

طراحی الگوریتم‌های آشکارسازی و جداسازی عیب مبتنی بر حدود آستانه تطبیقی برای زیرسیستم کنترل وضعیت یک ماهواره سه محوره

حسین بلندی^{۱*}، مصطفی عابدی^۲ و مهران حق پرست^۳

۱، ۲ و ۳- دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران

*تهران، نارمک، خ فرجام

h_bolandi@iust.ac.ir

در این مقاله، یک روش آشکارسازی عیب مقاوم بر اساس تولید حدود آستانه تطبیقی برای یک ماهواره سه محوره ارائه می‌شود. برای این منظور، در ابتدا سیستم کنترل وضعیت توسط یک مدل با تغییرات شبه پارامتری خطی (q-LPV) توصیف می‌شود. در ادامه یک مشاهده‌گر بازه‌ای بر اساس مدل فوق طراحی شده است که بر اساس آن، عدم قطعیت‌های پارامتری ماهواره به درون حدود آستانه اعلان عیب منتقل شده و در نتیجه حدود آستانه تطبیقی به دست خواهند آمد. در این مقاله، نشان داده می‌شود که این روش باعث کاهش نرخ اعلان عیب نادرست شده، و نیز عیوب کوچک یا دارای تغییرات شیب‌دار در قیاس با روش‌های ذکر شده به‌طور مؤثرتر تشخیص داده می‌شوند. در بخش دیگر این مقاله، یک الگوریتم جداسازی مبتنی بر روش درخت عیب، همچنین یک سیستم جبران عیب با استفاده از بازپیکربندی عملگرها ارائه شده است. بنابراین بعد از جداسازی چرخ‌های عکس‌عملی معیوب، عملگرهای مغناطیسی مناسب جایگزین آنها می‌شود و در نتیجه خطای کنترل وضعیت، محدود نگاه داشته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ماهواره سه محوره، کنترل وضعیت، عیب، آشکارسازی، جداسازی، مشاهده‌گر بازه‌ای، مدل q-LPV

$I_{w_{4 \times 4}} = \text{Diag}_{4 \times 4} \{I_{wx}, I_{wy}, I_{wz}, I_{wr}\}$ ماتریس ممان اینرسی چرخ‌های عکس‌عملی

d گشتاور اغتشاش

C_f ماتریس پیکربندی چرخ‌های عکس‌عملی

β و α زوایای نصب چرخ‌های عکس‌عملی در دستگاه بنده ماهواره

$T_{mag_{3 \times 1}}$ گشتاور مغناطیسی عملگرهای مغناطیسی

$m = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}$ ممان مغناطیسی گشتاوردهنده‌های مغناطیسی

$B = \begin{bmatrix} B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$ میدان مغناطیسی زمین

RW_r, RW_z, RW_y, RW_x چرخ‌های عکس‌عملی ماهواره

علائم و اختصارات

Z_I و Y_I, X_I دستگاه مختصات اینرسی

Z_B و Y_B, X_B دستگاه مختصات بدنه ماهواره

Z_o و Y_o, X_o دستگاه مختصات مداری ماهواره

$\bar{\omega}_{w_{4 \times 1}} = [\omega_{wx} \ \omega_{wy} \ \omega_{wz} \ \omega_{wr}]^T$ ماتریس ممان‌های اینرسی بردار سرعت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌عملی

$\bar{h}_{w_{4 \times 1}} = [\dot{h}_{x_w} \ \dot{h}_{y_w} \ \dot{h}_{z_w} \ \dot{h}_{r_w}]^T$ گشتاور کنترل

۱. دانشیار (نویسنده مخاطب)

۲. دانشجوی دکتری

۳. کارشناسی ارشد

مقدمه

دقت نشانه‌روی ماهواره یکی از نیازمندی‌های اساسی است که برآورده‌سازی آن وابسته به صحت کامل عملکرد سیستم کنترل وضعیت است. بررسی مأموریت‌های مختلف نشان می‌دهد که بسیاری از عیوب حادث شده در عملگرهای سیستم کنترل وضعیت منجر به افت سرویس‌های مورد انتظار، از دست رفتن کنترل یا منجر به نتایج فاجعه‌بار همانند از دست رفتن کلی مأموریت می‌شود [۱]. بر این اساس، توسعه ابزارهای مدیریت و جبران عیب در یک سیستم حساس همانند کنترل وضعیت که قادر به آشکارسازی و جداسازی عیب بوده مورد نیاز است.

امروزه، روش‌های آشکارسازی و جداسازی عیب مبتنی بر مدل یک حوزه تحقیق توسعه‌یافته و بلوغ یافته در جامعه کنترل محسوب می‌شود که به وفور در سیستم کنترل وضعیت ماهواره‌ها نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این روش‌ها مبتنی بر تست‌های سازگاری است که بر اساس آنها اندازه‌گیری‌های حاصل از سیستم فیزیکی با اطلاعات موجود در مدل مقایسه می‌شوند. اختلاف‌های حاصل شده مانده نام‌گذاری شده است که به وقوع عیوب در سیستم حساس هستند. زمانی که مانده، مخالف صفر باشد نشان‌دهنده رخداد عدم سازگاری در سیستم یا انحراف غیرعادی یک پارامتر تخمین زده شده است [۲-۴]. اما از سوی دیگر خطاهای مدل‌سازی و اغتشاشات در سیستم‌های مهندسی پیچیده گریزناپذیر است و باعث می‌شوند که مانده‌ها حتی در صورت عدم وقوع عیب نیز غیرصفر شوند. بنابراین ضروری است که الگوریتم‌های آشکارسازی و جداسازی عیبی توسعه داده شود تا در مقابل عدم قطعیت‌ها مقاوم باشند [۵، ۶].

یکی از روش‌های مقاوم‌سازی، روش اکتیو است که مبتنی بر تولید مانده‌های مقاوم نسبت به عدم قطعیت و حساس نسبت به رخداد عیب است. بر این اساس، روش‌های تشخیص و جداسازی عیب متنوعی در زیرسیستم کنترل وضعیت ظاهر شده‌اند که از ایده فوق استفاده می‌کنند. به عنوان نمونه، مسئله تشخیص و جداسازی عیب مبتنی بر فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF^۴) و فیلتر کالمن خنثی (UKF^۵) برای مواجهه با دینامیک غیرخطی ماهواره‌ها معرفی شده‌اند [۷، ۸]. این روش‌ها تخمین‌های بهینه‌ای را از حالت‌ها با وجود نویز ایجاد می‌کنند. همچنین، روش‌های مختلفی موجود است که مبتنی بر مشاهده‌گرهای حالت هستند. در این راستا می‌توان تکنیک اختصاص ساختار ویژه^۶ برای آشکارسازی عیب در ژایروهای

ماهواره هندی IRS را ذکر کرد [۹]. مشاهده‌گرهای با ورودی نامعین^۷ نیز، در رانشگرهای^۸ ماهواره MEX برای توسعه الگوریتم‌های تشخیص و جداسازی عیب مقاوم نسبت به اغتشاش مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۰، ۱۱]. تکنیک تولید مانده مقاوم مبتنی بر تئوری H_{∞} در ماهواره میکروسکوپ اعمال شده است [۱۲]. مشاهده‌گرهای مود لغزان^۹ نیز کلاس مهمی از تکنیک‌های مقاوم‌سازی محسوب می‌شوند که به‌طور گسترده برای دینامیک غیرخطی ماهواره‌ها اعمال شده‌اند [۱۳، ۱۴]. روش دیگر برای جبران‌سازی اثرات عدم قطعیت‌ها و اغتشاش‌ها، مشاهده‌گرهای تطبیقی یا عصبی- تطبیقی است که بر خلاف روش‌های مود لغزان، کمیت‌های آنها می‌توانند به‌صورت برخط به‌روزرسانی شده و در نتیجه باند بالای عیب‌ها و عدم قطعیت‌ها با دقت بالایی تخمین زده می‌شوند [۱۷ و ۱۶، ۱۵].

در روش‌های ذکر شده، اگر چه مسئله مقاوم بودن نسبت به اغتشاش‌های نامعین حل شده است اما پاسخگوی مقاوم بودن نسبت به عدم قطعیت‌ها پارامتری نیستند [۲۰-۱۸]. در واقع، در حالتی که مدل‌ها دارای عدم قطعیت در پارامترهای خود هستند، جداسازی کامل مانده‌ها از عدم قطعیت‌ها توسط تعداد سیگنال‌های قابل اندازه‌گیری و در دسترس از سیستم محدود می‌شود [۱۹، ۱۸].

در حالت موجود بودن تعداد نامحدودی از عدم قطعیت‌های پارامتری، راهکار دیگری که به روش پسو مشهور بوده معرفی شده است که در این مقاله نیز مورد نظر است. این روش در دهه‌های اخیر معرفی شده و مبتنی بر ارتقای ویژگی مقاوم بودن سیستم تشخیص و جداسازی عیب در مرحله تصمیم‌گیری برای اعلان عیب است [۲۵-۱۸]. یکی از مشکلاتی که در ماهواره‌ها با آن مواجه هستیم، جداسازی اثرات عیب، از اثر ناشی از عدم قطعیت‌های پارامتری است. به عبارت دیگر عدم درک صحیح از دینامیک ماهواره باعث ایجاد اثرات منفی بر روش‌هایی می‌شود که پیش از این معرفی شدند. هر چند یکی از راهکارها، اتخاذ حدود آستانه محافظه‌کارانه و بعضاً غیرواقعی است اما این راهکار باعث ایجاد تأخیر در آشکارسازی عیب (خصوصاً در مورد عیوب دارای رفتار تغییرات آهسته) یا در برخی موارد از دست رفتن عیوب با دامنه کوچک می‌شود. برای جلوگیری از این مشکلات، در این مقاله از راهکار پسو در سیستم کنترل وضعیت ماهواره بهره‌گیری شده است که تاکنون در این سیستم‌ها کاربری نبوده است. برای این منظور، ابتدا سیستم کنترل وضعیت باید با یک مدل با تغییرات پارامتری

7. unknown input observers
8. trusters
9. sliding mode observers

4. Extended Kalman Filters
5. Unscented Kalman Filters
6. eigen structure assignment

طراحی الگوریتم جداسازی عیب اختصاص داده شده است. سپس، مراحل طراحی سیستم جبران عیب تشریح و در ادامه، شبیه‌سازی‌های عددی برای برخی سناریوهای بروز عیب در چرخ‌های عکس‌العملی ارائه و در نهایت نتیجه‌گیری مقاله بیان می‌شود.

مدل دینامیکی ماهواره

ماهواره مورد نظر، ماهواره‌ای با پایداری سه محوره است که مجهز به چهار چرخ عکس‌العملی و سه عملگر مغناطیسی است. برای آنالیز حرکت آن، سه مجموعه دستگاه مختصات مطابق زیر تعریف می‌شوند؛ (۱) دستگاه مختصات اینرسی متصل به مرکز زمین (Z_I, Y_I, X_I) (۲) دستگاه مختصات بدنه که مرکز آن در مرکز جرم ماهواره و محورهای آن (Z_B, Y_B, X_B) محورهای اصلی اینرسی ماهواره است (۳) دستگاه مختصات مداری ماهواره (Z_o, Y_o, X_o) که محور X_o در راستای سرعت انتقالی ماهواره، محور Z_o در راستای خط واصل ماهواره و مرکز زمین و محور Y_o به‌گونه‌ای اختیار می‌شود که یک دستگاه راست‌گرد حاصل شود. ماهواره به‌صورت یک جسم صلب مدل می‌شود که دارای ماتریس ممان‌های اینرسی $I_t = \text{Diag}_{3 \times 3} \{I_x, I_y, I_z\}$ در راستای محورهای اصلی چرخش است. با این ملاحظات، دینامیک وضعیت ماهواره که ارتباطات مابین سرعت‌های زاویه‌ای و گشتاورهای اعمالی را توصیف می‌کند مطابق زیر به دست می‌آید [۲۶]:

$$\dot{\omega} = I_t^{-1}(I_t \omega \times \omega) - I_t^{-1}(CI_w \omega_w \times \omega) + I_t^{-1}(T - \dot{h}_w) + I_t^{-1}d(t) \quad (1)$$

که بردار سرعت زاویه‌ای ماهواره در دستگاه اینرسی، $\bar{\omega}_{3 \times 1}$ بردار سرعت زاویه‌ای ماهواره در دستگاه اینرسی، $\bar{\omega}_{w_{4 \times 1}} = [\omega_{wx} \ \omega_{wy} \ \omega_{wz} \ \omega_{wr}]^T$ چرخ‌های عکس‌العملی در دستگاه بدنه ماهواره، $\bar{h}_{w_{4 \times 1}} = [\dot{h}_{x_w} \ \dot{h}_{y_w} \ \dot{h}_{z_w} \ \dot{h}_{r_w}]^T$ به ماهواره توسط چرخ‌های عکس‌العملی، $I_{w_{4 \times 4}} = \text{Diag}_{4 \times 4} \{I_{wx}, I_{wy}, I_{wz}, I_{wr}\}$ ماتریس ممان اینرسی چرخ‌های عکس‌العملی، d گشتاور اغتشاش و I_t ماتریس ممان اینرسی ماهواره است. همچنین، C_f ماتریس پیکربندی چرخ‌های عکس‌العملی است که مطابق معادله (۲) محاسبه می‌شود.

در این ماتریس α و β زوایای تعریف شده در شکل (۱) هستند:

$$C_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sin \beta \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \sin \beta \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

خطی ($q\text{-LPV}^1$) مدل شود که در آن عدم قطعیت‌های پارامتری ماهواره نیز لحاظ شده‌اند. در ادامه با استفاده از ابزارهای ریاضیات بازه‌ای (که در ادامه مقاله تشریح می‌شوند) یک مشاهده‌گر بازه‌ای براساس مدل‌سازی فوق طراحی می‌شود که یک باند از خروجی‌های پیش‌بینی شده را با در نظر گرفتن هر دوی خطاهای مدل‌سازی پارامتری و نویزهای اندازه‌گیری تولید می‌کنند. بر این اساس باندهای بالا و پائین عدم قطعیت‌های پارامتری و نویز در حدود آستانه اعلان عیب منتشر شده یا به عبارت دیگر حدود آستانه تطبیقی تولید می‌شوند. در این شرایط، زمانی که مانده‌ها خارج از محدوده‌های اعلان عیب هستند، این رخداد نشان‌دهنده عاملی خارج از عدم قطعیت‌های موجود در سیستم همچون رخداد عیب است. این استراتژی‌ها نرخ‌های رخداد عیب نادرست را به حداقل رسانده، همچنین نشان داده می‌شود که در قیاس با روش‌های مقاوم کلاسیک با حدود آستانه ثابت، عیوب کوچک یا دارای رشد تغییرات آهسته (همانند شیب) نیز به‌طور مؤثرتر و سریع‌تر آشکارسازی می‌شوند. در این مقاله، همچنین مراحل طراحی الگوریتم جداسازی عیب در ترکیب با الگوریتم تشخیص عیب نیز ارائه می‌شود که برای این منظور از روش آنالیز درخت عیب استفاده شده است. در این راستا، با تحقق یک آرشیو از درخت‌های عیب مختلف که به شکل روی برد پیاده‌سازی می‌شوند، مانده‌های تولیدشده توسط سیستم تشخیص عیب آنالیز شده و در نتیجه چرخ‌های عکس‌العملی دارای عیب جداسازی می‌شوند. مرحله نهایی طراحی ارائه شده در این مقاله به سیستم جبران عیب اختصاص داده شده است که مبتنی بر بازیگر بندی عملگرهای در دسترس است. ماهواره مد نظر مجهز به چهار چرخ عکس‌العملی است که در صورت بروز عیب در یکی از آنها، چرخ یدک جایگزین آن می‌شود. بنابراین این موضوع تحمل‌پذیری عیب را در برابر بروز عیب تنها در یک چرخ ایجاد می‌کند. اما در شرایط پرتشعشع و پیچیده موجود در فضا، احتمال رخداد دو یا تعداد بیشتری عیب وجود خواهد داشت. در این شرایط فرایندی سیستماتیک اجرا می‌شود که مبتنی بر جایگزینی عملگرهای مغناطیسی مناسب به جای چرخ‌های عکس‌العملی معیوب است. با به‌کارگیری سیستم جبران عیب فوق نشان داده می‌شود که همواره خطای کنترل محدود نگاه داشته شده و افت عملکرد سیستم کنترل ممانعت می‌ورزد.

در ادامه، ابتدا مدل دینامیکی ماهواره به‌دست آورده می‌شود. سپس، ابزارهای ریاضیاتی بازه‌ای مورد استفاده تشریح می‌شوند. در ادامه، طراحی سیستم تشخیص عیب ارائه می‌شود. بخش بعد به

$$[a, b] * [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \quad (9)$$

$$[a, b] / [c, d] = [a, b] * [1/d, 1/c] \quad (10)$$

, if $0 \notin [c, d]$

تعریف ۱ (باکس): با فرض $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ، باکس $\square X$ یک بردار بازه‌ای بوده که $X \subseteq \square X$ را برآورده ساخته و به صورت $\square X = ([a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n])^T$ نمایش داده می‌شود. همچنین $\text{diam}(\square X) = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)^T$ و $\text{mid}(\square X)$ مرکز آن است.

تعریف ۲ (بسط بازه‌ای طبیعی): با فرض $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ بسط‌های بازه‌ای طبیعی تابع f بر روی یک بردار بازه‌ای $[x]$ مطابق زیر تعریف می‌شود:

$$f([x]) = \{f(x) | x \in [x]\} \quad (11)$$

طراحی الگوریتم آشکارسازی عیب با استفاده از حدود آستانه تطبیقی

استخراج مدل q-LPV ماهواره

با در نظر گرفتن دینامیک غیرخطی (۴) و با تلفیق کردن اثرات اغتشاش $d(t)$ ، نویز $n(t)$ و رخداد عیب $f(t)$ ، فضای حالت می‌تواند به شکل زیر بازنویسی شود:

$$\dot{\omega} = I_t^{-1}(I_t \omega)^\otimes \omega + I_t^{-1}(C_f I_w \omega_w)^\otimes \omega + I_t^{-1}(T - C_f \dot{h}_w) + I_t^{-1}d(t) + f(t) \quad (12)$$

$$y(t) = C\omega(t) + n(t) \quad (13)$$

که C یک ماتریس واحد است. مطابق با دینامیک فوق، می‌توان نشان داد که مدل q-LPV ماهواره به صورت زیر به دست آورده می‌شود که در آن عدم قطعیت‌های پارامتری در قالب ضرایبی از متغیرهای حالت، ورودی و اغتشاش ظاهر می‌شوند:

$$\dot{\omega} = A(\omega, \theta)\omega + B(\theta)u + B(\theta)d(t) + f(t) \quad (14)$$

$$y(t) = C\omega(t) + n(t) \quad (15)$$

در روابط فوق:

$$A = I_t^{-1}((I_t \omega)^\otimes + (C_f I_w \omega_w)^\otimes) \quad (16)$$

$$B = I_t^{-1} \quad (17)$$

$$u = T - C_f \dot{h}_w \quad (18)$$

مقادیر به دست آمده برای ماتریس‌های ضرایب فوق در پیوست الف تشریح شده‌اند. در معادله (۱۴)، بردار پارامترهای عدم قطعیت ناشی از ممان‌های اینرسی ماهواره I_t و ممان‌های اینرسی چرخ I_w

در معادله (۱)، مقدار گشتاورهای تولیدی توسط عملگرها را نشان می‌دهد که توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T = -C_f \dot{h}_w + T_{mag} \quad (3)$$

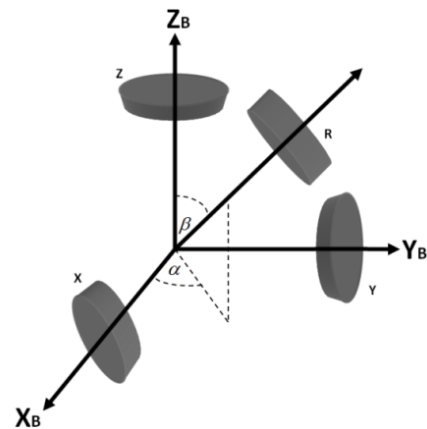
که $\dot{h}_{w_{4 \times 1}}$ ممان اینرسی اعمال شده توسط چرخ‌ها و $T_{mag_{3 \times 1}}$ گشتاور مغناطیسی تولید شده توسط عملگرهای مغناطیسی است. معادله (۱) می‌تواند به شکل زیر بازنویسی شود:

$$\dot{\omega} = I_t^{-1}(I_t \omega)^\otimes \omega + I_t^{-1}(C_f I_w \omega_w)^\otimes \omega + I_t^{-1}(T - C_f \dot{h}_w) + I_t^{-1}d(t) \quad (4)$$

در رابطه فوق، عملگر \otimes برای انجام عملیات زیر بر روی یک ماتریس استفاده می‌شود:

$$P^\otimes = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

در بخش بعد، عملیات ریاضیاتی بازه‌ای مورد استفاده در این مقاله تشریح می‌شوند.



شکل ۱- ساختار در نظر گرفته شده برای چرخ‌های عکس‌العملی ماهواره

ریاضیات بازه‌ای

یک عدد بازه‌ای $X = [a, b]$ یک مجموعه به صورت $\{x : a \leq x \leq b\}$ از اعداد حقیقی مابین بازه و نقاط انتهایی a و b است. ریاضیات بازه‌ای روی مجموعه‌ای از بازه‌ها به جای مجموعه‌ای از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. بر این اساس، با در نظر گرفتن عملیات $\{+, -, *, /, 0\}$ و بازه‌های A و B خواهیم داشت [۲۷]:

$$A \circ B = \{a \circ b : a \in A, b \in B\} \quad (6)$$

با این روش، چهار عملیات بازه‌ای اصلی مطابق زیر تعریف می‌شوند:

$$[a, b] + [c, d] = [a+c, b+d] \quad (7)$$

$$[a, b] - [c, d] = [a-d, b-c] \quad (8)$$

یک بازه زمانی ثابت $[0 \ t]$ با عنوان مجموعه قابل دسترس در زمان t نام‌گذاری شده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\widehat{W}(0, t_1) = \{\widehat{\omega}(t, \theta, u, y) : t \in [0 \ t_1], \theta \in \Theta\} \quad (24)$$

تعاریف مشابهی را می‌توان همچنین برای مجموعه خروجی‌های تخمین زده شده $\widehat{Y}(t)$ اعمال کرد. بنابراین، در هر لحظه زمانی، $\widehat{W}(t)$ توسط باکس زیر قابل توصیف است:

$$\widehat{W}(t) = \{\widehat{\omega}(t, \theta, u, y) : \theta \in \Theta\} \quad (25)$$

که $\widehat{\omega}(t)$ و $\widehat{\omega}(t)$ مطابق (۲۶) و (۲۷) تعریف می‌شوند:

$$\underline{\widehat{\omega}}(t) = \min\{\widehat{\omega}(t) : \widehat{\omega}(t) \in \widehat{W}(t)\} \quad (26)$$

$$\overline{\widehat{\omega}}(t) = \max\{\widehat{\omega}(t) : \widehat{\omega}(t) \in \widehat{W}(t)\} \quad (27)$$

به‌طور مشابه می‌توان تعاریف معادلی را برای توصیف باکس $\square\widehat{Y}(t)$ بکار بست.

تولید مانده

همان‌طور که در بخش مقدمه ذکر شد، راهکار مقاوم‌سازی پسیو در این مقاله اختیار شده است که در مرحله تصمیم‌گیری برای اعلان عیب اعمال می‌شود. در این روش برخلاف روش‌های اکتیو، اثر عدم قطعیت‌ها در مرحله تولید مانده‌ها جبران نمی‌شود بلکه بر اساس انتشار اثر عدم قطعیت‌ها در حدود آستانه اعلان عیب عمل می‌کند که در نتیجه آن حدود آستانه تطبیقی حاصل می‌شوند [۲۰-۲۲]. در این راهکار، کاربری مشاهده‌گر بازه‌ای طراحی شده برای تست سازگاری خروجی اندازه‌گیری شده با خروجی حاصل از مشاهده‌گر با استفاده از مدل بدون عیب از سیستم است. برای انجام این تست سازگاری باید یک مانده نامی مطابق معادله (۲۸) تولید کرد که اندازه‌گیری‌های متغیرهای فیزیکی سیستم $y(t)$ را با تخمین $\widehat{y}(t)$ از این متغیرها مقایسه می‌کند:

$$r(t) = \widehat{y}(t) - y(t) \quad (28)$$

با توجه به اینکه این مانده توسط مشاهده‌گر بازه‌ای تولید می‌شود، اثر عدم قطعیت‌های پارامتری، اغتشاش‌ها و نویزها در مانده $r(t)$ توسط بازه زیر محدود می‌شود:

$$r(t) \in [\underline{r}(t), \overline{r}(t)] \quad (29)$$

که:

$$\underline{r}(t) = \underline{\widehat{y}}(t) - y(t) \quad (30)$$

$$\overline{r}(t) = \overline{\widehat{y}}(t) - y(t) \quad (31)$$

در روابط فوق، $\underline{\widehat{y}}(t)$ و $\overline{\widehat{y}}(t)$ باندهای خروجی پیش‌بینی شده بود که توسط مشاهده‌گر بازه‌ای ارائه شده در معادلات (۱۹) و (۲۰)

است. این بردار توسط یک مجموعه Θ از نوع باکس محدود می‌شود، به عبارت دیگر $\Theta = \{\theta \in IR^p \mid \underline{\theta} \leq \theta \leq \overline{\theta}\}$ خواهد بود. به‌طور مشابه بردارهای نویز و عدم قطعیت نیز به شکل $d \in [\underline{d}, \overline{d}]$ و $n \in [\underline{n}, \overline{n}]$ محدود می‌شوند.

مشاهده‌گر بازه‌ای

مشاهده‌گر بازه‌ای نوع خاصی از مشاهده‌گرهای مجموعه- عضویت بوده که باند از پیش تعیین‌شده‌ای را بر روی اغتشاشات خارجی، نویزها و پارامترهای عدم قطعیت در نظر گرفته و مجموعه‌ای از حالت‌های تخمین زده شده را که با باندهای تعیین شده و اندازه‌گیری‌های جاری سازگار هستند، تولید می‌کنند [۲۰، ۲۷]. در این مقاله، یک مشاهده‌گر بازه‌ای غیرخطی با ساختار لیونبرگر برای سیستم‌های (۱۴) و (۱۵) طراحی شده است. این مشاهده‌گر براساس معادلات (۱۹) و (۲۰) توصیف می‌شود که برای استخراج آن از ابزارهای ریاضیات بازه‌ای تشریح شده در بخش قبل استفاده شده است:

$$[\dot{\widehat{\omega}}] = [A][\omega] + [B][u] + [B][d] + LC([\omega] - [\widehat{\omega}]) \quad (19)$$

$$y(t) = C\omega(t) + n(t) \quad (20)$$

در رابطه فوق، L بهره مشاهده‌گر است که برای تضمین پایداری مشاهده‌گر برای تمامی $\theta \in \Theta$ طراحی شده است. بنابراین مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای مطابق زیر استخراج می‌شوند:

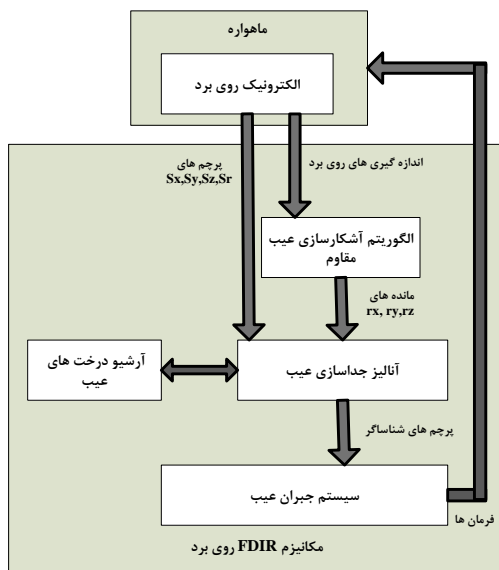
$$[\dot{\widehat{\omega}}_x] = [A_{11}][\omega_x] + [A_{12}][\omega_y] + [A_{13}][\omega_z] + [B_{11}][u_x] + [B_{12}][u_y] + [B_{13}][u_z] + [B_{11}][d_x] + [B_{12}][d_y] + [B_{13}][d_z] + L_{11}([\omega_x] - [\widehat{\omega}_x]) + L_{12}([\omega_y] - [\widehat{\omega}_y]) + L_{13}([\omega_z] - [\widehat{\omega}_z]) \quad (21)$$

$$[\dot{\widehat{\omega}}_y] = [A_{21}][\omega_x] + [A_{22}][\omega_y] + [A_{23}][\omega_z] + [B_{21}][u_x] + [B_{22}][u_y] + [B_{23}][u_z] + [B_{21}][d_x] + [B_{22}][d_y] + [B_{23}][d_z] + L_{21}([\omega_x] - [\widehat{\omega}_x]) + L_{22}([\omega_y] - [\widehat{\omega}_y]) + L_{23}([\omega_z] - [\widehat{\omega}_z]) \quad (22)$$

$$[\dot{\widehat{\omega}}_z] = [A_{31}][\omega_x] + [A_{32}][\omega_y] + [A_{33}][\omega_z] + [B_{31}][u_x] + [B_{32}][u_y] + [B_{33}][u_z] + [B_{31}][d_x] + [B_{32}][d_y] + [B_{33}][d_z] + L_{31}([\omega_x] - [\widehat{\omega}_x]) + L_{32}([\omega_y] - [\widehat{\omega}_y]) + L_{33}([\omega_z] - [\widehat{\omega}_z]) \quad (23)$$

که $\widehat{\omega}(t, \theta, u, y)$ جواب رابطه (۱۹) در زمان t برای بردار پارامتری $\theta \in \Theta$ و برای یک توالی داده شده از ورودی‌ها و خروجی‌های $\{u, y\}$ در $t \in [0 \ t_1]$ است. در این راستا مجموعه مقادیر برای

رخدادهای میانی باید لحاظ شوند که هر یک از رخدادهای سطح پایین‌تر یکی از ورودی‌های رخدادهای سطح بالاتر محسوب می‌شوند. در ادامه، این رخدادهای میانی تشریح می‌شوند. قابل ذکر است که وابسته به توالی رخداد عیب، در هر یک از سطرها جدول (۱) در سطح ۳، ۶ سناریوی عیب امکان پذیر است. همچنین در سطح بالا، ۲۴ سناریوی عیب امکان‌پذیر است. در این جدول برای اختصار از ذکر جزئیات این توالی‌ها اجتناب شده است.



شکل ۲- مکانیزم آشکارسازی، جداسازی و جبران عیب مد نظر برای سیستم کنترل وضعیت

سطح ۱- رخداد عیب در تنها یک چرخ: این سطح مشتمل بر پایین‌ترین سطح رخدادها در درخت عیب بوده که بر اساس آن اعلان عیب در یکی از چرخ‌های RW_x و RW_y و RW_z اعلان می‌شود. شکل (۳) درخت عیب را برای اعلان عیب در RW_x نشان می‌دهد. ساختارهای مشابهی برای سایر چرخ‌ها نیز در نظر گرفته شده است. A_x ، A_y و A_z در شکل (۳) متناظر با مانده‌های r_x ، r_y و r_z است، در زمانی که مانده‌های متناظر از حدود آستانه تطبیقی ارائه شده در (۳۳) خارج می‌شوند، ست (یک) شده و در غیر این صورت مقادیر صفر خود را نگاه می‌دارند. همچنین s_x ، s_y و s_z در زمانی که چرخ‌های متناظر روشن شده باشند، ست (یک) شده و در غیر این صورت ریست (صفر) می‌شوند. با اعمال گیت‌های AND به ورودی‌های دودویی تعریف شده در فوق، مقدار پرچم F_x تعیین می‌شود. این پرچ به صورت لچ تعریف شده است بدین معنی که بعد از وقوع عیب در RW_x به طور دائمی ست (یک) می‌شود. پس از اعلان رخداد عیب در هر یک از چرخ‌ها، آنها باید

تولید می‌شوند. بر این اساس، رخداد عیب در صورتی اعلان می‌شود که خروجی اندازه‌گیری به خروجی‌های بازه‌ای زیر متعلق نباشد:

$$y(t) \notin [\underline{y}(t), \bar{y}(t)] \quad (32)$$

این تست معادل با تست سازگاری زیر است که مقادیر بالا و پایین از حدود آستانه تطبیقی را نشان می‌دهد:

$$0 \notin [\underline{\hat{y}}(t), \bar{\hat{y}}(t)] - y(t) = [\underline{r}(t), \bar{r}(t)] \quad (33)$$

الگوریتم جداسازی عیب با استفاده از آنالیز درخت عیب

بعد از آشکارسازی عیب، مرحله بعد جداسازی المان‌های معیوب در سیستم کنترل وضعیت است. برای این منظور، روش آنالیز درخت عیب مد نظر قرار گرفته است که ابزار قدرتمندی برای تبدیل رفتار ناشی از رخداد عیب در سیستم‌ها به یک دیاگرام بصری محسوب می‌شود. این روش، مکانیزمی را برای آنالیز سیستم‌های پیچیده با استفاده از علائم، منطق‌ها و مجموعه قوانین بسیار ساده فراهم می‌سازد. شکل (۲) ارتباطات و منطق طراحی شده در این مقاله برای مکانیزم‌های آشکارسازی، جداسازی و جبران عیب را در سیستم کنترل وضعیت ارائه می‌دهد.

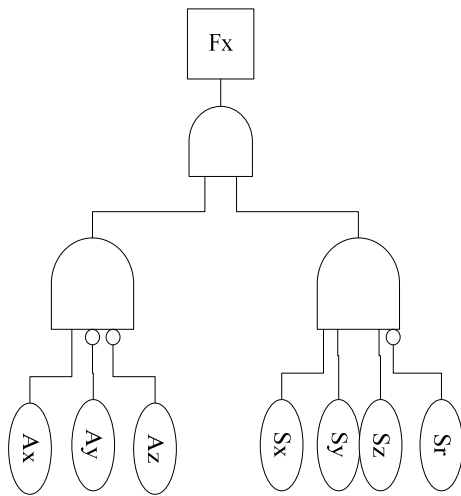
بر اساس این شکل، مانده‌های r_x ، r_y و r_z که توسط سیستم آشکارسازی عیب تولید می‌شوند به عنوان ورودی‌ها برای مرحله جداسازی عیب به کار گرفته شده‌اند. همچنین، ورودی‌های s_x ، s_y و s_z که حالت‌های خاموش/ روشن چرخ‌ها را نشان می‌دهند برای مقاصد جداسازی، مورد نیاز هستند. آرشیو درخت‌های عیب به صورت روی برد پیاده‌سازی شده و ترکیب گسترده‌ای از رخدادهای میانی را نشان می‌دهند که به معیوب شدن کامل سیستم کنترل وضعیت (رخداد سطح بالا) منجر می‌شود.

بنابراین، با آنالیز ورودی‌های مرحله جداسازی و استفاده از روابط تعریف شده در آرشیو درخت‌های عیب، این امکان وجود دارد که پرچم‌های شناساگر فعال شوند.

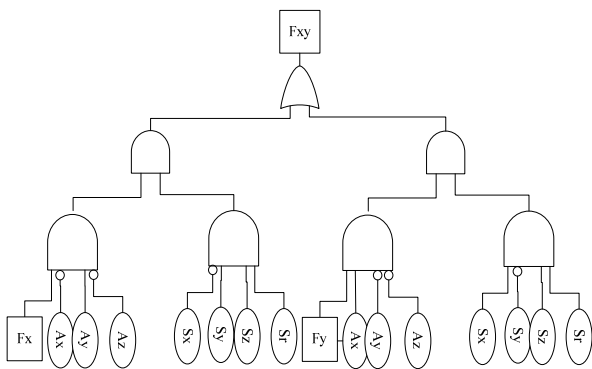
این پرچم‌ها المان‌هایی را نشان می‌دهند که منجر به بروز یک عیب در سیستم کنترل وضعیت شده‌اند. قبل از ساخت درخت‌های عیب، ابتدا باید سناریوهای عیب مختلفی را که در سیستم کنترل وضعیت رخ می‌دهند، تعیین کنیم. جدول (۱) این سناریوها را به همراه پرچم‌های شناساگر متناظر با هر کدام نشان می‌دهد. در اینجا برای ساخت درخت عیب، معیوب شدن کامل هر چهار چرخ به عنوان رخداد سطح بالا در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، مطابق با جدول (۱)، سه سطح از

توسط سیستم جریان عیب خاموش شوند (هر چند که F_x ، F_y و F_z مقادیر ست خود را نگاه می‌دارند).

جدول ۱- سناریوهای عیب مختلف در نظر گرفته شده برای ساخت درخت‌های عیب

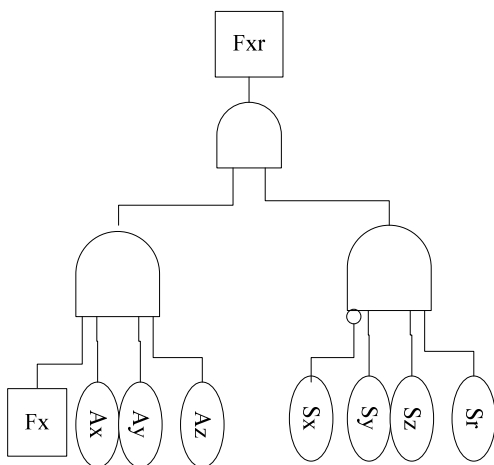


شکل ۳- درخت‌های عیب سطح ۱- رخداد عیب در RW_x



شکل ۴- درخت‌های عیب سطح ۲- سناریوهای $RW_x \rightarrow RW_y$ و $RW_y \rightarrow RW_x$

$$RW_y \rightarrow RW_x$$



شکل ۵- درخت‌های عیب سطح ۲- سناریوی $RW_x \rightarrow RW_r$

پرچم شناساگر	سناریوی عیب	سطح عیب
F_x	RW_x	سطح ۱
F_y	RW_y	
F_z	RW_z	
F_{xy}	$RW_x \rightarrow RW_y$ or $RW_y \rightarrow RW_x$	سطح ۲
F_{xz}	$RW_x \rightarrow RW_z$ or $RW_z \rightarrow RW_x$	
F_{zy}	$RW_y \rightarrow RW_z$ or $RW_z \rightarrow RW_y$	
F_{xr}	$RW_x \rightarrow RW_r$	
F_{yr}	$RW_y \rightarrow RW_r$	
F_{zr}	$RW_z \rightarrow RW_r$	سطح ۳
F_{xyz}	وقوع عیب در RW_z, RW_y, RW_x	
F_{xyr}	وقوع عیب در RW_r, RW_y, RW_x	
F_{yzt}	وقوع عیب در RW_r, RW_z, RW_y	سطح بالا
F_{xzt}	وقوع عیب در RW_r, RW_z, RW_x	
F_{xyzt}	وقوع عیب در RW_r, RW_z, RW_y, RW_x	

سطح ۲- رخداد عیب در دو چرخ: در این سطح، عیب

ممکن است در پیکربندی‌های مختلف از چرخ‌ها مطابق با جدول (۱) رخ دهد. به عنوان نمونه، شکل (۴)، درخت عیب را برای سناریوهای $RW_x \rightarrow RW_y$ و $RW_y \rightarrow RW_x$ و شکل (۵) سناریوی $RW_x \rightarrow RW_r$ را به نمایش می‌گذارد.

پس از آن، عیب در RW_F رخ داده است و در نتیجه تمامی متغیرهای A_x ، A_y و A_z به مقدار یک تغییر حالت داده‌اند. در این حالت، بر اساس روابط و منطق ارائه شده در شکل (۵)، مرحله جداسازی عیب تکمیل شده و F_{xT} ست می‌شود.

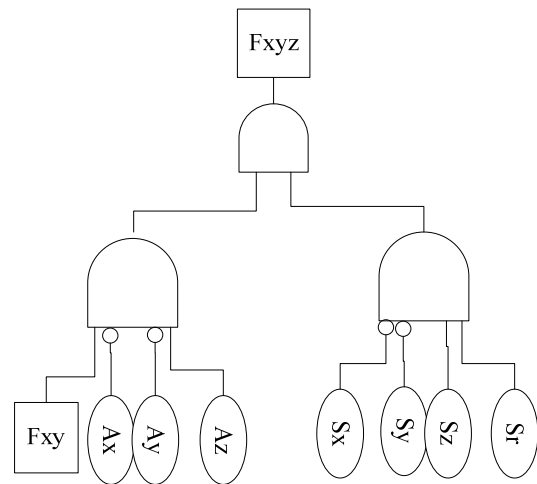
سطح ۳- رخدادهای عیب در سه چرخ: با توسعه قوانین ارائه شده در سطوح قبل، درخت‌های عیب در این سطح نیز می‌توانند تولید شوند. به عنوان نمونه، شکل (۶)، درخت عیب را برای سناریوی $RW_x \rightarrow RW_y \rightarrow RW_z$ نشان می‌دهد.

پس از تولید درخت‌های عیب در سطح ۳، ترکیب رخدادهایی که منجر به رخداد سطح بالا (معیوب شدن کامل هر چهار چرخ) می‌شود، باید استخراج شود. شکل (۷) درخت عیب سطح بالا را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که در این شکل به دلیل کمبود فضا تنها دو نوع رخداد عیب نشان داده شده است که منجر به بروز یک رخداد سطح بالا می‌شود. سایر رخدادها را نیز می‌توان به طور مشابه به درخت عیب موجود در شکل (۷) اضافه کرد. همان‌طور که در ابتدای این بخش ذکر شد، تمامی درخت‌های عیب در سطوح مختلف، در بخش آرشیبو درخت‌های عیب پیاده‌سازی می‌شوند. پس از تشخیص عیب و دریافت ورودی‌های مناسب، این ورودی‌ها در درخت‌های عیب از سطوح پایین‌تر تا سطوح بالاتر انتشار می‌یابد و پرچم‌های شناساگر فعال می‌شوند. بر این اساس، جداسازی علت‌های بروز عیب امکان‌پذیر می‌شود.

طراحی سیستم جبران عیب با استفاده از بازپیکربندی عملگرها

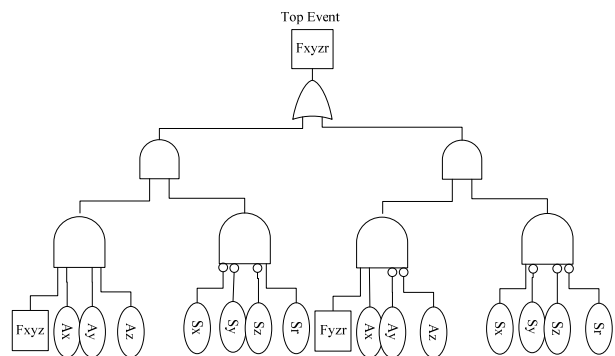
بعد از جداسازی عیب، مرحله بعد جبران اثر عیوب حادث شده با استفاده از سیستم جبران عیب است. ماهواره مورد نظر در این مقاله مجهز به یک چرخ یدک است که قابلیت تحمل‌پذیری را در برابر رخداد عیب در تنها یک چرخ فراهم می‌آورد. اما در شرایط پیچیده و پرتشعش موجود در فضا، سیستم کنترل وضعیت ممکن است که با وقوع دو یا چند عیب در چرخ‌های عکس‌العملی نیز مواجه شود. بنابراین، برای ممانعت از افت دقت کنترل وضعیت باید راهکاری برای این شرایط اتخاذ شود.

در این مقاله، یک فرایند سیستماتیک بر اساس بازپیکربندی عملگرها ارائه می‌شود تا در نهایت به یک سیستم کنترل وضعیت تحمل‌پذیر نسبت به عیب دست یابیم. این راهکار، پایداری سیستم کنترل وضعیت را برای سناریوهای عیب مختلف تضمین می‌کند. در این روش عملگرهای مغناطیسی مناسب انتخاب شده و جایگزین چرخ‌های عکس‌العملی معیوب می‌شود. عملگرهای مغناطیسی، وسایل



شکل ۶- درخت‌های عیب سطح ۳- سناریوی $RW_x \rightarrow RW_y \rightarrow RW_z$

در شاخه سمت چپ از شکل ۴، F_x به عنوان ورودی استفاده شده است، بدین معنی که در ابتدا RW_x به عنوان یک چرخ معیوب تشخیص داده شده و توسط سیستم جبران عیب خاموش می‌گردد (اما F_x همچنان در مقدار یک باقی می‌ماند). پس از آن، عیب در RW_y تشخیص داده می‌شود و بنابراین مطابق با ورودی‌های ارائه شده در شکل (۴)، به مقدار ست (یک) تغییر حالت می‌دهد. در نهایت چرخ RW_y باید توسط سیستم جبران عیب، خاموش شود. شرایط مشابهی در مورد شاخه سمت راست از شکل فوق وجود خواهد داشت، به جز اینکه ابتدا RW_y به عنوان چرخ معیوب تشخیص داده می‌شود. در مورد سناریوی $RW_x \rightarrow RW_F$ (شکل ۵)، ابتدا فرض می‌شود که عیب در RW_x رخ داده است و جایگزین آن شده است.



شکل ۷- درخت عیب ساخته شده برای رخداد سطح بالا

(۲) محاسبه شوند. در این جدول، T_{cx} ، T_{cy} و T_{cz} ممان‌های مطلوب حول محورهای رول، پیچ و یاو است که توسط قانون کنترل وضعیت، فرمان‌دهی می‌شوند. روابط کاملاً مشابهی را می‌توان برای سایر چرخ‌ها نیز ارائه کرد.

رخداد عیب در دو چرخ عکس‌العملی

در این شرایط، سیستم کنترل وضعیت، زیرفعال است و در نتیجه یک محور کنترل ناپذیر خواهد شد. بنابراین در این شرایط عملگرهای مغناطیسی مناسب باید فرمان‌دهی شوند. به عنوان نمونه در سطر دوم از جدول (۲)، سناریوی رخداد عیب در چرخ‌های RW_x و RW_y ارائه شده است. در این وضعیت، وابسته به اینکه چرخ یدک برای کنترل کدام محور به کار بسته شود، دو حالت اعمال فرمان امکان‌پذیر است که در هر یک از این حالت‌ها فرمان‌های کنترلی به‌دست آمده، ارائه شده‌اند. سطر سوم از این جدول نیز حالتی را نشان می‌دهد که یکی از چرخ‌های معیوب، چرخ یدک است. به‌طور مشابه سناریوهای متعدد دیگری را نیز می‌توان برای بروز عیب همزمان در دو چرخ ذکر کرد.

رخداد عیب در سه چرخ عکس‌العملی

در سطر چهارم از جدول (۲)، رخداد عیب در هر سه چرخ RW_x ، RW_y و RW_z را نشان می‌دهد. در این شرایط، وابسته به اینکه از چرخ یدک برای کنترل کدام محور استفاده می‌شود، سه حالت امکان‌پذیر است که فرمان‌های اعمال‌شونده برای هر حالت در این جدول ارائه شده است. به‌طور مشابه می‌توان سناریوهای دیگر بروز عیب همزمان در سه چرخ که شامل چرخ یدک نیز باشد نیز در نظر گرفت.

جدول ۲- استراتژی‌های جبران عیب برای سناریوهای مختلف

فرمان‌های کنترل	گشتاوردهنده‌ای استفاده شده	محور کنترل شده توسط چرخ یدک	چرخ‌های معیوب
$\dot{h}_R = -T_{cy} / \sin \beta \sin \alpha$ $\dot{h}_z = -T_{cz} + T_{cy} \cot \beta \cos \alpha$ $M_y = -B_z T_{cx} / (B_y^2 + B_z^2)$ $M_z = B_y T_{cx} / (B_y^2 + B_z^2)$	-	X	RW_x
$\dot{h}_R = -T_{cy} / \sin \beta \sin \alpha$ $\dot{h}_z = -T_{cz} + T_{cy} \cot \beta \cos \alpha$ $M_y = -B_z T_{cx} / (B_y^2 + B_z^2)$ $M_z = B_y T_{cx} / (B_y^2 + B_z^2)$	MTQ _x MTQ _z	X	RW_x RW_y

تولیدکننده ممان مغناطیسی است که گشتاورهای آنها مطابق رابطه زیر از اثر متقابل با میدان مغناطیسی زمین تولید می‌شود [۲۶]:

$$T_{mag} = m \times B = \begin{bmatrix} m_y B_z - m_z B_y \\ m_z B_x - m_x B_z \\ m_x B_y - m_y B_x \end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

در رابطه فوق، $m = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}$ ممان مغناطیسی تولید شده توسط گشتاوردهنده‌های مغناطیسی و $B = \begin{bmatrix} B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$ میدان مغناطیسی زمین است. گشتاوردهنده‌های مغناطیسی در حالت نرمال نیز در ماهواره‌ها برای انجام مود کنترل بارزدایی مورد نیاز هستند که مومنتم زاویه‌ای مضاعف ایجاد شده در چرخ‌های عکس‌العملی را از بین می‌برند. با توجه به موضوع فوق، راهکار پیشنهاد شده در این مقاله، هیچ نوع تجهیز یا هزینه اضافه را تحمیل نمی‌کند. علاوه بر این، این گشتاوردهنده‌ها به دلیل برخورداری از یک ساختار ساده، بسیار قابل اطمینان است به‌گونه‌ای که احتمال وقوع عیب در آنها ناچیز است. در ادامه، سناریوهای عیب مختلف که ممکن است در چرخ‌های عکس‌العملی رخ دهند، تشریح شده و برای هر یک روش جبران‌سازی مناسب ارائه می‌شود.

رخداد عیب در یک چرخ عکس‌العملی

در این حالت فرض می‌شود که عیب در یکی از چرخ‌های نصب شده در محورهای x ، y یا z روی می‌دهد. در این شرایط از آنجا که سیستم کنترل وضعیت یک چرخ یدک دارد، این چرخ می‌تواند جایگزین چرخ معیوب شود. به عنوان نمونه در حالتی که چرخ محور x معیوب باشد، چرخ یدک برای تولید گشتاور کنترل مطلوب حول این محور استفاده می‌شود. بنابراین، مطابق روابط (۲) و (۳)، ممان تولیدشونده حول سه محور ماهواره مطابق رابطه زیر به‌دست آورده می‌شود:

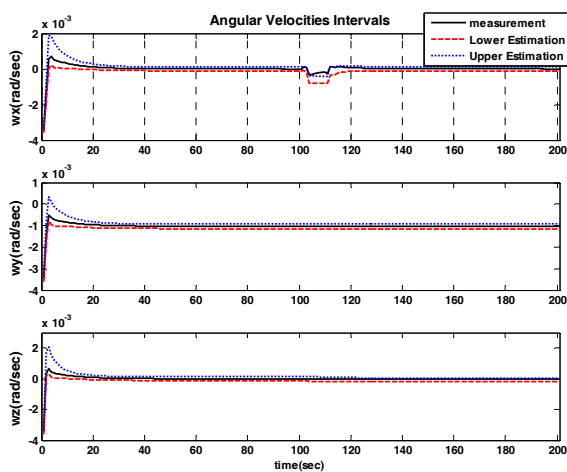
$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_R \sin \beta \cos \alpha \\ -\dot{h}_y - \dot{h}_R \sin \beta \sin \alpha \\ -\dot{h}_z - \dot{h}_R \cos \beta \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

در رابطه فوق، \dot{h}_y و \dot{h}_z ممان‌های تولید شده توسط چرخ‌های y و z و \dot{h}_R ممان تولید شده توسط چرخ یدک است. همچنین α و β زوایای نصب چرخ‌های عکس‌العملی است که در شکل (۱) نشان داده شده‌اند. در استخراج رابطه فوق، فرض شده است که گشتاوردهنده‌های مغناطیسی خاموش هستند. مطابق با رابطه (۳۵)، برای تولید گشتاورهای مطلوب حول محورهای ماهواره، فرمان‌ها (ممان‌های) کنترلی تولیدشونده توسط هر یک از چرخ‌های عکس‌العملی باید بر اساس نتایج ارائه شده در سطر اول از جدول

خورشیدی در نظر گرفته شده‌اند. با آنالیز اثرات فوق، در نهایت مقادیر $\left[-10^{-5} \quad +10^{-5} \right]$ نیوتن بر متر برای توصیف اغتشاش معادل در سیستم اختیار شده‌اند. همچنین فرض می‌شود که اندازه نویز اندازه‌گیری در بازه $\left[-10^{-4} \quad 10^{-4} \right]$ رادیان بر ثانیه دارای تغییرات باشد. در ادامه، برای بررسی قابلیت عملکرد الگوریتم‌های طراحی شده، سناریوهای ذیل در نظر گرفته شده‌اند.

سناریوی ۱- تست رخداد عیب در RW_x

در این سناریو، یک عیب ناگهانی $f_x = 1mN.m$ (برابر با ۱۰٪ حداکثر مومنتم قابل تولید در چرخ‌ها) در زمان $t = 100s$ اعمال شده است. شکل (۸) بازه‌های سرعت زاویه‌ای تولید شده با استفاده از مشاهده‌گر بازه‌ای (۱۹) را نشان می‌دهد. همچنین شکل (۹) تست سازگاری $0 \in [F]$ را بر اساس حدود آستانه تطبیقی تولید شده در (۳۳) را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود، تنها مانده r_x توسط رخداد عیب تحت تأثیر قرار گرفته است. بنابراین با استفاده از درخت عیب ارائه شده در شکل (۳)، پرچم F_x ست شده که متناظر با بروز عیب در RW_x است (شکل ۱۰). همان‌طور که ملاحظه می‌شود، اعلان رخداد عیب با یک تأخیر زمانی در حدود ۵ ثانیه صورت گرفته است. شکل (۱۱) نشان می‌دهد که سیستم جبران عیب، بلافاصله فعال شده است. مطابق با این شکل، RW_x در زمان $t = 105s$ روشن شده است و به سرعت مناسب رسیده است. در این زمان چرخ RW_x نیز خاموش شده است. شکل (۱۲)، زوایای وضعیت به دست آمده در این سناریو را به نمایش می‌گذارد. در این شکل ملاحظه می‌شود که بعد از جایگزینی چرخ‌ها، زوایای وضعیت مجدداً به سوی صفر میل می‌کند و در نتیجه پایداری ماهواره تضمین می‌شود.



شکل ۸- بازه‌های سرعت زاویه‌ای تولید شده در سناریوی ۱

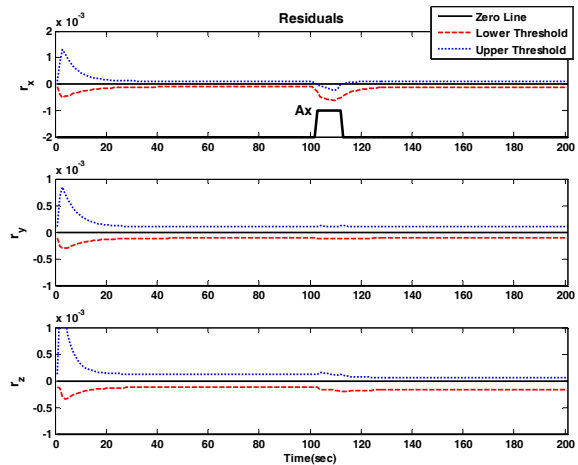
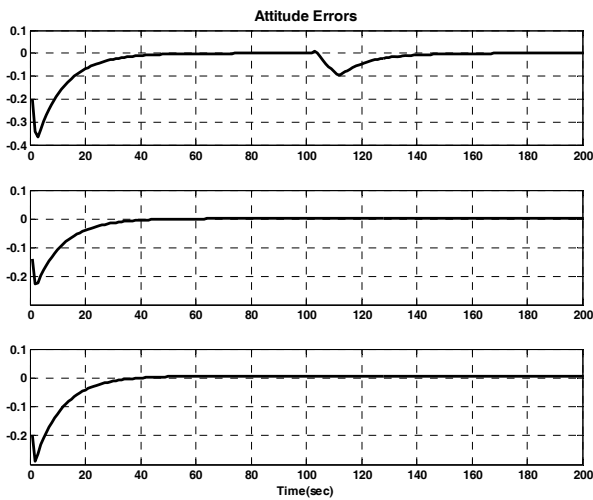
فرمان‌های کنترل	گشتاوردهنده‌ای استفاده شده	محور کنترل شده توسط چرخ یدک	چرخ‌های معیوب
$\dot{h}_y = -T_{cy}$ $\dot{h}_z = -T_{cz}$ $M_y = -B_z T_{cx} / (B_y^2 + B_z^2)$ $M_z = B_y T_{cx} / (B_y^2 + B_z^2)$	MTQ _Y MTQ _Z	Y	
$\dot{h}_y = -T_{cy}$ $\dot{h}_z = -T_{cz}$ $M_y = -B_z T_{cx} / (B_y^2 + B_z^2)$ $M_z = B_y T_{cx} / (B_y^2 + B_z^2)$	MTQ _Y MTQ _Z	-	RW _X RW _R
$\dot{h}_R = -T_{cx} / \sin \beta \cos \alpha$ $M_z = T_{cy} / B_x$ $M_y = -T_{cz} / B_x$	MTQ _Y MTQ _Z	X	
$\dot{h}_R = -T_{cy} / \sin \beta \sin \alpha$ $M_x = T_{cz} / B_y$ $M_z = -T_{cx} / B_y$	MTQ _X MTQ _Z	Y	RW _X RW _Y RW _Z
$\dot{h}_R = -T_{cz} / \cos \beta$ $M_x = T_{cy} / B_z$ $M_y = -T_{cx} / B_z$	MTQ _X MTQ _Y	Z	

رخداد عیب در هر چهار چرخ عکس‌العملی

پس از وقوع عیب در تمامی چهار چرخ، ماهواره کاملاً به صورت مغناطیسی کنترل می‌شود. در این حالت هر سه گشتاوردهنده مغناطیسی برای حفظ پایداری ماهواره به کار گرفته می‌شوند.

نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج شبیه‌سازی الگوریتم‌های تشخیص، جداسازی و جبران عیب طراحی شده ارائه می‌شوند. این شبیه‌سازی‌ها برای یک ماهواره LEO با ارتفاع مداری ۷۰۰ کیلومتر انجام شده‌اند. در این راستا، ممان‌های اینرسی ماهواره برابر با مقادیر بازه‌ای $[I_{yy}] = [4.9 \quad 5.1] \text{ kgm}^2$ ، $[I_{xx}] = [4.82 \quad 5.02] \text{ kgm}^2$ و $[I_{zz}] = [1.45 \quad 1.65] \text{ kgm}^2$ همچنین المان‌های غیرقطری ماتریس اینرسی به صورت $[-0.1 \quad +0.1] \text{ kgm}^2$ و بازه $[0.0027 \quad 0.0033] \text{ kgm}^2$ برای مدل‌سازی ممان‌های اینرسی چرخ‌ها انتخاب شده‌اند. قابل ذکر است که مقادیر پارامترهای فوق دقیقاً بر اساس دقت یا عدم قطعیت حاصل از ابزارهای اندازه‌گیری که در کشور برای محاسبه ممان‌های اینرسی، موجود است، لحاظ شده است. به منظور انجام شبیه‌سازی، اثر اغتشاش‌های مختلف مشتمل بر گشتاورهای اغتشاشی مغناطیسی، اغتشاش‌های گرادیان جاذبه‌ای، آیرودینامیکی و اغتشاش‌های ناشی از تشعشعات

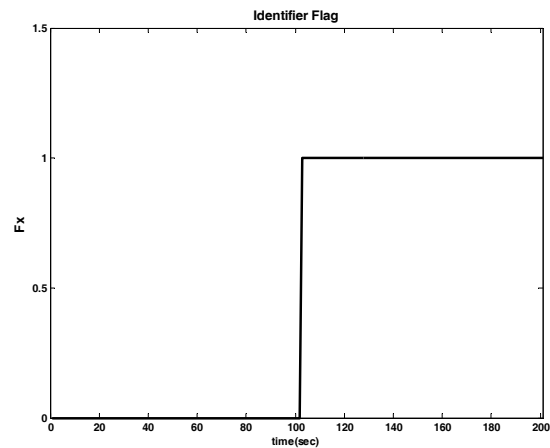


شکل ۹- حدود آستانه تطبیقی مانده‌ها در سناریوی ۱

شکل ۱۲- زوایای وضعیت در سناریوی ۱، پس از فعال‌سازی سیستم جبران عیب

سناریوی ۲- تست رخداد عیب در RW_x و RW_y

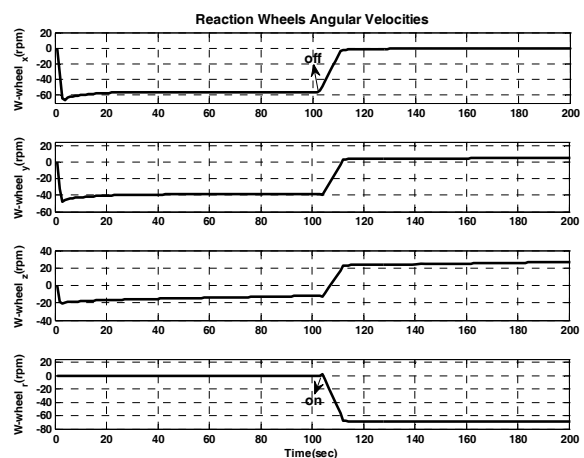
در این حالت، ابتدا یک عیب ناگهانی $f_x = 1mN.m$ در زمان $t = 100s$ در چرخ RW_x ظاهر شده و در نتیجه پرچم F_x (شکل ۱۴) ست شده و چرخ RW_x جایگزین آن شده است. سپس، یک عیب با اندازه در حال رشد و با مقدار شیب $10^{-4} N.m$ در لحظه $t = 130s$ در چرخ RW_y به وقوع می‌پیوندد.



شکل ۱۰- پرچم شناساگر F_x در سناریوی ۱

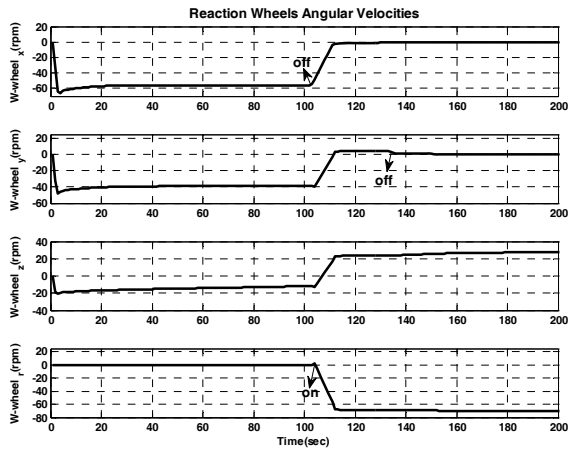
شکل (۱۳)، حدود آستانه مانده‌ها را در این سناریو نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود، مانده‌های r_x و r_y به ترتیب در زمان رخداد عیب در RW_x و RW_y تحت تأثیر قرار گرفته‌اند. بنابراین، بر اساس ورودی‌های درخت عیب نشان داده شده در شکل (۵)، پرچم F_{xy} ست شده که متناظر با رخداد عیب در چرخ‌های فوق است (شکل ۱۴). در این حالت، اعلان رخداد عیب در زمان $t = 135s$ به وقوع پیوسته است. شکل (۱۵) نشان می‌دهد که پس از جداسازی عیب، چرخ RW_y نیز به درستی خاموش شده است. در این سناریو، برای حفظ پایداری سیستم لازم است که گشتاوردهنده‌های مغناطیسی مناسب مطابق با جدول (۲) انتخاب شده و فرمان‌های کنترلی متناظر با آنها اعمال شوند. شکل (۱۶) نشان می‌دهد که گشتاوردهنده‌های مغناطیسی x و z به‌طور خودکار فعال شده و با استفاده از آنها ممان‌های M_x و M_z اعمال شده‌اند. بعد از اعمال این ممان‌ها، زوایای وضعیت ماهواره (که در شکل ۱۷ نشان داده شده‌اند) به سمت صفر میل کرده و پایداری ماهواره اصلاح شده است.

شایان ذکر است که پس از جایگزینی چرخ‌ها، مانده نشان داده شده در شکل (۹) مجدداً به داخل حدود آستانه نرمال خود بازگشته است.

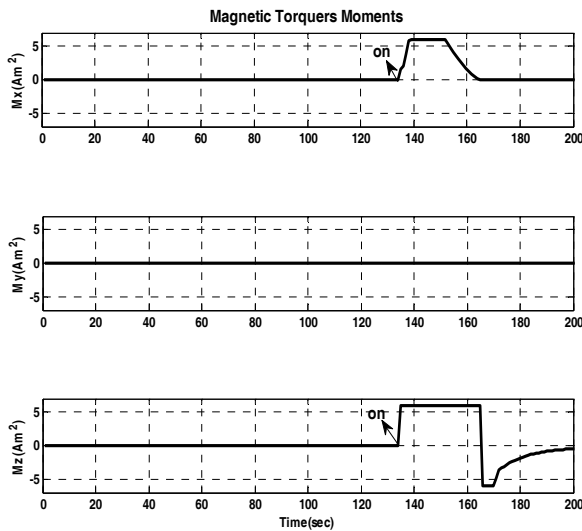


شکل ۱۱- سرعت‌های زوایای چرخ‌های عکس‌العملی در سناریوی ۱

قرار گرفته و بنابراین انجام فرایند جداسازی عیب امکان پذیر نخواهد بود.

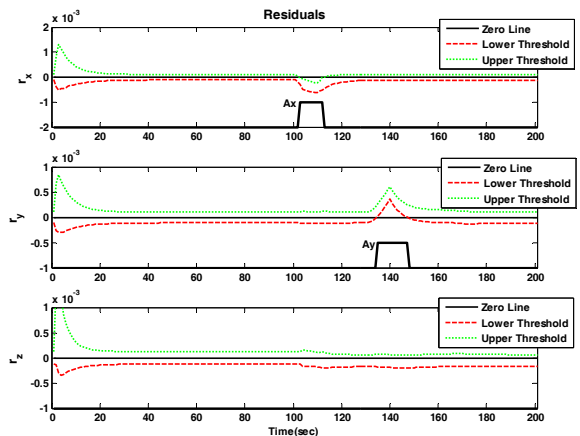


شکل ۱۵- سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی در سناریوی ۲

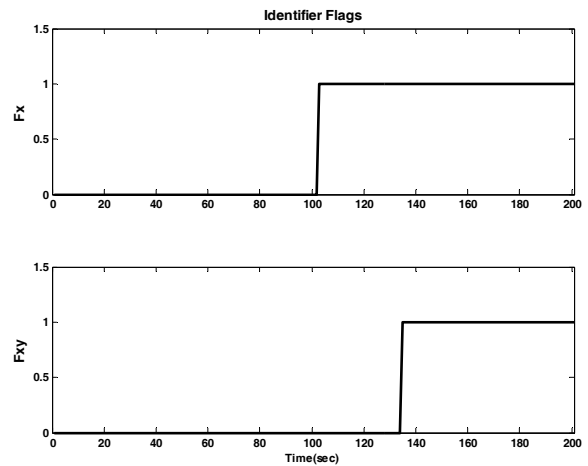


شکل ۱۶- ممان‌های گشتاوردهنده‌های مغناطیسی در سناریوی ۲

برای حل این مشکل، الگوریتم جداسازی عیب تشریح شده در این مقاله باید اجرا شود. مطابق با این الگوریتم، ابتدا چرخ معیوب RW_x باید خاموش شود. همان‌طور که در شکل (۱۸) ملاحظه می‌شود، بعد از خاموش شدن چرخ فوق، تمامی مانده‌ها به جز r_y به داخل حدود آستانه نرمال برمی‌گردند. در اینجا لازم به ذکر است که با توجه به اینکه چرخ RW_x پیش از این با چرخ RW_r جایگزین شده بود، مانده r_x متناظر با این چرخ به داخل حدود آستانه بازگشته است.



شکل ۱۳- حدود آستانه تطبیقی مانده‌ها در سناریوی ۲



شکل ۱۴- پرچم‌های شناساگر F_x و F_{xy} در سناریوی ۲

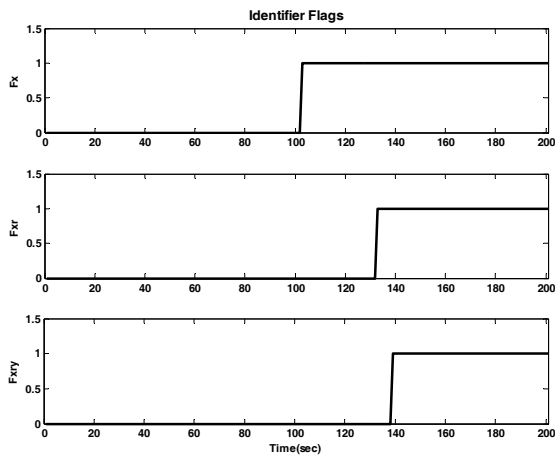
سناریوی ۳- تست رخداد عیب در چرخ‌های RW_x ، RW_y و RW_z

در این سناریو، در ابتدا یک عیب ناگهانی $f_x = 1mN.m$ در زمان $t = 100s$ در چرخ RW_x ظاهر شده است و در نتیجه پس از ست شدن پرچم F_x (شکل ۱۹)، چرخ RW_r جایگزین آن شده است.

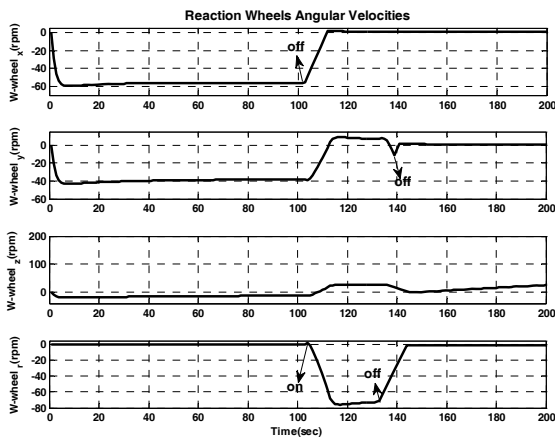
سپس، دو عیب همزمان در چرخ‌های RW_r و RW_y در زمان $t = 130s$ رخ داده است. برای این منظور، f_y به صورت یک شیب با مقدار $10^{-4} N.m$ و f_r به صورت یک عیب ناگهانی با مقدار $1mN.m$ انتخاب شده‌اند. شکل (۱۸)، حدود آستانه مانده‌ها را در این سناریو نشان می‌دهد. همان‌طور که از این شکل قابل درک است، پس از رخداد عیب در چرخ یک (در زمان $t = 130s$) تمامی مانده‌ها به‌طور همزمان، تحت‌تأثیر

است. از آنجا که روش لغزشی از حدود آستانه ثابت برای تشخیص عیب برخوردار است، می‌توان نتایج زیر را در مورد روش مبتنی بر تولید حدود آستانه تطبیقی که در این مقاله پیشنهاد شده است، ارائه کرد:

- اصلاح حداقل عیب قابل تشخیص (با استفاده از این روش، عیوب کمتر از ۱۰٪ نیز قابل آشکارسازی هستند).
- اصلاح زمان تأخیر برای آشکارسازی عیب، خصوصاً در مورد عیب‌های از نوع شیب (به جدول ۳ مراجعه شود).



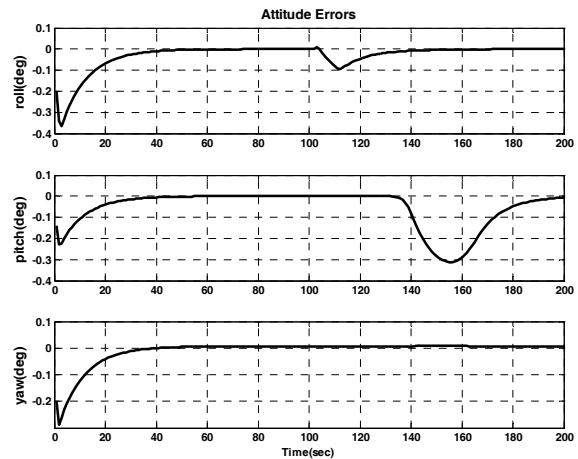
شکل ۱۹- پرچم‌های شناساگر در سناریوی ۳



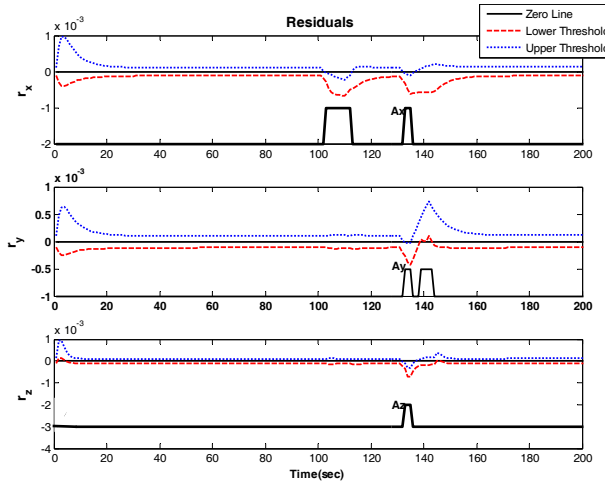
شکل ۲۰- سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌ها در سناریوی ۳

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش مقاوم تشخیص عیب برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره که مبتنی بر تولید حدود آستانه تطبیقی است، معرفی شد. در این راستا، ابتدا یک مدل غیرخطی q-LPV برای ماهواره استخراج شده و یک مشاهده‌گر بازه‌ای با استفاده از ابزارهای آنالیز بازه‌ای طراحی شد. در این روش، عدم قطعیت‌های پارامتری، اغتشاش‌ها و نویزهای اندازه‌گیری به صورت بازه‌ای مدل



شکل ۱۷- زوایای وضعیت ماهواره در سناریوی ۲، پس از فعال‌سازی سیستم جبران عیب



شکل ۱۸- حدود آستانه تطبیقی مانده‌ها در سناریوی ۳

بنابراین مطابق با مکانیزم جداسازی تشریح شده در این مقاله، در ابتدا F_{xy} و بلافاصله پس از آن پرچم F_{xyr} ست شده‌اند (شکل ۱۹). بعد از فرایند جداسازی عیب، چرخ RW_y نیز خاموش شده و مانده r_y به داخل حدود آستانه نرمال خود بازگشته است. شکل (۲۰)، سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی و زمان‌های روشن/خاموش شدن چرخ‌ها را به تصویر می‌کشد.

مطابق با جدول (۲)، برای جبران عیب، ترکیبی از چرخ RW_z به همراه گشتاوردهنده‌های مغناطیسی x و y باید استفاده شوند. شکل (۲۱) زمان‌هایی را نشان می‌دهد که این عملگرها فعال شده‌اند. همچنین شکل (۲۲) نحوه اصلاح پایداری ماهواره را بعد از فعال شدن عملگرهای فوق، نشان می‌دهد. پس از انجام سناریوهای مشابه، در جدول (۳)، عملکرد حاصل از الگوریتم تشخیص عیب معرفی شده در این مقاله، با روش مبتنی بر مشاهده‌گر لغزشی که یک راهکار مقاوم شناخته شده است، مقایسه شده

می‌آورد. در نهایت نشان داده شده که طراحی یک سیستم جبران عیب با استفاده از بازیگر بندی عملگرها، قابلیت تضمین پایداری سیستم را در سناریوهای مد نظر دارد. در نظر است که روش ارائه شده به گونه‌ای بسط داده شود که یک آنالیز قابلیت اطمینان نیز در خلال آن صورت گیرد تا روش پیشنهاد شده از جنبه‌های کاربری عملیاتی نیز مورد ارزیابی قرار گیرد.

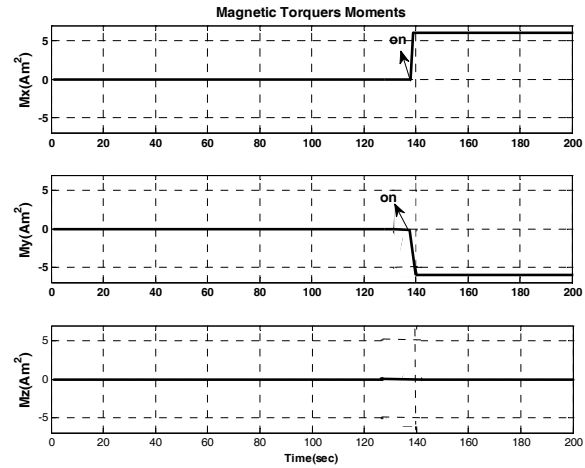
جدول ۳- عملکرد روش پیشنهادی در قیاس با روش‌های مقاوم با حد آستانه ثابت

نوع عیب	اندازه عیب (%)	میزان تأخیر در آشکارسازی عیب (ثانیه)	
		روش پیشنهادی	مشاهده گر لغزشی
پله (آنی)	۱۰٪	۲	۴
پله (آنی)	۵٪	۳	غیر قابل تشخیص
پله (آنی)	۲٪ (حداقل عیب قابل آشکارسازی)	۶	غیر قابل تشخیص
شیب	مقدار شیب: 10^{-4} N.m	۵	۸
شیب	مقدار شیب: 0.5×10^{-4} N.m	۷	۱۴

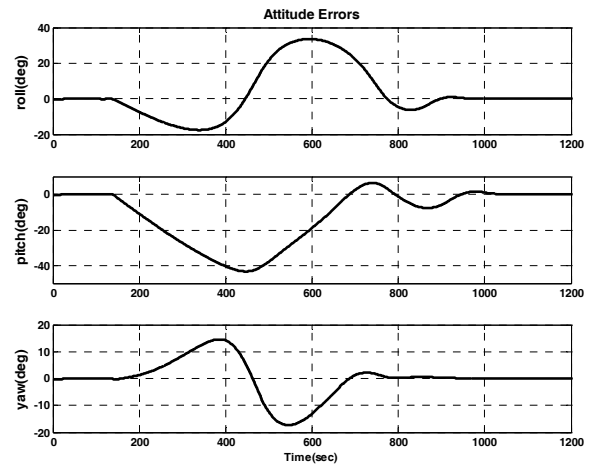
مراجع

- [1] Castet, J. F. and Saleh, J. H., "Satellite and Satellite Subsystems Reliability: Statistical Data Analysis and Modeling," *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 94, No. 11, 2009, pp. 1718-1728.
- [2] Patton, R. J., "Fault Detection and Diagnosis in Aerospace Systems Using Analytical Redundancy," *Computing and Control Engineering Journal*, 1991, pp. 127-136.
- [3] Frank, P. M., "Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Analytical and Knowledge-Based Redundancy-A Survey and Some New Results," *Automatica*, Vol. 26, No. 3, 1990, pp. 459-474.
- [4] Zhang, Y. and Jiang, J., "Bibliographical Review on Reconfigurable Fault Tolerant Control Systems," *Annual Reviews in Control*, Vol. 32, No. 2, 2008, pp. 229-252.
- [5] Hwang, I. and Kim, S., "A Survey of Fault Detection, Isolation and Reconfiguration Methods," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 18, No 3, 2010, pp. 636-653.
- [6] Venkatasubramanian, V., Rengaswamy, R. and Kavuri, S. N., "A Review of Process Fault Detection and Diagnosis Part I: Quantitative Model-Based Methods," *Computers & Chemical Engineering*, 2003, Vol. 27, No. 3, pp. 293-311.
- [7] Pirmoradi, F. N., Sassani, F. and Silva, C. W. D., "Fault Detection and Diagnosis in a Spacecraft Attitude Determination System," *Acta Astronautica*, Vol. 65, No. 5-6, 2009, pp. 710-729.

شدند که در نهایت با انتشار آنها به داخل حدود آستانه رخداد عیب، منجر به تولید حدود آستانه تطبیقی برای تست سازگاری مانده‌ها شد.



شکل ۲۱- ممان‌های مغناطیسی گشتاوردهنده‌های مغناطیسی در سناریوی ۳



شکل ۲۲- زوایای وضعیت ماهواره در سناریوی ۳، بعد از فعال‌سازی سیستم جبران عیب

نتایج به دست آمده نشان دادند که ایده فوق، عملکرد روش پیشنهاد شده در این مقاله را در قیاس با مکانیزم‌های کلاسیک و مرسوم تشخیص عیب، اصلاح می‌کند. این اصلاح عملکرد هم از نقطه نظر حداقل اندازه عیب قابل تشخیص و هم از نقطه نظر زمان اعلان رخداد عیب (خصوصاً برای عیب‌های با زمان رشد آهسته) است. بخش دیگر از نتایج ارائه شده در این کار مربوط به مکانیزم جداسازی عیب است که ارائه راهکار آنالیز درخت عیب در ترکیب با روش تشخیص عیب فوق یکی از نوآوری‌های اصلی مقاله است. نتایج به دست آمده نشان داد که راهکار فوق، ابزار ساده و در عین حال قدرتمندی را برای جداسازی چرخ‌های دارای عیب فراهم

- Continuous-Time Systems,” *Automatica*, Vol. 46, No. 3, 2010, pp. 518-527.
- [21] Puig, V., Stancu, A., Escobet, T., Nejjari, F., Quevedo, J. and Patton, R. J., “Passive Robust Fault Detection Using Interval Observers: Application to the DAMADICS Benchmark Problem,” *Control Engineering Practice*, Vol. 14, No. 6, 2006, pp. 621-623.
- [22] Oca, S.M.D., Puig, V. and Blesa, J., “Robust Fault Detection Based on Adaptive Threshold Generation Using Interval LPV Observers,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 26, No. 3, 2012, pp. 258-283.
- [23] Meseguer, J., Puig, V. and Escobet, T., “Fault Diagnosis Using a Timed Discrete-Event Approach Based on Interval Observers: Application to Sewer Networks,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, Vol. 40, No. 5, 2010, pp. 900-916.
- [24] Puig, V., Quevedo, J., Escobet, T., Nejjari, F. and Heras S. D. L., “Passive Robust Fault Detection of Dynamic Processes Using Interval Models,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 16, No. 5, 2008, pp. 1083-1089.
- [25] Blesa, J., Puig, V. and Saludes, J., “Identification for Passive Robust Fault Detection Using Zonotope-Based Set-Membership Approaches,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 25, No. 5, 2011, pp. 788-812.
- [26] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge University Press, New York, pp. 88-95, 1997.
- [27] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O. and Walter, E., *Applied Interval Analysis*, Springer, London, pp. 11-42, 2001.
- [8] Soken, H. E. and Hajiyev, C., “Pico Satellite Attitude Estimation Via Robust Unscented Kalman Filter in the Presence of Measurement Faults,” *ISA Transactions*, Vol. 49, No. 3, 2010, pp. 249-256.
- [9] Venkateswaran, N., Siva, M. S. and Goel, P. S., “Analytical Redundancy Based Fault Detection of Gyroscopes in Spacecraft Applications,” *Acta Astronautica*, Vol. 50, No 9, 2002, pp. 535-545.
- [10] Patton, R. J., Uppal, F. J., Simani, S. and Polle, B., “Robust FDI Applied to Thruster Faults of a Satellite System,” *Control Engineering Practice*, Vol. 18, No. 9, 2010, pp. 1093-1109.
- [11] Patton, R. J., Uppal, F. J., Simani, S. and Polle, B., “Reliable Fault Diagnosis Scheme for a Spacecraft Attitude Control System,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, Vol. 222, No. 2, 2008, pp. 139-152.
- [12] Henry, D., “Robust Fault Diagnosis of the Microscope Satellite Micro-Thrusters,” *IFAC Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, Beijing, 2006, pp. 342-347.
- [13] Jiang, T. and Khorasani, K., “A Fault Detection, Isolation and Reconstruction Strategy for a Satellite’s Attitude Control Subsystem with Redundant Reaction Wheels,” *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, Montreal, Que., 2007, pp. 3146-3152.
- [14] Wu, Q. and Saif, M., “Robust Fault Diagnosis of a Satellite System Using a Learning Strategy and Second Order Sliding Mode Observer,” *IEEE Systems Journal*, Vol. 4, No. 1, 2010, pp. 112-121.
- [15] Zhang, K., Jiang, B. and Shi, P., “Adaptive Observer-Based Fault Diagnosis with Application to Satellite Attitude Control Systems,” *Second International Conference on Innovative Computing, Information and Control*, Kumamoto, 2007, pp. 508-508.
- [16] Wang, J., Jiang, B. and Shi, P., “Adaptive Observer Based Fault Diagnosis for Satellite Attitude Control Systems,” *International Journal of Innovative Computing, Information and Control, ICIC International*, Vol. 4, No. 8, 2008, pp. 1921-1929.
- [17] Bolandi, H., Haghparast, M. and Abedi, M., “Design of Fault Detection, Identification and Recovery Algorithms for Attitude Control System of a Three Axis Satellite,” *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 5, No. 1, 2012, pp. 29-40.
- [18] Khan, A.Q. and Ding, S. X., “Threshold Computation for Fault Detection in a Class of Discrete-Time Nonlinear Systems,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 25, No. 5, 2011, pp. 407-429.
- [19] Blesa, J., Puig, V. and Bolea, Y., “Fault Detection Using Interval LPV Models in a Open-Flow Canal,” *Control Engineering Practice*, Vol. 18, No. 5, 2010, pp. 460-470.
- [20] Raissi, T., Videau, G. and Zolghadri, A., “Interval Observer Design for Consistency Checks of Nonlinear

پیوست الف: مؤلفه‌های $A(\omega, \theta)$ در رابطه (۱۴)

فرض می‌شود که ممان‌های ماتریس اینرسی ماهواره به صورت زیر توصیف شود:

$$I_t = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

همچنین فرض می‌شود که معکوس ماتریس اینرسی I_t مطابق زیر توصیف شود:

$$I_t^{-1} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

با استفاده از (۳۶) و (۳۷) می‌توان نشان داد که المان‌های $A(\omega, \theta)$ از عبارت زیر به دست آورده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 a_{114} &= 0 & a_{124} &= K_{xz} \cdot I_w \\
 a_{214} &= 0 & a_{224} &= K_{yz} \cdot I_w \\
 a_{314} &= 0 & a_{324} &= K_{zz} \cdot I_w \\
 a_{134} &= -K_{xy} \cdot I_w & & \\
 a_{234} &= -K_{yy} \cdot I_w & & \\
 a_{334} &= -K_{zy} \cdot I_w & &
 \end{aligned}
 \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}
 a_{115} &= -K_{xz} \cdot I_w & a_{125} &= 0 \\
 a_{215} &= -K_{xz} \cdot I_w & a_{225} &= 0 \\
 a_{315} &= -K_{zz} \cdot I_w & a_{325} &= 0 \\
 a_{135} &= K_{xx} \cdot I_w & & \\
 a_{235} &= K_{xy} \cdot I_w & & \\
 a_{335} &= K_{zx} \cdot I_w & &
 \end{aligned}
 \tag{۴۳}$$

$$\begin{aligned}
 a_{116} &= K_{xy} \cdot I_w & a_{126} &= -K_{xx} \cdot I_w \\
 a_{216} &= K_{xy} \cdot I_w & a_{226} &= -K_{xy} \cdot I_w \\
 a_{316} &= K_{zy} \cdot I_w & a_{326} &= -K_{zx} \cdot I_w \\
 a_{136} &= 0 & & \\
 a_{236} &= 0 & & \\
 a_{336} &= 0 & &
 \end{aligned}
 \tag{۴۴}$$

$$\begin{aligned}
 a_{117} &= K_{xy} \cdot I_w \cdot c\alpha - K_{xz} \cdot I_w \cdot s\alpha \cdot s\beta \\
 a_{217} &= K_{xy} \cdot I_w \cdot c\alpha - K_{xz} \cdot I_w \cdot s\alpha \cdot s\beta \\
 a_{317} &= K_{zy} \cdot I_w \cdot c\alpha - K_{zz} \cdot I_w \cdot s\alpha \cdot s\beta \\
 a_{127} &= K_{xz} \cdot (I_w \cdot c\beta \cdot s\alpha) - K_{xx} \cdot (I_w \cdot c\alpha) \\
 a_{227} &= K_{yz} \cdot I_w \cdot c\beta \cdot s\alpha - K_{xy} \cdot I_w \cdot c\alpha \\
 a_{327} &= K_{zz} \cdot I_w \cdot c\beta \cdot s\alpha - K_{zx} \cdot I_w \cdot c\alpha \\
 a_{137} &= K_{xx} \cdot I_w \cdot s\alpha \cdot s\beta - K_{xy} \cdot I_w \cdot c\beta \cdot s\alpha \\
 a_{237} &= K_{xy} \cdot I_w \cdot s\alpha \cdot s\beta - K_{yy} \cdot I_w \cdot c\beta \cdot s\alpha \\
 a_{337} &= K_{zx} \cdot I_w \cdot s\alpha \cdot s\beta - K_{zy} \cdot I_w \cdot c\beta \cdot s\alpha
 \end{aligned}
 \tag{۴۵}$$

$$A_{ij} = a_{ij1}\omega_x + a_{ij2}\omega_y + a_{ij3}\omega_z + a_{ij4}\omega_{wx} + a_{ij5}\omega_{wy} + a_{ij6}\omega_{wz} + a_{ij7}\omega_{wr}
 \tag{۳۸}$$

که $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ و سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره و $\omega_{wx}, \omega_{wy}, \omega_{wz}$ و ω_{wr} سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی هستند. در ادامه ضرایب موجود در (۳۸) تشریح شده‌اند. باید توجه کرد که در این روابط فرض شده است $I_{wx} = I_{wy} = I_{wz} = I_{wr} = I_w$ همچنین $s\alpha$ و $s\beta$ جایگزین $\sin \alpha$ و $\sin \beta$ و $c\alpha$ و $c\beta$ جایگزین $\cos \alpha$ و $\cos \beta$ شده‌اند.

$$\begin{aligned}
 a_{111} &= K_{xz} \cdot I_{xy} - K_{xy} \cdot I_{xz} & a_{121} &= K_{xx} \cdot I_{xz} + K_{xz} \cdot I_{xx} \\
 a_{211} &= K_{yz} \cdot I_{xy} - K_{yy} \cdot I_{xz} & a_{221} &= K_{xy} \cdot I_{xz} + K_{yz} \cdot I_{xx} \\
 a_{311} &= K_{zz} \cdot I_{xy} - K_{zy} \cdot I_{xz} & a_{321} &= K_{zx} \cdot I_{xz} + K_{zz} \cdot I_{xx}
 \end{aligned}
 \tag{۳۹}$$

$$\begin{aligned}
 a_{131} &= -K_{xy} \cdot I_{xx} - K_{xx} \cdot I_{xy} \\
 a_{231} &= -K_{yy} \cdot I_{xx} - K_{xy} \cdot I_{xy} \\
 a_{331} &= -K_{zy} \cdot I_{xx} - K_{zx} \cdot I_{xy}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{112} &= K_{xz} \cdot I_{yy} - K_{xy} \cdot I_{yz} & a_{122} &= K_{xx} \cdot I_{yz} - K_{xz} \cdot I_{xy} \\
 a_{212} &= -K_{yz} \cdot I_{yy} - K_{yy} \cdot I_{yz} & a_{222} &= K_{xy} \cdot I_{yz} - K_{yz} \cdot I_{xy} \\
 a_{312} &= -K_{zz} \cdot I_{yy} - K_{zy} \cdot I_{yz} & a_{322} &= K_{zx} \cdot I_{yz} - K_{zz} \cdot I_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{۴۰}$$

$$\begin{aligned}
 a_{132} &= K_{xy} \cdot I_{xy} + K_{xx} \cdot I_{yy} \\
 a_{232} &= K_{yy} \cdot I_{xy} + K_{xy} \cdot I_{yy} \\
 a_{332} &= K_{zy} \cdot I_{xy} + K_{zx} \cdot I_{yy}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{113} &= K_{xz} \cdot I_{yz} + K_{xy} \cdot I_{zz} & a_{123} &= -K_{xx} \cdot I_{zz} - K_{xz} \cdot I_{xz} \\
 a_{213} &= K_{yz} \cdot I_{yz} + K_{yy} \cdot I_{zz} & a_{223} &= -K_{xy} \cdot I_{zz} - K_{yz} \cdot I_{xz} \\
 a_{313} &= K_{zz} \cdot I_{yz} + K_{zy} \cdot I_{zz} & a_{323} &= -K_{zx} \cdot I_{zz} - K_{zz} \cdot I_{xz}
 \end{aligned}
 \tag{۴۱}$$

$$\begin{aligned}
 a_{133} &= K_{xy} \cdot I_{xz} - K_{xx} \cdot I_{yz} \\
 a_{233} &= K_{yy} \cdot I_{xz} - K_{xy} \cdot I_{yz} \\
 a_{333} &= K_{zy} \cdot I_{xz} - K_{zx} \cdot I_{yz}
 \end{aligned}$$