

# کنترل مقاوم حرکت آرایشی فضاپیما توسط کنترلر مود لغزشی بهینه

امین ایمانی<sup>۱</sup> و محسن بهرامی<sup>۲\*</sup>

۱ و ۲- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

\* تهران، خ حافظ

mbahrami@aut.ac.ir

در مقاله حاضر، برای کنترل حرکت نسبی در حرکت آرایشی فضاپیما، یک کنترلر مود لغزشی بهینه طراحی می‌شود. این کنترلر براساس معادلات خطی حرکت نسبی در مدار دایروی، طراحی شده و روی سیستم غیرخطی که تحت اغتشاش خارجی است، اعمال می‌گردد. در ابتدا کنترلر بهینه به روش خطی مرتبه دو طراحی و سپس برای مقاوم‌سازی آن، روش کنترلی مود لغزشی انتگرالی به کار گرفته می‌شود. در این تحقیق، فرض می‌شود که فضاپیماها در مدارات پایین‌زمین حرکت می‌کنند و اغتشاش حاصل از عدم کرویت زمین ( $J_2$ ) به عنوان اغتشاش خارجی لحاظ می‌گردد. پایداری سیستم حلقه بسته توسط روش دوم لیاپانوف اثبات شده و عملکرد کنترلر مود لغزشی بهینه در تعقیب آرایش مطلوب با کنترلر مود لغزشی مقایسه می‌شود. نتایج شبیه سازی عملکرد موثر کنترلر پیشنهادی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: حرکت آرایشی فضاپیما، حرکت نسبی در مدار دایروی، کنترل مود لغزشی بهینه، روش کنترلی مود لغزشی انتگرالی

## علائم و اختصارات

$$\text{sgn}(s) = \begin{bmatrix} \text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2), \\ \text{sgn}(s_3) \end{bmatrix}^T$$

ماتریس ستونی تابع علامت

$$\mathbf{u}_f = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T$$

بردار ورودی کنترلی پیرو

$$\mathbf{u}_{f_{eq}}$$

بردار ورودی کنترلی معادل پیرو

$$\mathbf{x} = [x \quad y \quad z \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T$$

بردار متغیرهای حالت

$$\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3)$$

ماتریس ضرایب برای کنترلر مود لغزشی

بهینه

$$\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3)$$

شیب سطوح لغزش

$$\mu = 398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

ثابت گرانش زمین

$$\boldsymbol{\rho}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$$

بردار مکان پیرو نسبت به رهبر

$$\boldsymbol{\rho}_d$$

بردار مکان مسیر مطلوب

$$\omega_l$$

سرعت زاویه‌ای رهبر

$$C_1 = \{X, Y, Z\}$$

دستگاه مختصات اینرسی

$$C_2 = \{x, y, z\}$$

دستگاه متحرک

$$\mathbf{d} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3]^T$$

بردار اغتشاش خارجی و باقیمانده‌های

خطی سازی

$$\mathbf{D} = [D_1 \quad D_2 \quad D_3]^T$$

بردار اغتشاش نسبی

$$\mathbf{e} = [e_x \quad e_y \quad e_z]^T$$

بردار خطای تعقیب

$$J$$

شاخص عملکرد

$$J_2$$

اغتشاش حاصل از عدم کرویت زمین

$$\mathbf{k} = \text{diag}(k_1 \quad k_2 \quad k_3)$$

ماتریس ضرایب برای کنترلر مود لغزشی

$$\mathbf{r}_f$$

بردار مکان پیرو

$$\mathbf{r}_l$$

بردار مکان رهبر

$$R_e$$

شعاع میانگین استوایی زمین

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3]^T$$

بردار سطح لغزش

$$\text{sat}(s, \varphi) = \begin{bmatrix} \text{sat}(s_1, \varphi), \\ \text{sat}(s_2, \varphi), \text{sat}(s_3, \varphi) \end{bmatrix}^T$$

ماتریس ستونی تابع اشباع

## مقدمه

حرکت آرایشی فضاپیماها یک تکنولوژی نوین فضایی در دهه‌های اخیر است که مورد توجه زیادی قرار گرفته است. این مفهوم ابتدا

۱. کارشناسی ارشد

۲. استاد (نویسنده مخاطب)

کنترل‌های مختلفی برای کنترل حرکت آرایشی فضاپیما ارائه شده است. در اینجا به چند نمونه از کنترل‌های مقاوم از نوع مود لغزشی اشاره می‌شود. یه و همکاران [۶] یک کنترلر مود لغزشی را برای کنترل حرکت آرایشی براساس مدل خطی حرکت نسبی در مدار دایروی طراحی کردند و پارامترهای ضریب میرایی معادل، پهنای باند و پشیرانش سیستم را برای داشتن حداقل سوخت مصرفی تعیین کردند. در تحقیق دیگری، میسی و همکاران [۷] با طراحی کنترلر مود لغزشی پیوسته<sup>۴</sup>، خطای تعقیب را کاهش دادند و در عین حال مصرف سوخت را در سطح پایینی نگه داشتند. ایشان در این تحقیق، عملکرد روش‌های مختلف مود لغزشی پیوسته، از جمله مود لغزشی معمولی، مود لغزشی با رویکرد اغتشاش، مود لغزشی مرتبه بالا و مود لغزشی با سطح لغزش انتگرالی را برای کنترل آرایش با هم مقایسه کردند. هیو و همکاران [۸] یک کنترلر مود لغزشی براساس مدل غیرخطی حرکت نسبی طراحی کردند و از آن برای کنترل ماهواره‌های رهبر و پیرو و مانور تمام آرایش در مدار پایین‌زمین استفاده کردند. آنها در تحقیق دیگری [۹] یک کنترلر مود لغزشی ترمینالی<sup>۵</sup> را طراحی کردند که در عین حالی که سوخت مصرفی را کم می‌کرد، تعقیب مسیر مطلوب و تغییر آرایش را نیز به خوبی انجام می‌داد. در یک تحقیق دیگر [۱۰]، معادلات خطی نرمال شده با احتساب اغتشاش  $J_2$  برای طراحی کنترلر مود لغزشی با لحاظ قانون رسیدن به سطح به‌کارگرفته شد و کنترلر مذکور برای کنترل آرایش در مدار مرجع با خروج از مرکزیت کوچک استفاده شد. بو و همکاران [۱۱] برای داشتن یک بالانس بهینه بین سرعت همگرایی کمیت لغزش و مصرف سوخت از شبکه عصبی استفاده کردند و پارامترهای قانون رسیدن نمایی کنترلر مود لغزشی را ارتقا دادند. بای و همکاران [۱۲] نیز از روش مود لغزشی برای کنترل حرکت نسبی و سمت فضاپیما در آرایش استفاده کردند. آنها برای مقابله با خطای مدل‌سازی و اغتشاش خارجی از کنترلر تطبیقی و شبکه عصبی استفاده کردند.

سیستم کنترلی مود لغزشی ممکن است که در فاز رسیدن به سطح لغزش نسبت به عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات وارده حساس باشد. برای غلبه بر این مشکل می‌توان از کنترلر مود لغزشی انتگرالی استفاده کرد [۱۳]. از طرف دیگر این کنترلر و کنترلر بهینه را می‌توان برای ایجاد یک کنترلر جدید ترکیب کرد و تعقیب مسیر مطلوب و حداقل کردن یک شاخص عملکرد و مقاوم بودن در مقابل عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات را تضمین کرد.

در این مقاله، یک کنترلر مود لغزشی بهینه برای کنترل حرکت نسبی پیرو در حرکت آرایشی طراحی شده است. در ابتدا مسئله تعقیب

برای فعالیت‌های اکتشافی در عرصه زمین و فضا شده است؛ زیرا دریافت داده توسط چند فضاپیما به‌صورت همزمان، مزایای زیادی نسبت به کار یک فضاپیما دارد. برای اجرای یک مأموریت بزرگ و پیچیده، یک فضاپیمای سنگین و غول پیکر نیاز است که طراحی و ساخت آن مشکل و زمان‌بر است و نیازمند یک پرتاب‌کننده بزرگ و گران‌قیمت است؛ درحالی‌که با توزیع بار این مسئولیت بین چند فضاپیمای کوچک‌تر، به خوبی می‌توان از عهده این مأموریت برآمد. این فضاپیماهای کوچک‌تر در قالب یک آرایش، همانند یک فضاپیمای تکی عمل می‌کنند و محدودیت‌های فیزیکی فضاپیمای تنها را نیز ندارند. طراحی ساده‌تر، ساخت ارزان‌تر و پرتاب سریع‌تر فضاپیماهای یک آرایش، از مزایای این روش است ولی مهم‌ترین مزیت آن را می‌توان قابلیت اطمینان و انعطاف‌پذیری دانست. از جمله کاربردهای حرکت آرایشی فضاپیماها می‌توان به مونیتورینگ زمین و اتمسفر اطراف آن، زمین‌سنجی، تصویربرداری و اکتشاف در عمق فضا و تعمیر و جایگزینی فضاپیماها در مدار اشاره کرد [۱]. متداول‌ترین روش در اجرای حرکت آرایشی، روش رهبر/ پیرو است. در این روش یک فضاپیما در نقش رهبر به یک مدار مرجع کنترل می‌شود و بقیه فضاپیماها در نقش پیرو، موقعیت خود را نسبت به رهبر تنظیم کرده و مسیر نسبی مطلوب را دنبال می‌کنند [۲].

اجرای عملی حرکت آرایشی بستگی کامل به کنترل فضاپیماهای آرایش دارد تا اینکه هر فضاپیما در مسیر مطلوب تعریف‌شده حرکت کند. در حالت کلی حرکت آرایشی فضاپیماها شامل دو بخش اصلی است: هدایت و کنترل. در بخش هدایت، مسیر مرجع مطلوب برای حرکت هر کدام از فضاپیماها طراحی می‌شود. در این قسمت سعی می‌شود که مسیر مرجع به دینامیک طبیعی سیستم نزدیک باشد تا سوخت مصرفی برای دنبال کردن آن حداقل شود. در مواردی برای تعیین مسیرهای مطلوب، از مدل حرکت نسبی با لحاظ اغتشاشات خارجی استفاده می‌شود [۳ و ۴]. در بخش کنترل، هدف طراحی کنترلر مناسب برای تعقیب مسیر طراحی‌شده در مرحله هدایت است. اغتشاشات حاصل از اثر عدم کرویت زمین<sup>۲</sup>، درگ اتمسفری، گرانش اجرام آسمانی دیگر و اثر تشعشعات خورشیدی، اغتشاشات غالب بر روی حرکت ماهواره در مدار هستند [۵]. در این تحقیق فقط بر روی کنترل حرکت آرایشی فضاپیما تمرکز می‌شود و هدف، طراحی یک کنترلر مقاوم و بهینه برای کنترل حرکت نسبی فضاپیمای پیروست. با این کنترلر فضاپیمای پیرو باید مسیر مطلوب را در حضور اغتشاش مداری به نحو بهینه‌ای دنبال کند و از مسیر منحرف نشود.

4. Continues sliding mode control  
5. Terminal sliding mode control

3. Earth oblateness ( $J_2$ )

که در این رابطه،  $\omega_l$  سرعت زاویه‌ای مداری رهبر بوده و عبارت است از:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{\mu}{r_l^3}} \quad (2)$$

که  $r_l = \|r_l\|$ ،  $\mu = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$  ثابت گرانش زمین،  $D = [D_1, D_2, D_3]^T$  اغتشاش نسبی مربوط به فضاییمای پیرو و بردار کنترلی پیرو است.  $u = [u_x, u_y, u_z]^T$

نیز بردار مکان فضاییمای پیرو نسبت به رهبر در دستگاه  $C_2$  است.  $C(\omega_l)$  به صورت زیر است:

$$C(\omega_l) = 2\omega_l \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

و ترم غیرخطی  $N(\cdot) \in R^3$  نیز عبارت است از:

$$N(\rho, \omega_l, r_l) = \begin{bmatrix} \mu \left( \frac{x+r_l}{[(r_l+x)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r_l^2} \right) - \omega_l^2 x \\ \mu \frac{y}{[(r_l+x)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} - \omega_l^2 y \\ \mu \frac{z}{[(r_l+x)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

با خطی‌سازی ترم‌های غیرخطی رابطه (۴) حول مبدأ دستگاه متحرک، می‌توان معادلات خطی حرکت نسبی برای مدار مرجع دایروی را تعیین کرد. این معادلات با عنوان معادلات هیل عبارتند از [۷]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega_l \dot{y} - 3\omega_l^2 x &= d_1 + u_x \\ \ddot{y} + 2\omega_l \dot{x} &= d_2 + u_y \\ \ddot{z} + \omega_l^2 z &= d_3 + u_z \end{aligned} \quad (5)$$

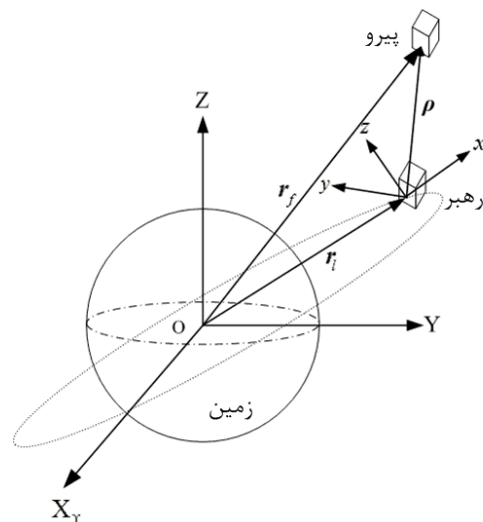
### کنترل مود لغزشی

در این بخش، طراحی کنترلر مود لغزشی براساس مدل غیرخطی (۱) نشان داده می‌شود [۸]. روش کنترلی مود لغزشی شامل دو بخش است: یکی انتخاب سطح لغزش مناسب که هدف پاسخ سیستم حلقه بسته را برآورده کند و دیگری طراحی قانون کنترلی مناسب برای آنکه حالت سیستم بر روی سطح لغزش مذکور بلغزد. با توجه به اینکه در مدارهای پایین‌زمین اغتشاش حاصل از عدم کرویت زمین ( $J_2$ ) غالب است در این تحقیق این اغتشاش خارجی لحاظ شده است. این اغتشاش با توجه به ارتفاع فضاییما

بهینه به مسئله کنترل بهینه درجه دوم تبدیل شده و سپس برای مقاوم‌سازی کنترلر، روش مود لغزشی انتگرالی به‌کارگرفته می‌شود. فرض می‌شود که آرایش در مدار پایین زمین حرکت می‌کند و اغتشاش  $J_2$  به‌عنوان اغتشاش غالب بر آن اثر می‌گذارد. پایداری سیستم حلقه بسته توسط روش دوم لیاپونوف تضمین شده و عملکرد کنترلر پیشنهادی برای تعقیب مسیر مطلوب با کنترلر مود لغزشی معمولی مقایسه می‌شود. نتایج حاصله عملکرد مؤثر این کنترلر را نشان می‌دهد.

### مدل سیستم

در این بخش، مدل دینامیکی حرکت نسبی تعیین شده است. فرض می‌شود که فضاییمای رهبر در یک مدار دایروی حرکت می‌کند و فضاییمای پیرو باید در مسیر مطلوب نسبت به رهبر کنترل شود. فضاییماها به صورت جرم نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. یک تصویر شماتیک از حرکت آرایشی در شکل (۱) آورده شده است. در این شکل  $C_1 = \{X, Y, Z\}$  دستگاه مختصات اینرسی است و  $r_l$  و  $r_f$  به ترتیب مکان فضاییماهای رهبر و پیرو در دستگاه اینرسی هستند. دستگاه  $C_2 = \{x, y, z\}$  یک دستگاه متحرک است که بر روی مرکز جرم فضاییمای رهبر قرار گرفته است. در این دستگاه  $x$  در جهت بردار  $r_f(t)$ ،  $y$  در جهت بردار سرعت رهبر و عمود بر  $x$  و  $z$  عمود بر  $x$  و  $y$  است، به طوری که دستگاه راستگرد باشد.



شکل ۱- تصویر شماتیک حرکت آرایشی فضاییماها

دینامیک نسبی غیرخطی پیرو در دستگاه  $C_2$  عبارت است از [۲]:

$$\ddot{\rho} + C(\omega_l)\dot{\rho} + N(\rho, \omega_l, r_l) = D + u_f \quad (1)$$

که مقدار کراندار دارد. بنابراین برای  $D = [D_1, D_2, D_3]^T$  در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\text{sat}(s_i, \varepsilon) = \begin{cases} s_i/\varepsilon & |s_i| \leq \varepsilon \\ \text{sgn}(s_i) & |s_i| > \varepsilon \end{cases} \quad (۱۵)$$

و در این رابطه  $\varepsilon$  پهنای لایه مرزی است.

### کنترل مود لغزشی بهینه

برای تعیین سطح لغزش این کنترلر از تئوری کنترل بهینه استفاده می‌شود. برای این منظور معادلات خطی هیل (۵) به کار گرفته می‌شوند. این معادلات در فرم فضای حالت عبارتند از:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_f(t) + d(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (۱۶)$$

که در این رابطه

$$\begin{aligned} x &= [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \\ u_f &= [u_x \ u_y \ u_z]^T \\ d &= [0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ d_2 \ d_3]^T \end{aligned} \quad (۱۷)$$

$x$  بردار حالت،  $u_f$  بردار ورودی‌های کنترلی پیرو و  $d$  بردار اغتشاش خارجی و باقیمانده‌های خطی‌سازی است. ماتریس  $A$  به راحتی از رابطه (۵) به دست می‌آید و  $B = [0 \ I_3]^T$  و  $C = I_6$ . جفت  $(A, B)$  و  $(A, C)$  به ترتیب کنترل پذیر و رؤیت پذیرند. برای  $d_i$  در رابطه (۱۶) نیز داریم:

$$|d_i| \leq f_i \quad i=1,2,3 \quad (۱۸)$$

که در اینجا  $f_i = 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$  در نظر گرفته می‌شود [۵]. شرایط مطلوب عبارت است از:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) \quad x_d(t_0) = x_{d_0} \\ y_d(t) &= Cx_d(t) \end{aligned} \quad (۱۹)$$

در اینجا خطای تعقیب  $e = y - y_d$  است. بنابراین از ترکیب روابط (۱۶) و (۱۹) داریم:

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Bu_f(t) + d(x, t), \quad e(t_0) = x_0 - x_{d_0} \quad (۲۰)$$

برای بهینه سازی شاخص عملکرد زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^T Q e + u^T R u) dt \quad (۲۱)$$

که در این رابطه،  $Q \in R^{6 \times 6}$  یک ماتریس مثبت نیمه معین و  $R \in R^{3 \times 3}$  یک ماتریس مثبت معین است. این شاخص عملکرد شامل دو بخش خطای تعقیب و ورودی کنترلی است و برای حداقل سازی آن باید نوعی سازش بین این دو انجام گیرد.

یک مقدار کراندار دارد. بنابراین برای  $D = [D_1, D_2, D_3]^T$  در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$|D_i| \leq F_i \quad i=1,2,3 \quad (۱۶)$$

برای این منظور می‌توان  $F_i = 10^{-4} \text{ m/s}^2$  را در نظر گرفت [۵ و ۸]. برای طراحی کنترلر مود لغزشی، سطح لغزش به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (۱۷)$$

در این رابطه  $e = \rho - \rho_d$  و  $\dot{e} = \dot{\rho} - \dot{\rho}_d$  است.  $\rho_d$  و  $\dot{\rho}_d$  به ترتیب مسیر حرکت و سرعت مطلوب برای تعقیب کردن هستند.  $s = [s_1, s_2, s_3]^T$  سطح لغزش و  $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  نیز شیب سطح لغزش است.

$$\dot{s} = (\dot{\rho} - \dot{\rho}_d) + \lambda(\rho - \rho_d) = 0 \quad (۱۸)$$

با جایگذاری رابطه (۱) و بدون احتساب ترم اغتشاش در رابطه (۱۸)، ورودی معادل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_{eq} = C(\cdot)\dot{\rho} + N(\cdot) + \dot{\rho}_d - \lambda(\rho - \rho_d) \quad (۱۹)$$

به منظور تضمین پایداری، قانون کنترلی به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$u_f = C(\cdot)\dot{\rho} + N(\cdot) + \dot{\rho}_d - \lambda(\rho - \rho_d) - k \text{sgn}(s) \quad (۱۰)$$

که  $k = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$  و براساس میزان اغتشاش و عدم قطعیت و زمان رسیدن به سطح لغزش تعیین می‌شود و  $\text{sgn}(s)$  یک ماتریس ستونی از توابع علامت است:

$$\text{sgn}(s) = [\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2), \text{sgn}(s_3)]^T \quad (۱۱)$$

برای بررسی پایداری از روش دوم لیاپانوف استفاده می‌شود. برای این منظور  $V = \frac{1}{2} s^T s$  به عنوان تابع لیاپانوف انتخاب شده و  $k_i$  ها چنان تعیین می‌شوند که  $\dot{V} < 0$  شود.

$$\dot{V} = s^T \dot{s} \quad (۱۲)$$

با جایگذاری و ساده سازی

$$\dot{V} = s^T [D - k \text{sgn}(s)] \leq \sum_{i=1}^3 |s_i| (F_i - k_i) \quad (۱۳)$$

بنابراین کافی است  $k_i > F_i$  انتخاب شود تا سیستم مدار بسته پایدار مجانبی مطلق شود.

برای از بین بردن پدیده چترینگ می‌توان توابع علامت را با توابع اشباع جایگزین کرد [۱۴]. بدین ترتیب معادله کنترلر به صورت زیر در می‌آید:

$$u_f = C(\cdot)\dot{\rho} + N(\cdot) + \dot{\rho}_d - \lambda(\rho - \rho_d) - k \text{sat}(s, \varepsilon) \quad (۱۴)$$

که در اینجا،  $\eta = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  ماتریس قطری با درایه‌های مثبت است و براساس میزان اغتشاش و عدم قطعیت تعیین می‌شود. برای بحث پایداری مشابه حالت قبل، روش دوم لیاپانوف به کار گرفته می‌شود.  $V = \frac{1}{2} s^T s$  به عنوان تابع لیاپانوف انتخاب شده و  $\eta_i$  ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که  $\dot{V} < 0$  شود، بنابراین:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{s} = s^T [G(Ae + B(-R^{-1}B^T Pe \\ &\quad - (GB)^{-1}\eta \text{sgn}(s)) + d) \\ &\quad - G(A - BR^{-1}B^T P)e] \\ &= s^T [-\eta \text{sgn}(s) + Gd] \end{aligned} \quad (29)$$

با فرض  $G = B^T$  خواهیم داشت:

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^3 |s_i| (d_i - \eta_i) \quad (30)$$

بنابراین با انتخاب  $\eta_i > f_i$  سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی مطلق می‌شود.

برای مقابله با پدیده چترینگ نیز مشابه حالت قبل عمل شده و نهایتاً کنترلر پیشنهادی به فرم زیر در می‌آید:

$$u_f(t) = -R^{-1}B^T Pe(t) - (B^T B)^{-1} \eta \text{sat}(s, \varphi) \quad (31)$$

## نتایج شبیه‌سازی

در شبیه‌سازی از مدل غیرخطی (۱) استفاده می‌شود. برای کنترل نیز فرض می‌شود، مکان نسبی  $\rho$  و سرعت نسبی  $\dot{\rho}$  قابل اندازه‌گیری و در دسترس هستند. اغتشاش خارجی  $J_2$  در چارچوب اینرسی عبارت است از [۵]:

$$D_{J_2} = \frac{\mu J_2 R_e^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{15Z^2 X}{\|r\|^7} - \frac{3X}{\|r\|^5} \\ \frac{15Z^2 Y}{\|r\|^7} - \frac{3Y}{\|r\|^5} \\ \frac{15Z^3}{\|r\|^7} - \frac{9Z}{\|r\|^5} \end{bmatrix} \quad (32)$$

که در این رابطه،  $J_2 = 0.0010826$  و  $R_e = 6378.137 \text{km}$  شعاع میانگین استوایی زمین است. این اغتشاش را می‌توان به‌سادگی با تبدیل مختصات به دستگاه متحرک منتقل کرد. المان‌های مداری اولیه فضاییما رهنمای عبارتند از [۸]:

$$a = 7171 \text{km} \quad e = 0 \quad \Omega = i = \omega = M = 0 \text{rad}. \quad (33)$$

مسیر مطلوب نسبی پیرو یک آرایش دایروی به شعاع ۱ کیلومتر در صفحه  $z = \sqrt{3}x$  است [۱۶]. در این آرایش، ماهواره پیرو در یک مسیر دایروی به دور رهبر می‌چرخد و فاصله آن تا این ماهواره همواره ثابت است. دوره این چرخش با دوره حرکت ماهواره

ماتریس‌های  $Q$  و  $R$  به ترتیب براساس بهبود عملکرد کنترلر در تعقیب مسیر و کاهش تلاش کنترلی انتخاب می‌شوند؛ به طوری که اگر کاهش خطای تعقیب بیشتر اهمیت داشته باشد، المان‌های  $Q$  باید بزرگ‌تر انتخاب شوند و اگر کاهش تلاش کنترلی بیشتر مورد توجه است، باید المان‌های  $R$  را بیشتر اختیار کرد.

برای سیستم (۲۰) و بدون لحاظ ترم اغتشاش و شاخص عملکرد (۲۱)، براساس تئوری کنترل بهینه، قانون کنترل فیدبک بهینه عبارت است از [۱۵]:

$$u_{f^*}(t) = -R^{-1}B^T P e(t) \quad (22)$$

که در این رابطه  $P$  جواب معادله ماتریسی ریکاتی زیر است:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (23)$$

بنابراین دینامیک حلقه بسته سیستم برای تعقیب مسیر مطلوب به صورت زیر می‌شود:

$$\dot{e}(t) = (A - BR^{-1}B^T P)e(t) \quad (24)$$

اگر اغتشاش بر روی سیستم وجود نداشته باشد، قانون کنترل بهینه (۲۲) می‌تواند سیستم را به نحو مجانبی پایدار کند و عملکرد مؤثری در تعقیب مسیر مطلوب داشته باشد. اما به دلیل وجود اغتشاش خارجی، مسیر حرکت سیستم از مسیر مطلوب منحرف می‌شود و حتی ممکن است ناپایدار شود. بنابراین کنترلر مود لغزشی انتگرالی برای مقاوم‌سازی نتیجه کنترل بهینه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با توجه به رابطه (۲۴)، سطح لغزش انتگرالی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$s(e, t) = G[e - e(0)] - G \int_0^t (A - BR^{-1}B^T P)e(\tau) d\tau = 0 \quad (25)$$

که در این رابطه،  $G \in R^{3 \times 6}$  است و به گونه‌ای انتخاب می‌شود که  $GB$  غیرتکین باشد و  $e(0)$  بردار خطای اولیه است. همان‌طور که از رابطه (۲۵) برمی‌آید، در لحظه اول حالت سیستم بر روی سطح لغزش قرار دارد و فاز رسیدن حالت سیستم به سطح لغزش حذف شده است. برای داشتن مود لغزش و تعیین ورودی معادل داریم:

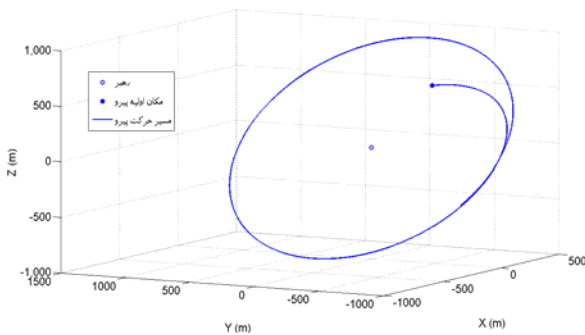
$$\dot{s}(e, t) = G(Ae + Bu) - G(A - BR^{-1}B^T P)e = 0 \quad (26)$$

بنابراین ورودی کنترلی معادل عبارت است از:

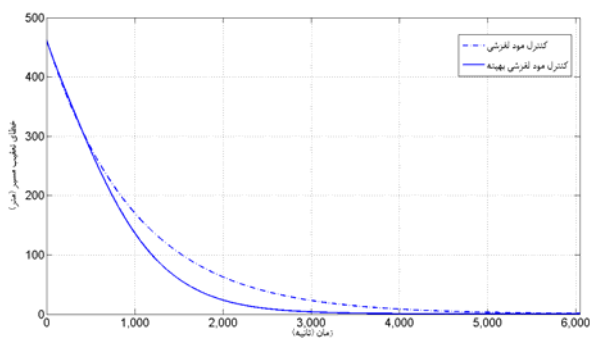
$$u_{f_{eq}}(t) = -R^{-1}B^T P e(t) \quad (27)$$

که همان قانون کنترل بهینه (۲۲) است. بنابراین توسط این کنترلر، لغزش بر روی سطح لغزش بهینه اتفاق می‌افتد. برای مقاوم‌سازی سیستم در مقابل عدم قطعیت و اغتشاش، ورودی کنترلی به صورت زیر تکمیل می‌شود:

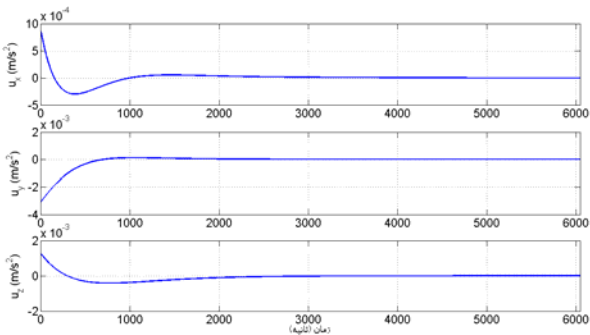
$$u_f(t) = -R^{-1}B^T P e(t) - (GB)^{-1} \eta \text{sgn}(s) \quad (28)$$



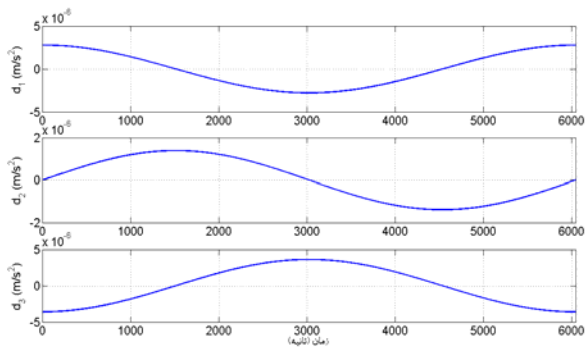
شکل ۲- مسیر ۳ بعدی حرکت پیرو توسط کنترلر مود لغزشی بهینه



شکل ۳- خطای تعقیب مسیر توسط کنترلرهای مود لغزشی و مود لغزشی بهینه



شکل ۴- ورودی‌های کنترلی فضای پیرو توسط کنترلر مود لغزشی بهینه



شکل ۵- مدل اغتشاش خارجی مؤثر بر فضای پیرو

رهبر به دور زمین، یکسان است که در اینجا برابر با  $T \approx 6043s$  است. این آرایش دو ویژگی قابل توجه دارد، یکی اینکه فاصله فضای پیرو نسبت به رهبر همواره مقداری ثابت است و دیگر آنکه پیرو یک حرکت نسبی دویبعی در دستگاه مربوطه دارد. مکان اولیه فضای پیرو نسبت به رهبر در دستگاه متحرک نیز به صورت زیر لحاظ می‌شود:

$$(x_0 \ y_0 \ z_0) = (300 \ -200 \ 500)m \quad (34)$$

پارامترهای کنترلر مود لغزشی بر طبق نتایج شبیه‌سازی عددی گسترده برای داشتن حداقل هزینه سوخت به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۸ و ۶]:

$$\begin{aligned} \lambda &= (10^{-3}) \times \text{diag}(1 \ 1 \ 1) \\ k &= 0.96 \times \text{diag}(1 \ 1 \ 1) \\ \varepsilon &= 10 \end{aligned} \quad (35)$$

برای کنترلر مود لغزشی بهینه نیز به منظور تعیین ماتریس‌های وزنی  $Q$  و  $R$  باید یک سازش بین کاهش تلاش کنترلی مصرفی و عملکرد کنترلر در تعقیب مسیر مطلوب ایجاد کرد. از طریق شبیه‌سازی عددی، این دو ماتریس به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$Q = \text{diag}(0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 10^5 \ 10^5 \ 10^5) \quad (36)$$

$$R = (10^{10}) \times \text{diag}(1 \ 1 \ 1) \quad (37)$$

ضرایب این کنترلر و پهنای لایه مرزی آن نیز عبارتند از:

$$\begin{aligned} \eta &= (5 \times 10^{-4}) \times \text{diag}(1 \ 1 \ 1) \\ \varphi &= 0.001 \end{aligned} \quad (38)$$

شکل (۲) یک تصویر ۳ بعدی از حرکت پیرو نسبت به رهبر را با استفاده از کنترلر مود لغزشی بهینه نشان می‌دهد. عملکرد کنترلرهای مود لغزشی (۱۴) و مود لغزشی بهینه (۳۱) در کاهش خطای تعقیب مسیر مطلوب در طی یک دوره، در شکل (۳) نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است کنترلر مود لغزشی بهینه مسیر مطلوب را سریع‌تر و دقیق‌تر از کنترلر مود لغزشی در حضور اغتشاش خارجی دنبال می‌کند. ورودی‌های کنترلی مربوط به کنترلر مود لغزشی بهینه نیز در شکل (۴) آمده است. شکل (۵) مدل اغتشاش نسبی وارده به فضای پیرو را نشان می‌دهد.

- [3] Carter, T., "Clohessy-Wiltshire Equations Modified to Include Quadratic Drag," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 6, 2002, pp. 1058-1063.
- [4] Schaub, H. and Alfriend, K. T., "J2-Invariant Relative Orbits for Spacecraft Formations," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 79, Issue 2, 2001, pp. 77-95.
- [5] Schaub, H. and Junkins, J. L., *Analytical Mechanics of Space Systems*, AIAA Education Series, 2003.
- [6] Yeh, H. H., Nelson, E., and Sparks, A., "Nonlinear Tracking Control for Satellite Formations," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 2, 2002, pp. 376-386.
- [7] Massey, T. and Shtessel, Y., "Continuous Traditional and High-order Sliding Modes for Satellite Formation Control," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 4, 2005, pp. 826-831.
- [8] Hui, L., Junfeng, L. and Baoying, H., "Sliding Mode Control for Low-thrust Earth-Orbiting Spacecraft Formation Maneuvering," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 10, No. 7, 2006, pp. 636-643.
- [9] Hui, L. and Li, J., "Terminal Sliding Mode Control for Spacecraft Formation Flying," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 45, No. 3, 2009, pp. 835-846.
- [10] Wang, Z. and Zhang, Y., "Design and Verification of a Robust Formation Keeping Controller," *Acta Astronautica*, Vol. 61, Issues 7-8, 2007, pp.565-574.
- [11] Bo, X. and Gao Y., "Sliding Mode Control of Space Robot Formation Flying," *Proceedings of the 4th International Conference on Autonomous Robots and Agents, Wellington, New Zealand, Feb, 2009*, pp. 561-565.
- [12] Bae, J. and Kim, Y., "Adaptive Controller Design for Spacecraft Formation Flying Using Sliding Mode Controller and Neural Networks," *Franklin Institute*, Vol. 349, Issue 2, 2012, pp. 578-603.
- [13] Utkin, V. and Shi, J., "Integral Sliding Mode in Systems Operating under Uncertainty Conditions," *Proceedings of 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Japan, December, 1996, pp. 4591-4596.
- [14] Slotine, J. E. and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [15] Anderson, B D O. and Moore, J B., *Optimal Control Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall, 1989.
- [16] Sabol, C., Burns, R. and Mclaughlin, C A., "Satellite Formation Flying Design and Evolution," *Spacecraft and Rockets*, Vol. 38, No. 2, 2001, pp. 270-278.

در جدول (۱) عملکرد دو کنترلر مذکور در پایان یک دوره با هم مقایسه شده است. در این جدول  $\|e\|$  خطای تعقیب و  $\Delta V$  هزینه سوخت بوده و از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\Delta V = \int_0^t (|u_x| + |u_y| + |u_z|) dt \quad (39)$$

جدول ۱- مقایسه عملکرد دو کنترلر در پایان یک دوره

کنترلر	$\ e\ $ (m)	$\Delta V$ (m/s)
مود لغزشی	۱/۱۱	۲/۳۵۸
مود لغزشی بهینه	۰/۰۶	۱/۸۲۵

همان‌طور که از نتایج جدول مشخص است، کنترلر مود لغزشی بهینه پیشنهادی نسبت به کنترلر مود لغزشی، عملکرد بهتری در تعقیب مسیر مطلوب و میزان سوخت مصرفی از خود نشان می‌دهد و جهت کنترل آرایش پیشنهاد می‌شود.

### جمع‌بندی

در این مقاله، مسئله کنترل حرکت آرایشی فضاییما مدنظر قرار گرفت و یک کنترلر مود لغزشی بهینه برای کنترل حرکت نسبی طراحی شد. این کنترلر براساس مدل خطی حرکت نسبی در مدار دایروی طراحی و برای سیستم غیرخطی و تحت اغتشاش خارجی اجرا شد. ابتدا کنترلر بهینه به روش خطی مرتبه دو طراحی و سپس با تکنیک مود لغزشی انتگرالی مقاوم شد. پایداری سیستم حلقه بسته براساس روش دوم لیپانوف اثبات شد و اغتشاش حاصل از عدم کرویت زمین به‌عنوان اغتشاش غالب لحاظ شد. نتایج اجرای این کنترلر در تعقیب آرایش مطلوب با کنترلر مود لغزشی معمولی مقایسه شد. نتایج شبیه‌سازی، عملکرد بهینه و مقاوم کنترلر پیشنهادی را در تعقیب مسیر و میزان سوخت مصرفی نشان می‌دهد.

### مراجع

- [1] Kristiansen, R. and Nicklasson, P. J., "Spacecraft Formation Flying: a Review and New Results on State Feedback Control," *Acta Astronautica*, Vol. 65, Issues 11-12, 2009, pp. 1537-1552.
- [2] Alfriend, K. T. and et al., *Spacecraft Formation Flying Dynamics, Control and Navigation*, First Edition, Elsevier, Astrodynamics Series, 2010.