JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

جلد ۵ / شمارهٔ ۴ / زمستان ۱۳۹۱
ص. ص ۶۰- ۴۷

کنترل عاری از برخورد چندین ماهواره با پسخوراند آرایش از طریق ساختار مجازی

محمد صابری‌توکلی [۱*] و فریبرز ثقفی [۲]

۱ و ۲- دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

*تهران، خیابان آزادی

m_saberi@alum.sharif.ir

در این مقاله سعی بر آن شده تا کنترل آرایش پروازی را برای چندین ماهواره تحت روشی به نام ساختار مجازی (Virtual Structure) صورت دهیم. در ابتدا الگوریتم مورد نظر را در فضای مرجع بدون هیچ گرادیان جاذبی پیاده کرده‌ایم و در ادامه همین الگوریتم را برای دسته‌ای از ماهواره‌ها که درون مداری دایروی حول زمین در گردش هستند توسعه داده‌ایم. سپس برای عدم برخورد ماهواره‌ها با یکدیگر کنترل‌کننده دیگری به سیستم اضافه کرده‌ایم. و در نهایت این سیستم کنترلی را بر روی میکروماهواره‌هایی تحت عنوان اسفیرز (SPHERES) با درنظر گرفتن محدودیت عملگرهای کنترلی آنها پیاده‌سازی کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: آرایش پروازی، ساختار مجازی، بازشکل‌گیری

علائم و اختصارات

بهره متناسب با سرعت نسبی در عدم برخورد	$C_{C.A}$
حاشیه اطمینان از عدم برخورد	D_{margin}
مقیاس عملکرد	E
چارچوب زمین	E
نیروی کنترلیِ فضاپیمای iاُم	f_i
چارچوب ساختار مجازی	F
نیروی کنترلی جهت اجتناب از برخورد	$f_{C.A}$
نیروی‌کنترلی دوران داده‌شده جهت عدم برخورد	$f_{R.C.A}$
نیروی کنترلی جهت شکل‌گیری آرایش	$f_{T.C}$
ثابت جهانی گرانش	G
چارچوب اینرسی	I
ممان اینرسی فضاپیمای iاُم	J_i
ممان اینرسی مجازی ساختار مجازی	J_F
ماتریس بهرهٔ مکان برای ساختار مجازی	K_r
ماتریس بهره انبساط- انقباض برای ساختار مجازی	K_ξ
ماتریس بهرهٔ مکان برای ساختار مجازی فضاپیمای iاُم	K_{ri}
ماتریس بهرهٔ سرعت برای ساختار مجازی فضاپیمای iاُم	K_{vi}
ماتریس بهرهٔ سرعت زاویه‌ای برای ساختار مجازی فضاپیمای iاُم	$K_{\omega i}$
بهرهٔ کنترلی مکان ساختار مجازی	k_p
بهرهٔ کنترلی وضعیت ساختار مجازی	k_a
بهرهٔ کنترلی انبساط انقباض ساختار مجازی	k_e
بهرهٔ کنترلی خطای وضعیت ساختار مجازی	k_q
بهرهٔ کنترلی خطای وضعیت فضاپیمای iاُم	k_{qi}
بهره متناسب با عکس فاصله در عدم برخورد	$K_{C.A}$
طول جغرافیایی	l

۱. کارشناسی ارشد (نویسنده مخاطب)
۲. دانشیار

دریافت مقاله: ۹۰/۰۹/۱۲ ، تأیید مقاله: ۹۱/۰۸/۳۰

مجموع طول جغرافیایی و زاویه بین محور ۱ دستگاه اینرسی با محور ۲ دستگاه زمین	l_i
جرم فضاپیمای iاُم	m_i
جرم مجازی ساختار مجازی	m_F
جرم زمین	M_e
چارچوب مرجع / مداری	O
کواترنیون فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	q^{B_iO}
قسمت برداری کواترنیون فضاپیمای iاُم	$\vec{q}^{B_iO}$
قسمت اسکالر کواترنیون فضاپیمای iاُم	$\bar{q}^{B_iO}$
کواترنیون مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	$q^{B_iO^d}$
کواترنیون مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب ساختار مجازی	$q^{B_iF^d}$
کواترنیون ساختار مجازی نسبت به چارچوب مرجع / مداری	q^{FO}
ماتریس پادمتقارن قسمت برداری کواترنیون ساختار مجازی	$\vec{Q}^{FO}$
خطای کواترنیون ساختار مجازی	q_{eFO}
مزدوج کواترنیون ساختار مجازی	q^*_{FO}
خطای کواترنیون فضاپیمای iاُم	q_{eB_iO}
مزدوج کواترنیون فضاپیمای iاُم	$q^*_{B_iO}$
مؤلفه‌های کواترنیون مداری نسبت به چارچوب اینرسی	$q_{i_{OI}}$
شعاع مدار	r_{orbit}
ماتریس دوران در دستگاه بدنی	R
بردار مکان فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	s_{B_iO}
بردار مکان مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	$s^d_{B_iO}$
بردار مکان مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب ساختار مجازی	$s^d_{B_iF}$
بردار مکان ساختار مجازی نسبت به چارچوب مرجع / مداری	s_{FO}
بردار مکان فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب اینرسی	s_{B_iI}
بردار مکان چارچوب مداری نسبت به اینرسی	s_{OI}
بردار مکان چارچوب مداری نسبت به چارچوب زمین	s_{OE}
اصله نسبی دو ماهواره	s_{rel}
بردار مکان فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب ساختار مجازی	s_{B_iF}
بردار نیمساز زاویه رأس مخروط دید حسگر	s_{SB_i}
ماتریس تبدیل دستگاه مختصات ساختار مجازی به دستگاه مختصات مداری	$[T]^{OF}$
بردار یکه‌ای در راستای خط دید	u_{LOS}
بردار سرعت فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	$v^O_{B_i}$
بردار سرعت مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	$v^{O\ d}_{B_i}$
بردار سرعت مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب ساختار مجازی	$v^{F\ d}_{B_i}$
بردار سرعت ساختار مجازی نسبت به چارچوب مرجع / مداری	v^O_F
سرعت مداری	v_{orbit}
سرعت مداری نسبت به چارچوب اینرسی	v^I_O
سرعت نسبی دو ماهواره	v_{rel}
بردار سرعت فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب ساختار مجازی	$v^F_{B_i}$
بردار متغیرهای حالت را برای ساختار مجازی	X_{FO}
بردار حالت فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	X_{B_iO}
بردار حالات مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	$X^d_{B_iO}$
بردار حالت کل فضاپیماها نسبت به چارچوب مرجع / مداری	X
بردار حالات مطلوب کل فضاپیماها نسبت به چارچوب مرجع / مداری	X^d
بردار حالت ساختار مجازی نسبت به چارچوب مرجع / مداری	X_{FO}
بردار حالات مطلوب ساختار مجازی نسبت به چارچوب مرجع / مداری	X^d_{FO}
بردار متغیرهای حالت را برای ساختار مجازی	X_{FO}
بردار حالت فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	X_{B_iO}
بهرهٔ غیرخطی پسخوراند از آرایش به سرعت ساختار مجازی	Γ_v
بهرهٔ غیرخطی پسخوراند از آرایش به سرعت زاویه‌ای ساختار مجازی	Γ_ω
بهرهٔ غیرخطی پسخوراند از آرایش به انبساط-انقباض ساختار مجازی	Γ_ξ

زاویهٔ طولی بین چارچوب زمین و چارچوب اینرسی	θ_G
عرض جغرافیایی	λ
پارامتر جاذبه	μ
بردار انبساط- انقباض	ξ_{FO}
ماتریس انبساط- انقباض	Ξ
گشتاور کنترلی فضاپیمای iاُم	τ_i
گشتاور کنترلی ساختار مجازی	τ_F
تلاش کنترلی مجازی برای انبساط- انقباض	υ_F
زوایای بدنی نسبت به چارچوب مرجع / مداری (زوایای اویلر)	$\theta, \varphi ، \psi$
بردار سرعت زاویه‌ای فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	ω^{B_iO}
بردار سرعت زاویه‌ای مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب مرجع / مداری	$\omega^{B_iO^d}$
بردار سرعت زاویه‌ای مطلوب فضاپیمای iاُم نسبت به چارچوب ساختار مجازی	$\omega^{B_iF^d}$
بردار سرعت زاویه‌ای ساختار مجازی نسبت به چارچوب مرجع / مداری	ω^{FO}
سرعت زاویه‌ای چرخش زمین به دور خودش	ω_e
سرعت زاویه‌ای مدار	ω_{orbit}
بردار سرعت زاویه‌ای مداری نسبت به اینرسی	ω^{OI}
بردار سرعت زاویه‌ای زمین نسبت به اینرسی	ω^{EI}
ماتریس پادمتقارن ω	Ω

مقدمه

آرایش پروازی یکی از مباحثی است که در طی چند سال اخیر توجه زیادی به آن شده است. از جمله کاربردهای آرایش دسته جمعی می‌توان به کاربرد آرایش پروازی در صنعت فضایی اشاره کرد. پرتاب ماهواره به فضا از جمله پرهزینه‌ترین مأموریت‌ها به شمار می‌آید. حال هرچه ماهواره سنگین‌تر باشد فناوری به کارگرفته شده پیچیده‌تر و در نتیجه، هزینهٔ پرتاب آن بیشتر خواهد بود. برای کاهش این پیچیدگی و کاهش هزینه، استفاده از چندین ماهوارهٔ کوچک به جای یک ماهوارهٔ بزرگ راه حلی است که مطرح می‌شود. به همین دلیل پس از پرتاب ماهواره‌های کوچک‌تر، بحث آرایش پروازی در فضا مطرح می‌شود. البته علاوه بر مورد اشاره شده، استفاده از چند ماهواره این مزیت را دارد که اگر یکی از ماهواره‌ها از کار بیفتد کل مأموریت از کار نخواهد افتاد و با تعمیر یا جایگزینی سریع یک ماهوارهٔ دیگر مشکل به سرعت رفع می‌شود.

حرکت هماهنگ دسته‌ای از وسایل، مزایای فراوانی دارد که باعث توجه روز افزون دانشمندان به این زمینه شده‌است. از این رو الگوریتم‌های مختلفی برای دستیابی به این مهم به وجود آمده‌اند که هرکدام مزایا و معایب مخصوص به خود را دارند. برای آرایش پروازی معمولاً از سه الگوریتم مرسوم استفاده می‌شود که عبارتند از: روش ساختار مجازی، روش دنبال‌کردن رهبر[3] و روش آرایش رفتاری[4] [۱].

در روش ساختار مجازی یک دستگاه مجازی همراه با یک مرکز مجازی درنظرگرفته می‌شود. در این روش اعضا باید آرایش خود را نسبت به مرکز ساختار مجازی شکل دهند. در مرجع [۱] آرایشی متشکل از سه عضو حول ساختار مجازی شکل می‌گیرد و از طریق پسخوراندی از آرایش به ساختار مجازی، یکپارچگی آرایش تضمین می‌شود. به‌طوری‌که اگر بر اثر حرکت ساختار مجازی، اعضا آرایش خود را از دست دهند از طریق این پسخوراند سرعت حرکت ساختار مجازی کاهش یافته تا اعضا دوباره بتوانند آرایش مورد نظر را شکل دهند. در این مرجع تمامی معادلات در دستگاه مرجعی حل می‌شوند که هیچگونه حرکت و دورانی ندارد و عاری از گرادیان‌های جاذبی است. در مراجع [۳ و ۲] نیز برای شکل‌دهی آرایش از الگوریتم ساختار مجازی استفاده کرده‌اند که از طریق این الگوریتم آرایش را از هندسهٔ ابتدایی به هندسهٔ نهایی هدایت کرده است.

در روش دنبال‌کردن رهبر یک عضو به عنوان رهبر و دیگر اعضا به عنوان پیرو درنظر گرفته می‌شوند و یک عضو در عین پیروبودن می‌تواند رهبر اعضای دیگر نیز باشد. مراجع [۵ و۴] به روشی پرداخته‌اند که اعضا باید با استفاده از روش مذکور در قالب آرایشی خاص از میان موانع عبور کنند. همچنین در مرجع [۶] دو جوخه از هواپیماها که دارای رهبری مشترک هستند باید مأموریتی را انجام دهند.

در روش رفتاری هر عضو تحت تأثیر سه میدان نیرو قرار دارد: جاذبه، دافعه و ترازکننده. این روش برای تعداد اعضای زیاد مفید است. در مرجع [۷] تحقیقی روی یک اجتماع[5] صورت گرفته و این نتیجه حاصل شده است که اجتماع نیاز به رهبر ندارد. همچنین مرجع [۸] همان کاری را که در مراجع [۵ و ۴] انجام شده است از طریق روش رفتاری انجام داده است.

پس از بررسی، روش ساختار مجازی را برگزیدیم چرا که برای آرایش ماهواره نیازمند روشی ساختارمند هستیم و مهم‌ترین مزیت این روش نیز وجود ساختاری معین برای گروهی از اجسام است که می‌تواند بنا به نیاز، تعیین شده و به سیستم اعمال شود و در حین مانور، آرایش به خوبی حفظ شود.

3. Leader Follower
4. Behavioral
5. Flock

طرح مسئله

برای ورود به این مبحث نیازمند تعریف دو سری حالات مطلوب هستیم: ۱- حالات مطلوب ساختار مجازی نسبت به یک چارچوب مرجع؛ ۲- حالات مطلوب ماهواره‌ها نسبت به چارچوب ساختار مجازی. حالات مطلوب مکان، سرعت، موقعیت و سرعت زاویه‌ای هستند و برای ساختار مجازی یک حالت مطلوب دیگر نیز داریم که ضریب انبساط- انقباض آرایش نام دارد و مبین انبساط یا انقباض آرایش است. بدین معنا که اگر فرض کنیم آرایش متشکل از هشت عضو، تشکیل مکعبی به اضلاع واحد را بدهند، از طریق این ضریب می‌توان اضلاع این مکعب را در راستای سه محور به بیش از یک واحد منبسط یا به کمتر از یک واحد منقبض کرد. اگر حالات مطلوب ساختار مجازی با زمان تغییر نکند، آرایش به حالتی پایدار خواهد رسید. درغیراین‌صورت آرایش با حفظ یکپارچگی در فضا حرکت یا دوران خواهد داشت. برای به دست آوردن معادلات حاکم بر دینامیک از قانون دوم نیوتن برای حرکت انتقالی و قانون اولر برای حرکت دورانی استفاده کرده‌ایم. برای مدل‌کردن کامل سیستم به سه مجموعه معادله نیاز داریم که در ادامه بیان خواهند شد. اما قبل از ورود به مسئله لازم است برخی چارچوب‌ها را معرفی کنیم. بر حسب قرارداد دستگاه مختصات $]^{O}$ را به عنوان دستگاه مختصات مرجع، دستگاه مختصات $]^{F}$ را به عنوان دستگاه مختصات ساختار مجازی و دستگاه مختصات $]^{B_i}$ را به عنوان دستگاه مختصات بدنیِ iاُمین فضاپیما برمی‌گزینیم.

دینامیک ماهواره‌ها

دینامیک حرکت خطی برای iاُمین ماهواره بر اساس قانون دوم نیوتن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathrm{D^O s_{B_iO}} &= \mathrm{v_{B_i}^O} \\ \mathrm{m_i D^O D^O s_{B_iO}} &= \mathrm{m_i D^O v_{B_i}^O = f_i} \end{aligned} \tag{۱}$$

که $\mathrm{m_i}$ جرم iاُمین ماهواره، $\mathrm{s_{B_iO}}$ و $\mathrm{v_{B_i}^O}$ به ترتیب بردار جابجایی و سرعت iاُمین ماهواره نسبت به چارچوب مرجع و $\mathrm{f_i}$ نیروی کنترلی می‌باشد و $\mathrm{D^O}$ نیز بیانگر مشتق دورانی نسبت به چارچوب مرجع است.

دینامیک حرکت دورانی نیز بر اساس قانون اولر به صورت زیر است [۱]:

$$\begin{aligned} \mathrm{D^O \vec{q}^{B_iO}} &= -\frac{1}{2}\Omega^{\mathrm{B_iO}}\vec{\mathrm{q}}^{\mathrm{B_iO}} + \frac{1}{2}\bar{q}_{\mathrm{B_iO}}\omega^{\mathrm{B_iO}} \\ \mathrm{D^O}\bar{q}^{\mathrm{B_iO}} &= -\frac{1}{2}\omega^{\mathrm{B_iO}}.\bar{q}^{\mathrm{B_iO}} \\ \mathrm{J_i D^O \Omega^{B_iO}} &= -\Omega^{\mathrm{B_iO}}\mathrm{J_i}\omega^{\mathrm{B_iO}} + \tau_{\mathrm{i}} \end{aligned} \tag{۲}$$

که $\vec{\mathrm{q}}^{\mathrm{B_iO}}$ قسمت برداری و $\bar{q}^{\mathrm{B_iO}}$ قسمت اسکالرِ کواترنیون $\mathrm{q^{B_iO}}$ است، و $\mathrm{J_i}$ ، $\omega^{\mathrm{B_iO}}$ و τ_{i} به ترتیب ممان اینرسی، بردار سرعت زاویه‌ای و گشتاور کنترلی iاُمین ماهواره است. همچنین هرجا برداری با حرف بزرگ نشان داده شود به معنای ماتریس پادمتقارنِ متناظر با آن است. بنابراین $\Omega^{\mathrm{B_iO}}$ ماتریس پادمتقارن متناظر با بردار $\omega^{\mathrm{B_iO}}$ است.

دینامیک مطلوب برای هر ماهواره

همانگونه که گفته شد برای ماهواره‌ها نسبت به چارچوب ساختار مجازی حالات مطلوبی را درنظر خواهیم گرفت. بنابراین وقتی حالات ساختار مجازی در فضا تغییر کنند حالات مطلوب ماهواره‌ها در فضای مرجع نیز دست‌خوش تغییر خواهند شد. بنابراین دینامیک زیر را برای تغییرات حالات مطلوب ماهواره‌ها نسبت به مرجع معرفی می‌کنیم [۱]:

$$\begin{aligned} \mathrm{s_{B_iO}^{\mathit{d}}}(t) &= \mathrm{s_{FO}}(t) + \mathrm{s}_{\mathrm{B_i}F}^{d} \\ \mathrm{v_{B_i}^{O}}^{\,d}(t) &= \mathrm{v_F^O}(t) + \mathrm{v_{B_i}^{F}}^{\,d} + \Omega^{\mathrm{FO}}(t)\mathrm{s_{B_iO}^{\mathit{d}}} \\ \mathrm{q^{B_iO}}^{d}(t) &= \mathrm{q^{FO}}(t)\mathrm{q^{B_iF}}^{d} \\ \omega^{\mathrm{B_iO}^{d}}(t) &= \omega^{\mathrm{FO}}(t) + \omega^{\mathrm{B_iF}^{d}} \end{aligned} \tag{۳}$$

که $\mathbf{s}_{\mathrm{B_i}F}^{d}$ ، $\mathrm{v_{B_i}^{F}}^{\,d}$ ، $\mathrm{q^{B_iF}}^{d}$ و $\omega^{\mathrm{B_iF}^{d}}$ حالات مطلوب iاُمین فضاپیما نسبت به ساختار مجازی، و $\mathrm{s_{FO}}$، $\mathrm{v_F^O}$، $\mathrm{q^{FO}}$ و ω^{FO} حالات ساختار مجازی هستند. برای بیان این روابط در دستگاه مرجع نیاز به ماتریس تبدیل از دستگاه مختصات $]^{O}$ به دستگاه مختصات $]^{F}$ داریم که به شکل زیر به‌دست می‌آید و انتشار می‌یابد [۵].

$$\begin{aligned} [\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}} = {} & (2(\bar{q}^{\mathrm{FO}})^2 - 1)\mathrm{I} + 2\vec{\mathrm{q}}^{\mathrm{FO}}(\vec{\mathrm{q}}^{\mathrm{B_iO}})^{\mathrm{T}} + \\ & 2\bar{q}^{\mathrm{FO}}\vec{\mathrm{Q}}^{\mathrm{FO}} \end{aligned} \tag{۴}$$

که $\vec{\mathrm{Q}}^{\mathrm{FO}}$ ماتریس پادمتقارن قسمت برداری کواترنیون $\mathrm{q^{FO}}$ یعنی $\vec{\mathrm{q}}^{\mathrm{FO}}$ است.

اجازه دهید بردار $\xi_{\mathrm{FO}}(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)]^T$ را متناسب با انقباض و انبساط در راستای سه محور دستگاه مختصاتِ ساختار مجازی فرض کنیم. بنابراین ماتریس انبساط–انقباض را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Xi(t) = diag\left(\xi_{\mathrm{FO}}(t)\right) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1(t) \end{bmatrix} \tag{۵}$$

برای اینکه بتوانیم ضریب انبساط–انقباض را تأثیر دهیم روابط دینامیک مطلوب را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\left[\mathrm{s}^{d}_{\mathrm{B_iO}}(t)\right]^{\mathrm{O}} = [\mathrm{s_{FO}}(t)]^{\mathrm{O}} + [\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}}\Xi(t)\left[\mathrm{s}^{d}_{\mathrm{B_iF}}\right]^{\mathrm{F}}\\
&\left[\mathrm{v}^{\mathrm{O}\ d}_{\mathrm{B_i}}(t)\right]^{\mathrm{O}} = \left[\mathrm{v}^{\mathrm{O}}_{\mathrm{F}}(t)\right]^{\mathrm{O}} + [\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}}\dot{\Xi}(t)\left[\mathrm{v}^{\mathrm{F}\ d}_{\mathrm{B_i}}\right]^{\mathrm{O}} +\\
&[\Omega^{\mathrm{FO}}]^{\mathrm{O}}\left([\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}}\Xi(t)\left[\mathrm{s}^{d}_{\mathrm{B_iF}}\right]^{\mathrm{F}}\right)\\
&\mathrm{q}^{\mathrm{B_iO}d}(t) = \mathrm{q}^{\mathrm{FO}}(t)\mathrm{q}^{\mathrm{B_iF}d}\\
&\left[\omega^{\mathrm{B_iO}d}(t)\right]^{\mathrm{O}} = [\omega^{\mathrm{FO}}(t)]^{\mathrm{O}} + \left[\omega^{\mathrm{B_iF}d}\right]^{\mathrm{O}}
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

اگر بخواهیم این معادلات را در فضای حالت بیان کنیم باید از آنها بر حسب زمان نسبت به چارچوب مرجع مشتق دورانی بگیریم که با مشتق‌گیری به روابط زیر می‌رسیم:

$$
\begin{aligned}
&\left[\mathrm{D^O s^d_{B_iO}(t)}\right]^{\mathrm{O}} =\\
&[\mathrm{D^O s_{FO}(t)}]^{\mathrm{O}} + [\Omega^{\mathrm{FO}}]^{\mathrm{O}}\left([\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}}\Xi(\mathrm{t})\left[\mathrm{s^d_{B_iF}}\right]^{\mathrm{F}}\right) +\\
&[\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}}\dot{\Xi}(\mathrm{t})\left[\mathrm{s^d_{B_iF}}\right]^{\mathrm{F}}\\
&\left[\mathrm{D^O v^d_{B_iO}(t)}\right]^{\mathrm{O}} =\\
&[\mathrm{D^O v_{FO}(t)}]^{\mathrm{O}} + 2[\Omega^{\mathrm{FO}}]^{\mathrm{O}}\left([\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}}\dot{\Xi}(\mathrm{t})\left[\mathrm{s^d_{B_iF}}\right]^{\mathrm{F}}\right) +\\
&[\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}}\ddot{\Xi}(\mathrm{t})\left[\mathrm{s^d_{B_iF}}\right]^{\mathrm{F}} + [\mathrm{D^O}\Omega^{\mathrm{FO}}]^{\mathrm{O}}\left([\mathrm{T}]^{\mathrm{OF}}\Xi(\mathrm{t})\left[\mathrm{s^d_{B_iF}}\right]^{\mathrm{F}}\right)\\
&\dot{\mathrm{q}}^{\mathrm{B_iO}\mathrm{d}}(\mathrm{t}) = \dot{\mathrm{q}}^{\mathrm{FO}}(\mathrm{t})\mathrm{q}^{\mathrm{B_iF}\mathrm{d}}\\
&\left[\mathrm{D^O}\omega^{\mathrm{B_iO}\mathrm{d}}(\mathrm{t})\right]^{\mathrm{O}} = [\mathrm{D^O}\omega^{\mathrm{FO}}(\mathrm{t})]^{\mathrm{O}}
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

دینامیک ساختار مجازی

از آنجاکه فرض می‌شود ساختار مجازی یک جسم صلب است، می‌توان برای آن، متغیر حالت و نیز حالات مطلوب تعریف کرد، که باید تحت اثر نیرو و گشتاور مجازی در فضای مرجع حرکت کند و تغییر وضعیت دهد. همچنین برای انبساط و انقباض آن نیز باید کنترل‌کنندهٔ مجازی طراحی شود. برای ساختار مجازی معادلات فضای حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{bmatrix}
\mathrm{D^O s_{FO}}\\
\mathrm{m_F D^O v^O_F}\\
\dot{\mathrm{q}}^{\mathrm{FO}}\\
\dot{\bar{\mathrm{q}}}^{\mathrm{FO}}\\
\mathrm{J_F D^O}\omega^{\mathrm{FO}}\\
\dot{\xi}_{\mathrm{FO}}\\
\ddot{\xi}_{\mathrm{FO}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathrm{v^O_F}\\
\mathrm{f_F}\\
-\frac{1}{2}\Omega^{\mathrm{FO}}\vec{\mathrm{q}}^{\mathrm{FO}} + \frac{1}{2}\bar{\mathrm{q}}^{\mathrm{FO}}\omega^{\mathrm{FO}}\\
-\frac{1}{2}\omega^{\mathrm{FO}}.\bar{\mathrm{q}}^{\mathrm{FO}}\\
-\Omega^{\mathrm{FO}}\mathrm{J_F}\omega^{\mathrm{FO}} + \tau_{\mathrm{F}}\\
\dot{\xi}_{\mathrm{FO}}\\
\upsilon_{\mathrm{F}}
\end{bmatrix}
\tag{۸}
$$

که در روابط بالا $\mathrm{m_F}$ و $\mathrm{J_F}$ به ترتیب جرم مجازی و ممان اینرسی مجازیِ ساختار مجازی هستند که معمولاً واحد درنظرگرفته می‌شوند. $\mathrm{f_F}$ و τ_{F} به ترتیب نیروی کنترلی مجازی و گشتاور کنترلی مجازی هستند. همچنین υ_{F} تلاش کنترلی مجازی برای انبساط-انقباض است. به‌دلیل اینکه ساختار مجازی در دنیای مادی و فیزیکی وجود خارجی ندارد، برای کنترل‌کننده‌های آن نباید نگران اشباع شدن باشیم و مجازیم برای جرم و ممان اینرسی آن هر مقدار دلخواهی را انتخاب کنیم، ولی برای سادگی همان‌طور که ذکر شد آنها را واحد فرض خواهیم کرد.

با معرفی سومین مجموعه از معادلات دینامیکی، مدل‌سازی سیستم کامل شده‌است و می‌توان شبیه‌سازی را بر اساس روابط بیان شده انجام داد.

راهبرد کنترلی با پسخوراند آرایش پروازی

در این بخش، نحوهٔ طراحی کنترل‌کننده‌ها را برای فضاپیماها و کنترل‌کننده‌های مجازی را برای ساختار مجازی بیان می‌شود.

ایدهٔ کار

در تمامی مباحث کنترلی سعی بر این است که بتوان متغیرهای حالت یک سیستم را به حالات مطلوب رساند. بر همین اساس ابتدا بردارهای $X_{B_iO}(t)$ و $X^d_{B_iO}(t)$ را که به ترتیب مبین بردار حالت ماهواره iاُم و بردار حالات مطلوب آن است به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&X_{B_iO}(t) =\\
&\left[\left(s_{B_iO}(t)\right)^T, \left(v^O_{B_i}(t)\right)^T, \left(q^{B_iO}(t)\right)^T, \left(\omega^{B_iO}(t)\right)^T\right]\\
&X^d_{B_iO}(t) =\\
&\left[\left(s^d_{B_iO}(t)\right)^T, \left(v^{O\ d}_{B_i}(t)\right)^T, \left(q^{B_iO d}(t)\right)^T, \left(\omega^{B_iO d}(t)\right)^T\right]
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

همچنین بردارهای X و X^d را برای تمامی ماهواره‌ها تحت عنوان بردار متغیرهای حالت و بردار حالات مطلوب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&X = [X^T_{B_1O}, X^T_{B_2O}, \dots, X^T_{B_NO}]^T\\
&X^d = [{X^d_{B_1O}}^T, {X^d_{B_2O}}^T, \dots, {X^d_{B_NO}}^T]^T
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

که N تعداد ماهواره‌هاست. به شکلی مشابه این بردارهای متغیرهای حالت و حالات مطلوب را برای ساختار مجازی به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{X_{FO}}(t) =\\
&\left[(\mathrm{s_{FO}})^T, \left(\mathrm{v^O_F}\right)^T, (\mathrm{q^{FO}})^T, (\omega^{\mathrm{FO}})^T, \left(\xi_{\mathrm{FO}}\right)^T, \left(\dot{\xi}_{\mathrm{FO}}\right)^T\right]^T\\
&\mathrm{X^d_{FO}}(t) =\\
&\left[\left(\mathrm{s^d_{FO}}\right)^T, \left(\mathrm{v^{O}_F}^d\right)^T, \left(\mathrm{q}^{\mathrm{FO}d}\right)^T, \left(\omega^{\mathrm{FO}d}\right)^T, \left(\xi^d_{\mathrm{FO}}\right)^T, \left(\dot{\xi}^d_{\mathrm{FO}}\right)^T\right]^T
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

هدف از مانورِ ساختار مجازی در قالب آرایش این است که بردار X به بردار $\mathrm{X^d}$ و بردار $\mathrm{X_{FO}}$ به بردار $\mathrm{X^d_{FO}}$ رسانده شود.

فرض کنیم معادلات فضای حالت برای ساختار مجازی و فضاپیماها به صورت زیر باشد [۱].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D^O s_{FO}} \\ \mathbf{D^O v_F^O} \\ \dot{\vec{\mathbf{q}}}_{\mathbf{FO}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{\mathbf{FO}} \\ \mathbf{J_F D^O \omega^{FO}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{FO}} \\ \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{FO}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_F^O} \\ -\mathbf{K_r}\left(\mathbf{s_{FO}} - \mathbf{s_{FO}^d}\right) - \boldsymbol{\Gamma_\nu}\left(\mathbf{X}, \mathbf{X^d}\right)\mathbf{v_F^O} - \frac{\mathbf{k_p}\left\|\mathbf{s_{FO}} - \mathbf{s_{FO}^d}\right\|^2 \mathbf{v_F^O}}{\left\|\mathbf{v_F^O}\right\|^2} \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{FO}}\vec{\mathbf{q}}_{\mathbf{FO}} + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}_{\mathbf{FO}}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{FO}} \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{FI}}.\bar{\mathbf{q}}_{\mathbf{FO}} \\ -\boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{FO}}\mathbf{J_F}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{FO}} + \mathbf{k_q}\vec{\mathbf{q}}_{\mathbf{eFO}} - \boldsymbol{\Gamma_\omega}\left(\mathbf{X}, \mathbf{X^d}\right)\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{FO}} - \frac{\mathbf{k_a}\left\|\mathbf{q_{FO}} - \mathbf{q_{FO}^d}\right\|^2 \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{FO}}}{\left\|\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{FO}}\right\|^2} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{F}} \\ -\mathbf{K}_{\boldsymbol{\xi}}\left(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{FO}} - \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{FO}}^{\mathbf{d}}\right) - \boldsymbol{\Gamma}_{\dot{\boldsymbol{\xi}}}\left(\mathbf{X}, \mathbf{X^d}\right)\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{FO}} - \frac{\mathbf{k_e}\left\|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{FO}} - \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{FO}}^{\mathbf{d}}\right\|^2 \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{FO}}}{\left\|\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{FO}}\right\|^2} \end{bmatrix}. \qquad (۱۲)$$

$$\begin{bmatrix} D^O s_{B_iO} \\ D^O v_{B_i}^O \\ \dot{\vec{q}}_{B_iO} \\ \dot{\bar{q}}_{B_iO} \\ J_i D^O \omega^{B_iO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{B_i}^O \\ D^O {v_{B_i}^O}^d - K_{ri}\left(s_{B_iO} - s_{B_iO}^d\right) - K_{vi}\left(v_{B_i}^O - {v_{B_i}^O}^d\right) \\ -\frac{1}{2}\Omega^{B_iO}\vec{q}_{B_iO} + \frac{1}{2}\bar{q}_{B_iO}\omega^{B_iO} \\ -\frac{1}{2}\omega^{B_iO}.\bar{q}_{B_iO} \\ -\Omega^{B_iO}J_i\omega^{B_iO} + J_i D^O {\omega^{B_iO}}^d + \frac{1}{2}\Omega^{B_iO}J_i\left(\omega^{B_iO} + {\omega^{B_iO}}^d\right) + \cdots \\ \ldots + k_{qi}\vec{q}_{eB_iO} - K_{\omega i}\left(\omega^{B_iF} - \omega_d^{B_iF}\right) \end{bmatrix}. \qquad (۱۳)$$

که در روابط (۱۲) و (۱۳) $\vec{q}_{eFO}$ قسمت برداری کواترنیون q_{eFO} ، و $\vec{q}_{eB_iO}$ قسمت برداری کواترنیون q_{eB_iO} هستند که خود این کواترنیون‌ها از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} q_{eFO} &= q_{FO}^{*} q_{FO}^{d} \\ q_{eB_iO} &= q_{B_iO}^{*} q_{B_iO}^{d} \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

به q_{eFO} و q_{eB_iO} خطای کواترنیون می‌گویند که در پیوست به نحوهٔ محاسبه آن اشاره شده است.

اگر K_r ، K_ξ ، K_{ri} ، K_{vi} و $K_{\omega i}$ ماتریس‌های مثبتِ معینِ متقارن، k_p، k_a و k_e مقادیر اسکالر غیرمنفی، k_q و k_{qi} مقادیر اسکالر مثبت، و $\Gamma_\nu(X, X^d)$ ، $\Gamma_\omega(X, X^d)$ و $\Gamma_{\dot{\xi}}(X, X^d)$ ماتریس‌های مثبتِ معینِ متقارن و تابعی از X^d و X باشند، آنگاه $\left\|X_{FO}(t) - X_{FO}^d\right\| \to 0$ و $\left\|X_{B_iO}(t) - X_{B_iO}^d(t)\right\| \to 0$ هنگامی‌که $t \to \infty$.

اثبات: مراجعه شود به مرجع [۵].

در رابطهٔ (۱۲) ملاحظه می‌شود که پسخوراند آرایش از طریق بهره‌های غیرخطی Γ_ν ، Γ_ω و $\Gamma_{\dot{\xi}}$ به ساختار مجازی اعمال می‌شود که هرکدام تابعی از متغیرهای حالت ماهواره‌ها و حالات مطلوب آنها است.

برای بیان خطا، از تعریفی تحت عنوان مقیاس عملکرد استفاده خواهیم کرد که با $E(X, X^d)$ نشان می‌دهیم که تابعی غیرمنفی از X^d و X است. زمانی‌که ماهواره‌ها خارج از آرایش مطلوب باشند مقدار $E(X, X^d)$ بزرگ و زمانی که به آرایش مطلوب نزدیک می‌شوند مقدار آن کوچک خواهد شد.

اکنون باید ارتباطی بین مقیاس عملکرد و بهره‌های غیرخطی Γ_ν ، Γ_ω و $\Gamma_{\dot{\xi}}$ بیان کنیم. یک پیشنهاد برای این ارتباط، رابطهٔ زیر است [۱].

$$\Gamma = K + K_F E\left(X, X^d\right)^2 \qquad (۱۵)$$

که بهرهٔ $K = K^T > 0$ ماتریس بهرهٔ متناسب با سرعت آرایش، و $K_F = {K_F}^T > 0$ ماتریس بهرهٔ آرایش است که وزن مقیاس عملکرد را تعیین می‌کند. یعنی اگر مقیاس عملکرد صفر شود پسخوراند به صورت یک بهرهٔ سادهٔ کنترلی عمل می‌کند ولی هرچه مقیاس عملکرد بزرگ‌تر باشد تأثیر بهرهٔ غیرخطی در کنترل ساختار مجازی بیشتر خواهد شد.

رابطهٔ (۱۵) برای Γ_ν ، Γ_ω و $\Gamma_{\dot{\xi}}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu &= K_\nu + K_{F\nu} E\left(X, X^d\right)^2 \\ \Gamma_\omega &= K_\omega + K_{F\omega} E\left(X, X^d\right)^2 \\ \Gamma_{\dot{\xi}} &= K_{\dot{\xi}} + K_{F\dot{\xi}} E\left(X, X^d\right)^2 \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در رابطهٔ بالا K_ν ، $K_{F\nu}$ ، K_ω ، $K_{F\omega}$ ، $K_{\dot{\xi}}$ و $K_{F\dot{\xi}}$ ماتریس‌های مثبتِ معینِ متقارن هستند.

در این مقاله مقیاس عملکرد را به صورت زیر تعریف خواهیم کرد:

$$E\left(X, X^d\right) = \left\|X - X^d\right\|^2 \qquad (۱۷)$$

پیاده‌سازی الگوریتم ساختار مجازی

برای شروع، یک گروه سه‌تایی از ماهواره‌ها را درنظر می‌گیریم که باید در قالب آرایش خاصی نسبت به ساختار مجازی مانور انجام دهند. فرض می‌کنیم که از سکون می‌خواهیم حرکت کنیم و پس از انجام مأموریت و رسیدن به حالات مطلوب دوباره سکون داشته باشیم. شرایط اولیه مورد نظر برای ساختار مجازی و فضاپیماها را نسبت به چارچوب مرجع در جدول (۱) آمده است. حالات مطلوب برای ساختار مجازی نسبت به فضای مرجع و حالات مطلوب برای آرایش نسبت به چارچوب ساختار مجازی در جدول (۲) آمده‌است.

جدول ۱- شرایط اولیهٔ ساختار مجازی و فضاپیماها

$s_{FO}(0)$	$[0,0,0]^T$		
$v_F^O(0)$	$[0,0,0]^T$		
$q^{FO}(0)$	$[0,0,0,1]^T$	$s_{B_1O}(0)$	$[20,0,0]^T$
$\omega^{FO}(0)$	$[0,0,0]^T$	$v_{B_1}^O(0)$	$[0,0,0]^T$
$\xi_{FO}(0)$	$[0,0,0]^T$	$q^{B_1O}(0)$	$[0,0,0,1]^T$
$\dot{\xi}_{FO}(0)$	$[0,0,0]^T$	$\omega^{B_1O}(0)$	$[0,0,0]^T$
$s_{B_2O}(0)$	$[0,20,0]^T$	$s_{B_3O}(0)$	$[0,0,20]^T$
$v_{B_2}^O(0)$	$[0,0,0]^T$	$v_{B_3}^O(0)$	$[0,0,0]^T$
$q^{B_2O}(0)$	$[0,0,0,1]^T$	$q^{B_3O}(0)$	$[0,0,0,1]^T$
$\omega^{B_2O}(0)$	$[0,0,0]^T$	$\omega^{B_3O}(0)$	$[0,0,0]^T$

برای پیاده‌سازی الگوریتم نیاز به دانستن پارامترها و مشخصات ساختار مجازی و ماهواره‌ها هستیم. در جدول (۳) اطلاعات مربوط به ماهواره‌ها و در جدول (۴) اطلاعات مربوط به ساختار مجازی آمده است. در این جداول منظور از I_3 ماتریس همانی ۳×۳ است.

جدول ۲ – حالات مطلوب ساختار مجازی و فضاپیماها

s_{FO}^d	$[100,200,300]^T$		
$v_F^{O\,d}$	$[0,0,0]^T$		
$q^{FO\,d}$	$[0,0,sin\left(\frac{\pi}{4}\right),cos(\frac{\pi}{4})]^T$	$s_{B_1F}^d$	$[50,0,0]^T$
$\omega^{FO\,d}$	$[0,0,0]^T$	$v_{B_1}^{F\,d}$	$[0,0,0]^T$
ξ_{FO}^d	$[1.5,1.5,1.5]^T$	$q^{B_1F\,d}$	$[0,0,0,1]^T$
$\dot{\xi}_{FO}^d$	$[0,0,0]^T$	$\omega^{B_1F\,d}$	$[0,0,0]^T$
$s_{B_2F}^d$	$[0,-50,0]^T$	$s_{B_3F}^d$	$[0,0,50\sqrt{3}]^T$
$v_{B_2}^{F\,d}$	$[0,0,0]^T$	$v_{B_3}^{F\,d}$	$[0,0,0]^T$
$q^{B_2F\,d}$	$[0,0,0,1]^T$	$q^{B_3F\,d}$	$[0,0,0,1]^T$
$\omega^{B_2F\,d}$	$[0,0,0]^T$	$\omega^{B_3F\,d}$	$[0,0,0]^T$

جدول ۳- پارامترها و مشخصات فضاپیماها

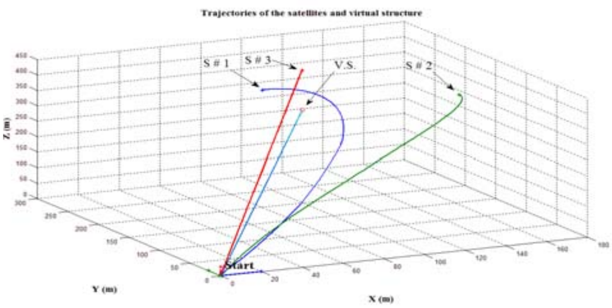
Parameter	Value
m_i	150
J_i	$25I_3$
K_{ri}	$0.81I_3$
K_{vi}	$1.27I_3$
$K_{\omega i}$	$6.15I_3$

جدول ۴- پارامترها و مشخصات ساختار مجازی

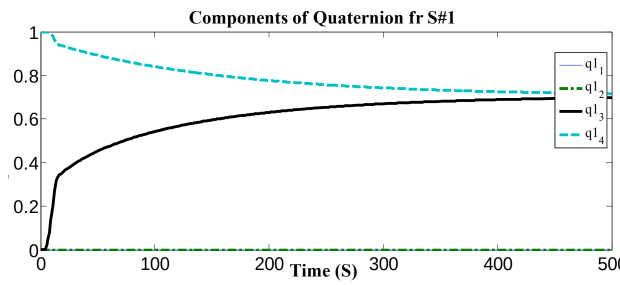
Parameter	Value	Parameter	Value	Parameter	Value
M_F	1	K_ξ	$0.03I_3$	k_q	0.05
J_F	I_3	$K_{\dot{\xi}}$	$0.25I_3$	k_p	0
K_r	$0.03I_3$		$0.01I_3$	k_a	0
K_v	$0.25I_3$	$K_{F\omega}$	$0.02I_3$	k_e	0
K_ω	$0.32I_3$	$K_{F\dot{\xi}}$	$0.01I_3$	k_{qi}	3.24

با استفاده از اطلاعات جدول‌های (۱) تا (۴)، شبیه‌سازی انجام شد که تنها به ارائهٔ مسیر سه‌بعدی آرایش به همراه مسیر مرکز جرم مجازی بسنده می‌کنیم.

در شکل (۱) شکل‌گیری آرایش حول مرکز جرم مجازی به خوبی نمایان است. البته در این شکل دوران‌های موجود معلوم نیست، به همین دلیل در شکل (۲) تغییرات مؤلفه‌های کواترنیون را برای ماهوارهٔ شماره (۱) نشان داده‌ایم.



شکل ۱- مسیر حرکت آرایش در دستگاه مختصات مرجع



شکل ۲- مؤلفه‌های کواترنیون ماهواره‌ها

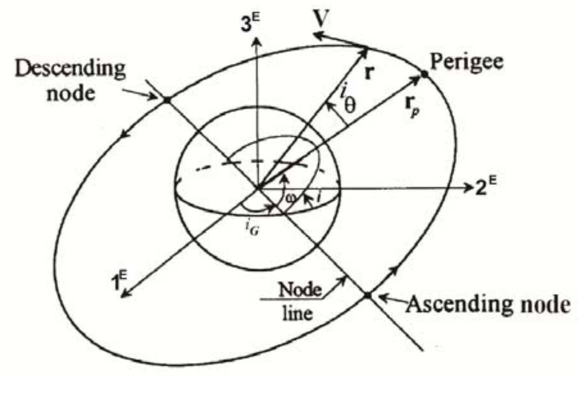
توسعهٔ الگوریتم ساختار مجازی به مدار

در این بخش قصد داریم الگوریتم ساختار مجازی را برای گروهی از ماهواره‌ها که در مداری حول زمین در حال گردش هستند به‌کار گیریم.

مشخصات مداری و زمین

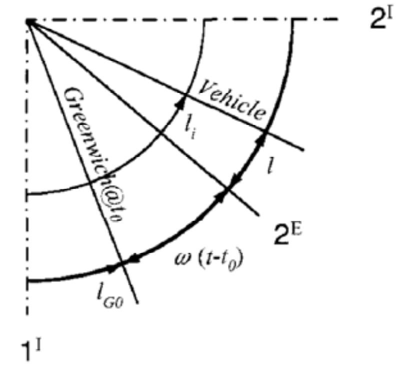
از آنجاکه هدف از این مقاله طراحی مدار نیست، برای انتخاب مدار حساس نمی‌شویم. بنابراین مدار انتخابی را مدار دایروی به شعاع r_{orbit} و شیب i درجه انتخاب می‌کنیم. به دلیل محدود بودن فضا در این مقاله به جزئیات در مورد روابط مورد استفاده در این باره نمی‌پردازیم و فقط این موضوع را مد نظر داریم که ماهواره‌ها در چه ارتفاع مداری در حال گردش هستند. برای ادامه این مبحث لازم

است چند دستگاه مختصات دیگر نیز تعریف گردد. دستگاه مختصات مداری را در اینجا جایگزین دستگاه مختصات مرجع در حالت قبل می‌کنیم و با همان نماد $]^{O}$ نشان می‌دهیم که محور ۱ آن در راستای سرعت، محور ۳ آن در راستای مرکز زمین و محور ۲ آن طوری است که با دو محور دیگر، دستگاه مختصات راستگرد می‌سازد. دستگاه دیگر دستگاه مختصات زمینِ چرخان است که همراه با زمین در گردش است و با $]^{E}$ نشان داده می‌شود. دستگاه بعدی نیز دستگاه مختصات اینرسی است که متصل به زمین است ولی با آن در حال گردش نیست و آن را با $]^{I}$ نمایش می‌دهند. در شکل (۳) نمای شماتیکی از این مدار نشان داده شده است.



شکل ۳– شماتیکی از مدار مورد بررسی [۱۰]

در شکل (۳)، i زاویهٔ شیب مدار، i_G زاویهٔ بین خط گذرنده از گره‌ها و محورِ ۱ دستگاه زمین، و i_θ زاویهٔ مداری است. برای به‌دست آوردن i_G باید چرخش زمین را درنظرگرفت. شکل (۴) در به‌دست آوردن این زاویه مفید است.



شکل ۴– زوایای طولی زمینی [۱۰]

$$l_i = l_G + l = l_G + i_G = l_{G_0} + \omega_e(t - t_0) + i_G \qquad (۱۸)$$

در رابطهٔ بالا ω_e سرعت زاویه‌ای چرخش زمین به دور خودش است که جلوتر به آن اشاره می‌شود.

از آنجا که مدار را دایروی فرض کرده‌ایم، می‌توان سرعت مداری و سرعت زاویه‌ایِ مربوط به این مدار را به‌دست آورد. برای این منظور روابط زیر را داریم:

$$v_{orbit} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{orbit}}} \qquad (۱۹)$$

که در رابطهٔ بالا μ پارامتر جاذبه است و برابر با حاصل ضرب جرم زمین در ثابت جهانی گرانش است که مقداری ثابت را نتیجه می‌دهد.

$$\mu = M_e G = 398600.4 \left(\frac{Km^3}{s^2}\right) = 3.986 \times 10^{14} \left(\frac{m^3}{s^2}\right) \qquad (۲۰)$$

سرعت مداری را باید در دستگاه مختصات مداری که با $]^{O}$ نشان داده می‌شود بیان کنیم. بنابراین سرعت مداری در این دستگاه فقط دارای مؤلفهٔ اول است.

$$\left[\overline{\mathbf{v}_{O}^{I}}\right]^{O} = [v_{orbit}\,, 0\,, 0] \qquad (۲۱)$$

براساس شعاع مداری، سرعت مداری به‌دست آمد و بر اساس شعاع و سرعت مداری، می‌توان سرعت زاویه‌ای مداری را به‌دست آورد.

$$\omega_{orbit} = \frac{v_{orbit}}{r_{orbit}} = \sqrt{\frac{\mu}{(r_{orbit})^3}} \qquad (۲۲)$$

این سرعت زاویه‌ای را نیز مناسب است تا در دستگاه مختصات مداری بیان کنیم.

$$\left[\overline{\boldsymbol{\omega}^{OI}}\right]^{O} = [0\,, -\omega_{orbit}\,, 0\,] \qquad (۲۳)$$

بردار دیگری که به آن احتیاج داریم سرعت زاویه‌ای چرخش زمین به دور خودش است. مقدار این سرعت زاویه‌ای $(\frac{rad}{s})$ ۱۰$^{-۵}$ × ۷/۲۷ است که اگر آن را در دستگاه مختصات زمین یا دستگاه مختصات اینرسی بیان کنیم به صورت زیر خواهد بود:

$$\left[\overline{\boldsymbol{\omega}^{EI}}\right]^{E} = \left[\overline{\boldsymbol{\omega}^{EI}}\right]^{I} = [0\,, 0\,, 7.27 \times 10^{-5}]. \qquad (۲۴)$$

گسترش معادلات

همان‌طورکه در بخش پیاده‌سازی معادلات مشاهده کردید، معادلات دینامیکی ساختار مجازی و ماهواره‌ها در دستگاه مرجع بیان شدند و به دلیل اینکه حالات مطلوب ماهواره‌ها نسبت به چارچوب ساختار مجازی تعریف می‌شدند نیاز به معادلات واسطه برای بروز حالات مطلوب فضاپیماها نسبت به مرجع بود. در اینجا قصد داریم از همان روابط قسمت قبل استفاده کنیم با این تفاوت که این بار دستگاه مرجعی که معرفی شد در حال حرکت و دوران است. برای درک بهتر، چارچوب مرجع در بخش قبل را به چارچوب مداری تغییر نام می‌دهیم. در بخش قبل دستور کنترلی در دستگاه مرجع تولید

می‌شد. اکنون نیز فرمان‌های کنترلی در همان دستگاه به‌دست می‌آیند.

دینامیک مطلوب برای ماهواره‌ها

دینامیک مطلوب برای ماهواره‌ها همانند حالت قبل است و از روابط موجود در بخش دوم یعنی معادلات (۷) بهره می‌بریم. اما این بار در روابط به‌کارگرفته شده دستگاه مختصات مداری که با $]^{O}$ نمایش داده شده است جایگزین دستگاه مختصات مرجع در بخش دوم شده است. اگر شرایط اولیه ساختار مجازی همگی صفر و ورودی اعمال شده به آن نیز صفر باشد چارچوب ساختار مجازی با چارچوب مداری یکی خواهد شد.

دینامیک ساختار مجازی

از آنجا که معادلات را در دستگاه مداری بیان خواهیم کرد، کافی است ورودی ساختار مجازی را براساس آنچه در بخش‌های قبل گفته شد صفر قرار دهیم تا ساختار مجازی همواره منطبق بر دستگاه مداری قرار بگیرد. اما اگر نیاز باشد که ساختار مجازی نسبت به دستگاه مداری دارای حرکت و دوران باشد نباید نگران شتاب‌های اضافی که ناشی از دوار بودن دستگاه مداری است باشیم چرا که ساختار مجازی نمود واقعی ندارد و می‌توان فرض کرد که شتاب‌های اضافی بر روی آن اثری نخواهند داشت. بنابراین در اینجا نیز از روابط موجود در بخش دوم یعنی معادلات (۸) استفاده خواهیم کرد تنها با این تفاوت که چارچوب و دستگاه مداری جایگزین چارچوب و دستگاه مرجع خواهد شد.

دینامیک ماهواره‌ها

بر اساس قوانین بیان‌شده در مرجع [۹] در رابطه با دستگاه‌های چرخان، باید یکسری ترم‌های تصحیح کننده را به معادلات نیوتن و اولر اضافه کنیم.
برای بدست آوردن این ترم‌های از رابطه نیوتن شروع می‌کنیم.

$$m_i D^I D^I s_{B_i I} = \mathbf{f}_i \tag{۲۵}$$

که بردار مکان s_{BI} خود از مجموع دو بردار $\mathbf{s}_{B_iO}$ و $\mathbf{s}_{OI}$ بدست می‌آید.

$$\mathbf{s}_{B_iI} = \mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{s}_{OI} \tag{۲۶}$$

بنابراین داریم:

$$m_i D^I D^I \mathbf{s}_{B_iO} + m_i D^I D^I \mathbf{s}_{OI} = \mathbf{f}_i. \tag{۲۷}$$

ترم دوم به سادگی قابل محاسبه است و همان مشتق عادی به است. یعنی:

$$m_i D^I D^I \mathbf{s}_{OI} = m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{s}_{OI}. \tag{۲۸}$$

اما ترم اول نیازمند مشتق دورانی است که در زیر آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} D^I D^I s_{B_iO} &= D^I\left(D^O \mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO}\right) \\ &= D^O\left(D^O \mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO}\right) + \mathbf{\Omega}^{OI}\left(D^O \mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO}\right) \\ &= D^O D^O \mathbf{s}_{B_iO} + D^O\left(\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO}\right) + \mathbf{\Omega}^{OI} D^O \mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO} \\ &= D^O D^O \mathbf{s}_{B_iO} + 2\mathbf{\Omega}^{OI} D^O \mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO} + (D^O \mathbf{\Omega}^{OI})\mathbf{s}_{B_iO} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{B_iO} + 2\mathbf{\Omega}^{OI}\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO} + \frac{d}{dt}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO} \end{aligned} \tag{۲۹}$$

با جایگذاری روابط بدست آمده در بالا در رابطه نیوتن خواهیم داشت:

$$m_i\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{B_iO} + 2\mathbf{\Omega}^{OI}\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO} + \frac{d}{dt}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO}\right) + m_i\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{OI}\right) = \mathbf{f}_i. \tag{۳۰}$$

باید رابطه بالا را بر حسب معادله حالتِ حرکت ماهواره نسبت به چارچوب مداری بنویسیم. بنابراین داریم:

$$m_i\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{B_iO} = \mathbf{f}_i - m_i\left\{2\mathbf{\Omega}^{OI}\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO} + \frac{d}{dt}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO} + \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{OI}\right\} \tag{۳۱}$$

که ترم‌های تصحیح کننده عبارتند از: $2\mathbf{\Omega}^{OI}\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{B_iO}$ که شتاب کریولیس است، $\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO}$ که شتاب گریز از مرکز است، $\frac{d}{dt}\mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{s}_{B_iO}$ که شتاب زاویه‌ای است، و $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{OI}$ که شتاب خطی است.

برای حرکت دورانی نیز ترم‌های تصحیح کننده وجود خواهد داشت که در زیر به آن اشاره می‌کنیم [۱۰].

$$\mathbf{J}_i\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}^{B_iO} + \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{J}_i\boldsymbol{\omega}^{B_iO} = \boldsymbol{\tau}_i \tag{۳۲}$$

که از آن داریم

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}^{B_iO} = \mathbf{J}_i^{-1}(\boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{\Omega}^{OI}\mathbf{J}_i\boldsymbol{\omega}^{B_iO}). \tag{۳۳}$$

بنابراین معادلات فضای حالت به شکل زیر تغییر خواهند یافت

$$\begin{bmatrix} D^I\mathbf{s}_{B_iI} \\ m_i D^I \mathbf{v}^I_{B_i} \\ \dot{\vec{\mathbf{q}}}_{B_iI} \\ \dot{\bar{q}}_{B_iI} \\ \mathbf{J}_i D^I \boldsymbol{\omega}^{B_iI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^I_{B_i} \\ f_i + \mathit{Correction\ Terms} \\ -\frac{1}{2}\Omega^{B_iO}\vec{q}_{B_iO} + \frac{1}{2}\bar{q}_{B_iO}\omega^{B_iO} \\ -\frac{1}{2}\omega^{B_iO}.\,\bar{q}_{B_iO} \\ -\Omega^{B_iO}J_i\omega^{B_iO} + \tau_i + \mathit{Correction\ Terms} \end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

که نیرو و گشتاور کنترلی همانند بخش قبل تولید خواهند شد.

دینامیک مدار

به‌منظور به‌دست آوردن بردارهای مکان، سرعت خطی و سرعت مداریِ مطلوب باید از شعاع مدار استفاده کرد. برای یک مدار دایروی دینامیک حرکت انتقالی در دستگاه زمین به فرم زیر است [۱۱]:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{OE}\right]_1^E &= -\frac{\mu}{(r_{orbit})^3}[\mathbf{s}_{OE}]_1^E + \omega_e^2[\mathbf{s}_{OE}]_1^E + 2\omega_e\left[\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{OE}\right]_2^E \\
\left[\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{OE}\right]_2^E &= -\frac{\mu}{(r_{orbit})^3}[\mathbf{s}_{OE}]_2^E + \omega_e^2[\mathbf{s}_{OE}]_2^E + 2\omega_e\left[\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{OE}\right]_2^E \\
\left[\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}_{OE}\right]_3^E &= -\frac{\mu}{(r_{orbit})^3}[\mathbf{s}_{OE}]_3^E
\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

و سرعت زاویه‌ای نیز به راحتی بدست خواهد آمد چرا که همان سرعت‌زاویه‌ای مداری است. پس داریم

$$\left[\overline{\boldsymbol{\omega}^{OI}}\right]^O = [0\,, \omega_{orbit}\,, 0\,] \qquad (۳۶)$$

برای کواترنیون می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{Bmatrix} q_{0OI} \\ q_{1OI} \\ q_{2OI} \\ q_{3OI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -[\omega^{OI}]_1^O & -[\omega^{OI}]_2^O & -[\omega^{OI}]_3^O \\ [\omega^{OI}]_1^O & 0 & [\omega^{OI}]_3^O & -[\omega^{OI}]_2^O \\ [\omega^{OI}]_2^O & -[\omega^{OI}]_3^O & 0 & [\omega^{OI}]_1^O \\ [\omega^{OI}]_3^O & [\omega^{OI}]_2^O & -[\omega^{OI}]_1^O & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{0OI} \\ q_{1OI} \\ q_{2OI} \\ q_{3OI} \end{Bmatrix} \qquad (۳۷)$$

توجه به این نکته بسیار مهم است که برای اینکه معادلات دارای پاسخ‌های مناسب باشند نیاز به شرایط اولیه دقیق است. برای اجرا، شرایط اولیه را در نقطه‌ای از مدار و با سرعت‌های خطی و زاویه‌ای متناظر با آن درنظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم یک گروه ماهواره‌ای شامل سه ماهواره در فضا به مدار مورد نظر تزریق شده‌اند. بنابراین شرایط اولیه مکانی در دستگاه زمین به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{s}_{OE}]_1^E|_{t_0} &= r_{orbit}\cos\lambda\cos l \\
[\mathbf{s}_{OE}]_2^E|_{t_0} &= r_{orbit}\cos\lambda\, sin\, l \\
[\mathbf{s}_{OE}]_1^E|_{t_0} &= r_{orbit}\sin\lambda
\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

که در رابطه بالا λ و l به ترتیب عرض و طول جغرافیایی محل پرتاب هستند. برای شرایط اولیه سرعت در دستگاه مداری نیز از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{OE}\right]^E|_{t_0} = [\overline{T}]^{OE}\left[\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{OE}\right]^O \qquad (۳۹)$$

که $\frac{d}{dt}\mathbf{s}_{OE}$ از رابطه زیر حساب خواهد شد:

$$\frac{d}{dt}s_{OE} = \frac{d}{dt}s_{OI} - \Omega^{EI}s_{OE} \qquad (۴۰)$$

و $\frac{d}{dt}s_{OI}$ نیز از رابطهٔ (۲۱) به‌دست می‌آید.

شرایط اولیه سرعت زاویه‌ای نیز به سادگی به‌دست می‌آید چراکه سرعت زاویه‌ای به دلیل دایروی‌بودن مدار ثابت است. با توجه به رابطهٔ (۲۳) و مشخص بودن سرعت زاویه‌ای زمین به دور خودش سرعت زاویه‌ای مداری نسبت به زمین مشخص خواهد شد.

$$\omega^{OE} = \omega^{OI} - \omega^{EI} \qquad (۴۱)$$

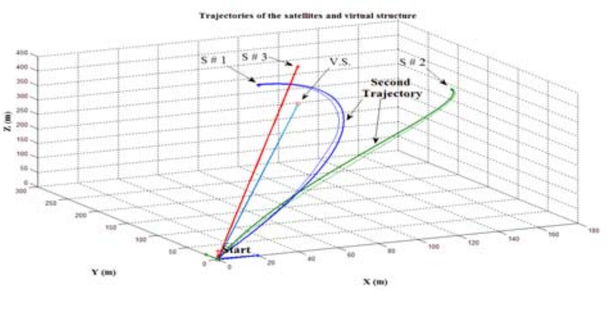
که ω^{OI} از رابطهٔ (۲۳) به‌دست می‌آید.

لازم به توضیح است که با دردست داشتن روابط برداری و ماتریس‌های تبدیل می‌توان بردارهای مختلف را در تمامی دستگاه‌ها به‌دست آورد. به عبارت دیگر از این شرایط اولیه معرفی شده می‌توان شرایط اولیهٔ بردارهای دیگر را در هر دستگاهی به‌دست آورد.

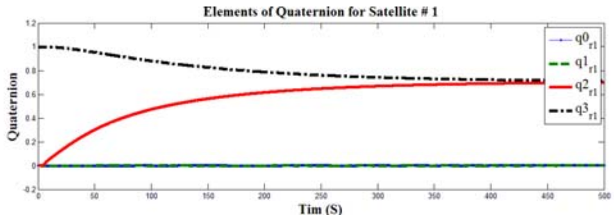
شبیه‌سازی آرایش در مدار

در این بخش با استفاده از روابط به‌دست آمده در بخش قبل آرایش را در مداری حول زمین شبیه‌سازی می‌کنیم. برای مقایسه با نتایج قبلی، همان مأموریتی که در بخش‌های قبل با آن سر و کار داشتیم را انجام می‌دهیم. شبیه‌سازی را ابتدا برای حالتی مشابه بخش قبل در مداری به ارتفاع ۱۰۰۰۰ کیلومتر اجرا می‌کنیم تا تغییرات حاصل را مشاهده کنیم. بر اساس آنچه در جدول (۱) برای شرایط اولیه بیان شده شبیه‌سازی را اجرا می‌کنیم.

در اینجا نیز مسیر حرکت ماهواره‌ها را رسم می‌کنیم و در شکل (۵) با نتیجه حالت اول مقایسه می‌کنیم. در شکل (۵) ملاحظه می‌شود تغییر مکان به خوبی صورت پذیرفته است که در مقایسه با حالت قبل می‌بینیم کمی در رسیدن به حالت مطلوب، انحنای بیشتری دارد و علت آن هم وجود ترم‌های تصحیح‌کننده است. در مورد کواترنیون‌ها نیز می‌توان شکل (۵) را برای ماهواره شمارهٔ ۱ بررسی کرد.



شکل ۵- مسیر حرکت ماهواره‌ها در دو حالت مرجع ثابت و مرجع دوار در مدار



شکل۶ – مؤلفه‌های کواترنیون ماهواره‌ها

از شکل(۶) مشاهده می‌شود که همانند قبل کواترنیون‌های مطلوب دنبال شده‌اند ولی با این تفاوت که انحنای نمودارِ مؤلفه‌های دوم و سوم کمی به سمت بالا سوق پیدا کرده‌است که علت آن همانند موارد قبلی، وجود ترم‌های تصحیح‌کننده است. همچنین به دلیل اینکه شرایط اولیه و نهاییِ وضعیت برای هر سه ماهواره همانند هم است نمودار تغییر کواترنیون آنها نیز مشابه شده است.

راهبرد کنترلی اجتناب از برخورد

تاکنون به این مهم دست یافتیم که ماهواره‌ها قادر باشند از هر شرایط اولیهٔ دلخواه به هر شرایط مطلوب دلخواه بروند. اما هنوز این مسئله برای یک مانور، در قالب آرایش کافی نیست. مهم‌ترین مسئله پس از مورد بالا مسئلهٔ برخورد نداشتن ماهواره‌ها با یکدیگر در حین مانور است. برای این کار باید کنترل‌کنندهٔ دیگری را به‌منظور اجتناب از برخورد به سیستم کنترلی اولیه اضافه کرد به‌طوری‌که عملکرد این دو کنترل‌کننده مجزای از هم باشد. یک کنترل‌کننده برای کاهش خطای موجود بین حالات سیستم و حالات مطلوب، و دیگری برای اجتناب از برخورد ماهواره‌ها با یکدیگر در حین مانور درنظرگرفته می‌شوند.

روابط حاکم بر اجتناب از برخورد

برای بررسی برخورد دو ماهواره با یکدیگر، دو حالت نسبی بین ماهواره‌ها مهم می‌شود؛ یکی فاصله نسبی بین ماهواره‌ها و دیگری سرعت نسبی بین آنها. هرچه فاصلهٔ نسبی کمتر و سرعت نسبی بیشتر باشد احتمال برخورد افزایش خواهد یافت. در مرجع [۱۰] روشی معرفی شده است که نیروی بازدارنده‌ای را در راستای خط دید (LOS) واصل بین ماهواره‌ها فرمان می‌دهد. این نیرو با فاصله نسبی بین دو ماهواره نسبت عکس و با سرعت نسبی بین‌شان نسبت مستقیم دارد. این رابطه به صورت کلی به شکل زیر است

$$|f_{C.A}| = \frac{K_{C.A}}{s_{rel}} + C_{C.A} v_{rel} \qquad (۴۲)$$

که s_{rel} و v_{rel} به ترتیب فاصله و سرعت نسبی دو ماهواره، $K_{C.A}$ بهره متناسب با عکس فاصله، $C_{C.A}$ بهره متناسب با سرعت و $\mathbf{f}_{C.A}$ نیروی کنترلی جهت اجتناب از برخورد است. اما این نیرو هنوز در جهت خط دید واصل نیست. ابتدا بردار یکه‌ای در راستای خط دید مورد نظر بوجود می‌آوریم

$$u_{LOS} = \frac{s_{B_iF} - s_{B_jF}}{|s_{B_iF} - s_{B_jF}|} \quad ; \quad i \neq j \qquad (۴۳)$$

که همان بردار یکه ذکرشده است. اکنون کافیست اندازه این نیرو را در راستای مذکور ضرب کنیم تا نیروی مناسب جهت عدم برخورد تولید گردد.

$$f_{C.A} = |f_{C.A}|.u_{LOS} \qquad (۴۴)$$

نیروی تولید شده توسط کنترل‌کننده شاید برای بسیاری از مانورها مناسب باشد اما مانوری وجود دارد که این نیروی کنترلی برایش مناسب نیست و آن مانوری است که دو ماهواره در راستای خط دید واصل بین‌شان به هم نزدیک می‌شوند. در این حالت کنترل‌کننده مانع از برخورد دو ماهواره با یکدیگر می‌گردد ولی در عین حال مانع از ادامه حرکت ماهواره‌ها نیز می‌شود. در این حالت ماهواره‌ها حرکت‌های نوسانی در راستای خط دید خواهند داشت. برای رفع این مشکل می‌توان نیروی کنترلی را طی دو دوران متوالی به اندازه ۹۰ درجه حول محورهای ۱ و ۲ بدنی هر ماهواره دوران داد تا ماهواره‌ها در چنین شرایطی حول یکدیگر دوران داشته باشند و از یکدیگر عبور کنند. بر همین اساس، رابطه بهتر برای تولید نیروی کنترلی به صورت زیر خواهد بود

$$f_{R.C.A} = (R)(f_{C.A}) \qquad (۴۵)$$

که $f_{R.C.A}$ نیروی دوران داده‌شده و R ماتریس دوران در دستگاه بدنی است

$$[R]^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,90^o & -sin\,90^o \\ 0 & sin\,90^o & cos\,90^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\,90^o & 0 & sin\,90^o \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\,90^o & 0 & cos\,90^o \end{bmatrix} \qquad (۴۶)$$

رابطهٔ (۴۵) نیروی مناسب برای اجتناب از برخورد بین دو ماهواره iاُم و jاُم است. رابطهٔ (۴۵) باید برای هر ماهواره نسبت به تک تک ماهواره‌های دیگر محاسبه شود و در نهایت با جمع‌کردن این نیروها، نیروی کنترلی برآیند به‌دست آید. با کمی دقت در رابطهٔ (۴۲) می‌توان به این نکته اشاره کرد که اگر ماهواره‌ها حرکت هم نداشته باشند باز مخرج این رابطه دارای مقدار است. به عبارت دیگر، رابطهٔ عدم برخورد حتی در صورت بی‌حرکت‌بودن ماهواره‌ها به دلیل وجود ترم اولش تولید نیروی عدم برخورد می‌کند. این رابطه زمانی نیروی صفر می‌دهد که هم سرعت نسبی ماهواره‌ها صفر شود و هم فواصل بین ماهواره‌ها بی‌نهایت شود که امری محال است. برای حل این مشکل فرض کنیم هنگامی‌که سرعت نسبی دو ماهواره نسبت به هم صفر است کنترل‌کننده عدم برخورد نباید کار کند. برای پیاده‌سازی این موضوع از سرعت نسبی ماهواره‌ها پسخوراند گرفته و در بهرهٔ متناظر با فاصلهٔ نسبی ضرب می‌کنیم. در این

صورت رابطهٔ نیروی کنترلی عدم برخورد به صورت زیر ساده خواهد شد.

$$|f_{C.A}| = K_{C.A}\frac{v_{rel}}{s_{rel}} \qquad (۴۷)$$

رابطهٔ (۴۷) از دو جهت از رابطهٔ (۴۲) مناسب‌تر است. یکی اینکه رابطهٔ (۴۷) ساده‌تر از رابطهٔ (۴۲) است و دوم اینکه در رابطهٔ (۴۷) نیاز به تنظیم یک بهره داریم درحالی که در رابطهٔ (۴۲) نیاز به تنظیم دو بهره بود. با کمی دقت در این رابطه می‌توان به بیانی دیگر اینگونه پنداشت که بهرهٔ کنترلی $K_{C.A}$ از طریق ضریب v_{rel} به یک بهرهٔ تطبیقی تبدیل شده است به‌طوری‌که هر چه سرعت نسبی ماهواره‌ها بیشتر باشند مقدار بهرهٔ کنترلی بزرگ‌تر و در نتیجه نیروی بیشتری تولید خواهد شد و به عکس. و اگر سرعت نسبی بین ماهواره‌ها صفر باشد کنترل‌کننده از کار می‌ایستد یا به عبارتی دیگر بهرهٔ کنترلی $K_{C.A}$ در نسبت سرعت به مکان یعنی عکس زمان ضرب شده است و بدین معناست که هر چه زمان رسیدن دو ماهواره به هم کمتر باشد نیروی بیشتری باید برای عدم برخورد تولید شود. مقدار بهرهٔ کنترلی $K_{C.A}$ را بر اساس سعی و خطا برابر با ۱۵- درنظر می‌گیریم.

لازم به ذکر است که در مخرج رابطه (۴۲) فاصله مراکز جرم ماهواره‌ها از هم مد نظر قرار گرفته شده است در حالی‌که در برخورد ماهواره‌ها کم‌ترین فاصله میان دو مرکز جرم دو برابر شعاع کره محاط بر ماهواره‌هاست. بنابراین بهتر است در مخرج رابطه (۴۲) ثابتی به اندازه دو برابر شعاع محاط، بلکه کمی بیشتر را از مخرج کم کنیم تا حاشیهٔ اطمینانی برای اجتناب از برخورد یا حاشیهٔ اطمینانی برای نزدیک نشدن بیش از حد ماهواره‌ها به هم باشد.

$$|f_{C.A}| = K_{C.A}\frac{v_{rel}}{s_{rel}-D_{margine}} \qquad (۴۸)$$

پیاده‌سازی کنترل‌کننده‌ها بر روی نانو ماهواره‌های اسفیرز

در این بخش الگوریتم را بر روی یک مدل واقعی پیاده می‌کنیم. مدل انتخابی که برای این مسئله درنظرگرفته شده است میکروماهواره‌های اسفیرز[۶] هستند. هدف از ساخت این میکروماهواره‌ها ایجاد بستری مناسب جهت امتحان روش‌های مختلف آرایشی و نیز تحقیقات برای مأموریت‌هایی از قبیل سفرهای بین سیاره‌ای جهت پیدا کردن حیات در کرات دیگر است. مشخصات فیزیکی این میکروماهواره‌ها در جدول (۵) آمده است.

6. SFHERES

جدول ۵- مشخصات فیزیکی نانوماهواره‌های اسفیرز

m	4.21 (kg)
I_{xx}	2.18×10^{-2} (kg.m^2)
I_{yy}	2.31×10^{-2} (kg.m^2)
I_{zz}	2.13×10^{-2} (kg.m^2)
I_{xy}	9.64×10^{-5} (kg.m^2)
I_{xz}	-2.87×10^{-4} (kg.m^2)
I_{yz}	-3.61×10^{-5} (kg.m^2)
Diameter	0.22 (m)

اسفیرزها دارای ۱۲ پیشرانه‌ها از نوع خاموش- روشن هستند که هر کدام حداکثر می‌تواند ۰/۱ نیوتن نیروی پیشران تولید کند و بر اساس بازویی گشتاور موجود میان پیشرانش‌ها حداکثر ممان برابر با ۰/۲×۰/۱۹۳ نیوتن‌متر خواهد بود.

شبیه‌سازی آرایش برای نانوماهواره‌های اسفیرز

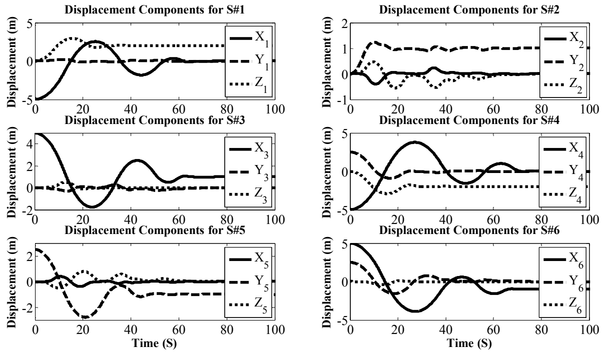
در این بخش تمامی ویژگی‌ها و محدودیت‌های نانوماهواره‌های اسفیرز را در نظر گرفته و الگوریتم آرایشی مورد نظر را بر روی آنها اجرا می‌کنیم. این ویژگی‌ها شامل جرم و ممان اینرسی مربوط به اسفیرزهاست و محدودیت‌ها همان درنظرگرفتن سقف اشباع برای پیشرانه‌ها و تابعِ نیروی ورودی که از نوع پله است. آرایش را برای مانوری انجام می‌دهیم که شش میکروماهواره از آرایشی دوبعدی به آرایشی سه‌بعدی بروند. در جدول (۶) مکان اولیه و مکان نهایی این شش نانوماهواره‌ها مشخص شده است. این جدول بیان‌کنندهٔ تشکیل آرایش از حالت دوبعدی به حالت سه‌بعدی است.

جدول۶ – مکان اولیه و مکان نهایی نانوماهواره‌های اسفیرز

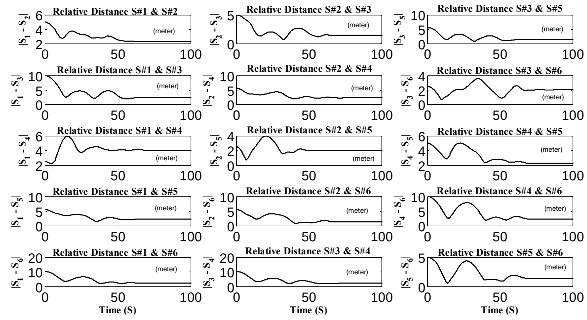
$s_{B_1F}(t_0)$	$[-5\,,0\,,0]^T$	$s^d_{B_1F}$	$[0\,,0\,,2]^T$
$s_{B_2F}(t_0)$	$[0\,,0\,,0]^T$	$s^d_{B_1F}$	$[0\,,1\,,0]^T$
$s_{B_3F}(t_0)$	$[5\,,0\,,0]^T$	$s^d_{B_1F}$	$[1\,,0\,,0]^T$
$s_{B_4F}(t_0)$	$[-5\,,2.5\,,0]^T$	$s^d_{B_1F}$	$[0\,,0\,,-2]^T$
$s_{B_5F}(t_0)$	$[0\,,2.5\,,0]^T$	$s^d_{B_1F}$	$[0\,,-1\,,0]^T$
$s_{B_6F}(t_0)$	$[5\,,2.5\,,0]^T$	$s^d_{B_1F}$	$[-1\,,0\,,0]^T$

نمودارهای شکل (۷) مؤلفه‌های جابه‌جایی را برای این شش ماهواره نشان می‌دهد که ملاحظه می‌شود میکروماهواره‌ها مکان‌های مطلوب خود را بدون هیچگونه خطایی پیدا کرده‌اند. همچنین ملاحظه می‌شود برخی از مؤلفه‌ها که قرار نبوده تغییر کنند چند نوسان را دارند و سپس به مکان اولیهٔ خود باز گشته‌اند که این مسئله به دلیل اجتناب از برخورد بوده است. به عنوان مثال به مؤلفه‌های اول و سوم ماهواره شماره دو دقت کنید.

برای بررسی برخورد داشتن یا نداشتن اسفیرزها در حین مانور، فواصل نسبیِ دو به دوی آنها را در شکل (۸) بررسی خواهیم کرد. در این شکل ملاحظه می‌شود که کم‌ترین فاصله‌ای که اسفیرزها در حین مانور باهم داشته‌اند مربوط به اسفیرزهای شماره (۵) و (۶) است که این فاصله بیش از ۶۰ سانتی‌متر است. با توجه به این که قطر اسفیرزها در حدود ۲۲ سانتی‌متر است می‌توان گفت که اسفیرزها با فاصلهٔ مناسبی از یکدیگر عبور کرده‌اند.



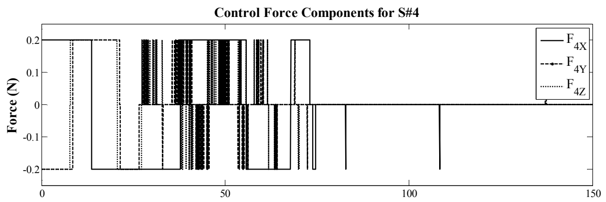
شکل ۷ – مؤلفه‌های جابه‌جایی نانوماهواره‌های اسفیرز



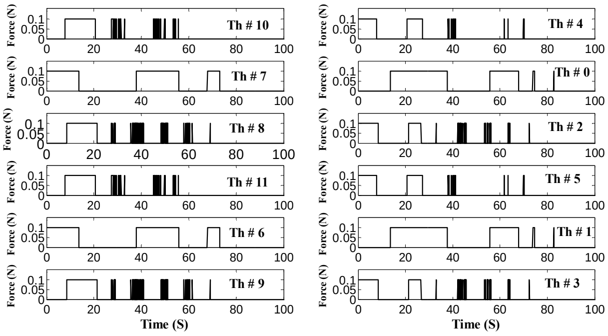
شکل ۸ – تغییرات فواصل بین نانوماهواره‌های اسفیرز نسبت به زمان

اما این آرایش تحت یک تلاش کنترلی شکل گرفته که توسط پیشرانه‌ها تولید شده است. در شکل (۹) مؤلفه‌های تلاش کنترلی برای ماهواره شماره ۴ در دستگاه بدنی نشان داده شده است. لازم به ذکر است که در هر جهت دو پیشرانه با سقف اشباع ۰/۱ نیوتن وجود دارد که در مجموع ۰/۲ نیوتن نیرو در هر جهت تولید می‌شود که در شکل (۷) قابل مشاهده است.

نمودارهای شکل (۹) بیانگر این حقیقت هستند که تلاش کنترلی بسیار فعال بوده و پیشرانه‌ها در حین مانور بسیار به‌کار گرفته شده‌اند. محدودیت سقف اشباع از یک سو و محدودیت تابع ورودی پیشرانه که از نوع روشن- خاموش است، از سوی دیگر باعث شده تا برای رهگیری مکان‌های مطلوب و اجتناب از برخورد ماهواره‌ها پیشرانه‌ها زیاد روشن بمانند. در نمودارهای شکل (۹) بعد از شکل‌گیری آرایش بعضاً شاهد تک پالس‌هایی هستیم که هدف از آنها اصلاح موقعیت اسفیرزهاست. برای اجرای سناریوی تلاش کنترلی مذکور لازم است پیشرانه‌ها به یک نحوی عمل کنند. نحوهٔ تولید نیروی پیشرانش توسط هر کدام از دوازده پیشرانهٔ نصب شده بر روی هر اسفیرز را می‌توان نشان داد که به عنوان نمونه در شکل (۱۰) پیشرانه‌های اسفیرز شمارهٔ ۴ نشان داده شده‌اند.

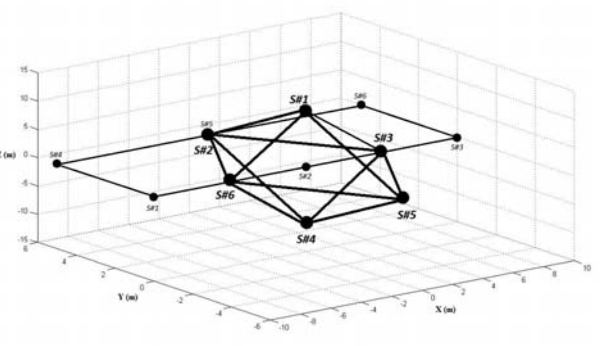


شکل ۹– مؤلفه‌های نیروی کنترلی در مانور اسفیرز شمارهٔ ۴



شکل ۱۰ – نحوهٔ کار پیشرانه‌های اسفیرز شماره ۴

در نهایت مسیر حرکت و همچنین موقعیت‌های اولیه و نهایی میکروماهواره‌ها در دستگاه مداری نشان داده می‌شود. شکل (۱۱) نمایی سه‌بعدی از مانور مذکور است. در این شکل دایره‌های کوچک‌تر نشان‌دهندهٔ مکان اولیه و دایره‌های توپر و بزرگ‌تر نشان‌دهندهٔ مکان نهایی اسفیرزهاست.



شکل ۱۱ – مانور بازشکل‌گیری اسفیرزها

با توجه به مباحث و نمودارهای ارائه شده می‌توان به این نتیجه رسید که الگوریتم ساختار مجازی و همچنین راهبردهای

کنترلی بر روی اسفیرزها با تمام محدودیت‌هایشان پاسخگوی مأموریت‌ها و مانورهاست. البته برای بررسی مفصل این مبحث می‌توان به مرجع [۱۱] مراجعه کرد.

نتیجه‌گیری

با توجه به آنچه در این مقاله مطرح شد می‌توان بیان کرد که با استفاده از الگوریتم ساختار مجازی می‌توان به آرایش مطلوب برای گروهی از ماهواره‌ها در مدار دست یافت و با استفاده از راهبرد عدم برخورد می‌توان بازآرایی ایمن را برای آنها متصور شد. این بازآرایی توسط پیشرانه‌های عکس‌العملی حاصل شد که با توجه به محدودبودن نیروی پیشران در آنها کمی سرعت بازآرایی کاهش یافت ولی در مجموع مأموریت با موفقیت انجام شد. این موفقیت مؤید آن است که می‌توان از این پیشرانه‌ها در مانورهای بازآرایی برای دستیابی به آرایش مطلوب بهره برد.

مراجع

[1] Ren, W. and Beard, R. W., “Formation Feedback Control for Multiple Spacecraft via Virtual Structures”, *Revised Submission to IEEE Proceedings - Control Theory and Applications*, February, 2004.

[2] Parker, G., King, L. and Schaub, H. “Charge Determination for Specified Shape Coulomb Force Virtual Structures”, *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Island, May 1–4, 2006.

[3] Ren, W. and Beard, R. W., “Virtual Structure Based Spacecraft Formation Control with Formation Feedback”, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit,* AIAA 2002-4963, 5-8 California, August 2002.

[4] Desai, J. P., Ostrowski, J. and Kumar, V., “Controlling Formation of Multiple Robots”, *IEEE Transactions on Robotics and Automatioj*, Vol. 17, No. 6, December 2001.

[5] Fierro, R., Das, A., Kumar, V. and Ostrowski, J. “Hybrid Control of Formations of Robots,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Seoul, Korea), May 2001, pp. 157−162

[6] Stipanovic, D. M., Inalhan, G., Teo, R. and Tomlin, C. J., “Decentralized Overlapping Control of a Formation of Unmanned Aerial Vehicles,” *Decision and Control, Proceedings of the 41st IEEE Conference*, Vol. 3 Decamber 2002, pp. 2829-2835.

[7] Olfati-Saber, R., *Flocking for Multi-Agent Dynamic Systems- Algorithms and Theory*, California Institute of Technology, Submitted to the IEEE Transactions on Automatic Control, Technical Report, CIT-CDS 2004-005, June 2004.

[8] Balch, T. and Arkin, R. C., “Behavior-Based Formation Control for Multi-Robot Teams”, *IEEE Transaction on Robotic and Automation*, Vol. 14, No. 6, 1999, pp. 926-939.

[9] Zipfel, P. H., *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*, Edition Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.

[10] Sharifian, Sh., Self-Reconfiguration and Autonomous Algorithm for Spacecraft Formation Flight UsingVirtual Structure Approach, (M. Sc. Thesis), Sharif University of Technology, 2009, (In Persian).

[11] SaberiTavakkoli, M., Implementation of Virtual Structure Approach in MultipleSpacecraft Formation Flight using Visual Sensors, (M. Sc. Thesis), Sharif University of Technology, 2010, (In Persian).

پیوست

می‌دانیم که یک کواترنیون دارای چهار مؤلفه است که سه مؤلفهٔ اول آن طبق قرارداد بخش برداری و یک مؤلفهٔ آن بخش اسکالرکواترنیون را تشکیل می‌دهند. یک کواترنیون را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$q_i = \begin{bmatrix} \vec{q}_i \\ \bar{q}_i \end{bmatrix} \quad \text{(پ. ۱)}$$

که در رابطه بالا $\vec{q}_i$ قسمت برداری و $\bar{q}_i$ قسمت اسکالر کواترنیون q_i است. ضرب دو کواترنیونِ q_a و q_b به صورت زیر تعریف می‌شود [۱].

$$q_a q_b = Q(q_b) q_a \quad \text{(پ. ۲)}$$

که در رابطه بالا $Q(q_b)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱]:

$$Q(q_b) = \begin{pmatrix} \bar{q}_b I - \vec{q}_b^{\times} & \vec{q}_b \\ \vec{q}_b^{T} & \bar{q}_b \end{pmatrix} \quad \text{(پ. ۳)}$$

که در رابطه بالا $\vec{q}_b^{\times}$ ماتریس پادمتقارنِ بردار $\vec{q}_b$ است.

اگر کواترنیون q به‌صورت فرم نشان داده شده در رابطهٔ (پ. ۱) باشد q^* به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود[۱]

$$q^* = \begin{bmatrix} \vec{q}_i \\ \bar{q}_i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} -\vec{q}_i \\ \bar{q}_i \end{bmatrix} \quad \text{(پ. ۴)}$$

لازم به ذکر است که q^* برای محاسبه خطای کواترنیون نسبت به شرایط مطلوبش مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای محاسبه خطای کواترنیون داریم [۱]

$$\vec{q}_e = q^* q^d = \begin{bmatrix} \vec{q}_e \\ \bar{q}_e \end{bmatrix} \quad \text{(پ. ۵)}$$