

Numerical Simulation of Complicated Grain Burnback in Three Dimensions

H. Ghasemmi^{1*} and A. Barkhordar²

1,2. Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology

* Farjam St., Narmak, Tehran, IRAN

h_ghassemi@iust.ac.ir

Instantaneous grain geometry is one of the most affecting parameters on the performance of the solid rocket motors (SRMs). This paper presents the simulation of geometrically complicated solid propellant grain burnback using the level set method. The initial form of the grain is assumed in this method. Propagation of the grain boundaries in a velocity field is described using the Hamilton-Jacobi type equation. The solution of this equation in successive time steps gives the new burning boundaries of the grain. For this purpose, the initial geometry of grain is modeled in any CAD software. Then, the initial burning surfaces of grain are implicitly defined by the sign distance function and are used as the initial conditions of the level set equation. The geometrical characteristics of grain, such as burning surface area, port area, burning perimeter, and port volume are determined by Heaviside and Delta Dirac functions. The result of simulation is validated by an analytically predictable case, which shows excellent agreement. Burnback analysis is done for some practical grains including two cases that the test data were available. Using an unsteady zero dimension interior ballistic analysis, the resulting motor pressure curves are compared with the experimental data showing good agreement. The capability of the approach to handle the analyzing of problems, including non uniform burning velocity and arbitrary burnout configurations of grain are shown in examples.

Keywords: Level set, Complicated grain, Burnback, Sign distance function

1. Assistant Professor (Corresponding Author)

2. Graduate Student

شبیه‌سازی عددی پس‌روی سطح گرین‌های سوخت جامد سه‌بعدی پیچیده

حجت قاسمی^{۱*} و عباس برخوردار^۲

۱ و ۲ - دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

* تهران، نارمک، خ فرجام

h_ghassemi@iust.ac.ir

یکی از پارامترهای تعیین‌کننده پیش‌رانش در یک موتور سوخت جامد، هندسه گرین در هر لحظه است. در این مقاله شبیه‌سازی پس‌روی سطح سوزش گرین‌های سه‌بعدی سوخت جامد توسط روش لول‌سِت انجام شده است. برای این منظور هندسه اولیه گرین در یک نرم‌افزار CAD تولید می‌شود. سپس سطح سوزش اولیه گرین توسط تابع فاصله علامت‌دار به صورت ضمنی تعریف شده، و به عنوان شرط اولیه معادله مرز متحرک در روش لول‌سِت استفاده می‌شود. برای تعیین مشخصه‌های بالستیکی گرین (مانند مساحت سطح سوزش، مساحت عبور گاز، حجم گرین) در هر گام پس‌روی، از خواص توابع ضمنی بهره گرفته شده است. برای ارزیابی دقت تحلیل پس‌روی و محاسبه مشخصه‌های بالستیکی گرین، از چند نمونه تحلیلی استفاده شده، و توافق بسیار خوبی مشاهده شده است. تحلیل پس‌روی برای چند گرین سه‌بعدی کاربردی سوخت جامد توسط این روش انجام شده، و قسمتی از نتایج با داده‌های تجربی موجود مقایسه شده است. سوزش غیریکنواخت و شرط مرزی اتمام سوزش نیز در مثال‌هایی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

واژه‌های کلیدی: پس‌روی سطح - روش Level Set - تابع فاصله علامت‌دار - گرین سوخت جامد پیچیده

فهرست علائم

R : ثابت گاز حاصل از احتراق	A_b : مساحت سطح سوزش
SDF : تابع فاصله علامت‌دار	A_p : مساحت گلوگاه نازل
t : زمان	a : سرعت پس‌روی
T_c : دمای محصولات احتراق	C^* : سرعت مشخصه
V_{ch} : حجم محفظه احتراق	d : تابع فاصله
$\vec{x} = [x, y, z]^T$: بردار موقعیت	h : اندازه هر سلول در یک شبکه متساوی الفاصله
\vec{x}_i : بردار موقعیت نقاط روی مرز	H : تابع هویساید
δ : تابع دلتا دیراک	n_a : بردار نرمال مجازی
\mathcal{E} : نصف پهنای باند اطراف مرز	P : فشار موتور
ϕ : تابع لول‌ست	r_b : نرخ سوزش
ρ_p : چگالی پیش‌رانه	
Ω : دامنه حل	
Ω^+ : فضای خارج مرز	
Ω^- : فضای داخل مرز	
$\partial\Omega$: مرز	

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

مقدمه

یکی از سامانه‌های جلوبرنده متداول موشکی پرکاربرد امروزی، موتورهای پیشرانه جامد هستند. پیشرانه‌های جامد ترکیبی از سوخت و اکسنده هستند تا موتور بتواند در تمامی شرایط محیطی به خوبی عمل کند. این نوع سامانه در بوسترهای پرتابه‌های فضایی، سیستم‌های جلوبرنده برای جابه‌جایی مداری ماهواره‌ها، و سیستم‌های اسپین^۳ و دسپین^۴ در فضاپیماها کاربرد دارد [۱].

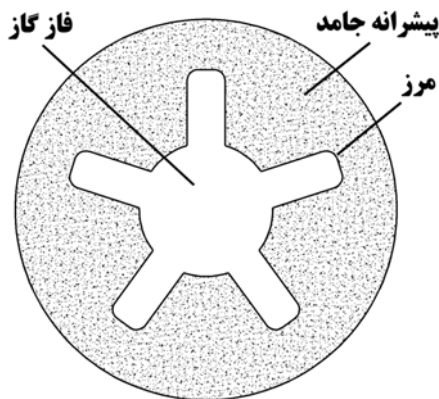
اولین بخش طراحی موشک، تعیین نیازمندی‌های پروازی است. بعد از آن منحنی پیشرانش بر حسب زمان برای برآوردن این نیازمندی‌ها تعریف می‌شود. سپس محاسبات بالستیک داخلی برای تعیین مساحت سطح سوزش انجام می‌گیرد. ترکیب پیشرانه، هندسه نازل و گرین طوری تنظیم می‌شوند که پیشرانش مورد نیاز موتور در هر لحظه تأمین شود. از این رو تغییرات سطح سوزش گرین در هر لحظه باید شناخته شده باشد. بنابراین تحلیل پس‌روی گرین، به معنی تعیین تغییرات هندسی یک گرین سوخت جامد در مدت زمان عملکرد آن در یک موتور موشک است. مشخصه‌های بالستیکی عمده گرین شامل سطح سوزش، حجم گرین، و توزیع طولی سطح گذر و محیط سوزش است. با چشم‌پوشی از سوزش غیریکنواخت، پس‌روی گرین یک تحلیل کاملاً هندسی است که می‌تواند بدون در نظر گرفتن محاسبات بالستیک داخلی انجام شود. نتایج حاصل از تحلیل پس‌روی گرین می‌تواند در یک برنامه بالستیک داخلی مورد استفاده قرار گیرد.

تهیه یک ابزار عددی قابل اعتماد برای شبیه‌سازی دقیق عملکرد نامی یک موتور موشک سوخت جامد، می‌تواند باعث کاهش چشمگیر هزینه‌های کلی پروژه (طراحی، ساخت، و آزمایش)، و طراحی بهتر شود. بنابراین شبیه‌سازی پس‌روی گرین برای پیش‌بینی رفتار موتور سوخت جامد، امری لازم است.

برای تحلیل پس‌روی گرین سه روش کلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش‌ها شامل روش‌های تحلیلی، روش‌های عددی، و استفاده از نرم‌افزار CAD هستند. روش‌های تحلیلی موجود، محدود به هندسه‌های متداول دوبعدی، با نرخ پس‌روی ثابت هستند [۲، ۳]. تحلیل هندسی گرین در نرم‌افزار CAD با استفاده از offsetting سطوح سوزش در جهت نرمال بر سطح صورت می‌گیرد. «با پس‌روی موازی سطوح، ممکن است بعضی از سطوح از پوسته بیرون بزنند یا کوتاه‌تر شود و به پوسته نرسد. به این دلیل نیاز است در هر گام offsetting این موضوع بررسی شود؛ و با استفاده از ابزارهای موجود در نرم‌افزار CAD این اشکالات به صورت دستی

برطرف شود» [۴]. در این روش نمی‌توان نرخ سوزش غیریکنواخت در موتور را بررسی کرد (مانند اثر سوزش فرسایشی). به علاوه در این روش امکان کوپل‌شدن با برنامه بالستیک داخلی ممکن نیست. از آنجاکه کاربر این کار را انجام می‌دهد، نیاز به دقت کاربر و صرف وقت زیاد به ویژه در تحلیل‌های سه‌بعدی دارد.

پس‌روی سطح مسئله‌ای با مرز متحرک است. مرز به‌عنوان جداکننده فازهای جامد و گاز از یکدیگر تعریف می‌شود (شکل ۱). اغلب روش‌های عددی موجود برای حل این نوع مسائل، به آسانی نمی‌توانند مواردی مانند تغییرات توپولوژیکی مرز در هنگام پس‌روی (مانند جدایش و در هم آمیختگی مرزها)، و پیچیدگی‌های هندسی مرز را لحاظ کنند. به علاوه تعمیم مسئله به حالت سه‌بعدی و استخراج مشخصه‌های هندسی مرز، در بیشتر روش‌های موجود به آسانی ممکن نیست [۵].



شکل ۱- تعریف مرز در مسئله پس‌روی گرین

اوشیر و سیتی‌بن مسئله مرز متحرک را با معادلاتی از نوع همیلتون-جاکوبی توصیف کردند. این معادلات می‌توانند به صورت، یک مسئله مقدار اولیه یا یک مسئله مقدار مرزی بیان شوند. توصیف مقدار اولیه مسئله، به روش لول‌ست شناخته شده است [۵، ۶].

در این مقاله روش لول‌ست برای شبیه‌سازی پس‌روی سطح سوزش گرین‌های سه‌بعدی پیچیده سوخت جامد به کار برده شده است.

تئوری و روش کار

تعریف ضمنی مرز

در روش لول‌ست، موقعیت مرز متحرک به صورت ضمنی تعریف می‌شود. مرز پیوسته $\partial\Omega$ می‌تواند توسط تراز صفر یک تابع پیوسته ضمنی $\phi(\vec{x})$ تعریف شود. تابع $\phi(\vec{x})$ در فضای داخل مرز Ω^- دارای مقادیر کمتر از صفر، در فضای خارج مرز Ω^+ دارای مقادیر بزرگ‌تر

3. Spin
4. Despin

شبکه تا مرز تعریف می‌شود (معادله ۱). مقدار این تابع بر روی مرز که $\bar{x} \in \partial\Omega$ است، برابر صفر است.

$$d(\bar{x}) = \min(|\bar{x} - \bar{x}_i|) \text{ for all } \bar{x}_i \in \partial\Omega \quad (1)$$

مقدار تابع فاصله علامت‌دار $SDF(\bar{x})$ ، برای تمام \bar{x} های شبکه حل، برابر $|SDF(\bar{x})| = d(\bar{x})$ است. تابع فاصله علامت‌دار طبق رابطه (۲) تعیین علامت می‌شود [۷].

$$\begin{cases} SDF(\bar{x}) = d(\bar{x}) & \text{in } \Omega^+ \\ SDF(\bar{x}) = d(\bar{x}) = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ SDF(\bar{x}) = -d(\bar{x}) & \text{in } \Omega^- \end{cases} \quad (2)$$

محاسبه تابع فاصله علامت‌دار در فضای سه‌بعدی

برای محاسبه تابع فاصله، باید ابتدا مرز را گسسته‌سازی کرد. برای گسسته‌سازی سطح یک جسم سه‌بعدی از فرمت STL^E استفاده شده است [۸]. این فرمت برای نمایش سطوح سه‌بعدی در نرم‌افزارهای CAD استفاده می‌شود. در این فرمت سطح جسم جامد سه‌بعدی توسط المان‌های مثلثی مشخص می‌شود. موقعیت المان‌های مثلثی توسط مختصات رئوس هر المان، به صورت مجزا تعیین می‌شوند و به همراه بردار نرمال المان مربوطه، در فایل خروجی ذخیره می‌شوند. بردار نرمال در راستای رو به خارج مدل سه‌بعدی اولیه جهت‌دهی می‌شود (شکل ۳).

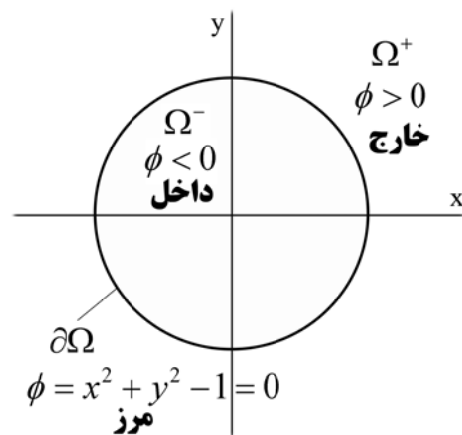
تعداد المان‌های مثلثی مورد نیاز برای گسسته‌سازی مرز به پیچیدگی هندسه، مقادیر شعاع انحنا و دقت مورد نیاز بستگی دارد. با استفاده از پارامترهای کنترلی خروجی نرم‌افزار CAD، می‌توان بر روی خطای مربوط به گسسته‌سازی کنترل داشت. برای داشتن دقت بیشتر باید تعداد المان‌ها را افزایش داد، و این کار باعث افزایش زمان محاسبه تابع فاصله می‌شود.

solid name	خط شروع
facet normal n1 n2 n3	مختصات بردار نرمال المان
outer loop	
vertex v11 v12 v13	
vertex v21 v22 v23	مختصات رئوس المان
vertex v31 v32 v33	
endloop	
endfacet	
.	
.	برای تمامی المان‌ها مشخصات فوق ذکر می‌شوند
.	
endsolid name	خط پایانی

شکل ۳- فرمت خروجی یک فایل STL

از صفر، و بر روی مرز دارای مقدار صفر است. تابع $\phi(\bar{x})$ به عنوان تابع لول‌ست نیز شناخته می‌شود [۷].

به عنوان مثال می‌توان یک دایره واحد را به صورت تراز صفر تابع $\phi(\bar{x}) = x^2 + y^2 - 1$ ، تعریف کرد (شکل ۲). برای نمایش ضمنی این منحنی در صفحه نیاز است که یک زیرفضای دوبعدی گسسته‌سازی شود. در صورتی که در نمایش صریح، تنها نیاز به گسسته‌سازی یک زیرفضای یک‌بعدی است (با پارامتری کردن منحنی). این یکی از معایب استفاده از روش ضمنی برای نمایش مرز است که باعث افزایش حجم محاسبات می‌شود. در این حالت برای کاهش محاسبات می‌توان فضای حل را به ناحیه باریکی در اطراف مرز محدود کرد. زیرا تنها تراز $\phi(\bar{x}) = 0$ دارای اهمیت است.



شکل ۲- نمایش ضمنی دایره‌ای با شعاع واحد

یکی از مطلوب‌ترین خواص استفاده از توابع ضمنی برای تعریف مرز این است که پس از تعیین مقدار اولیه آن در نقاط شبکه حل، دیگر نیازی به اطلاعات مربوط به پیوستگی المان‌های مرز متحرک نیست. چون دیگر با یک میدان روبه‌رو هستیم که تراز صفر آن در هر لحظه بیانگر مرز است. از این رو، روش لول‌ست قادر است تغییرات توپولوژیکی مرز در هنگام پس‌روی را به آسانی پشتیبانی کند [۷].

عملیات بولی را می‌توان بر روی توابع ضمنی به کار برد، و به این ترتیب نواحی چندحفره‌ای و پیچیده‌تر را توسط توابع ضمنی تعریف کرد.

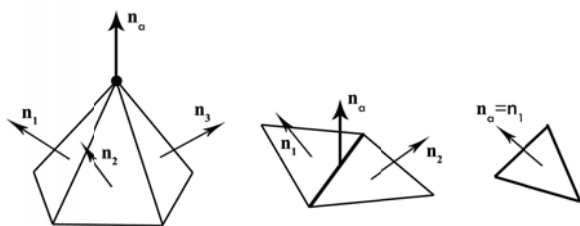
تابع فاصله علامت‌دار

مرزهای پیچیده را نمی‌توان با یک تابع ضمنی با ضابطه مشخص تعیین کرد. به این منظور از مفهوم تابع فاصله علامت‌دار^۵ استفاده می‌شود. این تابع زیرمجموعه توابع ضمنی است. تابع فاصله $d(\bar{x})$ در هر نقطه از شبکه حل، به صورت حداقل فاصله میان آن نقطه از

برای اضلاع و رئوس هر المان مثلثی تعریف می‌شود (شکل ۵). این بردار مجازی با توجه به المان‌هایی که در همسایگی یک ضلع یا یک رأس قرار دارند، محاسبه می‌شود. برای محاسبه بردار نرمال مجازی از معادله (۳) استفاده می‌شود [۱۱].

$$n_{\alpha} = \frac{n_1 + n_2}{\|n_1 + n_2\|} \leftarrow \text{For an Edge} \quad (3)$$

$$n_{\alpha} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_m}{\|n_1 + n_2 + \dots + n_m\|} \leftarrow \text{For a Vortex}$$



شکل ۵- تعیین بردار نرمال مجازی برای اضلاع و رئوس هر المان مثلثی

معادله پس‌روی مرز متحرک

اگر مقدار سرعت سوزش گرین در جهت عمود بر سطح، ثابت و برابر $a = cte > 0$ باشد، معادله پس‌روی به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود [۷]. در این رابطه، ϕ نمایانگر موقعیت ضمنی مرز متحرک در هر لحظه است (مکان لحظه‌ای مرز = تراز صفر تابع ϕ). هنگامی که $a > 0$ باشد مرز در جهت بردار نرمال، و هنگامی که $a < 0$ مرز در خلاف جهت بردار نرمال حرکت می‌کند. شرط اولیه معادله پس‌روی (موقعیت اولیه مرز متحرک) توسط تابع فاصله علامت‌دار تعیین می‌شود.

$$\phi_t + a|\nabla\phi| = 0 \quad (4)$$

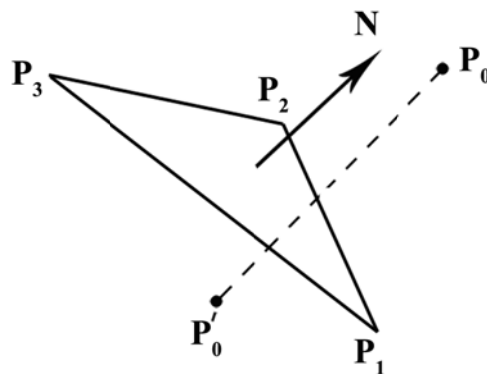
این رابطه یک معادله دیفرانسیل هذلولی (از خانواده معادلات همپلتون- جاکوبی) است و با استفاده از روش بادسوی^۸ گودونو^۹ گسسته‌سازی می‌شود. در این روش جهت مشخصه بر اساس علامت و مقدار ترم‌های $a\phi_x^+$ و $a\phi_x^-$ تعیین می‌شود. برای گسسته‌سازی ترم زمانی معادله فوق، از روش اولر پیش‌رو مرتبه اول استفاده شده است. شرط پایداری CFL توسط معادله (۵) اعمال می‌شود [۷].

$$\Delta t \left(\frac{|a\phi_x|}{\Delta x} + \frac{|a\phi_y|}{\Delta y} + \frac{|a\phi_z|}{\Delta z} \right) < 1 \quad (5)$$

در حالت احتراق واقعی سرعت سوزش ثابت نیست و تابع عواملی مانند فشار محفظه احتراق و دمای گرین است. به این دلیل

پس از تولید هندسه اولیه گرین در یک نرم‌افزار CAD و گرفتن خروجی با فرمت STL، تابع فاصله برای نقاط شبکه حل محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که در هندسه سه‌بعدی اولیه، حجم خالی گرین که با سطح سوزش محاط شده است، مدل می‌شود.

برای تعیین کم‌ترین فاصله میان نقطه P_0 و مثلث $P_1P_2P_3$ می‌توان به ترتیب زیر عمل کرد (شکل ۴). ابتدا تصویر نقطه P_0 در صفحه مثلث $P_1P_2P_3$ (P'_0) تعیین می‌شود. اگر P'_0 در داخل مثلث $P_1P_2P_3$ واقع شود، آنگاه کم‌ترین فاصله، فاصله عمود (موازی با بردار نرمال) بین نقطه P_0 و صفحه شامل رئوس P_1, P_2, P_3 خواهد بود. در غیر این صورت کم‌ترین فاصله، فاصله میان نقطه P_0 و یکی از پاره‌خط‌های P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3 خواهد بود. برای آشنایی بیشتر با روش‌های مختلف، تعیین کم‌ترین فاصله میان یک نقطه و یک مثلث می‌توان به مراجع [۹، ۱۰] مراجعه کرد.



شکل ۴- تعیین کم‌ترین فاصله میان یک نقطه و یک مثلث

برای تعیین علامت تابع فاصله از بردار نرمال المان‌ها استفاده شده است. برای این منظور ابتدا باید نزدیک‌ترین نقطه بر روی مرز P_c برای نقطه P_0 در فضا پیدا شود. سپس ضرب داخلی بردار نرمال بر مرز در نقطه P_c و بردار $P_0 - P_c$ محاسبه می‌شود. اگر دو بردار هم‌جهت باشند، آنگاه نقطه P_0 خارج از مرز واقع است و حاصل ضرب داخلی علامت مثبت دارد. اگر نقطه P_0 داخل مرز باشد، آنگاه حاصل ضرب داخلی علامت منفی دارد.

اگر نقطه P_c بر روی سطح یک المان واقع شود، آنگاه بردار نرمال در نقطه P_c همان بردار نرمال المان مربوطه خواهد بود. ولی اگر P_c بر روی لبه‌ها یا رئوس المان مثلثی واقع شود، با مشکل مواجه خواهیم شد. زیرا بردار نرمال بر مرز در این حالت تعریف نشده است. برای برطرف شدن این مشکل بردار نرمال مجازی^۷

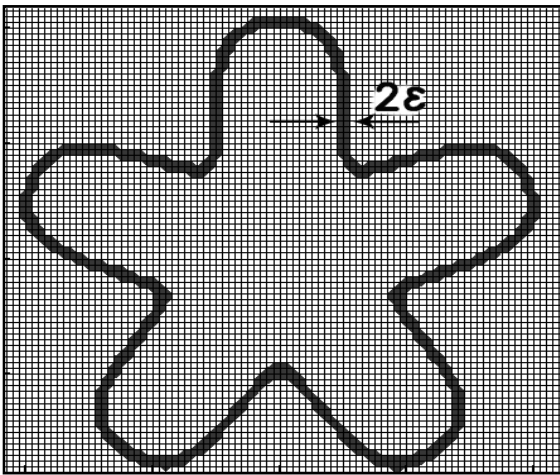
8. Upwind
9. Godunov

7. Pseudo Normal

ε حساسیت کمی دارند. مقدار معمول برای این پارامتر $\varepsilon \approx 1.5h$ است؛ که h اندازه هر سلول مکعبی در شبکه حل است [۶]. یک توصیف از 2ε پهنای نواری است که در بردارنده مرز گرین در یک سلول، و حاشیه‌های مرز در سلول‌های مجاور است. توابع هویساید و دلتا دیراک را می‌توان با دقت مرتبه‌های بالاتر نیز گسسته‌سازی کرد [۱۲، ۱۳].

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & |\phi| \leq \varepsilon \\ 1 & \varepsilon < \phi \end{cases} \quad (9)$$

$$\delta(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & |\phi| \leq \varepsilon \\ 0 & |\phi| > \varepsilon \end{cases} \quad (10)$$



شکل ۶- تعیین مرز توسط تابع دلتا دیراک

برای تعیین مساحت سطح گذر و محیط سوزش در طول گرین، از مقاطع طولی در راستای عمود بر محور موتور استفاده می‌شود. در هر یک از این مقاطع طولی روابط انتگرالی (۷) و (۸) محاسبه می‌شوند، و به ترتیب مساحت سطح گذر و محیط سوزش تعیین می‌شوند (تبدیل شدن به یک مسئله دوبعدی).

نتایج

فرآیند حل مسئله پس‌روی گرین

روش معرفی شده برای تحلیل پس‌روی گرین توسط برنامه‌ای به زبان فرترن، و در دستگاه مختصات کارترین پیاده‌سازی شده است. فرآیند کلی حل مسئله پس‌روی گرین در شکل (۷) آورده شده است. اولین گام برای این منظور، تهیه مدل هندسه اولیه گرین است. این کار در یک نرم‌افزار CAD صورت می‌گیرد. سپس سطح مدل

باید معادلات پس‌روی سطح گرین، و بالستیک داخلی به طور همزمان حل شوند. با این وجود می‌توان مقادیر مشخصه‌های بالستیکی گرین را بر اساس ضخامت وب به صورت جدول درآورد و در حل معادلات بالستیک داخلی از آن‌ها استفاده کرد. این کار باعث تفکیک محاسبات بالستیک داخلی، از محاسبات مشخصه‌های بالستیکی گرین می‌شود.

محاسبه مشخصه‌های بالستیکی گرین

پس از تبیین معادله پس‌روی، نیاز است که مشخصه‌های بالستیکی گرین (شامل سطح سوزش، حجم گرین، مساحت گذر، محیط سوزش و ...) در هر گام حل تعیین شوند. زیرا با پیش‌روی در زمان، مشخصه‌های بالستیکی گرین تغییر می‌کنند. برای این منظور از خواص مربوط به توابع ضمنی برای محاسبه مشخصه‌های بالستیکی بهره گرفته می‌شود. با پیاده‌سازی این روش، دیگر نیازی به استخراج مستقیم مرز نیست و از شکل گسسته ϕ استفاده می‌شود. تابع هویساید $H(\phi)$ به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi \leq 0 \\ 1 & \text{if } \phi > 0 \end{cases} \quad (6)$$

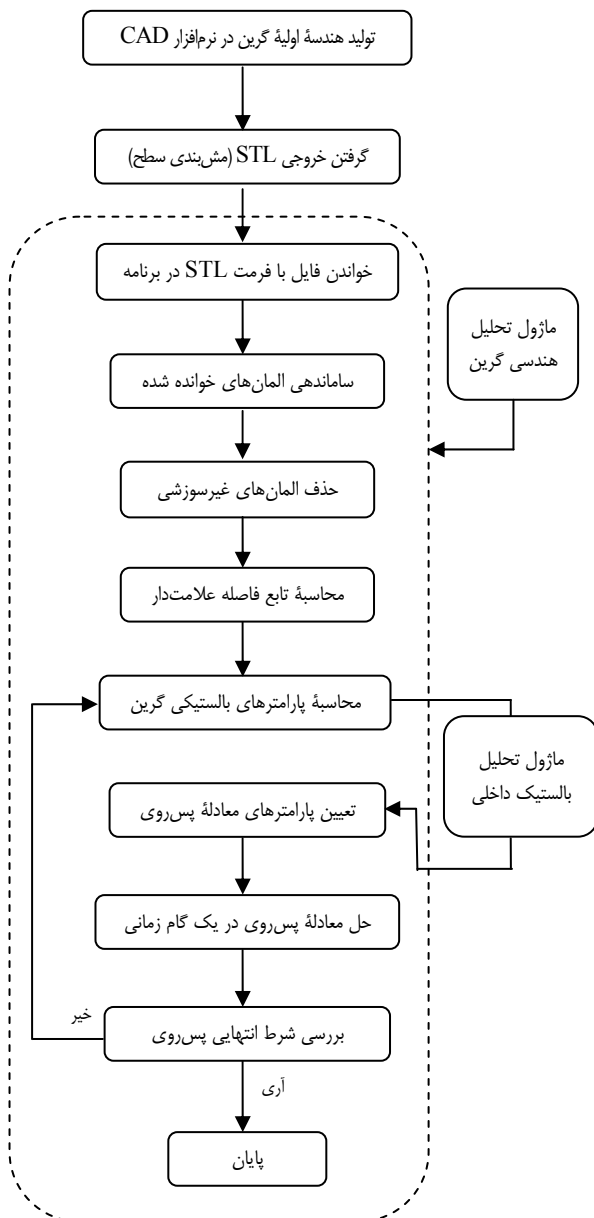
مقدار تابع هویساید بر روی مرز و ناحیه داخلی آن صفر است، و در خارج مرز مقدار واحد دارد. این تابع مانند یک فیلتر عمل می‌کند و باعث تفکیک ناحیه داخلی مرز، از ناحیه خارجی آن می‌شود. حجم محفظه احتراق را می‌توان به سادگی با استفاده از رابطه (۷) تعیین کرد [۷]. در این رابطه $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ دامنه حل است.

$$V_{ch} = \int_{\Omega} (1 - H(\phi)) dV \quad (7)$$

تابع دلتا دیراک $\delta(\phi)$ به صورت مشتق تابع هویساید تعریف می‌شود. مقدار تابع دلتا دیراک در تمام فضای حل، به غیر از ناحیه روی مرز صفر است. به کمک این تابع می‌توان سطح سوزش A_b را توسط رابطه (۸) محاسبه کرد [۷].

$$A_b = \int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla \phi| dV \quad (8)$$

برای محاسبه عددی عبارات انتگرالی فوق می‌توان از روش انتگرالی گیری عددی مبتنی بر نقاط متساوی‌فاصله، استفاده کرد. در این تحقیق از روش سیمپسون استفاده شده است. تابع هویساید و دلتا دیراک با دقت مرتبه یک را می‌توان به صورت معادله‌های (۹) و (۱۰) تعریف کرد. ε یک پارامتر ثابت قابل تنظیم است، که اندازه پهنای باند اطراف مرز را تعیین می‌کند (شکل ۶). مقادیر مشخصه‌های هندسی محاسبه شده برای گرین، نسبت به مقدار



شکل ۷- نمودار فرآیند حل مسئله پس روی گرین سوخت جامد

تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق را می توان برای این گرین به صورت تحلیلی محاسبه کرد (معادله ۱۲). شعاع داخلی گرین، r_o شعاع بیرونی گرین، و L طول گرین هستند. در شکل (۸) نمای برش خورده این گرین مشاهده می شود. قید مرزی اتمام سوزش برای معادله پس روی، قطر داخلی محفظه احتراق است؛ به طوری که مرز پس از رسیدن به قید تعریف شده متوقف می شود. در جدول (۱)، تعداد المان های محاسباتی در سه راستای x, y, z ، به همراه تعداد المان های سطحی گرین اولیه آورده شده است:

$$A_b(t) = 2\pi \left[(r_i + at)(L - 2at) + (r_o^2 - (r_i + at)^2) \right] \quad (12)$$

$$V_{ch}(t) = \pi \left[r_o^2 L - (r_o^2 - (r_i + at)^2)(L - 2at) \right]$$

هندسی تولید شده گسسته سازی می شود (با استفاده از خروجی STL نرم افزار CAD). فایل مشخصات هندسی گرین با برنامه نوشته شده به زبان فترن خوانده می شود. سپس اطلاعات مربوط به مش های خوانده شده ساماندهی می شوند. این ساماندهی شامل شماره گذاری المان ها، گره ها و لبه های تشکیل دهنده المان هاست تا بتوان المان های همسایه در یک گره یا یک لبه را به آسانی تعیین کرد. بعد از این مرحله، المان های غیرسوزشی حذف می شوند. سپس تابع فاصله علامت دار برای تولید هندسه اولیه به صورت ضمنی محاسبه می شود. تابع فاصله برای هر گرین تنها کافی است یک بار محاسبه شود. با توجه به تولید هندسه به صورت تراز صفر یک تابع ضمنی، مشخصه های بالستیک گرین برای استفاده در تحلیل بالستیک داخلی استخراج می شوند. از حل معادلات بالستیک داخلی نرخ سوزش (سرعت پس روی) به دست می آید. با داشتن هندسه اولیه و نرخ سوزش، معادله پس روی در یک بازه زمانی حل شده و موقعیت جدید سطح سوزش تعیین می شود. این فرآیند تا رسیدن سطح سوزش به شرط مرزی انتهایی ادامه می یابد.

ماژول تحلیل بالستیک داخلی را می توان در حالت های مختلف مانند صفر بعدی، یک بعدی، و سه بعدی وارد مسئله تحلیل هندسی گرین کرد. با توجه به اینکه پس روی مرز گرین مسئله اصلی کار حاضر است، برای اجتناب از ورود پیچیدگی های بیشتر، مدل ساده صفر بعدی گذرا انتخاب شده است. این مدل، مستقل از ماژول تحلیل هندسی به کار برده شده است (معادله ۱۱). مقادیر سطح سوزش (A_b) و حجم محفظه احتراق (V_{ch}) از تحلیل هندسی گرین به دست می آیند.

$$\frac{V_{ch}}{RT_c} \frac{dP}{dt} = \rho_p A_b r_b - P \frac{A_r}{C^*} \quad (11)$$

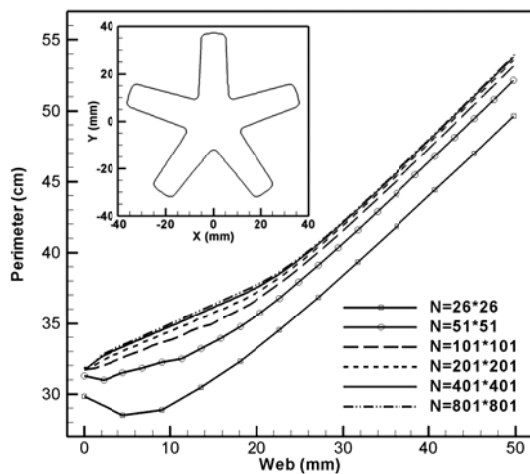
ارتباط بین ماژول تحلیل بالستیک داخلی و تحلیل پس روی گرین در مواردی که نرخ سوزش در گرین یکنواخت نیست، ضروری است. در حالتی که سرعت گازها در محفظه احتراق زیاد باشد، توزیع غیریکنواخت فشار در موتور به وجود می آید. این موضوع سبب ناهمگنی نرخ سوزش در طول گرین می شود. علاوه بر این، در مواردی که سوزش فرسایشی در موتور وجود دارد نیز، امکان ناهمگنی سرعت سوزش وجود خواهد داشت. در این موارد بهتر است تحلیل بالستیک با تحلیل هندسی پس روی گرین کوپل شوند.

ارزیابی دقت

برای ارزیابی دقت محاسبات پس روی، یک گرین استوانه ای داخل سوز که هر دو پیشانی آن هم می سوزند، انتخاب شده است.

استقلال جواب از شبکه حل^{۱۰}

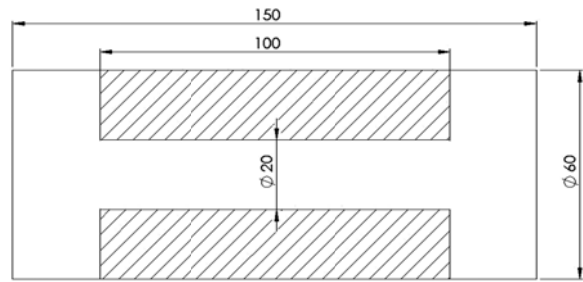
برای اطمینان از صحت نتایج به‌دست آمده از برنامه لازم است تا وابستگی جواب‌ها نسبت به ابعاد شبکه حل بررسی شوند. با ریزتر شدن ابعاد شبکه حل، جواب‌های به‌دست آمده به یک مقدار همگرا می‌شوند؛ به‌طوری‌که با افزایش بیشتر نقاط شبکه حل، تغییر چشمگیری در جواب‌ها به وجود نمی‌آید. به این ترتیب ابعاد مناسب شبکه حل مشخص می‌شود. در شکل (۱۰) آنالیز وابستگی جواب پس‌روی نسبت به ابعاد شبکه حل، برای یک گرین ستاره‌ای پنج‌پر دوبعدی، مشاهده می‌شود. در این شکل تغییرات محیط مرز براساس وب سوخته، برای ابعاد مختلف شبکه حل، رسم شده است. با افزایش بیشتر تعداد نقاط شبکه حل از 401×401 ، تغییر زیادی در جواب ملاحظه نمی‌شود. جواب‌های به‌دست آمده در وب سوخته اولیه ($Web=0-22$) دارای مقدار خطای بیشتری‌اند. این مسئله به دلیل وجود انحنای بیشتر مرز در لحظات اولیه است. در شکل (۱۱) همگرایی جواب‌های به‌دست آمده در چند وب سوخته مشاهده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نرخ همگرایی با افزایش وب سوخته بیشتر می‌شود. زیرا با افزایش وب سوخته از پیچیدگی‌های هندسی مرز کاسته می‌شود.



شکل ۱۰- آنالیز وابستگی جواب‌های به‌دست آمده نسبت به ابعاد شبکه حل

تحلیل پس‌روی یک گرین از نوع فینوسیل

به دلیل دسترسی نداشتن به داده‌های آزمایش گرم در داخل کشور، از نتایج آزمایش یک موتور آزمایشگاهی کوچک (موجود در منابع) استفاده شده است [۱۵]. در این مرجع، نتایج آزمایش چهار نوع گرین با نمایه‌های ۱، ۱۷، ۲۱ و ۲۴ ارائه شده است. گرین‌های در این موتور از نوع فینوسیل^{۱۱} هستند. گرین فینوسیل از قرارگیری

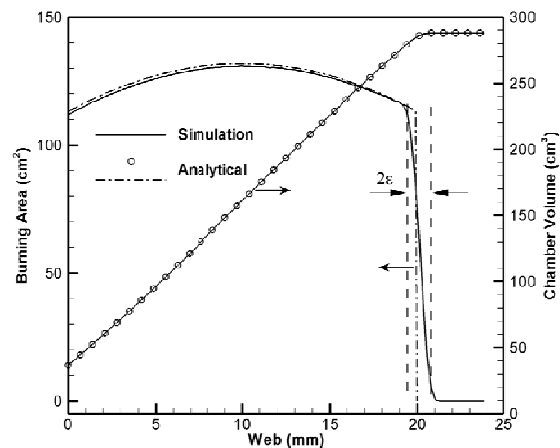


شکل ۸- نمای برش‌خورده گرین استوانه‌ای (ابعاد به mm)

جدول ۱- ابعاد شبکه حل و تعداد المان‌ها برای گرین استوانه‌ای پیشانی سوز

تعداد المان‌های محاسباتی	تعداد المان‌های سطح	تعداد گره‌های سطح
$140 \times 140 \times 300$	۳۵۶	۱۸۰

در شکل (۹)، نمودار تغییرات سطح سوزش گرین و حجم محفظه احتراق، بر حسب وب سوخته شده مشاهده می‌شود. در پایان پس‌روی مساحت سطح سوزش به صفر، و حجم محفظه احتراق به مقدار حداکثر خود می‌رسد. نتایج به‌دست آمده از برنامه با مقادیر تحلیلی نیز مقایسه شده‌اند و توافق خوبی مشاهده می‌شود. میان مقادیر تحلیلی و مقادیر به‌دست آمده از برنامه برای سطح سوزش، اختلاف‌های کمی نیز وجود دارد. اختلاف مقداری موجود، به علت تقریب سطح گرین با المان‌های مثلثی است. با افزایش المان‌های سطح گرین و گره‌های شبکه حل، این اختلاف به سمت صفر میل خواهد کرد. اختلاف موجود در فاز پایانی پس‌روی به تابع دلتا دیراک مربوط است. زیرا این تابع مکان مرز را توسط نواری با پهنای 2ϵ تقریب می‌زند (شکل ۶). در این مثال سرعت پس‌روی $a = 1 \text{ mm/s}$ ، و اندازه سلول‌های شبکه حل $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.5 \text{ mm}$ انتخاب شده است. دقت روش لول‌ست برای مسائل دوبعدی در مرجع [۱۴]، به کمک چند مثال تحلیلی پیچیده ارزیابی و تأیید شده‌اند.

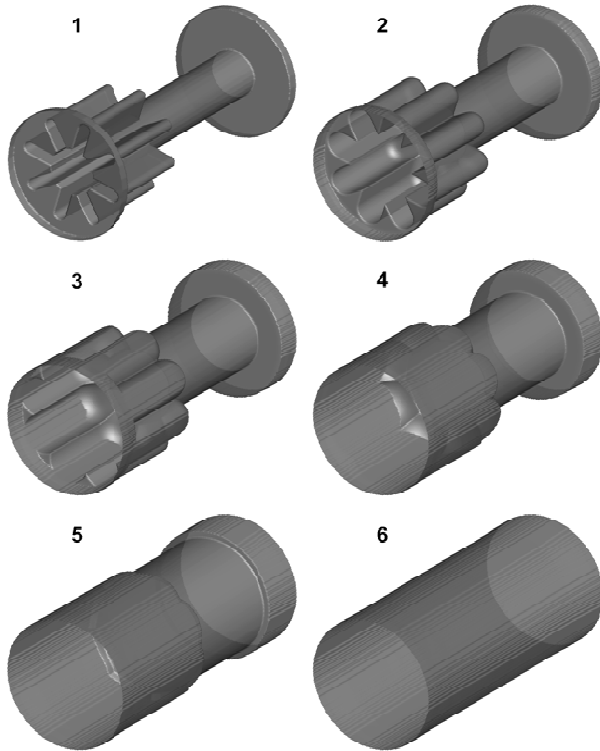


شکل ۹- تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق برای پس‌روی گرین استوانه‌ای پیشانی سوز

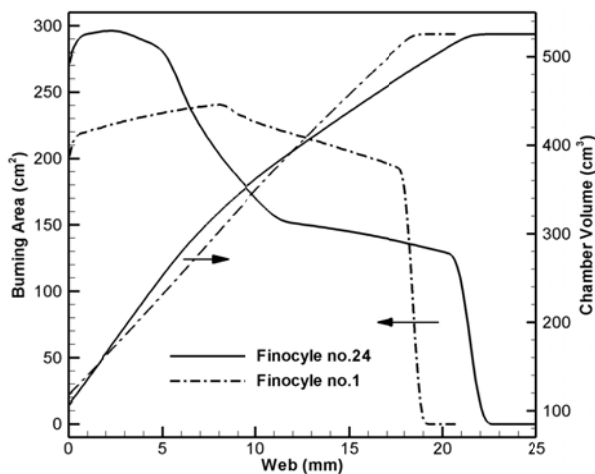
10. Grid Independency
11. Finocycle

جدول ۲- ابعاد شبکه حل و تعداد المان‌ها برای دو گرین فینوسیل

تعداد گرین‌های اولیه سطح	تعداد المان‌های اولیه سطح	ابعاد شبکه حل	ش. ۱۰
۴۱۲	۸۲۰	۱۸۰×۱۸۰×۴۰۰	ش. ۲۴
۴۰۶	۸۰۸	۱۸۰×۱۸۰×۴۰۰	

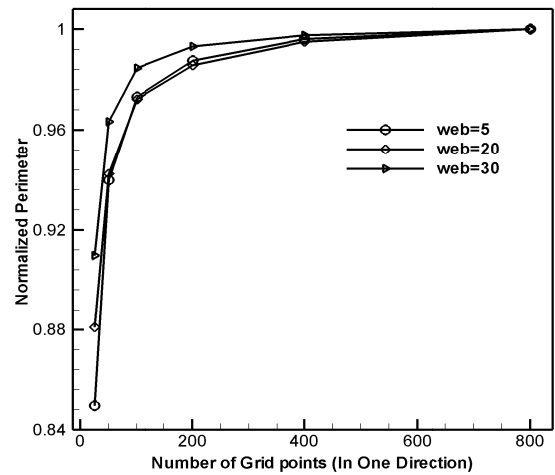


شکل ۱۳- شش مرحله از پس‌روی گرین فینوسیل شماره ۲۴



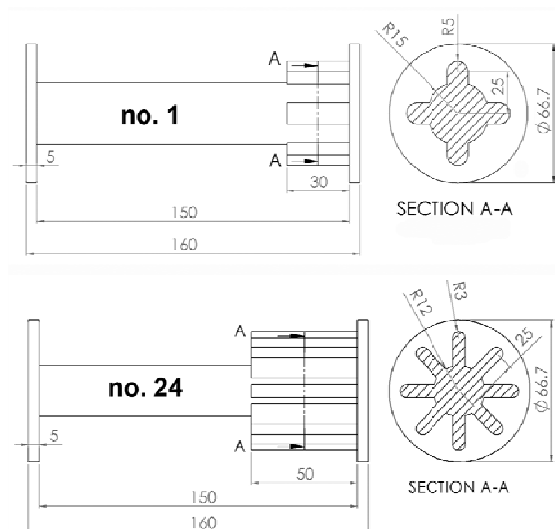
شکل ۱۴- تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق برای گرین‌های فینوسیل شماره ۱ و ۲۴

چند پره ستاره‌ای شکل بر روی یک قسمت استوانه‌ای تشکیل می‌شود. این نوع گرین اغلب در نسبت ظرافت (L/D) کم، مدت زمان عملکردی بالا، و تولید پیشران زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۶]. این نوع گرین در موتورهای مرحله بالایی پرتابگرهای فضایی (مانند VEGA) کاربرد دارد [۱۷].



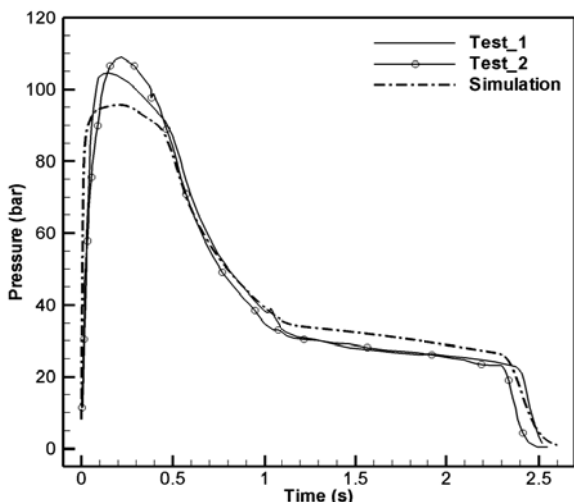
شکل ۱۱- همگرایی جواب‌های به‌دست آمده در چند وب سوخته

در شکل (۱۲) هندسه اولیه دو عدد از این گرین‌های نوعی فینوسیل مشاهده می‌شوند (شماره ۱ و ۲۴). این گرین‌ها از دو پیشانی ابتدایی و انتهایی نیز، به صورت محوری می‌سوزند. سوختن گرین‌ها تا رسیدن به قطر داخلی محفظه احتراق ادامه می‌یابد. برای لحاظ کردن پیشانی سوزی در پس‌روی، دو دیسک استوانه‌ای به ابتدا و انتهای گرین افزوده شده است. در جدول (۲)، تعداد المان‌های محاسباتی در سه راستای x, y, z ، به همراه تعداد المان‌های سطحی اولیه برای این دو گرین آورده شده است.

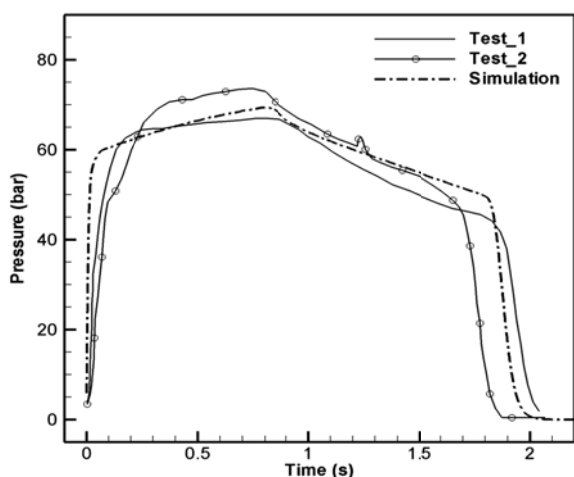


شکل ۱۲- ابعاد هندسی گرین فینوسیل شماره ۱ و ۲۴ (ابعاد به mm)

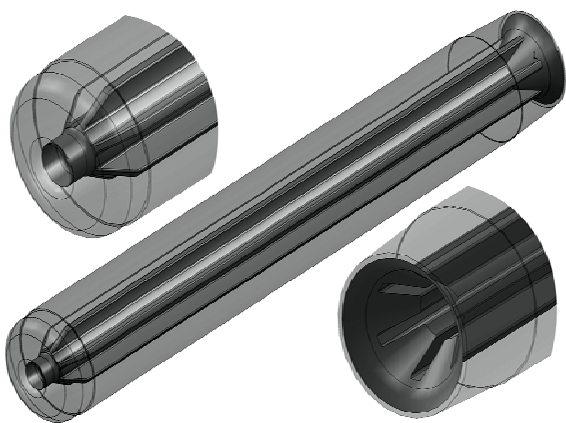
هنگام آزمایش است. البته با تغییر در پارامترهای مؤثر بر فشار موتور مانند سرعت ویژه و نرخ سوزش، می‌توان انطباق بهتری را به‌دست آورد.



شکل ۱۶- مقایسه نتیجه شبیه‌سازی با داده‌های آزمایش برای گرین شماره ۲۴

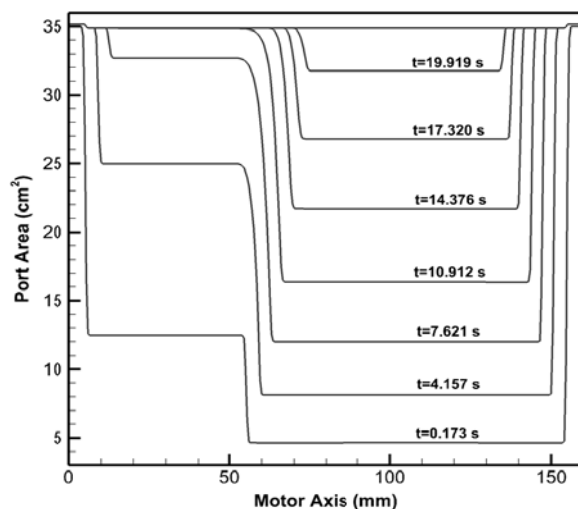


شکل ۱۷- مقایسه نتیجه شبیه‌سازی با داده‌های آزمایش برای گرین شماره ۱



شکل ۱۸- مدل ۳بعدی CAD گرین موتور M500

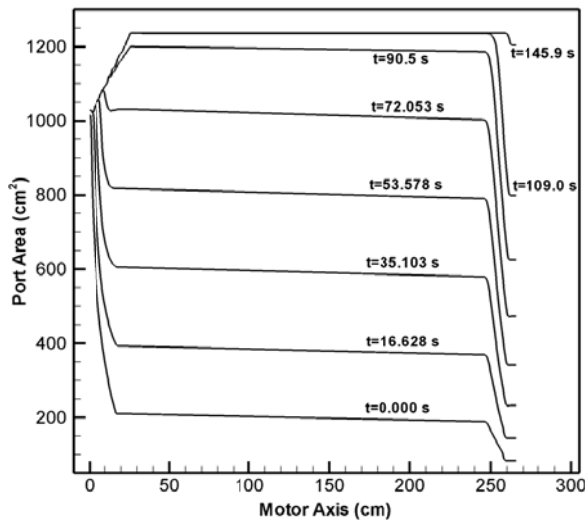
در شکل (۱۳)، شش مرحله از پس‌روی برای گرین فینوسیل شماره ۲۴ نمایش داده شده است. این مراحل به ترتیب متعلق به وب سوخته‌شده $web=0, 3.7, 11.1, 18.5, 22.5$ mm است. برای نمایش سطوح تراز صفر (موقعیت لحظه‌ای مرز) از نرم‌افزار تکپلات^{۱۲} استفاده شده است. در شکل (۱۴) تغییرات مساحت سطح سوزش و حجم محافظ احتراق، بر حسب وب سوخته شده نشان داده شده است. در شکل (۱۵) تغییرات مساحت سطح گذر در طول گرین، در چند زمان مختلف مشاهده می‌شود.



شکل ۱۵- تغییرات مساحت سطح گذر در طول گرین فینوسیل شماره ۲۴

با استفاده از تحلیل بالستیک داخلی صفربعدی، فشار موتور برای گرین‌های فینوسیل شماره ۱ و شماره ۲۴ محاسبه شده، و با داده‌های تجربی مقایسه شده‌اند (شکل‌های ۱۶ و ۱۷). در ابتدا باید توجه کرد که در آزمایش‌های نشان داده شده برای هر دو گرین، تکرارپذیری خوبی مشاهده نمی‌شود. به طوری که نمی‌توان انتظار داشت هیچ‌گونه تخمینی منطبق بر نتایج آزمایش باشد. برای پیش‌بینی منحنی فشار- زمان این موتورها، از داده‌های مربوط به نرخ سوزش و سرعت مخصوص پیش‌رانه جامد معرفی شده توسط مرجع [۱۴] استفاده شده است. نرخ سوزش ارائه شده در این مرجع با زمان عملکرد موتورها انطباق ندارد. با اندک تغییری در ثوابت نرخ سوزش داده شده، فشار این موتورها پیش‌بینی شده‌اند. نتیجه پیش‌بینی به همراه منحنی‌های تجربی برای گرین‌های ۱ و ۲۴، به ترتیب در شکل‌های (۱۶) و (۱۷) نشان داده شده است.

عدم تطابق پیش‌بینی با نتایج آزمایش بیشتر در زمان‌های اولیه است؛ جایی که نتایج در آزمایش نیز با هم انطباق خوبی ندارند. علت عدم انطباق احتمالاً مربوط به عدم یکسانی شرایط موتور در

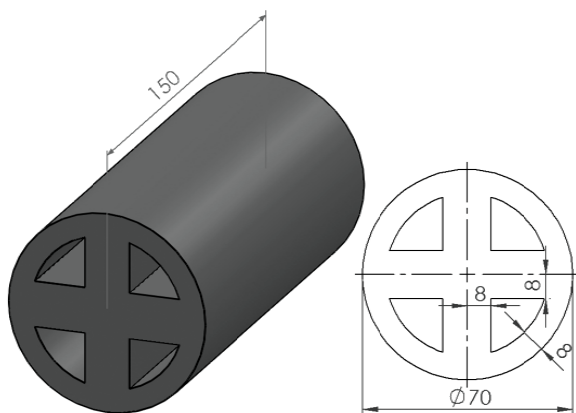


شکل ۲۱- تغییرات مساحت سطح گذر در طول گرین موتور M500

نتایج این تحلیل نشان می‌دهد که به‌رغم مساحت سوزش نسبتاً ثابت، گرین در انتها دارای باقی‌مانده^۳ زیادی است.

تحلیل یک گرین چندحفره‌ای

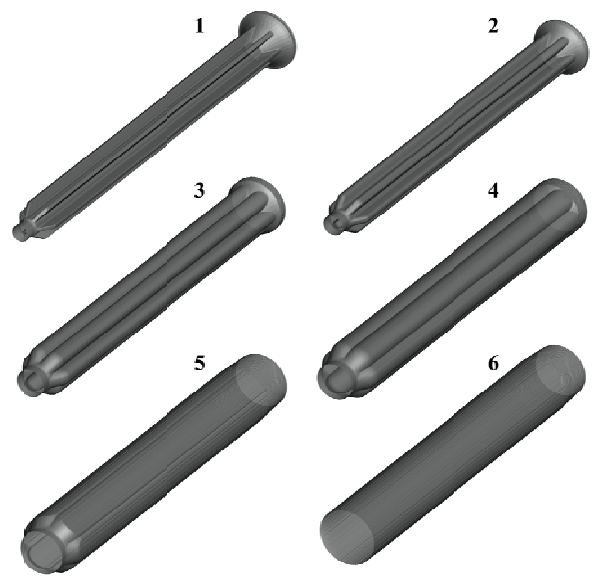
گرین موتورهای هیبریدی اغلب به صورت چندحفره‌ای هستند (برای افزایش سطح سوزش). در شکل (۲۲) هندسه اولیه یک گرین هیبریدی متداول مشاهده می‌شود [۱]. هندسه اولیه این گرین با استفاده از خاصیت اجتماع توابع ضمنی تعریف شده است. در هنگام پس‌روی این گرین، سطوح سوزش به هم رسیده و با هم ادغام می‌شوند. الگوی پس‌روی این گرین در یک مقطع دوبعدی عمود بر محور موتور، در شکل (۲۳) نشان داده شده است. قسمت‌های جداشونده از سوخت را می‌توان در این شکل مشاهده کرد.



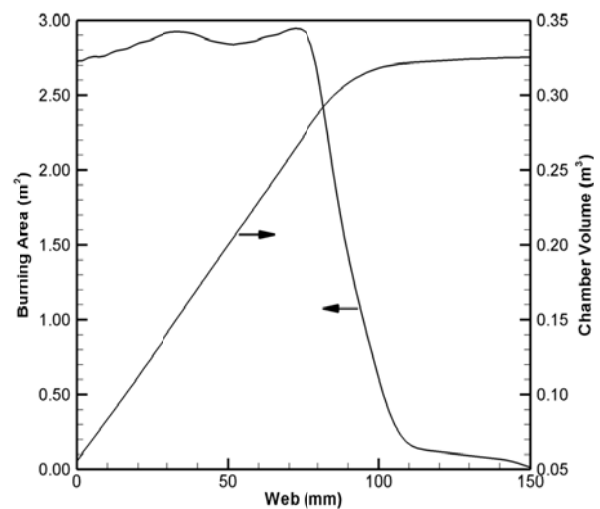
شکل ۲۲- هندسه اولیه یک گرین هیبریدی متداول

تحلیل گرین موتور آزمایشگاهی M500

موتور آزمایشگاهی M500 به‌منظور تولید پیشران تقریباً ثابت طراحی شده است. گرین این موتور از نوع چرخ قطار است که در انتها یک قسمت مخروطی است. این گرین نیز، شیب طولی 0.05° درجه دارد. مدل سه‌بعدی CAD این گرین در شکل (۱۸) نشان داده شده است. هندسه این گرین در مرجع [۱۸] آورده شده است. نتایج تحلیل این گرین در شکل‌های (۱۹)، (۲۰)، و (۲۱) آورده شده است.

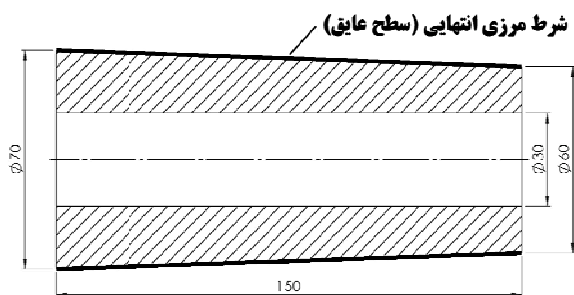


شکل ۱۹- مراحل پس‌روی گرین موتور M500

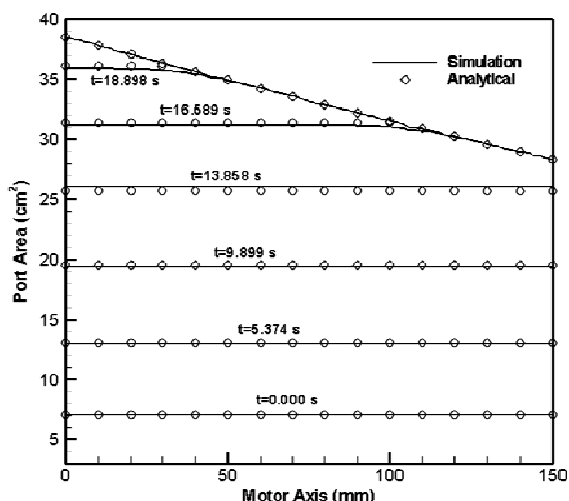


شکل ۲۰- تغییرات مساحت سطح سوزش و حجم محفظه احتراق در هنگام پس‌روی گرین موتور M500

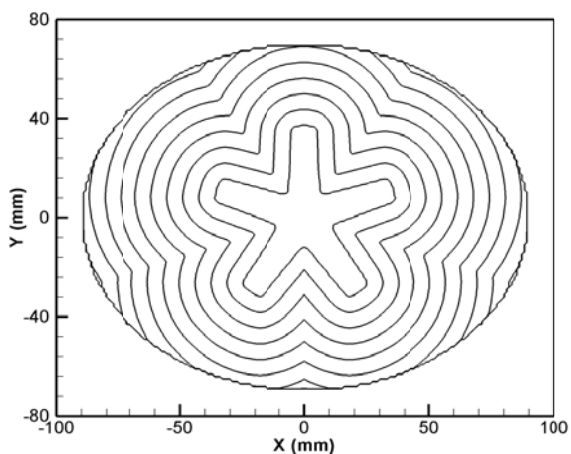
شده‌است ($a = 1 \text{ mm/s}$). نتایج به‌دست آمده با داده‌های تحلیلی نیز مقایسه شده‌اند. به‌طور مشابه می‌توان قیدهای مرزی دیگری مانند: کروی، ترکیبی، یا هر نوع قیدی را که به‌صورت معادله ریاضی بیان شود، برای اتمام سوزش اعمال کرد.



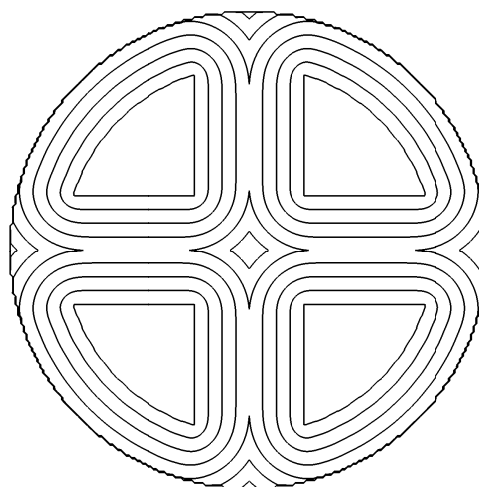
شکل ۲۵- گرین استوانه‌ای شعاعی سوز، با قید انتهایی مخروطی (mm)



شکل ۲۶- تغییرات مساحت سطح گذر در طول گرین استوانه‌ای ساده با قید انتهایی مخروطی

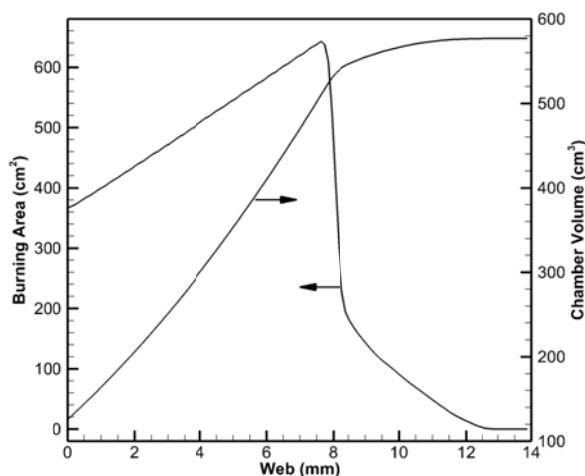


شکل ۲۷- الگوی پس‌روی یک گرین ستاره‌ای با قید انتهایی بیضوی



شکل ۲۳- الگوی پس‌روی گرین هیبریدی در یک مقطع دوبعدی

در شکل (۲۴) تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق برای این گرین مشاهده می‌شود. همان‌طور که در این نمودار نیز مشاهده می‌شود، وب مؤثر برای این گرین برابر ۸ میلی‌متر است.

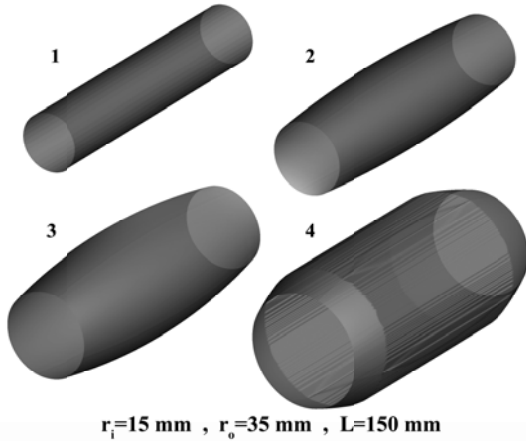


شکل ۲۴- تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق گرین هیبریدی

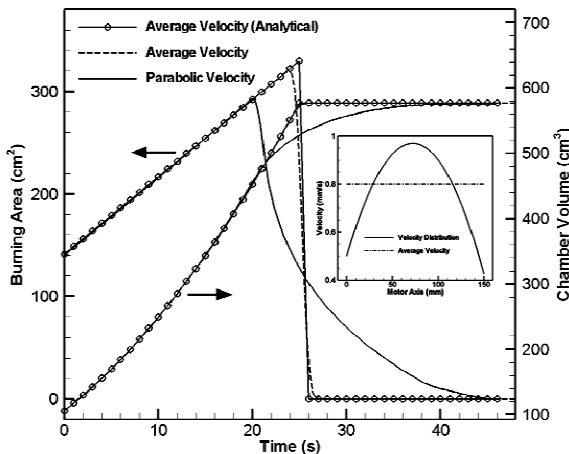
شرط مرزی اتمام سوزش

در گرین‌های بررسی شده، قید مرزی اتمام سوزش، شعاع داخلی بدنه استوانه‌ای موتور بوده است. در بعضی موارد این قید انتهایی برای اتمام سوزش پیش‌رانه، یک قسمت مخروطی شکل است. مدل کردن این قید مخروطی مشابه حالت استوانه‌ای است. با این تفاوت که شعاع وارد شده به موقعیت محوری نیز وابسته است. در شکل (۲۵) یک گرین ساده شعاعی سوز استوانه‌ای، با قید انتهایی مخروطی مشاهده می‌شود. شروط مرزی اتمام سوزش، متناظر با سطوح عایق گرین هم هستند. در شکل (۲۶)، تغییرات مساحت سطح گذر در طول این گرین آورده

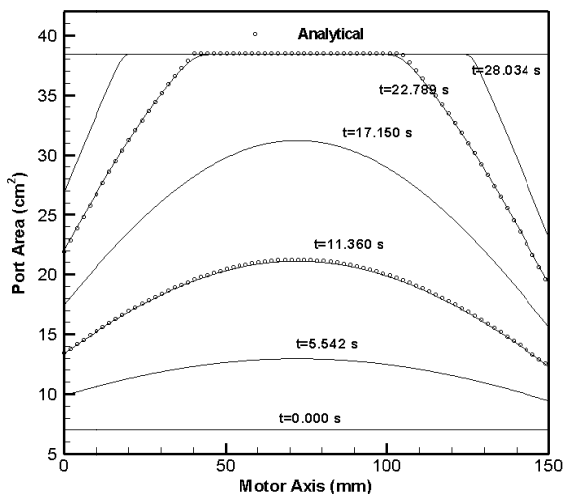
به دلیل متفاوت بودن سرعت پس‌روی در این دو نوع پروفیل سرعت، تغییرات مربوطه بر حسب زمان سوزش آورده شده‌اند.



شکل ۲۹- مراحل پس‌روی یک گرین استوانه‌ای، با پروفیل سرعت سهموی

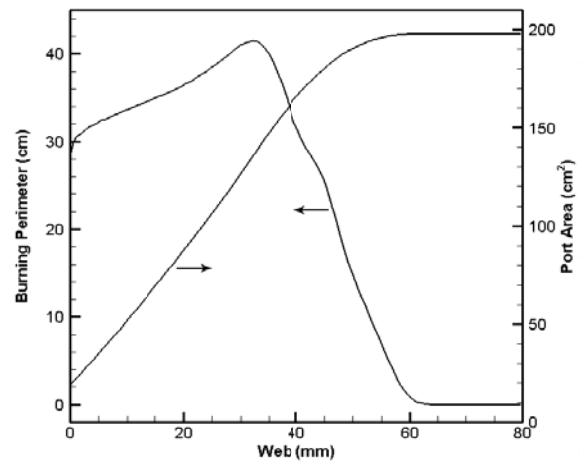


شکل ۳۰- تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق گرین استوانه‌ای، با پروفیل سرعت پس‌روی سهموی و یکنواخت



شکل ۳۱- تغییرات مساحت سطح گذر در طول گرین استوانه‌ای، با پروفیل سرعت پس‌روی سهموی

قیدهایی که ضابطه معینی ندارند، باید توسط تابع فاصله علامت‌دار تعیین شوند. در شکل (۲۷) الگوی پس‌روی یک گرین ستاره‌ای پنج‌پر دوبعدی مشاهده می‌شود. شرط مرزی تمام سوزش برای این گرین یک بیضی است که به کمک تابع فاصله علامت‌دار تعیین شده است. تغییرات محیط سوزش و مساحت سطح گذر برای این گرین دوبعدی در شکل (۲۸) آورده شده است. در انتهای سوزش، مساحت سطح گذر به مساحت بیضی انتهایی می‌رسد.



شکل ۲۸- تغییرات محیط سوزش و مساحت گذر برای قید انتهایی بیضی

نرخ سوزش غیریکنواخت

تحلیل نمونه‌هایی که تاکنون بررسی شده‌اند، با فرض سوزش با نرخ ثابت انجام شده است. اگر اثر سوزش فرسایشی و تغییرات فشار در طول موتور قابل توجه باشند، دیگر سرعت پس‌روی در طول گرین ثابت نخواهد بود. بلکه با توجه به سرعت و فشار جریان گاز درون موتور، به موقعیت مکانی نیز وابسته است (از تغییرات نرخ سوزش با زمان چشم‌پوشی می‌شود). نرخ سوزش غیریکنواخت را می‌توان به آسانی توسط این روش پیاده‌سازی کرد. به این ترتیب که می‌توان پس‌روی مرز در حالت سه‌بعدی را، به صورت دوبعدی در مقاطع مختلف طولی، با سرعت پس‌روی ثابت انجام داد. در شکل (۲۹) پس‌روی یک گرین استوانه‌ای ساده شعاعی سوز، با نرخ پس‌روی غیریکنواخت مشاهده می‌شود. پروفیل سرعت پس‌روی در راستای محوری گرین، به صورت سهموی انتخاب شده است (دارای سرعت متوسط 0.8 mm/s). قید مرزی انتهایی نیز یک استوانه است. در شکل‌های (۳۰)، (۳۱)، (۳۲) و (۳۳) تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق، سطح گذر، و محیط سوزش برای این گرین آورده شده است.

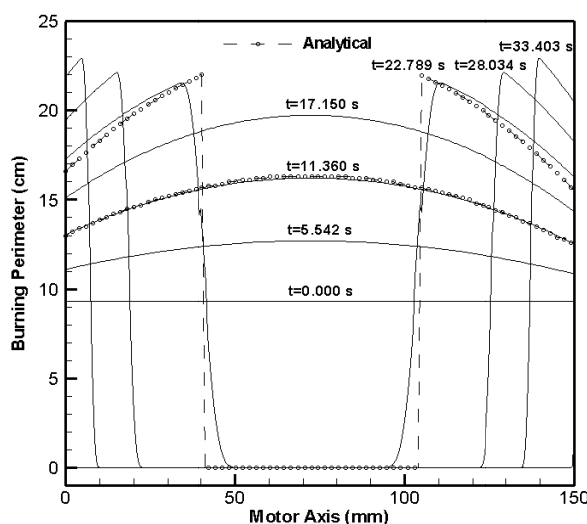
در شکل (۳۰) تغییرات مربوطه، برای سرعت پس‌روی یکنواخت (میانگین توزیع سرعت سهموی) نیز آورده شده و با مقادیر تحلیلی مقایسه شده است. مقادیر به‌دست آمده برای سطح سوزش و حجم محفظه احتراق، تا قبل از رسیدن سطح سوزش به بدنه یکسان هستند.

می‌توان گرین‌های شعاعی سوز، پیشانی سوز، ترکیبی، چندحفره‌ای، و چند تکه را تحلیل کرده، و مشخصه‌های بالستیکی گرین را استخراج کرد. همچنین با این روش می‌توان، پس‌روی با نرخ غیریکنواخت را نیز شبیه‌سازی کرد. نتایج به‌دست آمده توسط این برنامه می‌تواند با یک برنامه بالستیک داخلی کوپل شود، و در پیش‌بینی رفتار موشک‌های سوخت جامد مورد استفاده قرار گیرد. به کمک این برنامه می‌توان تحلیل پس‌روی را برای سوخت‌های هیبریدی نیز انجام داد.

مراجع

- [1] Humble, R., Henry, G. and Larson, W., *Space Propulsion Analysis and Design*, Revised Edition, McGraw-Hill, New York, 1995, Chapter 6.
- [2] Hartfield, R., Jenkins, R., Burkhalter, J. and Foster, W., "A Review of Analytical Methods for Solid Rocket Motor Grain Analysis," *AIAA-2003-4506*, 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Huntsville, Alabama, 2003.
- [3] Heydari, M. R. and Adami, A. H., "Grain Analysis and Fast Simulation of Internal Ballistics in Solid Fuel Motors", *The 8th Conference of Iranian Aerospace Society*, Maleke Ashtar University of Technology, 2009 (in Persian).
- [4] Karimi, H., Moradi, M. and Abtahi, H., "Geometrical Modeling of Grain Burnback in Complicated Solid Fuels Using Solidworks Software", *The 6th Conference of Iranian Aerospace Society*, K. N. Toosi University of Technology, 2007 (in Persian)
- [5] Sethian, J. A., *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [6] Osher, S. and Sethian J. A., "Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, Issue 1, 1988, pp. 12-49.
- [7] Osher, S. and Fedkiw, R., *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer Press, 2003.
- [8] Willcox, M. A., Brewster, M. Q., Tang, K. C. and Stewart, D. S., "Solid Propellant Grain Design and Burnback Simulation Using a Minimum Distance Function," *AIAA-2005-4350*, 41th AIAA/ASME /SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Tucson, Arizona, 2005.
- [9] Ericson, C., *Real-Time Collision Detection: the Morgan Kaufmann Series in Interactive 3D Technology*, Elsevier, Vol. 1, 2005.
- [10] Jones, M., "3D Distance from a Point to a Triangle," *Technical Report CSR-5-95*, Department of Computer Science, University of Wales Swansea, 1995.
- [11] Bærentzen, J. A. and Aanæs, H., "Generating Signed Distance Field From Triangle Meshes", *IMM-Technical Report-2002-21*, Information and Mathematical Modeling (IMM), Technical University of Denmark, 2002.

مقادیر تحلیلی برای مساحت سطح گذر و محیط سوزش در طول گرین، در دو زمان میانی برای این گرین در شکل‌های (۳۱) و (۳۲) مشاهده می‌شوند. اختلاف مشاهده‌شده بین مقادیر تحلیلی و شبیه‌سازی در شکل (۳۲) در لحظه برخورد سطح سوزش با مرز انتهایی، دو دلیل دارد. اختلاف موجود در قسمت میانی مربوط به استفاده از تابع دلتا دیراک برای محاسبه محیط است؛ که در قسمت «محاسبه تابع فاصله علامت‌دار در فضای سه‌بعدی» توضیح داده شده است. تفاوت موجود در کناره‌ها هم مربوط به محاسبات تحلیلی است. زیرا جهت نرمال پس‌روی برای محاسبات تحلیلی، در راستای محور y در نظر گرفته شده است و با افزایش شیب مرز متحرک در کناره‌ها، این تفاوت آشکارتر می‌شود.



شکل ۳۲- تغییرات محیط سوزش در طول گرین استوانه‌ای، با پروفیل سرعت پس‌روی سهموی

جمع‌بندی

در این مقاله، شبیه‌سازی پس‌روی گرین‌های سوخت جامد به روش لول‌سِت انجام و نشان داده شد که لول‌سِت روشی کارآمد و دقیق برای حل مسئله پس‌روی سطح در گرین‌های سوخت جامد است. تبیین سطوح پیچیده گرین با استفاده از تابع فاصله علامت-دار مقدور است. تولید هندسه اولیه در نرم‌افزار CAD باعث تسهیل طراحی و تحلیل گرین می‌شود. با استفاده از ویژگی‌های توابع دلتا دیراک و هویساید می‌توان مشخصه‌های بالستیکی گرین را استخراج کرد. با بهره‌گیری از خواص توابع ضمنی برای تعریف مرز، می‌توان گرین‌های چندحفره‌ای و چندتکه را نیز تعریف و می‌توان قیدگذاری بر پس‌روی مرز را اعمال، و سطوح عایق و شرایط مرزی اتمام سوزش را وارد مسئله کرد. توسط این روش

- [16] Nisar, Kh., Guozhu, L. and Zeeshan, Q., "A Hybrid Optimization Approach for SRM FINOCYL Grain Design," *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 21, Issue 6, 2008, pp. 481-487.
- [17] Cavallini, E., Favini, B., Di Giacinto, M. and Serraglia, F., "SRM Internal Ballistic Numerical Simulation by SPINBALL Model," *AIAA-2009-5512*, 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Denver, Colorado, 2009.
- [18] Barkhordar, A., "Numerical Simulation of Grain Burnback in Three Dimensions", M.Sc. Thesis, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, 2011 (in Persian).
- [12] Towers, J., "Finite Difference Methods for Approximating Heaviside Functions", *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 9, 2009.
- [13] Engquist, B., Tornberg, A. and Tsai, R., "Discretization of Dirac Delta functions in Level Set Methods", *Journal of Computational Physics*, Vol. 207, Issue 1, 2005.
- [14] Barkhordar, A. and Ghassemi, H., "Numerical Modeling of Solid Fuels Burnback Using Level set Method", *The 10th Conference of Iranian Aerospace Society*, Tarbiat Modares University, 2011 (in Persian).
- [15] Püskülcü, G. and Ulas, A. "3-D Grain Burnback Analysis of Solid Propellant Rocket Motors: Part 2 – Modeling and Simulations", *Journal of Aerospace Science and Technology*, Vol. 12, 2008, pp. 585-591.