\\ r\\ 0 \end{bmatrix} \tag{۲۹}$$

با توجه به صفربودن مؤلفهٔ دوم سرعت زاویه‌ای، q و روابط موجود برای p و r و همچنین تغییر متغیر مستقل از زمان به آنومالی حقیقی، رابطهٔ فوق به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{d\nu} &= \frac{a_{p_k}}{2u^3h^2} q_4 + \frac{1}{2} q_2\\
\frac{dq_2}{d\nu} &= \frac{a_{p_k}}{2u^3h^2} q_3 - \frac{1}{2} q_1\\
\frac{dq_3}{d\nu} &= -\frac{a_{p_k}}{2u^3h^2} q_2 + \frac{1}{2} q_4\\
\frac{dq_4}{d\nu} &= -\frac{a_{p_k}}{2u^3h^2} q_1 - \frac{1}{2} q_3
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول (۲۵) توصیف‌کنندهٔ حرکت در دستگاه مختصات مداری و دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول (۳۰) معادلات توصیف‌کنندهٔ تغییرات کواترنیون‌ها یا در واقع تغییر المان‌های مداری است که با یکدیگر کوپل هستند. لذا برای رسیدن به جواب مسئلهٔ دو جسم اختلالی کافی است مجموعه معادلات زیر را با شرط اولیهٔ مناسب و استفاده از یک الگوریتم انتگرال‌گیری عددی مناسب حل کرد.

انتظار می‌رود فرمول‌بندی رابطهٔ (۳۱)، سرعت و دقت حل مسئلهٔ دو جسم اختلالی را بهبود بخشد.

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\nu} &= \frac{1}{u^2 h} \\
\frac{du}{d\nu} &= -\frac{v_R}{h} \\
\frac{dv_R}{d\nu} &= uh - \frac{\mu}{h} + \frac{1}{u^2 h} a_{p_{\hat{i}}} \\
\frac{dh}{d\nu} &= \frac{1}{u^3 h} a_{p_{\hat{j}}} \\
\frac{dq_1}{d\nu} &= \frac{a_{p_{\hat{k}}}}{2u^3 h^2} q_4 + \frac{1}{2} q_2 \\
\frac{dq_2}{d\nu} &= \frac{a_{p_{\hat{k}}}}{2u^3 h^2} q_3 - \frac{1}{2} q_1 \\
\frac{dq_3}{d\nu} &= -\frac{a_{p_{\hat{k}}}}{2u^3 h^2} q_2 + \frac{1}{2} q_4 \\
\frac{dq_4}{d\nu} &= -\frac{a_{p_{\hat{k}}}}{2u^3 h^2} q_1 - \frac{1}{2} q_3
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

نتایج

ابتدا به منظور محک سرعت حل، زمان اجرای کد متلب مبتنی بر این روش را با روش انتگرال‌گیری مستقیم از معادلهٔ (۱) مقایسه می‌کنیم. مشخصات مداری استفاده شده در جدول (۱) آورده شده‌اند.

جدول۱– مشخصات مدارها

	مدار ۱	مدار ۲	مدار ۳
نیم‌محور اصلی (km)	۶۸۸۰	۶۸۸۰	۶۸۸۰
خروج از مرکز	۰	۰/۰۲۵	۰
زاویه شیب مداری (درجه)	۵۵	۰	۰
آرگومان حضیضی (درجه)	۰	۰	۰
گره صعودی (درجه)	۰	۰	۰
آنومالی حقیقی اولیه (درجه)	۰	۰	۰
زمان اولیه (Epoch)	10 02 2011 00:00:00.000		

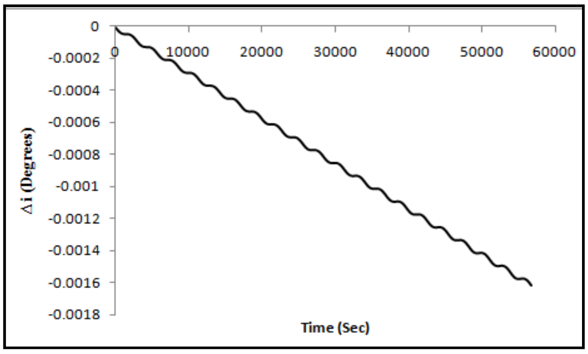
همچنین شتاب‌های اختلالی ناشی از عدم کرویت جسم مرکزی (ترم J_2)، پسای اتمسفری و فشار تشعشی خورشید را در نظر می‌گیریم. هر برنامه را برای مدت ۱۰ دور گردش ماهواره به دور زمین، با استفاده از الگوریتم رانگ-کوتا گام ثابت مرتبهٔ ۴ با دقت یکسان، اجرا می‌کنیم. سخت‌افزار مورد استفاده پنتیوم (آر) چهار[۳] و سی‌پی‌یو[۴] ۳/۲ مگاهرتز با حافظهٔ ۲ گیگابایت با سیستم عامل ویندوز XP بوده است. به‌منظور دست‌یابی به زمان اجرا، هر برنامه را ۱۰ بار اجرا کرده و میانگین زمانی آن‌ها را مبنای مقایسه قرار می‌دهیم. این زمان‌ها را برای هر سه مدار در جدول (۲) ملاحظه می‌کنید.

جدول ۲– زمان اجرای برنامه برای هر دو روش برای ۱۰ مدار

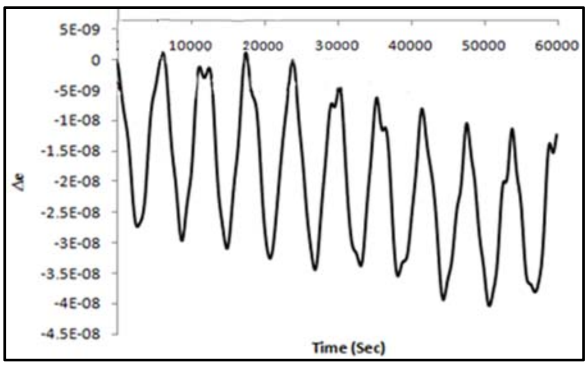
	مدار ۱	مدار ۲	مدار ۳
زمان اجرای برنامه مبتنی بر روش منظم‌سازی و تغییر متغیر مستقل (ثانیه)	۸۵/۳۲	۸۳/۰۸	۸۸/۶۱
زمان اجرای برنامه با انتگرال‌گیری مستقیم (ثانیه)	۲۷۱/۰۶	۲۷۴/۵۹	۲۸۳/۱۸

ملاحظه می‌شود که در روش جدید برای هر سه مدار، زمان اجرای برنامه به یک‌سوم کاهش می‌یابد. این کاهش زمان، در ارزیابی طول عمر ماهواره‌ها که نیازمند اجرای برنامه برای مدت چند سال است، بیشتر قابل درک است.

برای بررسی میزان دقت این روش، نتایج حاصل از انتگرال‌گیری را با نتایج نرم‌افزار STK مقایسه می‌کنیم. برای شبیه‌سازی در نرم‌افزار STK، همان عوامل اختلالی فوق را استفاده می‌کنیم. در شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب اختلاف زاویهٔ شیب مداری، خروج از مرکز و نیم‌محور اصلی حاصل از STK و روش ارائه شده در این مقاله برای سه مدار فوق رسم شده است.

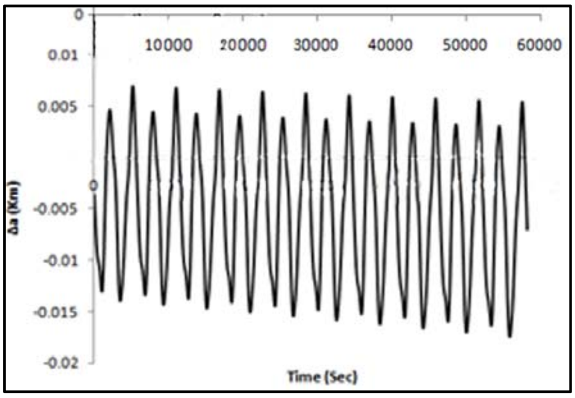


شکل ۱– اختلاف زاویه شیب مداری برای مدار ۱



شکل۲– اختلاف خروج از مرکز برای مدار ۲

3. Pentium(R) 4
4. CPU



شکل۳- اختلاف نیم‌محور اصلی برای مدار ۳

نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی ارائه شده است که در آن با تغییر در شکل معادلات، سعی شده حل مسئلهٔ دو جسم اختلالی بهبود یابد. استفاده از آنومالی حقیقی به‌عنوان متغیر مستقل موجب می‌شود تا گام‌های زمانی در طی حل به صورت تحلیلی تغییر کنند و لذا با یک الگوریتم انتگرال‌گیری با گام ثابت نیز مسئله قابل حل است. مزیت دیگر استفاده از آنومالی حقیقی به‌عنوان متغیر مستقل، در استفاده از صورت‌بندی فوق به‌عنوان انتشارگر برای انجام مانور غیرضربه‌ای آشکار می‌شود. از آنجا که به دلیل حضور اختلالات، زمان رسیدن به موقعیت‌های خاص مثل نقطهٔ اوج و حضیض، نامعلوم است استفاده از زاویه به‌عنوان ملاک، راه را برای انجام مانورها در موقعیت مناسب فراهم می‌سازد. کاهش زمان حل این شکل از معادلات حرکت نیز در کنار این مزیت، فرصتی فراهم می‌آورد تا با استفاده از این انتشارگر در کامپیوتر پرواز ماهواره، به قابلیت خودکار بودن ماهواره افزوده شود.

همچنین استفاده از کواترنیون‌ها برای تبدیل دستگاه‌های مختصات، موجب شده که صورت‌بندی فوق برای تمام مدارها حتی مدارهای با تکینگی در المان‌های مداری مثل مدارهای دایروی و استوایی نیز قابل استفاده باشد.

مراجع

[1] Szebehely, V., *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies,* New York: Academic Press, 1967.

[2] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control,* Cambridge University Press, 1997.

[3] Stiefel, E. L. and Scheifele, G., *Linear and Regular Celestial Mechanics,* Springer-Verlag, 1971.

[4] Berry, M., A Variable-Step Double-Integration Multi-Step Integrator (PhD. Thesis), Department of Aerospace Engineering, Blacksburg University, Virginia, April 2004.

[5] Morton, H. S., Jenkins, J. L. and Blanton, J. N., *"Analytical Solutions for Euler Parameters", Celestial Mechanics*, Vol.10, No. 1, 1974, pp. 278-301.