

مدل سازی دینامیکی پرواز آرایش مند فضاپیما و بررسی میزان دقت مدل ها تحت اثر فاصله نسبی، خروج از مرکز و اغتشاش زمین غیر گروی

محمد نوابی^{۱*} و محمد براتی^۲

۱ و ۲- گروه مهندسی، دانشکده مهندسی فناوری های نوین فضایی، دانشگاه شهید بهشتی

*تهران، ولنجک

sciences.edu@gmail.com

حرکت نسبی ماهواره ها در پرواز آرایش مند توسط مدل های دینامیکی مختلفی قابل بررسی است. این مدل ها در دو فضای کارترین و المان های مداری توصیف شده و هر یک دارای فرضیات، قیود و ویژگی های مختلف هستند. از جمله، مدل هایی بر پایه معادلات خطی حرکت نسبی که کاربرد فراوانی در مدل سازی ملاقات های مداری و مانورهای اتصال فضاپیماها داشته است، اما خطای موجود در این معادلات محدودیت هایی برای استفاده آن در مأموریت های پرواز آرایش مند فضاپیما که حرکت نسبی بلندمدت دارد، ایجاد می کند. در این مقاله، علاوه بر استخراج معادلات غیرخطی حرکت نسبی، ۶ مدل دیگر از مدل های قابل استفاده برای مدل سازی آرایش های پروازی ارائه می شوند. در ادامه با شبیه سازی یک مأموریت پرواز آرایش مند ارتفاع پایین شامل دو ماهواره با تصویر دایروی مدار نسبی بر روی زمین، اعتبارسنجی مدل ها از سه منظر اغتشاش غیرگروی بودن زمین، میزان فاصله ماهواره ها در آرایش، و میزان بیضوی بودن مدار مرجع بررسی می شود. تحلیل نتایج شبیه سازی برای ۷ مدل مذکور، اهمیت دقت مدل سازی دینامیکی سیستم را بازگو می کند.

واژه های کلیدی: پرواز آرایش مند فضاپیما، حرکت نسبی، مدل خطی و غیرخطی، مدار نسبی، اغتشاشات

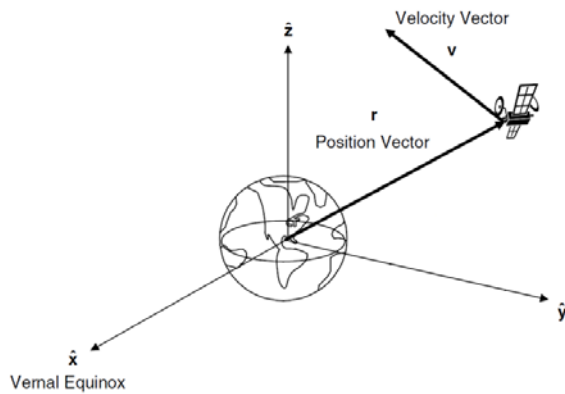
مقدمه

سمت پرواز آرایش مند ماهواره ها به عنوان زیرمجموعه ای از سیستم های فضایی توزیع شده^۳ سوق داده است [۱-۵]. در طراحی چنین آرایش های پروازی که نیازمند نگهداری یک موقعیت نسبی مطلوب (بنا بر نیازمندی های مأموریت) بین ماهواره هایی است که می توانند غیرهم-صفحه باشند، اولین قدم شناخت و مدل سازی رفتار دینامیکی ماهواره ها نسبت به یکدیگر است. دو نگرش عمده در این زمینه عبارتند از مدل سازی در فضای کارترین که به دلیل تشکیل شدن از معادلات دیفرانسیل می تواند کاربردهای چشمگیری نیز در مراحل بعدی مانند طراحی کنترلر داشته باشد، و دیگری استفاده از المان های مداری است

جایگزینی فضاپیمایی بزرگ توسط دسته ای از فضاپیماهای کوچک که در قالب یک گروه فعالیت می کنند از مسائل نوین مطرح شده در مأموریت های فضایی است. مزایایی همچون انعطاف پذیری در انجام مأموریت و بالا رفتن قابلیت اطمینان سیستم، و همچنین کاربردهای فراوان در سنجش از دور همچون تداخل سنجی راداری و اندازه گیری های ترکیبی و میدانی، اخیراً تحقیقات چشمگیری را به

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)

۲. کارشناس ارشد



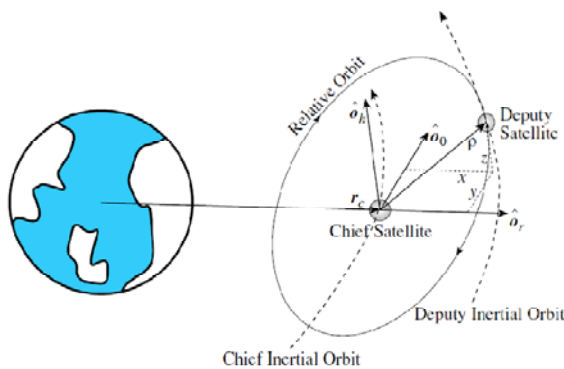
شکل ۱- دستگاه اینرسی زمین مرکز

با در نظر گرفتن یک ماهواره مرجع با بردار موقعیت اینرسی \vec{r}_c و ماهواره دوم با بردار موقعیت اینرسی \vec{r}_d ، بردار موقعیت نسبی دو ماهواره در دستگاه اینرسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{\rho}_I = \vec{r}_d - \vec{r}_c \quad (2)$$

بردار موقعیت نسبی این دو ماهواره در هر دستگاه دیگری با تبدیل مناسب به دست خواهد آمد. در پرواز آرایش‌مند ماهواره‌ها، اغلب مطلوب است که حرکت ماهواره‌ها در دستگاه چرخان هیل^۵ بررسی شود. ابعاد فیزیکی مدار نسبی در این دستگاه کاملاً قابل لمس بوده و همچنین اکثر اندازه‌گیری‌های صورت گرفته برای کنترل موقعیت و سرعت نسبی در آن صورت می‌گیرند.

مطابق شکل (۲) مبدأ دستگاه هیل واقع بر ماهواره مرجع، محور x آن در جهت شعاعی، محور z در جهت مومنوم زاویه‌ای (عمود بر صفحه مدار ماهواره مرجع)، و محور y آن کامل‌کننده قانون دست راست است.



شکل ۲- مدار نسبی و بردارهای یک دستگاه هیل [۶]

که $\vec{\rho} = (x, y, z)^T$ بردار موقعیت نسبی در دستگاه هیل و به بیان دیگر بردار موقعیت ماهواره دوم از دید ماهواره اول بوده و همچنین \hat{O}_r ، \hat{O}_θ و \hat{O}_k بردارهای یک دستگاه هستند.

که مزیت آن بیان صریح هندسه آرایش است. دقت پایین در مدل‌سازی، برای انجام اصلاحات مداری در جهت جبران خطاهای مدل‌سازی و در نتیجه افزایش هزینه و کاهش طول عمر مأموریت موجب نیاز به مصرف سوخت بیشتر می‌شود [۶]. لذا شناخت بهتر انواع مدل‌ها و مزایا و محدودیت‌های آنها موضوعی مهم است. در بخش دوم این مقاله، به استخراج معادلات حرکت نسبی و مدل‌سازی ۷ مدل مختلف پرداخته شده است. در ادامه این بخش، قیود و شرایط دینامیکی حاکم بر مسئله بیان شده است. در بخش سوم با انجام شبیه‌سازی، مقایسه مدل‌ها بر حسب تأثیرات فاصله نسبی، خروج از مرکز و اغتشاش غیرکروی بودن زمین صورت گرفته و نتایج ارائه شده است. در نهایت میزان اعتبار مدل‌ها که ابزاری برای انتخاب مدل بر حسب دقت مورد نیاز مأموریت است مشخص می‌شود.

مدل‌سازی دینامیکی پرواز آرایش‌مند

در این بخش دینامیک حرکت نسبی دو ماهواره بررسی می‌شود و انواع مدل‌ها در فضای کارترزین و المان مداری به همراه روش استخراج و فرضیات اعمال شده بر آنها ارائه می‌شود.

مدل اینرسی غیرخطی اغتشاشی

در مدل اینرسی غیرخطی اغتشاشی^۴، مدار هر یک از ماهواره‌ها با حل عددی معادله انتشار Cowell به دست می‌آید. با حل این معادله، دیفرانسیل غیرخطی مسیر حرکت و سرعت ماهواره‌ها در دستگاه اینرسی به دست می‌آید. از مزایای این رابطه که در معادله (۱) نشان داده شده است می‌توان به اعمال اثر اغتشاشی غیرکروی بودن زمین (اثر J_2) اشاره کرد. مطابق این رابطه را برای هر ماهواره داریم:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \begin{pmatrix} \left(1 - 5 \left(\frac{Z}{r} \right)^2 \right) \frac{X}{r} \\ \left(1 - 5 \left(\frac{Z}{r} \right)^2 \right) \frac{Y}{r} \\ \left(3 - 5 \left(\frac{Z}{r} \right)^2 \right) \frac{Z}{r} \end{pmatrix} \quad (1)$$

که در آن μ ثابت جاذبه زمین، $\vec{r} = [X, Y, Z]^T$ بردار موقعیت اینرسی ماهواره و R_e شعاع استوایی زمین است.

دستگاه مختصات اینرسی به کاررفته در این متن، دستگاه اینرسی زمین مرکز (ECI) است. مطابق شکل (۱) صفحه اصلی آن، صفحه استوا، محور x در جهت اعتدال بهاری، محور z عمود بر صفحه اصلی و به سمت شمال، و محور y کامل‌کننده قانون دست راست است.

آنچنان که قبلاً گفته شد $\theta = f + \omega$ برابر مجموع انومالی حقیقی و آرگومان حضیض ماهواره مرجع است. همچنین بیان بردار موقعیت ماهواره مرجع در دستگاه هیل به شکل زیر است:

$$\vec{r}_c = (r_c, 0, 0)^T \quad (10)$$

با جاگذاری روابط (۷)، (۹) و (۱۰) در معادله (۸) دسته معادلات غیرخطی حرکت نسبی به دست می آید که به فرم مؤلفه ای بیان شده اند:

$$\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x = -\frac{\mu(r_c + x)}{((r_c + x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\mu}{r_c^2} \quad (11)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y = -\frac{\mu y}{((r_c + x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (12)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{((r_c + x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (13)$$

به منظور تکمیل معادلات فوق لازم است رابطه ای برای محاسبه انومالی حقیقی که با مؤلفه های حرکت داخل صفحه (x, y) کوپل است ارائه شود. این رابطه از روش های مختلف قابل دستیابی بوده که یکی از آنها استفاده از قانون بقای مومنتوم زاویه ای در حرکت کپلری است:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}_c\dot{\theta}}{r_c} \quad (14)$$

رابطه فوق خود لزوم استفاده از رابطه دیگری برای محاسبه شعاع مداری ماهواره مرجع و نرخ آن را بیان می دارد که بسادگی از روابط مکانیک مداری به دست می آید:

$$\dot{r}_c = r_c\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r_c^2} \quad (15)$$

معادلات (۱۱) تا (۱۵) دسته معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم و بیان کننده حرکت نسبی ماهواره دوم نسبت به ماهواره مرجع در دستگاه هیل هستند.

مدل خطی بیضوی^۷

با اعمال فرض ساده کننده کوچک بودن فاصله نسبی دو ماهواره در مقایسه با شعاع مدار اینرسی ماهواره مرجع، می توان طرف راست معادلات غیرخطی (۱۱) تا (۱۳) را با بسط تیلور مرتبه اول حول مبدأ تقریب زد و مدلی خطی سازی شده به فرم زیر به دست آورد:

$$\ddot{x} - x(\dot{\theta}^2 + 2\frac{\mu}{r_c^3}) - y\ddot{\theta} - 2\dot{y}\dot{\theta} = 0 \quad (16)$$

تبدیل از دستگاه اینرسی به دستگاه چرخان هیل در رابطه (۳) نشان داده شده است.

$$T(\Omega, i, \theta) = \begin{bmatrix} c_\Omega c_\omega - s_\Omega s_\theta c_i & s_\Omega c_\theta + c_\Omega s_\theta c_i & s_\theta s_i \\ -c_\Omega s_\theta - s_\Omega c_\theta c_i & -s_\Omega s_\theta + c_\Omega c_\theta c_i & c_\theta s_i \\ s_\Omega s_i & -c_\Omega s_i & c_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در آن c و s به ترتیب نشان دهنده توابع کسینوس و سینوس هستند. همچنین، Ω زاویه گره صعودی، ω آرگومان حضیض، i زاویه میل و θ جمع آرگومان حضیض و انومالی حقیقی f است. بدین ترتیب بردار موقعیت نسبی ماهواره ها در دستگاه هیل به دست می آید.

در این مقاله، این مدل غیرخطی اغتشاشی به عنوان مدل مرجع در نظر گرفته می شود.

مدل نسبی غیرخطی کپلری

مدل نسبی غیرخطی کپلر^۶ حرکت نسبی ماهواره ها را مستقیماً در دستگاه نسبی هیل بیان می کند. فرض صورت گرفته در این مدل، حرکت کپلری بدون اغتشاش است.

مطابق شکل (۲) بردار موقعیت نسبی عبارت است از :

$$\vec{\rho} = \vec{r}_d - \vec{r}_c \quad (4)$$

از معادلات حرکت مداری کپلری در دستگاه اینرسی برای دو ماهواره داریم:

$$\vec{r}_c = -\frac{\mu}{r_c^3} \vec{r}_c \quad (5)$$

$$\vec{r}_d = -\frac{\mu}{r_d^3} \vec{r}_d \quad (6)$$

از روابط (۴) تا (۶) خواهیم داشت:

$$\vec{\rho} = -\frac{\mu}{\|r_c + \rho\|^3} (\vec{r}_c + \vec{\rho}) + \frac{\mu}{r_c^3} \vec{r}_c \quad (7)$$

از طرفی شتاب مطلق بردار موقعیت نسبی عبارت است از :

$$\vec{\rho} = \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \quad (8)$$

که در آن مشتقات نسبت به دستگاه نسبی بوده و $\vec{\omega}$ بردار سرعت زاویه ای دستگاه نسبی هیل نسبت به دستگاه اینرسی است:

$$\vec{\omega} = (0, 0, \dot{\theta})^T \quad (9)$$

$$\delta \bar{e} = \bar{e}_d - \bar{e}_c = (\delta a, \delta e, \delta i, \delta \Omega, \delta \omega, \delta M_0)^T \quad (25)$$

برای به دست آوردن حرکت نسبی می توان بر حسب المان های ماهواره مرجع یک نگاهت خطی بین فضای کارترین و اختلافات المان های مداری به دست آورد [۸]:

$$\bar{X} = [A(\bar{e}_c)] \delta \bar{e} \quad (26)$$

با استفاده از این نگاهت می توان حرکت نسبی را بر حسب المان های مداری ماهواره مرجع و اختلافات المان مداری بین دو ماهواره بیان کرد:

$$x = \delta r \quad (27)$$

$$y = r(\delta \theta + \cos i \delta \Omega) \quad (28)$$

$$z = r(\sin \theta \delta i - \cos \theta \sin i \delta \Omega) \quad (29)$$

ترم های $r, \delta r$ قابل بیان بر حسب دیگر المان های مداری هستند و در نهایت حرکت نسبی (x, y, z) تابعی از دو متغیر $(f, \delta f)$ خواهد بود (دیگر المان های مداری و اختلافات المان های مداری در حرکت کپلری ثابت هستند). اما برای ساده تر شدن مدل می توان اختلاف بین انومالی حقیقی دو ماهواره δf را بر حسب اختلاف انومالی متوسط آنها δM بیان کرد که پارامتری ثابت است. این رابطه با کمک معادله کپلر و گرفتن تغییرات^{۱۱} مرتبه اول به دست می آید:

$$\delta f = \frac{(1 + e \cos f)^2}{\eta^3} \delta M + \frac{\sin f}{\eta^2} (2 + e \cos f) \delta e \quad (30)$$

که در آن $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ است.

بدین ترتیب معادلات (۲۷) تا (۲۹) به معادلات (۳۱) تا (۳۳) تبدیل می گردد که تنها تابعی از متغیر انومالی حقیقی ماهواره مرجع است:

$$x(f) = \frac{r}{a} \delta a + \frac{ae \sin f}{\eta} \delta M - a \cos f \delta e \quad (31)$$

$$y(f) = \frac{r}{\eta^3} (1 + e \cos f)^2 \delta M + r \delta \omega + \frac{r \sin f}{\eta^2} (2 + e \cos f) \delta e + r \cos i \delta \Omega \quad (32)$$

$$z(f) = r(\sin \theta \delta i - \cos \theta \sin i \delta \Omega) \quad (33)$$

$$\ddot{y} + x \ddot{\theta} + 2 \dot{x} \dot{\theta} - y \left(\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r_c^3} \right) = 0 \quad (17)$$

$$\ddot{z} + \frac{\mu}{r_c^3} z = 0 \quad (18)$$

مدل خطی دایروی

علاوه بر خطی سازی، با فرض دایروی بودن مدار ماهواره مرجع، مدل خطی دایروی^۸ معروف به مدل Clohessy-Wiltshire قابل حصول است. بدین ترتیب شعاع مداری ماهواره مرجع و نرخ انومالی حقیقی آن به صورت $r_c = a_c, \dot{f} = 0, \dot{f} = n = \sqrt{\mu/a_c^3}$ بیان می شوند. مدل مذکور به فرم معادلات (۱۹) تا (۲۱) است [۷].

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = 0 \quad (19)$$

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = 0 \quad (20)$$

$$\ddot{z} + n^2z = 0 \quad (21)$$

که n نرخ مداری متوسط^۹ ماهواره مرجع است. از مزایای این مدل دارا بودن جواب تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل است که در رابطه (۲۲) بیان شده است.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(nt + \alpha) + B \\ y(t) &= -2A \sin(nt + \alpha) - \frac{3}{2}ntB + C \\ z(t) &= D \cos(nt + \beta) \end{aligned} \quad (22)$$

که $\alpha, \beta, A, B, C, D$ از روی شرایط اولیه به دست می آیند.

مدل خطی المان مداری^{۱۰}

در مدل های کارترین حرکت نسبی بر اساس اختلاف موقعیت و سرعت اولیه یا به عبارتی بردار X تعیین می شد:

$$\bar{X} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T \quad (23)$$

برای بیان حرکت بر حسب المان های مداری یک مجموعه المان مداری به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\bar{e} = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0)^T \quad (24)$$

که در آن a نیم قطر اصلی، e خروج از مرکز، i زاویه میل، Ω زاویه گره صعودی، ω آرگومان حضیض، و M_0 انومالی متوسط اولیه هستند. اختلاف بین المان های دو ماهواره را می توان به صورت زیر بیان کرد:

8. Linear Circular Model (LCM)

9. mean motion

10. Linear Orbit Element Model (LOEM)

11. variation

که در آن $\bar{p} = \bar{a}(1 - e^2)$ است.

قید بسته بودن مدار نسبی

غالباً نیازمندی های مأموریتی در آرایش های پروازی ایجاب می کند که ماهواره ها همواره در مجاورت یکدیگر باقی مانده و به عبارتی دارای یک مدار نسبی بسته باشند. از دیدگاه فیزیکی واضح است که در حالت بدون اغتشاش برای ارضای چنین شرطی، ماهواره ها باید دارای پریود مداری یکسان باشند یا به عبارتی اختلاف نیم قطر اصلی بین دو ماهواره صفر باشد:

$$\delta a = 0 \quad (42)$$

قید فوق قابل اعمال به مدل های المان مداری است. برای مدل های کارتیزین، از آنجاکه انرژی مداری نیز تابع همین پارامتر است، می توان شرط بسته بودن مدار نسبی را معادل با برابری انرژی مداری دو ماهواره دانست. برابری انرژی ویژه مداری دو ماهواره در رابطه (۴۳) بیان شده است:

$$\frac{1}{2} v_d^2 - \frac{\mu}{r_d} = -\frac{\mu}{2a_c} \quad (43)$$

که سرعت ماهواره دوم در دستگاه هیل به کمک رابطه (۴) به دست می آید:

$$\vec{v}_d = \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_c \quad (44)$$

جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطه (۴۴) و محاسبه مشتقات در دستگاه هیل و سپس جایگذاری نتیجه حاصله در رابطه (۴۳) منجر به معادله (۴۵) می شود.

$$\frac{1}{2} \{ (\dot{x} - \dot{r}_c + \dot{y} + \dot{r}_c)^2 + [\dot{y} + \dot{r}_c(x + r_c)]^2 + \dot{z}^2 \} - \frac{\mu}{\sqrt{(r_c + x)^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{\mu}{2a_c} \quad (45)$$

معادله (۴۵) قید کامل بسته بودن مدار نسبی در حرکت کپلری است که از آن برای مدل غیرخطی کارتیزین در لحظه اولیه استفاده می کنیم. اما برای مدل های خطی کارتیزین بیان های ساده شده قید بسته بودن مدار به صورت یک شرط اولیه موجود است [۹]:

$$\frac{\dot{y}_0}{x_0} = \frac{-n(2+e)}{\sqrt{(1+e)(1-e)^3}} \quad (46)$$

در مدل خطی دایروی CW رابطه (۴۶) به شکل ساده تری بدون خروج از مرکز ظاهر می شود که در رابطه (۴۷) ارائه شده است:

$$\dot{y}_0 + 2nx_0 = 0 \quad (47)$$

مدل خطی المان مداری با خروج از مرکز کوچک^{۱۲}

با فرض خروج از مرکز کوچک برای مدار ماهواره مرجع در مدل ارائه شده در قسمت قبل، می توان از ترم های مرتبه دوم به بالای e صرف نظر کرده و شعاع ماهواره مرجع را به صورت زیر تقریب زد:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} = a(1-e \cos f) \quad (34)$$

بدین ترتیب مدل خطی المان مداری برای خروج از مرکز های کوچک به فرم زیر نوشته می شود:

$$x(f) \approx (1-e \cos f) \delta a + \frac{ae \sin f}{\eta} \delta M - a \cos f \delta e \quad (35)$$

$$y(f) \approx \frac{a}{\eta} (1+e \cos f) \delta M + a(1-e \cos f) \delta \omega \quad (36)$$

$$+ a \sin f (2-e \cos f) \delta e + a(1-e \cos f) \cos i \delta \Omega$$

$$z(f) \approx a(1-e \cos f) (\sin \theta \delta i - \cos \theta \sin i \delta \Omega) \quad (37)$$

مدل خطی دایروی المان مداری^{۱۳}

با فرض مدار مرجع نزدیک دایروی و صرف نظر از خروج از مرکز آن، معادلات (۳۵) تا (۳۷) به فرم زیر ساده می شوند:

$$x(f) \approx \delta a - a \cos f \delta e \quad (38)$$

$$y(f) \approx a(\delta \omega + \delta M + \cos i \delta \Omega) + 2a \sin f \delta e \quad (39)$$

$$z(f) \approx a(\sin \theta \delta i - \cos \theta \sin i \delta \Omega) \quad (40)$$

این مدل به نوعی معادل مدل کارتیزین LCM است.

اعمال اغتشاش J_2 به مدل های المان مداری

سه مدل المان مداری ذکر شده دارای این مزیت هستند که اغتشاش غیرکروی بودن زمین (J_2) به راحتی قابل اعمال بر آنهاست. این اغتشاش باعث ایجاد انحراف در سه المان مداری متوسط Ω, ω, M می شود. نرخ این انحرافات از رابطه (۴۱) به دست آمده و در نتیجه می توان این سه المان متوسط تحت اغتشاش را برای هر ماهواره در هر لحظه محاسبه و در مدل ها جایگزین کرد.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}} &= -1.5 J_2 \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 \bar{n} \cos \bar{i} \\ \dot{\bar{\omega}} &= 0.75 J_2 \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 \bar{n} (5 \cos^2 \bar{i} - 1) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\dot{\bar{M}} = \bar{n} \left[1 + 0.75 J_2 \sqrt{1-e^2} \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 (3 \cos^2 \bar{i} - 1) \right]$$

12. Linear with Small e Orbit Element Model (LSOEM)
13. Linear Circular Orbit Element Model (LCOEM)

شبیه‌سازی و نتایج

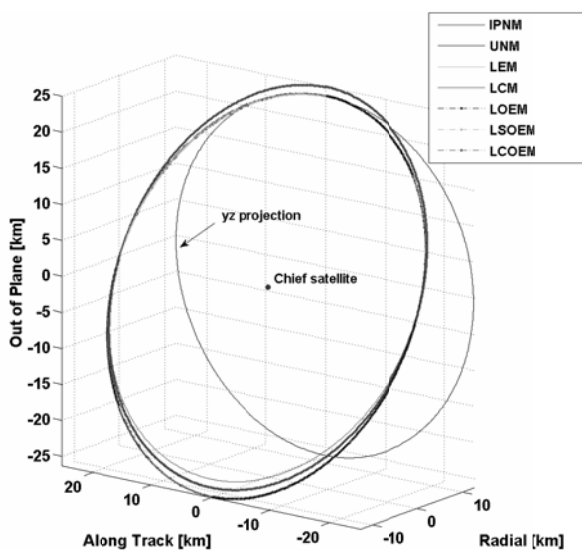
شرایط اولیه

المان‌های مداری ماهواره مرجع در جدول (۱) داده شده است. مداری ارتفاع پایین خورشیدآهنگ با بازه خروج از مرکزهای $e = (0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2)$ برای شبیه‌سازی در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- المان‌های مداری ماهواره مرجع

واحد	مقدار	المان مداری
Km	۷۰۳۳	a
-	۰.۰۰۱ - ۰.۲	e
Deg	۹۸	i
Deg	۱۰	Ω
Deg	۳۰	ω
Deg	۰	M_0

شرایط اولیه ماهواره دوم که تعیین‌کننده هندسه آرایش است با توجه به شعاع اولیه $\rho^{PCO}(0)$ و زاویه فاز اولیه $\alpha^{PCO}(0)$ برای هر سناریوی شبیه‌سازی به دست می‌آید. $\alpha^{PCO}(0) = 60 \text{ deg}$ انتخاب شده و شعاع اولیه متناسب با سناریو در نظر گرفته می‌شود. به عنوان نمونه برای $\rho(0) = 25 \text{ Km}$ و $e_c = 0.05$ ، شکل (۳) حرکت ماهواره دوم را نسبت به ماهواره مرجع برای γ مدل معرفی شده در طول یک پریود نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود این حرکت تشکیل یک مدار نسبی بسته در مجاورت ماهواره مرجع داده است و تصویر yz آن دایروی است.



شکل ۳- حرکت ماهواره دوم نسبت به ماهواره مرجع

اما قبود بیان شده با در نظر گرفتن اغتشاش J_2 تغییر خواهند یافت. برای مدل‌های المان مداری، برابری نیم‌قطر اصلی، رابطه (۴۲)، به معادله (۴۸) تبدیل خواهد شد [۱۰]:

$$\delta a = 0.5 J_2 a_c \left(\frac{R_e}{a_c} \right)^2 \left(\frac{3\eta_c + 4}{\eta_c^5} \right) \times \left[(1 - 3 \cos^2 i_c) \delta \eta - (\eta_c \sin 2i_c) \delta i \right] \quad (48)$$

برابری انرژی در حضور اغتشاش J_2 در فضای کارترین اینرسی را می‌توان به صورت رابطه (۴۹) بیان کرد [۱۰].

$$\frac{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}{2} - \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \frac{J_2}{2} \frac{R_e^2}{r^2} \left[\frac{3Z^2}{r^2} - 1 \right] \right\} = const. \quad (49)$$

مدار نسبی با تصویر دایروی بر روی زمین

مأموریت در نظر گرفته شده شامل دو ماهواره در مدار ارتفاع پایین زمین است. نیازمندی‌های مأموریت ایجاب می‌کند که تصویر مدار نسبی ماهواره‌ها بر روی زمین، یعنی تصویر yz در دستگاه هیل به شکل یک دایره با شعاع اولیه $\rho^{PCO}(0)$ و اختلاف فاز اولیه $\alpha^{PCO}(0)$ بین دو ماهواره باشد. چنین مداری، مدار دایروی^{۱۴} (PCO) نامیده می‌شود. برای اعمال این دو پارامتر به مدل‌های المان مداری از رابطه (۵۰) استفاده می‌شود [۱۱]:

$$\begin{aligned} \delta \lambda(0) + \delta \Omega(0) \cos(i_c) &= \frac{\rho(0)e_c}{2a_c} \cos(\omega_c(0) + \alpha(0)) \\ e_d \sin(\delta M(0)) &= \frac{\rho(0)}{2a_c} \cos(\omega_c(0) + \alpha(0)) \\ e_d \cos(\delta M(0)) &= e_c - \frac{\rho(0)}{2a_c} \sin(\omega_c(0) + \alpha(0)) \\ \delta \Omega(0) &= -\frac{\rho(0)}{a_c \sin i_c} \sin \alpha(0) \\ \delta i &= \frac{\rho(0)}{a_c} \cos(\alpha(0)) \end{aligned} \quad (50)$$

که در آن $\lambda = M + \omega$ است. بدین ترتیب با در اختیار داشتن المان‌های مداری ماهواره مرجع، ۵ المان مداری ماهواره دوم برای داشتن مدار PCO به دست می‌آید. المان ششم (نیم‌قطر اصلی) از قید بسته بودن مدار نسبی حاصل می‌شود. برای مدل‌های کارترین این المان‌ها به ۶ مؤلفه موقعیت و سرعت تبدیل شده و قید بسته بودن مدار نسبی به‌طور جداگانه به آنها اعمال می‌شود.

شاخص خطا

به منظور به دست آوردن خطای هر مدل در مقایسه با مدل مرجع، مطابق رابطه (۵۱) شاخص خطایی بر پایه بردار موقعیت نسبی در دستگاه هیل معرفی می شود.

$$\epsilon_k = \left(\left| \bar{\rho}_M - \bar{\rho}_{Ref} \right| \right)_k \quad (51)$$

$$= \left(\sqrt{(x_M - x_{Ref})^2 + (y_M - y_{Ref})^2 + (z_M - z_{Ref})^2} \right)_k$$

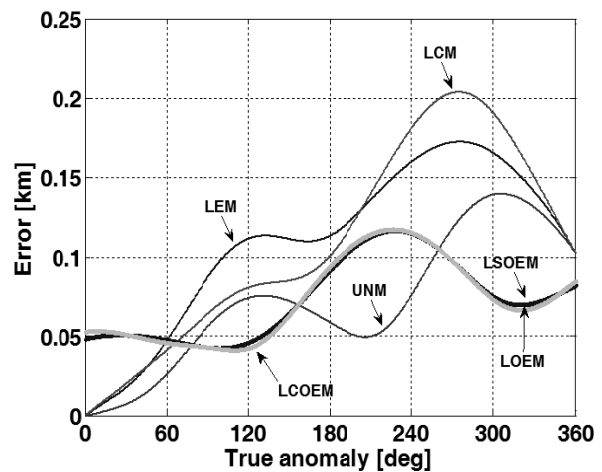
که k شماره گام زمانی شبیه سازی و اندیس های $(\cdot)_M$ و $(\cdot)_{Ref}$ به ترتیب مربوط به مدل مرجع و سایر مدل هاست.

برای به دست آوردن خطای نسبی بی بعد از رابطه (۵۲) استفاده می شود.

$$\epsilon_k = \left(\frac{\bar{\rho}_M - \bar{\rho}_{Ref}}{\bar{\rho}_{Ref}} \right)_k \times 100 \quad (52)$$

اثر فاصله نسبی $\rho(0)$

همان طور که بیان شد، خطی سازی مدل ها با فرض کوچک بودن شعاع مدار نسبی دو ماهواره در مقایسه با شعاع مدار اینرسی ماهواره مرجع صورت پذیرفته است. برای درک بهتر میزان اعتبار مدل های خطی، شبیه سازی به ازای ازدیاد ابعاد آرایش (افزایش فاصله نسبی ماهواره ها) صورت گرفته است. برای حذف اثر خروج از مرکز و بررسی خالص تر اثر فاصله نسبی، در اینجا خروج از مرکز مدار ماهواره مرجع مقدار نزدیک دایروی $0/001$ انتخاب شده است. شکل (۴) خطای مدل های خطی را بر حسب متر برای $\rho(0) = 25 \text{ Km}$ در طول یک پرپود نشان می دهد.



شکل ۴- خطای مدل ها در طول یک پرپود ماهواره مرجع

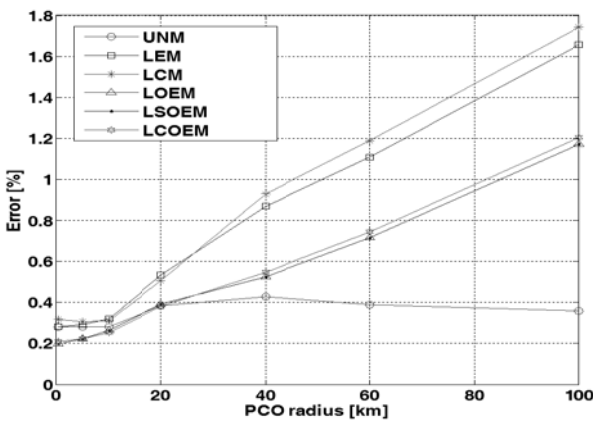
ملاحظه می شود که برای شعاع تصویر دایروی ۲۵ کیلومتر، در بین مدل های کارترین دو مدل خطی، دقت پایین تری نسبت به مدل غیرخطی نشان داده اند. با انتخاب خروج از مرکز نزدیک دایروی، مدل های المان مداری خطای مشابهی داشته اند. این ۳ مدل خطی به دلیل در نظر گرفتن اغتشاش J_2 حتی در مواقعی دقت بالاتری نسبت به مدل غیرخطی کارترین که فاقد این اغتشاش است نشان داده اند که اهمیت لحاظ کردن این پارامتر را بیان می دارد.

جدول (۲) و شکل (۵) روند رشد خطای مدل ها را به ازای افزایش فاصله نسبی نشان می دهند.

جدول ۲- نتایج مقایسه مدل ها با افزایش فاصله نسبی $\rho(0)$

$\rho(0)$ (کیلومتر)	۰.۵	۱۰	۲۰	۶۰	۱۰۰
UNM	۰.۲۸۱	۰.۲۸۱	۰.۳۸۸	۰.۴۲۷	۰.۳۵۸
LEM	۰.۳۱۸	۰.۳۱۸	۱.۱۰۹	۰.۸۶۹	۱.۶۵۹
LCM	۰.۳۱۸	۰.۳۱۰	۱.۱۸۹	۰.۹۲۸	۱.۷۴۴
LOEM	۰.۱۹۸	۰.۲۶۵	۰.۷۱۵	۰.۵۲۶	۱.۱۷۳
LSOEM	۰.۱۹۸	۰.۲۶۵	۰.۷۱۵	۰.۵۲۶	۱.۱۷۳
LCOEM	۰.۲۰۹	۰.۲۵۳	۰.۷۴۴	۰.۵۴۶	۱.۲۰۵

حد اکثر خطای مدل (%)



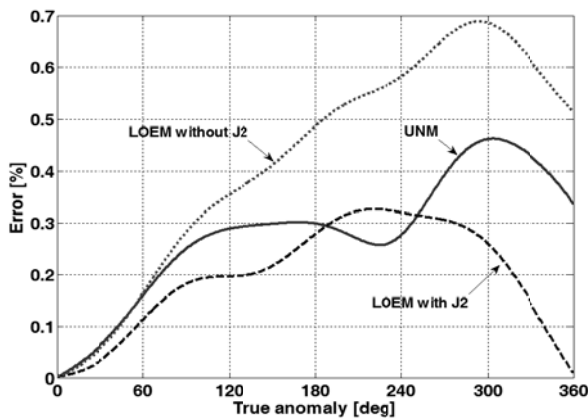
شکل ۵- روند رشد خطا در اثر افزایش فاصله نسبی

همان طور که ملاحظه می شود، مدل غیرخطی به دلیل نداشتن فرضیات خطی سازی در مقابل افزایش فاصله نسبی با ثبات بوده است. نکته حائز اهمیت آن است که تا شعاع ۲۰ کیلومتر، مدل های خطی المان مداری با در نظر گرفتن اغتشاش J_2 دقت بهتری نسبت به مدل غیرخطی که فاقد این پارامتر است داشته اند. اما از آن پس اثر فاصله نسبی بر اغتشاش غالب بوده و خطای این مدل ها در مقایسه با مدل غیرخطی افزایش می یابد.

مداری نسبت به مدل غیرخطی کارترین است که بیانگر تأثیر بیشتر اغتشاش J_2 نسبت به خطی سازی در چنین سناریویی بوده است.

اثر اغتشاش J_2

در بررسی دو پارامتر فاصله نسبی و خروج از مرکز، چگونگی اثرگذاری اغتشاش ناشی از غیرکروی بودن زمین نیز مشاهده شد. به منظور بررسی دقیق تر این اثر، شبیه سازی با $\rho(0) = 0.5 \text{ Km}$ و $J_2 = 0.001$ انجام شده است که علاوه بر نشان دادن اثر اغتشاش بر روی مدل خطی المان مداری، مقایسه ای از این مدل با مدل غیرخطی ارائه می دهد. نتایج در شکل (۷) نمایش داده شده است.



شکل ۷- اثر اغتشاش غیر کروی بودن زمین

ملاحظه می شود که با حذف اغتشاش J_2 از مدل LOEM خطای متوسط این مدل به حدود دو برابر افزایش یافته است. با در نظر گرفتن این اثر اغتشاشی در مدل سازی، مدل خطی المان مداری LOEM دقت بالاتری نسبت به مدل غیرخطی کارترین UNM نشان داده است.

جمع بندی

خطای مدل های مختلف حرکت نسبی در آرایش های پروازی بر اثر تغییرات فاصله نسبی، تغییرات خروج از مرکز مدار ماهواره مرجع، و بر اثر اغتشاش غیرکروی بودن زمین به دست آمد. تأثیر هر یک از این سه پارامتر به صورت جداگانه و ترکیبی مشاهده شد.

نتایج بیان کننده آن بود که مدل های دایروی همچون مدل شناخته شده CW با وجود مزایایی چون عدم نیاز به حل معادلات دیفرانسیل (داشتن جواب تحلیلی)، خطای زیادی در مقایسه با سایر مدل ها داشته اند و با افزایش جزئی در خروج از مرکز مدار ماهواره مرجع خطای این مدل ها به سرعت بالا رفته و غیرقابل استفاده می شوند.

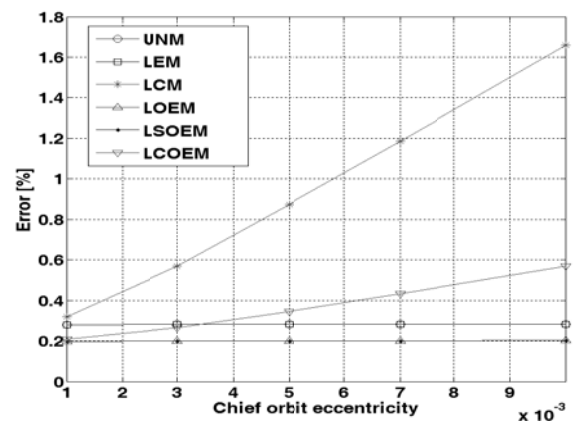
شایان ذکر است که عموماً مأموریت های پرواز آرایش مند نیازمند دقت بسیار بالایی در موقعیت نسبی ماهواره ها هستند. به طور مثال حتی خطای زیر ۱ درصدی در آرایش هایی با فاصله نسبی کوچک انحرافی چند ده متری را ناشی می شود که اغلب جوابگوی دقت مورد نیاز مأموریت نیست.

اثر خروج از مرکز e

در این بخش، با افزایش خروج از مرکز مدار ماهواره مرجع، تأثیر این پارامتر را بر دقت مدل ها بررسی می کنیم. شبیه سازی برای بازه ای از خروج از مرکز های نزدیک دایروی تا کاملاً بیضوی انجام شده و نتایج در جدول (۳) و شکل (۶) نمایش داده شده است. برای بررسی خالص تر اثر این پارامتر، فاصله نسبی آرایش کوچک و برابر $\rho(0) = 0.5 \text{ Km}$ در نظر گرفته شده است تا اثرات خطی سازی از نتایج حذف شود.

جدول ۳- نتایج مقایسه مدل ها با افزایش خروج از مرکز e

خروج از مرکز e	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱	۰.۰۰۵	۰.۰۱	۰.۰۲	خروج از مرکز e
UNM	۰.۲۸۱	۰.۲۸۲	۰.۲۹۱	۰.۳۰۹	۰.۳۳۹	مداکثر خطای مدل (%)
LEM	۰.۲۸۱	۰.۲۸۲	۰.۲۹۱	۰.۳۰۹	۰.۳۸۰	
LCM	۰.۳۱۸	۱.۶۶۰	۷.۹۹۵	۱۵.۵۹۲	۲۹.۹۴۱	
LOEM	۰.۱۹۸	۰.۲۰۳	۰.۲۳۰	۰.۲۶۵	۰.۳۶۲	
LSOEM	۰.۱۹۸	۰.۲۰۳	۰.۲۴۲	۰.۲۷۳	۱.۰۵۲	
LCOEM	۰.۲۰۹	۰.۵۷۱	۲.۵۷۵	۵.۱۴۳	۱۰.۲۲۲	



شکل ۶- روند رشد خطا در اثر افزایش خروج از مرکز

رشد خطای دو مدل کارترین دایروی (LCM) و المان مداری دایروی (LCOEM) با افزایش خروج از مرکز به روشنی قابل ملاحظه است. مدل های دیگر در برابر تغییرات این پارامتر، مقاوم هستند. اما در این مدل ها نیز خطای اولیه ای در شکل (۶) قابل مشاهده است. عمده این خطا در مدل های کارترین مربوط به در نظر گرفتن اغتشاش J_2 و در مدل های المان مداری مربوط به خطی سازی است. نکته قابل برداشت دیگر، دقت بالاتر مدل های خطی المان

- [11] Vadali, S. R., Vaddi, S. S., and Alfriend, K. T., "A New Concept for Controlling Formation Flying Satellite Constellations," *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 108, No. 2, 2001, pp. 1631-1648.
- [12] Toledano, J. G. T. and Succar, L. E. S., "Bayesian Networks for Reliability Analysis of Complex Systems," *Computer Science*, Vol. 1484, No. 465, 1998, pp. 1-17.
- [13] Barlow, R. E., "Using Influence Diagrams," *Accelerated Life Testing and Experts' Opinions in Reliability*, 1988, pp.145-150.
- [14] Xie, M. and Wohlin, C., "An Additive Reliability Model for the Analysis of Modular Software Failure Data," *Proceedings of the Sixth International Symposium on Software Reliability Engineering*, 1996, pp. 188-193.
- [15] Krishnemurthy, S. and Mathur, A. P., "On the Estimation of Reliability of a Software System Using Reliabilities of Its Components," *Proceedings of the Ninth International Symposium on Software Reliability Engineering*, 1997, pp.146.
- [16] Ghokale, S., Lyu, M. and Trivedi, K., "Reliability Simulation of Component Based Software Systems," *Proceedings of the International Symposium on Software Reliability Engineering*, 1998.
- [17] Gran, B. A. and et.al, "Estimating Dependability of Programmable Systems Using BBNs," *Proceedings of the Safecom*, 2000, pp. 309-320.
- [18] Jensen, F. V., *Bayesian Networks and Decision Graphs*, Springer, New York, 2001.
- [19] Amasaki, S. and et. al, "A Bayesian Belief Network for Assessing Likelihood of Fault Content," *Proceedings of the 14th International Symposium on Software Reliability Engineering*, 2003, pp. 215-226.
- [20] Boudali, H. and Dugan J. B., "A Continuous-Time Bayesian Network Reliability Modeling and Analysis Framework," *IEEE Trans Reliability*, 2006, Vol. 55, No.1, pp. 86-97.
- [21] Doguc, O. and Marquez, J. E. R., "A Generic Method for Estimating System Reliability Using Bayesian Network," *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 94, No.2, 2009, pp. 542-550.
- [22] Abou Nassar, L. and et. al, "Spacecraft Structures and Launch Vehicles," *A Presentation in Department of Aerospace and Ocean Engineering*, Virginia Tech University, 2004.
- [23] Stengel, R., "Launch Vehicle Design: Configurations and Structures, Space System Design", *One Course in Department of Mechanical and Aerospace*, Princeton University, 2008.
- [24] Vesely, W. and Goldbrg, B., "Fault Tree Handbook," *United State Nuclear Regulatory Commission*, 1981.
- [25] MIL-HDBK-217F Notice 2, "Reliability Prediction of Electronic Equipment," 1995.
- [26] MIL-HDBK-H 108, "Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing (Based on Exponential Distribution)," 2002.
- [27] MIL-HDBK-338, "Electronic Reliability Design Handbook," 1995.

در مقایسه مدل‌های کارتیزین با مدل‌های المان مداری معرفی شده می‌توان بیان کرد که قابلیت دسته دوم برای در نظر گرفتن اغتشاش J_2 کمک زیادی به بالابردن دقت این مدل‌ها کرده و در مواردی ضعف خطی بودن آنها را پوشانیده است.

باید توجه شود که در بسیاری موارد، دقتی در حد دهم درصد نیز منجر به خطای چند ده متری شده و جوابگوی نیازمندی‌های مأموریت نیست. با داشتن درک مناسبی از میزان اعتبار مدل‌ها و تأثیر زیاد عواملی چون فاصله نسبی، خروج از مرکز و اغتشاش J_2 بر آنها، و با توجه به نیازمندی‌های مأموریت می‌توان انتخاب مدل دینامیکی سیستم را با مصالحه‌ای بین هزینه‌های محاسباتی و هزینه‌های کنترلی مورد نیاز برای اصلاح خطاهای مدل‌سازی، به انجام رسانید.

مراجع

- [1] Krieger, G., Moreira, A., Fiedler, H., Hajnsek, I., Werner, M., Younis, M. and Zink, M., "TanDEM-X: a Satellite Formation for High-Resolution SAR Interferometry," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 45, No. 11, 2007, pp. 3317 – 3341.
- [2] Fowler, W., and Bettadpur, S., and Tapley, B., "Mission Planning for The Twin GRACE Satellites," *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Paper AAS 00-164, Clearwater, Florida, 2000.
- [3] Dunn, C., and et. al., "The Instrument on NASA's GRACE Mission: Augmentation of GPS to Achieve Unprecedented Gravity Field Measurements," *Proceedings of ION GPS*, Portland, Oregon, 2002.
- [4] Beugnon, C., Calvel, B., Boulade, S. and Ankersen, F., "Design and Modeling of the Formation-Flying GNC System for the DARWIN Interferometer," *Proc. SPIE* 5497, 2004.
- [5] Shahid, K. and Kumar, K. D., "Formation Control at the Sun-Earth L2 Libration Point Using Solar Radiation Pressure," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 47, No. 4, 2010, pp. 614-626.
- [6] Schaub, H. and Junkins, J. L., *Analytical Mechanics of Space Systems*, AIAA Education Series, 2003.
- [7] Clohessy, W. H. and Wiltshire, R. S., "Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous," *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 27, No. 9, 1960, pp. 653-658.
- [8] Schaub, H. and Alfriend, K. T., "Hybrid Cartesian and Orbit Element Feedback Law for Formation Flying Spacecraft," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 2, 2002, pp. 387-393.
- [9] Inalhan, G. and How, J. P., "Relative Dynamics & Control of Spacecraft Formations in Eccentric Orbits," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Vol. 25, No. 1, 2002, pp. 48-59.
- [10] Alfriend, K. T., Rao Vadali, S., Gurfil, P., How, J. and Breger, L., *Spacecraft Formation Flying: Dynamics, Control and Navigation*, Elsevier, 2010.