

# Optimal Control of Low Propulsion Orbital Transfer Time

A. Ebrahimi<sup>1\*</sup> and H. R. Fayazbakhsh<sup>2</sup>

ebrahimi@mut.ac.ir

*Within operational life of satellites according to their mission, need to change their operational orbits. This change can includes change in semi-major axis, inclination or plane of orbit (RAAN angle). For this propose, we can use Electrical Propulsion (EP). With respect to light weight of EP in cases which there is weight constraint, we use EP for transfer satellite to desired orbit.*

*In this paper, we consider minimum-time transfer problem for these transfers. Initial and final orbits are circular and we assume thrust is continuous. Assuming constant acceleration, elements of orbit uniformly change and these changes analyze with Edelbaum Analysis*

**Keywords:** Low propulsion transfer, Time control, Averaging method, Inclination

# کنترل بهینه مدت زمان انتقال مداری پیشرانه کم

اصغر ابراهیمی<sup>۱\*</sup> و حمیدرضا فیاض بخش<sup>۲</sup>

۱- عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی مالک اشتر

۲- گروه صنایع فضایی صایران

\*تهران، میدان نوبنیاد، خ شهید لنگری

ebrahimi@mut.ac.ir

در طول عمر مفید ماهواره‌ها - بسته به مأموریت تعریف شده - به تغییر مدار کاری ماهواره نیاز است. این تغییر می‌تواند شامل تغییر ارتفاع، شیب یا تغییر زاویه RAAN مدار ماهواره باشد. برای انجام این هدف، باید از پیشرانه‌هایی استفاده کرد. با توجه به وزن کم پیشرانه‌های الکتریکی در مواردی که محدودیت وزنی برای انتقال ماهواره به مدار وجود دارد از این پیشرانه‌ها استفاده می‌شود. در این پیشرانه‌ها ضربه و اثره بالا و مصرف سوخت پایین و مدت زمان این نوع انتقال زیاد است. زمانی که قدرت پیشرانه‌ها کافی باشد تغییر شیب مدار در گره‌ها انجام می‌شود ولی در مانورهای پیشرانش کم، تغییر صفحه مدار به‌طور همزمان با تغییر ارتفاع انجام می‌شود. برای بهینه‌سازی مدت زمان این مانورها می‌توان از روش‌های میانگین‌گیری استفاده کرد. در این مقاله، سعی شده است تا از این روش به‌منظور کنترل بهینه مدت زمان انجام انتقال، در مواقعی که از پیشرانه‌های الکتریکی برای انجام این هدف به‌کار برده می‌شود، استفاده کنیم. در مانور پیشرانش کم با پیشرانش مداوم، مانور تغییر شیب مدار و تغییر زاویه  $\Omega$  مدار باید به‌طور همزمان با تغییر ارتفاع صورت پذیرد که این مستلزم استفاده از برنامه‌ای برای کنترل این مانور ترکیبی و یافتن متغیری برای کنترل این مانور است. متغیر کنترلی در اینجا زاویه خارج از صفحه پیشرانش است. با تعیین مشخصات پیشرانه (راندمان پیشرانه، توان الکتریکی ورودی و ضربه مخصوص پیشران مورد استفاده) پیشرانش خروجی را تعیین و با استفاده از این روش، مانور را در حداقل زمان انجام می‌دهیم. مدار اولیه و نهایی دایروی در نظر گرفته و فرض می‌شود موتور به‌شکل پیوسته کار کند در صورتی که شتاب پیشرانشی در طول انتقال ثابت است.

**واژگان کلیدی:** انتقال پیشرانه کم، کنترل مدت زمان، روش میانگین‌گیری، زاویه پیشرانه، هامیلتونین

## مقدمه

صفحه که به شکل تکه‌ای در هر دور ثابت بوده حاصل می‌شود. اولین بار، نتایج مطالعه خطی‌سازی مانور پیشرانش پایین، با فرض تعداد دور زیاد حول یک مرکز دارای جاذبه را [۱] در مرجع [۴] بیان کرد. بعد از آن مارک<sup>۴</sup> این روش را برای مدارهای بیضوی در تحقیقات خود ادامه داد [۵] و با همکاری مارک و وینه<sup>۵</sup> این نتایج کامل شد و به صورت تحقیقی علمی ارائه شد [۶]. سپس برای به‌دست آوردن عبارتهایی که تغییرات پارامترهای انتقال را به‌طور یکنواخت برای هر

روش میانگین‌گیری برای کنترل انتقال مداری پیشرانش کم در مراجع [۱]، [۲] و [۳] آورده شده است. این روش برای کمینه‌سازی مدت زمان انتقال روش مناسبی است. متغیر کنترلی در این روش زاویه پیشرانش است. کنترل بهینه مدت زمان مانور مداری بین دو مدار دایروی شبیدار در مرجع [۱] با چرخاندن صفحه مدار حول خط گره‌ای نسبی بین مدار اولیه و نهایی با استفاده از زاویه پیشرانش خارج از

3. Edelbaum  
4. Marec  
5. Vinh

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)

۲. کارشناسی ارشد

مدار ماهواره در بخش انتقال  $(V, i)$  و تغییر ارتفاع و زاویه  $\Omega$  مدار ماهواره در بخش انتقال  $(V, \Omega)$  می‌پردازیم و در پایان با روابط به دست آمده مسئله‌ای را به شکل بهینه حل و نتایج را به وسیله نمودار رسم می‌کنیم.

### انتقال $(V, i)$

همان‌طور که از رابطه (۱) پیداست، تغییرات ارتفاع مدار تنها به زاویه پیشرانش مرتبط است. اما در رابطه (۲) می‌بینیم که تغییرات شیب تنها تابع زاویه پیشرانش نیست و به موقعیت زاویه‌ای نیز وابسته است. براساس روش میانگین‌گیری می‌توان برای تغییرات شیب در هر دور مداری مقداری میانگین در نظر گرفت. اگر زاویه پیشرانش را در هر دور تنها در دو نقطه تغییر داده و بین این دو نقطه زاویه پیشرانش ثابت باشد می‌توان با انتگرال گرفتن از رابطه (۲) بین این دو نقطه این مقدار میانگین را به دست آورد. برای تغییر شیب،  $\theta = \pi/2$  و  $\theta = -\pi/2$  را برای تغییر زاویه پیشرانش انتخاب می‌کنیم:

$$\tilde{i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{di}{dt} \right) d\theta = \frac{2f \sin \beta}{2\pi V} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2f \sin \beta}{\pi V} \quad (8)$$

مقدار  $\tilde{i}$  را می‌توان به عنوان مقدار میانگین تغییرات شیب مدار در هر دور در نظر گرفت، که تنها تابع زاویه پیشرانش است. حال می‌توان تنها با کنترل زاویه پیشرانش مانور را بهینه‌سازی کرد. متغیرهای حالت شیب مدار  $i$  و سرعت ماهواره  $V$  و متغیر کنترلی زاویه  $\beta$  است. با توجه به معادلات  $\dot{V} = -f \cos \beta$  و  $\dot{i} = \frac{2f}{\pi V} \sin \beta$  برای تغییرات لحظه‌ای سرعت و شیب، هامیلتونین را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$H = 1 + \lambda_i \left( \frac{2f}{\pi V} \sin \beta \right) + \lambda_V (-f \cos \beta) \quad (9)$$

هدف ما به دست آوردن حداقل زمان انتقال با در دست داشتن شرایط اولیه  $V_0, i_0$  و شرایط نهایی  $V_f, i_f$  است.

تابع معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \int_{t_f}^{t_0} dt \quad (10)$$

شرایط لازم برای بهینه شدن سیستم به صورت زیر است:

$$\frac{\partial H}{\partial i} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial V} = 0 \Rightarrow \lambda_V = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \beta}{V^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \tan \beta = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda_i}{V \lambda_V} \quad (13)$$

معادلات (۱۱) و (۱۲) معادلات کمک حالت است و معادله (۱۳) قانون کنترل بهینه است. با توجه به شرط نوسنجی<sup>۶</sup> و اینکه هامیلتونین تابعی

نوع انتقالی نشان دهد فرمول‌هایی آورده شد که در مرجع [۷] آمده است. در مراجع [۸] و [۹] نیز برای حل مسائل مشکل‌تر، با در نظر داشتن محدودیت‌های واقعی مانند عدم کروی بودن زمین و در نظر گرفتن پارامتر  $J_2$  با رویکرد آنالیزی و عددی این کار انجام شده است.

همچنین در مراجع [۱۰] و [۱۱] به کنترل بهینه مانور مداری پیشرانش پایین برای دو حالت با محدودیت زمانی و بدون محدودیت زمانی پرداخته شده است.

### مانور مداری پیشرانش کم

در این مقاله، به منظور بررسی تغییرات لحظه‌ای پارامترهای مدار با کنترل کردن زاویه پیشرانش از روش تحلیلی ادلبام ذکر شده در مرجع [۱۲] استفاده می‌شود. مطابق این روش در معادلات لاگرانژ پیشرانش، زاویه‌ای درون صفحه مدار ندارد، بنابراین مؤلفه مماسی پیشرانش را صفر می‌گیریم. همچنین برای مشخص کردن مکان در مدار از موقعیت زاویه‌ای متوسط  $(\alpha)$  استفاده شده است. فرم گاوسی معادلات نجومی لاگرانژ برای مدارهای نزدیک به دایروی در این روش به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\dot{a} = \frac{2af_t}{V} \quad (1)$$

$$\dot{i} = \frac{f_h \cos \alpha}{V} \quad (2)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{f_h \sin \alpha}{V \sin i} \quad (3)$$

$$\dot{\alpha} = n - \frac{f_h \sin \alpha}{V \tan i} \quad (4)$$

$$f_t = f \cos \beta \quad (5)$$

$$f_h = f \sin \beta \quad (6)$$

در معادلات فوق،  $f_t$  مؤلفه پیشرانش در جهت مماس،  $f_h$  مؤلفه پیشرانش در جهت نرمال،  $\beta$  زاویه خارج از صفحه پیشرانش و  $\alpha$  موقعیت زاویه‌ای متوسط است. زمانی که پیشرانش درون صفحه مداری زاویه‌ای نداشته باشد، مسیر ماریچ کاملاً دایروی است و هر دور مداری را می‌توان یک دایره در نظر گرفت. بنابراین خروج از مرکز صفر بوده و می‌توان نوشت:

$$\alpha = M + \omega = \omega + \theta^* = \theta \quad (7)$$

در این رابطه،  $M$  آنومالی متوسط،  $\theta^*$  آنومالی حقیقی و  $\theta$  موقعیت زاویه‌ای است. در نتیجه در معادلات (۱) تا (۴) به جای  $\alpha$  می‌توان  $\theta$  قرار داد.

با توجه به مأموریت‌های مختلف ماهواره‌ها در این مقاله، بنا به کاربرد، ابتدا به بررسی جداگانه انتقال تغییر ارتفاع و تغییر شیب

## انتقال (V, Ω)

هدف در این بخش، انتقال از حالت اولیه  $(V_0, \Omega_0)$  به حالت نهایی  $(V_f, \Omega_f)$  بدون تغییر شیب مدار است. در رابطه (۳) می‌بینیم تغییرات زاویه  $\Omega$  نیز مانند شیب به موقعیت زاویه‌ای وابسته است. در این بخش نیز باید مقداری میانگین برای تغییرات زاویه  $\Omega$  در هر دور پیدا کرد. نقاط مناسب برای تغییر زاویه پیش‌رانس در این انتقال  $\theta = 0$  و  $\theta = \pi$  است. پس در انتگرال‌گیری حدود انتگرال را این نقاط گرفته و زاویه پیش‌رانس را در هر دور بین این نقاط ثابت در نظر می‌گیریم.

$$\tilde{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d\Omega}{dt} \right) d\theta = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f \sin \beta \sin \theta}{V \sin i} d\theta = \frac{2f \sin \theta}{\pi V \sin i} \quad (25)$$

مقدار  $\tilde{\Omega}$  را می‌توان به‌عنوان میانگین تغییرات زاویه  $\Omega$  در هر دور مداری در نظر گرفت. با توجه به روابط  $\dot{V} = -f \cos \beta$  و  $\dot{\Omega} = \frac{2f \sin \beta}{\pi V \sin i}$  برای تغییرات لحظه‌ای سرعت و زاویه هامیلتونین را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$H = 1 + \lambda_V (-f \cos \beta) + \lambda_\Omega \frac{2f \sin \beta}{\pi V \sin i} \quad (26)$$

شرایط لازم برای بهینه‌شدن سیستم به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial H}{\partial V} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}_V = \frac{2f \sin \beta}{\pi V^2 \sin i} \lambda_\Omega \quad (27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Omega} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}_\Omega = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \tan \beta = -\frac{2}{\pi V \sin i} \cdot \frac{\lambda_\Omega}{\lambda_V} \quad (29)$$

معادلات (۲۷) و (۲۸)، معادلات کمک حالت و معادله (۲۹) قانون کنترل بهینه است. همانند بخش قبل با توجه به شرط نوسنجی و اینکه هامیلتونین، تابعی از زمان نیست، پس می‌توان گفت هامیلتونین در کل انتقال برابر صفر است. بنابراین:

$$\lambda_V = \frac{\cos \beta}{f} \quad (30)$$

$$\lambda_\Omega = -\frac{\pi V \sin \beta \sin i}{2f} \quad (31)$$

بطور مشابه با بخش قبل ادامه می‌دهیم:

$$\dot{V} = -f \cos \beta = -f(\pm) \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \quad (32)$$

$$\mp \frac{f \sqrt{V^2 - V_0^2 \sin^2 \beta}}{V} = \mp \frac{f \sqrt{V^2 - V_0^2 \sin^2 \beta_0}}{V}$$

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 - 2VV_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin i \Delta \Omega\right) + V^2}$$

از زمان نیست، بنابراین در تمام مدت برابر صفر است.

$$H(t_f) = H = 0 \quad (14)$$

در نتیجه از معادله (۱۲) داریم:

$$\lambda_V = \frac{\cos \beta}{f} \quad (15)$$

$$\lambda_i = -\frac{\pi}{2f} V \sin \beta = \text{const.} \quad (16)$$

با توجه به ثابت‌بودن پیش‌رانس در طول انتقال از رابطه بالا نتیجه می‌گیریم  $V \sin \beta$  ثابت است یعنی:

$$V \sin \beta = V_0 \sin \beta_0 = \text{const.} \quad (17)$$

بدین ترتیب مقدار  $\beta$  در لحظه اولیه تعیین می‌شود:

$$\tan \beta_0 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \Delta i\right)}{\frac{V_0}{V_f} - \cos\left(\frac{\pi}{2} \Delta i\right)} \quad (18)$$

$$\Delta i = |i_f - i_0| \quad (19)$$

قانون کنترل بهینه با توجه به  $\lambda_V$  و  $\lambda_i$  به‌شکل زیر مقدار  $\beta$  را در هر لحظه تعیین می‌کند:

$$\tan \beta = \frac{V_0 \sin \beta_0}{V_0 \cos \beta_0 - f \cdot t} \quad (20)$$

به‌وسیله معادله بالا و با توجه به ثابت‌بودن  $V \sin \beta$  مقدار  $V$  در هر لحظه تعیین می‌شود:

$$V = \sqrt{V_0^2 + f^2 t^2 - 2f \cdot t \cdot V_0 \cos \beta_0} \quad (21)$$

تغییر شیب در هر لحظه به وسیله زاویه  $\beta$  مشخص می‌شود:

$$\Delta i = \frac{2}{\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{f \cdot t - V_0 \cos \beta_0}{V_0 \sin \beta_0} \right) + \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right] \quad (22)$$

تغییر سرعت مورد نیاز برای انتقال نیز به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta V = V_0 \cos \beta_0 - \frac{V_0 \sin \beta_0}{\tan\left(\frac{\pi}{2} \Delta i + \beta_0\right)} = \sqrt{V_0^2 - 2V_0 V_f \cos \frac{\pi}{2} \Delta i + V_f^2} \quad (23)$$

با توجه به اینکه  $\Delta V = f \cdot t$  است. بنابراین با مشخص‌شدن تغییرات سرعت، زمان نهایی انتقال به‌دست می‌آید:

$$T_f = \frac{\Delta V}{f} \quad (24)$$

معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) تغییرات زاویه پیش‌رانس، سرعت و زاویه شیب مدار را در هر لحظه و معادلات (۲۳) و (۲۴) سرعت مورد نیاز برای انتقال و زمان نهایی انتقال را مشخص می‌کنند.

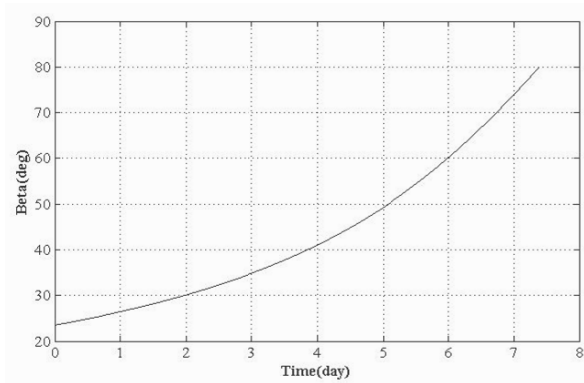
پیشرانه (راندمان پیشرانه، ضربه مخصوص پیشران مورد استفاده و توان ورودی) براساس رابطه زیر است [۱۳]:

$$\dot{m} = \frac{2\eta_p}{(g_{isp})^2} \quad (38)$$

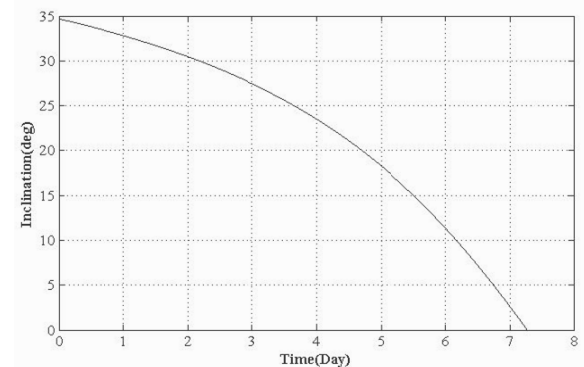
نیروی پیشرانه خروجی از حاصل ضرب دبی جریان خروجی و ضربه مخصوص پیشران مورد استفاده به دست می آید. در این مانور از پیشرانهای با راندمان ۰/۵، توان الکتریکی ۸۰۰ وات و پیشرانی با ضربه مخصوص ۸۳۱ ثانیه استفاده شده است. در نتیجه نیروی پیشرانش خروجی از این پیشرانه برابر ۰/۰۱ نیوتن یا  $10^{-5} \text{ km/s}^2$  است.

با استفاده از این پیشرانش و مشخصات مدار اولیه و نهایی و با توجه به رابطه (۱۵)، زاویه پیشرانش اولیه برابر  $\beta_0 = 23.5^\circ$  به دست می آید، با قراردادن این مقدار و  $\Delta i = 35^\circ$  در رابطه (۲۴) مقدار  $\Delta V = 6.38 \text{ km/s}$  محاسبه می شود. حداقل مدت زمان مورد نیاز برای این انتقال به وسیله رابطه (۲۵)،  $638000$  ثانیه معادل  $7.384$  روز تعیین می شود.

با قرار دادن  $\beta_0$  در رابطه (۲۱) مقدار  $\beta$  به شکل تابعی از زمان به دست می آید که در پایان زمان انتقال این مقدار برابر  $\beta_f = 79.82^\circ$  است. زاویه بهینه پیشرانش برای حداقل سازی مدت زمان انتقال  $A$  نسبت به زمان در شکل (۱) آورده شده است، همچنین ارتفاع و شیب مدار، برای این انتقال به صورت تابعی از زمان در شکل های (۲) و (۳) آورده شده است.



شکل ۱- تغییرات زاویه پیشرانش به نسبت زمان برای انتقال A



شکل ۲- تغییرات شیب مدار ماهواره نسبت به زمان برای انتقال A

$$V = \sqrt{V_0 + f^2 t^2 - 2f \cdot t \cdot V_0 \cos \beta_0}$$

زاویه پیشرانش بهینه با توجه به قانون کنترل بهینه از رابطه (۲۹) به شکل زیر به دست می آید:

$$\tan \beta = \frac{V_0 \sin \beta_0}{V_0 \cos \beta_0 - f \cdot t} \quad (33)$$

معادلات کمک حالت را نیز می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\lambda_V = \frac{V_0 \cos \beta_0 - f \cdot t}{fV}, \quad \lambda_V = \cos \beta / f \quad (34)$$

$$\Delta \Omega = \frac{2}{\pi \sin i} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{f \cdot t - V_0 \cos \beta_0}{V_0 \sin \beta_0} \right) + \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right] \quad (35)$$

مقدار  $\beta_0$  را از رابطه زیر جایگزین می کنیم:

$$\tan \beta_0 = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} \sin i \Delta \Omega t)}{\frac{V_0}{V_f} - \cos(\frac{\pi}{2} \sin i \Delta \Omega t)} \quad (36)$$

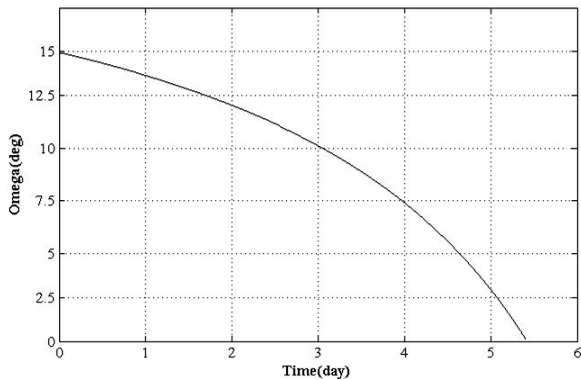
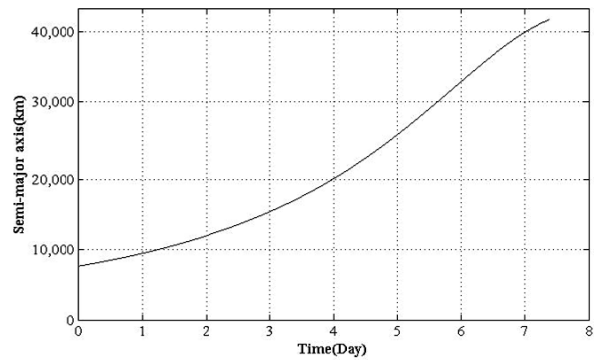
با مقایسه رابطه به دست آمده برای  $\Delta i$ ، می توان مشاهده کرد بین تغییر شیب مدار و تغییر زاویه  $\Omega$  مدار رابطه زیر وجود دارد:

$$\Delta i = \sin i \Delta \Omega \quad (37)$$

## شبیه سازی و حل عددی مسئله

در این قسمت دو مأموریت به طور نمونه برای انتقال های  $(V, i)$  و  $(V, \Omega)$  با نام های A و B تعریف می کنیم. مشخصات این دو انتقال در جدول (۱) و نتایج به دست آمده در جدول (۲) آورده شده است. در انتقال A در نظر داریم، ماهواره ای را از مدار ارتفاع پایین<sup>۷</sup> با ارتفاع ۵۰۰ کیلومتر (نیم قطر اصلی  $a_0 = 6878 \text{ km}$ ) و با شیب  $i_0 = 35^\circ$  به مدار زمین آهنگ<sup>۸</sup> با ارتفاع ۳۶۰۰۰ کیلومتر (نیم قطر اصلی  $a_0 = 42378 \text{ km}$ ) و شیب  $i_f = 0^\circ$  منتقل کنیم. در این انتقال شیب و ارتفاع مدار ماهواره تغییر می کند و با توجه به استفاده از پیشرانه قدرت کم با پیشرانش مداوم، برای انجام این انتقال امکان تغییر شیب مدار در گره ها نیست و باید تغییر شیب به طور همزمان با تغییر ارتفاع صورت پذیرد. با توجه به نتایج به دست آمده در بخش  $(V, i)$  برای انجام بهینه و کم هزینه تر این مانور به کنترل زاویه پیشرانش در انتقال باید پرداخت. در صورت استفاده از پیشرانه الکتریکی برای این هدف، مشخصات این پیشرانه تأثیری مستقیم در نیروی پیشرانش خروجی و زمان انتقال خواهند داشت. رابطه دبی جریان خروجی با مشخصات

7. Low Earth Orbit (LEO)  
8. Geo Orbit (GEO)

شکل ۵- تغییرات زاویه  $\Omega$  مدار نسبت به زمان برای انتقال B

شکل ۳- تغییرات ارتفاع مدار ماهواره نسبت به زمان برای انتقال A

## نتیجه گیری

در این مقاله، مانورهای تغییر ارتفاع و تغییر صفحه مداری ماهواره، طی یک مانور پیش‌رانش کم به وسیله پیش‌رانه الکتریکی با استفاده از روش میانگین‌گیری بهینه‌سازی شد. این کار با کنترل زاویه پیش‌رانش به عنوان متغیر کنترلی انجام شد تا بدین وسیله مدت زمان انجام این مانورها به حداقل برسد. این کار در دو بخش تحت عنوان انتقال  $(V, i)$  و انتقال  $(V, \Omega)$  انجام شد که در انتقال اول ارتفاع و شیب مدار و در انتقال دوم ارتفاع و زاویه RAAN مدار به طور همزمان تغییر می‌کنند. مدت زمان انتقال بهینه شده برای هر مورد در جدول (۲) و نحوه تغییر زاویه پیش‌رانش به عنوان متغیر کنترلی در نمودارهایی که به دنبال آمده پیداست.

جدول ۱- مشخصات انتقال‌های A و B

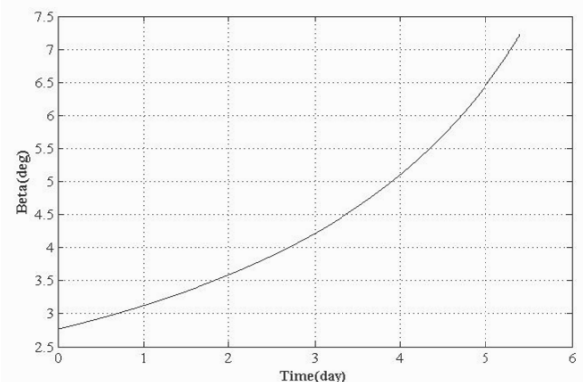
مورد	مدار	a (km)	i (deg)	$\Omega$ (deg)
A	اولیه	۶۸۷۸	۳۵	آزاد
	نهایی	۴۲۳۷۸	۰	آزاد
B	اولیه	۶۸۷۸	۱۰	۱۵
	نهایی	۴۲۳۷۸	۱۰	۰

جدول ۲- نتایج بهینه‌سازی انتقال‌های A و B

مورد	(deg)	(deg)	(km/s)	زمان انتقال (day)
A	۲۳/۵	۷۹/۸۲	۶/۳۸	۷/۳۸۴
B	۲/۷۷	۷/۲۱	۴/۶۶	۵/۳۹۶

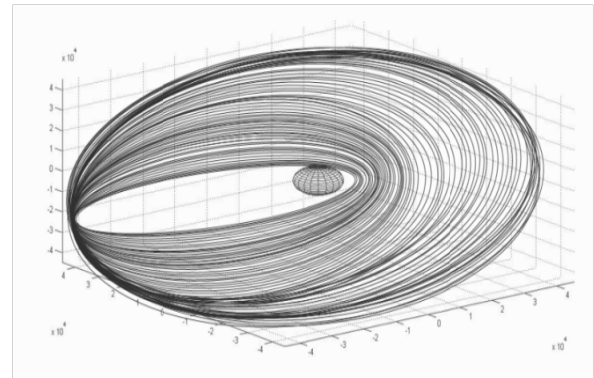
در انتقال B می‌خواهیم ماهواره را از مداری LEO با ارتفاع ۵۰۰ کیلومتر (نیم‌قطر اصلی  $a_0 = ۶۸۷۸$  km) و با صفحه مداری  $\Omega_0 = ۱۵^\circ$  به مدار GEO با ارتفاع ۳۶۰۰۰ کیلومتر (نیم‌قطر اصلی  $a_0 = ۴۲۳۷۸$  km) و صفحه مداری  $\Omega_f = 0^\circ$  منتقل کنیم. در این انتقال، زاویه RAAN و ارتفاع مدار ماهواره تغییر می‌کند و شیب مدار اولیه و نهایی برابر  $i = ۱۰^\circ$  است. در این انتقال نیز از پیش‌رانه‌ای با مشخصات مشابه مورد A استفاده می‌کنیم. با توجه به استدلال ارائه شده در بخش  $(V, \Omega)$  به منظور انجام بهینه این مانور به کنترل زاویه پیش‌رانش می‌پردازیم.

با استفاده از پیش‌رانش ۰/۰۱ نیوتن و مشخصات مدار اولیه و نهایی و با توجه به رابطه (۳۸) زاویه پیش‌رانش اولیه برابر  $\beta_0 = ۲/۷۷$  به دست می‌آید. با قراردادن این مقدار،  $f$  و  $V_0$  در رابطه (۳۳)، زاویه  $\beta$  بهینه به شکل تابعی از زمان به دست می‌آید که این به شکل یک منحنی در شکل (۴) آمده است. مدت زمان این انتقال به وسیله رابطه (۲۵)، ۴۶۶۳۰۰ ثانیه معادل ۵/۳۹۶ روز تعیین می‌شود. مقدار نهایی  $\beta$  در انتهای زمان انتقال ۷/۲۱ درجه است. همچنین زاویه  $\Omega$  صفحه مدار نسبت به زمان برای انتقال B به شکل تابعی از زمان در نمودار (۵) آورده شده است.



شکل ۴- تغییرات زاویه پیش‌رانش بهینه نسبت به زمان برای انتقال B

- [5] Marec, J. P., “*Trajectories Spatial Optimal*,” Cours de l’ENSAE, Course of ENSAE, Toulouse, 1973.
- [6] Marec, J. P. and Vinh, N. X., “Optimal Low-Thrust Limited-Power Transfers Between Arbitrary Elliptical Orbits” *Acta Astronaut*, Vol. 4, No. 5-6, 1977, pp. 511-540.
- [7] Kechichian, J. A., “Reformulation of Edelbaum’s Low-Thrust Transfer Problem Using Optimal Control Theory,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 5, 1997, pp.988-994.
- [8] Kechichian, J. A., “Optimal Altitude-Constrained Low-Thrust Transfer Between Inclined Circular Orbits,” *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No.3 and 4, 2006, pp. 458-503.
- [9] Kechichian, J. A., “Optimal Low-Thrust Transfer in General Circular Orbit Using Analytic Averaging of System Dynamics,” F. Landis Markley Astronautics Symposium, AAS Paper 08-272 Cambridge, MD, June 29-July 2, 2008
- [10] Marec, J. P., “*Optimal Space Trajectories*,” Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.
- [11] Vallado, D. A., *Fundamentals of Astrodynamics and Application, Space Technology Library*, Second Edition, 2001.
- [12] Chobotv, V. A., *Orbital Mechanics, AIAA Education Series*, Second Edition, 1996.
- [13] King, S. T., Walker, M. L. R. and Kluever, C. A., “Small Satellite LEO Maneuvers with Low-Power Electric Propulsion”, AIAA, 092407, 2008.



شکل ۶- نمودار سه بعدی انتقال مداری مورد A

## مراجع

- [1] Edelbaum, T. N. “Propulsion Requirements for Controllable Satellite” *ARS Journal*, Vol. 31, 1961, pp. 1079-1089.
- [2] Edelbaum, T. N., *Theory of Maxima and Minima, Optimization Techniques with Application to Aerospace Systems*, Academic, New York, 1962, pp. 1-32.
- [3] Wiesel, W. E. and Alfano, S. “Optimal Many-Revolution Orbit Transfer,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* (ISSN 0731-5090), Vol. 8, Jan.-Feb. 1984, pp. 155-157.
- [4] Edelbaum, T. N., “Optimum Power-Limited Orbit Transfer in Strong Gravity Fields,” *AIAA Journal*, Vol. 3, Issue 5, 1965, pp. 921-925